Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет

ФІЗИКА

Курс лекцій
для здобувачів першого (бакалаврського)
рівня вищої освіти денної та заочної
форм навчання

Луцьк 2026

УДК 239.2
Ф 19

До друку
Голова вченої ради факультету транспорту
та механічної інженерії _____ І. МУРОВАНИЙ

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозиторій ЛНТУ
Директор бібліотеки _____ Н. ПОЛІЩУК

Затверджено вченою радою факультету транспорту та механічної інженерії, протокол № ___ від «___»_____2026 р.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри фізики та вищої математики протокол № ___ від «___»_____2026 р.

Завідувач кафедри фізики та вищої математики _____ Д. ЗАХАРЧУК

Укладачі: _____ Ю. КОВАЛЬ, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та вищої математики ЛНТУ
_____ Л. ЯЩИНСЬКИЙ, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та вищої математики ЛНТУ

Рецензент: _____ Д. ЗАХАРЧУК, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри фізики та вищої математики ЛНТУ

Відповідальний за випуск: _____ Д. ЗАХАРЧУК, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри фізики та вищої математики ЛНТУ

Ф 19 **Фізика** [Текст] : курс лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання / уклад. Ю.В. Коваль, Л.В. Ящинський. – Луцьк : ЛНТУ, 2026. – 228 с.

Методичне видання складене відповідно до діючої програми курсу «Фізика». Призначене для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання.

© Коваль Ю.В., Ящинський Л.В., 2026

ЗМІСТ

Вступ	3
Механіка	5
Молекулярна фізика і термодинаміка	56
Електрика	116
Електромагнетизм	138
Коливання та хвилі	177
Оптика	196
Фізика твердого тіла	208
Використана література	227

Вступ

Фізика – це наука про найбільш загальні властивості і форми руху матерії. У зв´язку з цим, предметом фізики є вивчення найпростіших і водночас найзагальніших форм руху матерії. Під матерією розуміють об’єктивну реальність, що існує незалежно від людської свідомості і може відображатись нею. Процес пізнання в фізиці починається або із спостережень явищ в природних умовах, або зі спеціально поставлених дослідів – експериментів. Отже, першим кроком в пізнанні фізичних процесів є експеримент.

На основі накопиченого експериментального матеріалу будуються попередні наукові передбачення про механізми і взаємозв’язок явищ, тобто створюється гіпотеза. Гіпотеза є другим кроком в пізнанні фізичних процесів.

Перевірені на практиці і обґрунтовані теоретично гіпотези, що можуть передбачити причини виникнення і механізми існування нових явищ, входять в фізичну науку в якості фізичних теорій. Фізична теорія є третім кроком в пізнанні фізичних процесів.

За останнє століття фізика розвивалась і розвивається такими темпами і досягла таких результатів, яких не досягала жодна з природничих наук за всю історію свого існування.

1. В кінці XIX, на початку XX ст. створено теорію електро-магнітного поля, відкрито і вивчено основні властивості електромагнітних хвиль. Почався бурхливий розвиток радіотехніки.
2. На початку XX ст. створено теорію відносності, яка зуміла описати рух із швидкостями, близькими до швидкості світла. Це послужило поштовхом для розрахунку і побудови прискорювачів заряджених частинок, що застосовуються в ядерній техніці.
3. В 20-тих роках XX ст. виникла і швидко розвинулась квантова механіка, що дозволило глибоко проникнути у внутрішню будову ядер та електронних оболонок атомів. Це привело до використання ядерної енергії як в мирних, так і у військових цілях.
4. Штучна радіоактивність, що була продовженням розвитку квантової механіки, сьогодні широко застосовується в різних галузях виробництва, в біології і медицині (опромінення).
5. Швидко розвивається і фізика напівпровідників, що відразу дістала широке застосування у виробництві напівпровідникових приладів для побуту, науки і техніки.

Тобто фізика є тим фундаментом, на якому виросли нові галузі техніки: радіотехніка, електронна і обчислювальна техніка, приладобудування, атомна і ядерна техніка, лазерна техніка (нелінійна оптика).

В свою чергу, техніка дуже впливає на розвиток фізики. Адже будь-яка технічна проблема потребує в першу чергу наукових розрахунків, що підштовхує науку (в тому числі і фізику) до нових відкриттів і створення нових теорій.

РОЗДІЛ І. Механіка

Тема 1. Кінематика поступального руху

§1. Механічний рух і основні поняття, що його описують

Механічним рухом називається зміна взаємного розміщення тіл, або їх частин одна відносно одної, в просторі з бігом часу.

Найпростішим прикладом механічного руху є рух матеріальної точки.

Матеріальною точкою називають таке тіло, розмірами якого за даних умов можна знехтувати. Поняття матеріальної точки являє собою абстрагування від реальних властивостей розглядуваних тіл і використовується для спрощення вивчення руху цих тіл в механіці.

Щоб визначити положення матеріальної точки в просторі в даний момент часу необхідно задати відстань від неї до певного заданого нерухомого тіла і напрям від заданого тіла до розглядуваної точки.

Таке задане тіло називають **початком відліку**.

Для визначення напряму до матеріальної точки використовують **осі координат**.

Початок відліку і осі координат утворюють ***систему відліку***.

Найпростішою системою відліку є декартова система, яка складається з початку відліку – точки О і трьох взаємно перпендикулярних осей ОХ, ОУ, OZ.

Під час руху матеріальної точки в декартовій системі, її координати (а значить і відстань з початку координат до точки) постійно змінюються. Тому в загальному вигляді рух задається системою трьох незалежних рівнянь:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t). \end{cases}$$

Ці рівняння описують положення точки в кожен момент часу. Наприклад (рис. 1), у момент часу t_1 точка М матиме координати $M(x_1, y_1, z_1)$.

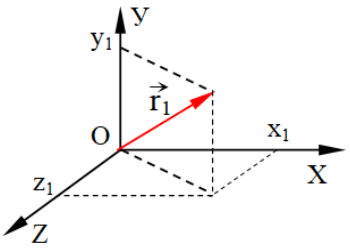


Рис. 1.

§2. Елементи кінематики матеріальної точки

Кінематикою називається розділ механіки, що вивчає рух тіл не враховуючи причин, що приводять дані тіла в рух.

Розглянемо основні елементи кінематики матеріальної точки.

1. Траєкторія – це уявна лінія, яку описує матеріальна точка при своєму русі в просторі.

Залежно від форми траєкторії поділяють на **прямолінійні і криволінійні**.

Замість трьох рівнянь, що описують положення точки при її русі, користуються одним векторним рівнянням:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

В момент часу t_1 $\vec{r} = \vec{r}_1$, де $\vec{r}_1$ – радіус-вектор, проведений з початку координат до точки М в момент часу t_1.

2. Радіус-вектором називають напрямлений відрізок, проведе - ний з початку відліку до розглядуваної точки (x_1, y_1, z_1).

За напрям радіус-вектора береться напрям від початку відліку до розглядуваної точки.

Часто радіус-вектор записують так: $\vec{r}(x, y, z)$, де x, y, z – координати кінця вектора.

3. Швидкість матеріальної точки

а). Середня швидкість руху

Зобразимо відрізок плоскої траєкторії точки М (рис. 2).

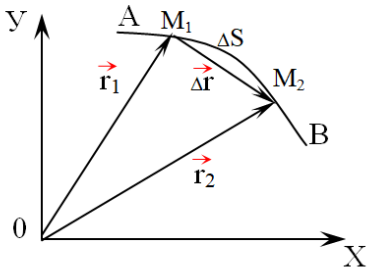


Рис. 2.

В момент часу t_1 точка М займає положення M_1, яке характеризується радіус-вектором $\vec{r}_1$.

Через проміжок часу $\triangle t = t_2 - t_1$ точка займає положення M_2, що характеризується радіус-вектором $\vec{r}_2$.

Дуга $M_1M_2 = \triangle S$ являє собою шлях пройдений точкою за час $\triangle t$.

Отже, **шляхом** називають відстань пройдену тілом вздовж його траєкторії за певний проміжок часу $\triangle t$.

Вектор $\triangle \vec{r}$ проведений з кінця вектора $\vec{r}_1$ до кінця вектора $\vec{r}_2$ називається **вектором переміщення** матеріальної точки за час $\triangle t$.

Вектор $\Delta \vec{r}$ являє собою по суті векторну різницю векторів $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$:

$$\triangle \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Як видно з рис.2, якщо б траєкторія описувала прямолінійний рух, абсолютна величина вектора переміщення була б рівна шляху, який пройдено точкою:

$$\left|\triangle \vec{r}\right| = \triangle S .$$

В загальному ж випадку $|\triangle\vec{r}| \neq \triangle S$. Але різниця між ними тим менша, чим менше значення вектора переміщення $\Delta\vec{r}$.

Очевидно, що при будь-якому криволінійному русі при

$$\triangle\vec{r} \to 0 \quad |\triangle\vec{r}| = \triangle S .$$

Величина, що характеризує зміну в часі положення точки, визначається відношенням

$$\frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t} = \vec{v}_{ср.}$$

і називається середньою швидкістю руху точки за час $\triangle t$.

Середня швидкість руху чисельно рівна швидкості такого рівномірного і прямолінійного руху, при якому точка прийшла б з положення M_1 в M_2 за той же проміжок часу $\triangle t$, за який відбувся її істинний рух вздовж дуги M_1M_2.

Вектор $\vec{v}_{ср}$ має такий же напрям, як і вектор $\triangle\vec{r}$.

б). Миттєва швидкість руху

При умові $\triangle t \to 0$ з рівняння для середньої швидкості одержимо вираз для миттєвої швидкості в точці M_1:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

тобто вектор миттєвої швидкості

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

де $d\vec{r}$ - безконечно малий вектор переміщення,

dt - безконечно малий проміжок часу.

Вектор миттєвої швидкості співнаправлений з вектором $d\vec{r}$ і в точці M_1 направлений по дотичній до траєкторії.

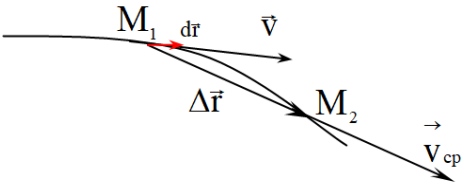


Рис.3.

Необхідно розрізняти $\triangle\vec{r}$ і $d\vec{r}$: $d\vec{r}$ з'єднує дві безконечно близькі точки, що приводить його напрям до напряму дотичної в точці M_1, в той час як $\triangle\vec{r}$ є вектором переміщення з точки M_1 в точку M_2.

При $\triangle t \to 0$, $\triangle\vec{r}$ також прямує до нуля, тому **абсолютне значення вектора миттєвої швидкості**:

$$\left|\vec{v}\right| = v = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\left|\triangle\vec{r}\right|}{\triangle t} = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle S}{\triangle t} = \frac{dS}{dt},$$

тобто

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

Величина миттєвої швидкості чисельно рівна відношенню безконечно малого проміжку шляху dS до безмежно малого проміжку часу dt.

В СІ розмірність миттєвої швидкості $[v] = 1\frac{м}{с}$.

З математичної точки зору миттєва швидкість (або просто швидкість) рівна повному диференціалу від шляху по часу, або інакше – похідній від шляху.

$$v = \frac{dS}{dt} = S'.$$

4. Нормальне і тангенціальне прискорення

При криволінійному русі вектор швидкості може мінятись як за напрямом, так і за величиною.

Швидкість зміни вектора швидкості характеризується **вектором прискорення** $\vec{a}$.

а). Середнє і миттєве прискорення

Зобразимо траєкторію матеріальної точки і на ній дві безконечно близькі точки M_1 і M_2. Миттєва швидкість в точці M_1— $\vec{v}_1$, в точці M_2 — $\vec{v}_2$.

Знайдемо різницю векторів $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$ (рис. 4).

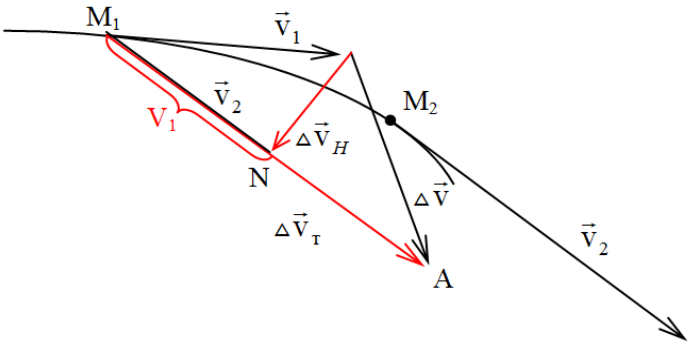


Рис. 4.

Відношення

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_{cp}$$

називається **середнім прискоренням.**

В границі

$$\lim_{M_2 \to M_1} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}\,.$$

Величина

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

називається **вектором миттєвого прискорення**.

б). Складові вектора миттєвого прискорення $\vec{a}$

Відкладемо на відрізку M_1A (рис. 4) відрізок M_1N, чисельно рівний вектору $\vec{v}_1$.

З'єднаємо кінець вектора $\vec{v}_1$ з точкою N. Одержимо вектор $\triangle\vec{v}_H$. Вектор $\overrightarrow{NA}$ позначимо $\triangle\vec{v}_T$. Тоді:

$$\triangle\vec{v} = \triangle\vec{v}_H + \triangle\vec{v}_T .$$

Вектор $\triangle\vec{v}_T$ характеризує зміну швидкості за величиною за час $\triangle t$. Вектор $\triangle\vec{v}_H$ характеризує зміну швидкості за напрямом за той же проміжок часу.

Тому

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\triangle\vec{v}}{\triangle t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\triangle\vec{v}_H}{\triangle t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\triangle\vec{v}_T}{\triangle t} = \vec{a}_H + \vec{a}_T .$$

Вектор $\vec{a}_H$ - співнапрямлений з $\triangle\vec{v}_H$, називається **вектором нормального прискорення** і відповідає за зміну швидкості за напрямом.

$\vec{a}_T$ **- вектор тангенціального прискорення**, співнапрямлений з $\triangle\vec{v}_T$ і відповідає за зміну швидкості за величиною.

в). Тангенціальне прискорення

Числове значення (абсолютне значення) тангенціального прискорення:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = v' = \left(\frac{dS}{dt} \right)' = S''$$

тут v – абсолютне значення миттєвої швидкості в т.M_1.

Напрям вектора $\vec{a}_T$.

При $\triangle t \to 0$, $M_2 \to M_1$, тобто вектор $\vec{v}_2$ і співнапрямлений з ним вектор $\triangle\vec{v}_T$ прямує до напрямку вектора $\vec{v}_1$. Тому в границі при $\triangle t \to 0$ вектор $\vec{a}_T$ є співнапрямленим з вектором $\vec{v}_1$, тобто направлений по дотичній до траєкторії в даній точці M_1.

г). Нормальне прискорення

Знайдемо абсолютне значення величини $\vec{a}_H$.

При $\triangle t \to 0$ дуга M_1M_2 має таку величину, що її завжди можна вважати сегментом якогось кола радіусом R (рис. 5).

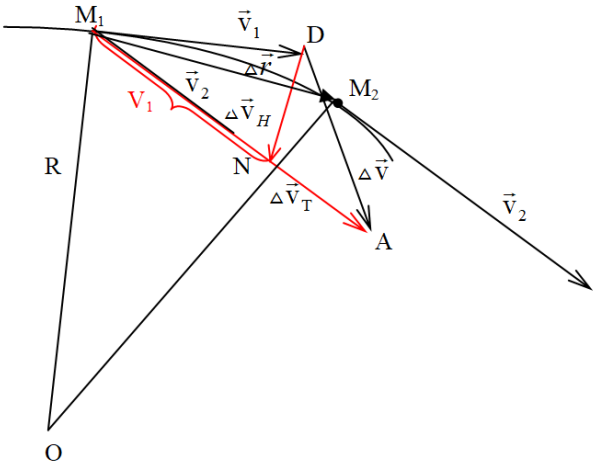


Рис. 5.

Проведемо перпендикуляри до $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ і продовжимо їх до перетину в точці O. Точка O – центр кола радіусом R. Перенесемо вектор $\vec{v}_2$ в точку M_1 і побудуємо вектори $\triangle\vec{v}$, $\triangle\vec{v}_H$ і $\triangle\vec{v}_T$. Проведемо вектор $\triangle\vec{r}$.

$\angle M_1OM_2 = \angle NM_1D$ як кути між взаємно перпендикулярними сторонами.

Тобто, якщо кут між OM_1 і $OM_2 = \triangle\alpha$, то і кут між $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2 = \triangle\alpha$. Одержали два рівнобедрені подібні трикутники ΔM_1OM_2 і ΔDM_1N (за кутом $\triangle\alpha$ при вершині і пропорційними сторонами). З подібності трикутників

$$\frac{|\triangle\vec{v}_H|}{|\triangle\vec{r}|} = \frac{v_1}{R}.$$

Звідси

$$\left|\triangle\vec{\mathrm{v}}_H\right| = \frac{\mathrm{v}_1}{R}\left|\triangle\vec{r}\right|.$$

Тоді

$$a_H = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\left|\triangle\vec{\mathrm{v}}_H\right|}{\triangle t} = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\mathrm{v}_1}{R}\frac{\left|\triangle\vec{r}\right|}{\triangle t} = \frac{\mathrm{v}_1}{R}\frac{dr(M_1)}{dt} = \frac{\mathrm{v}_1}{R}\mathrm{v}_1.$$

Тобто, опустивши індекси, одержимо вираз для абсолютного значення нормального прискорення:

$$a_H = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}}.$$

В граничних умовах, коли $\triangle t \to 0$, кут при вершині рівнобедреного трикутника NM_1D прямує до 0, а кути біля основи прямують до 90^0, тобто в границі $\triangle\vec{\mathrm{v}}_H \perp \vec{\mathrm{v}}_1$, а отже і вектор швидкості зміни швидкості за напрямом $\vec{a}_H \perp \vec{\mathrm{v}}_1$ і направлений до центру кривизни О по радіусу.

д). Абсолютне значення повного прискорення

Якщо вектори $\vec{a}_T$, $\vec{a}_H$ і $\vec{a}$ звести в одну точку, то одержимо рисунок для прискорень (рис. 6).

Так, як $\vec{a}_H \parallel \vec{R}$, а $\vec{a}_T \perp \vec{R}$, то трикутник M_1NA є прямокутний, тому для знаходження абсолютного значення величини повного

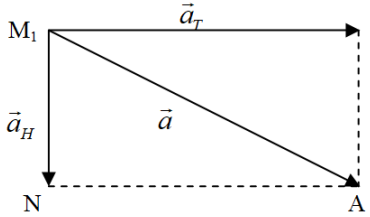


Рис. 6.

прискорення використаємо теорему Піфагора

$$a^2 = a_H{}^2 + a_T{}^2,$$

або

$$a^2 = \left(\frac{\mathrm{v}^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right)^2.$$

5. Кривина траєкторії

З геометрії відомо, що величина радіуса R зв'язана з дугою, на яку він опирається, співвідношенням

$$R \approx \frac{\triangle S}{\triangle \alpha},$$

де $\triangle S$ - довжина дуги, $\triangle \alpha$ - величина кута, що відповідає даній дузі.

Коли $\triangle \alpha \to 0$ формула **радіуса кривини траєкторії** матиме вигляд:

$$R = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\triangle S}{\triangle \alpha}.$$

Величина, обернена до радіуса кривини:

$$k = \frac{1}{R} = \lim_{\triangle S \to 0} \frac{\triangle \alpha}{\triangle S},$$

називається **коефіцієнтом кривини траєкторії**.

Тема 2. Динаміка поступального руху матеріальної точки і твердого тіла

§1. Основні поняття динаміки поступального руху матеріальної точки і твердого тіла

Розділ механіки, який вивчає рух матеріальних тіл разом з фізичними причинами, які викликають цей рух, називається **динамікою**.

Як ми вже знаємо, **матеріальна точка** – це фізичне тіло, розмірами якого, за даних умов, можна знехтувати.

Відомо, що всяке фізичне тіло має розміри і форму, які можуть змінюватись внаслідок тих чи інших причин.

У тих випадках, коли пружні властивості тіла не впливають на його рух, для спрощення фізичних задач, вводять поняття «абсолютно твердого тіла».

Абсолютно твердим називають тіло, відстань між будь-якими двома точками якого залишається постійною, тобто форма і розміри такого тіла не змінюються, при всякій дії на нього сторонніх тіл.

Поступальним рухом абсолютно твердого тіла називається такий рух, при якому будь-яка пряма, що жорстко зв'язана з тілом, при переміщенні останнього залишається паралельною сама собі.

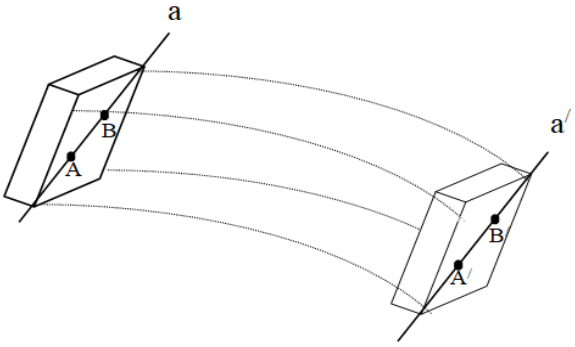


Рис. 7.

Інакше кажучи, при поступальному русі тіла всі його точки описують однакові траєкторії в просторі.

Прикладом поступального руху є: рух вагона по залізниці, рух кабіни чортового колеса, яка вільно закріплена на його ободі.

§2. Перший закон Ньютона і поняття інерціальної системи відліку

1. І закон Ньютона

І закон Ньютона формулюється так: всяке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, поки дія з боку інших тіл не змусить його змінити цей стан.

І закон Ньютона називається ще **законом інерції.**

Властивість тіл зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху без дії на них інших тіл називають **інертністю**.

Знайдемо, в яких системах тіло, на яке не діють інші тіла, буде зберігати стан спокою чи рівномірного прямолінійного руху.

2. Інерціальна і неінерціальна системи відліку

Нехай у вагоні, що рухається прямолінійно і рівномірно, знаходиться у спокої тіло (Т).

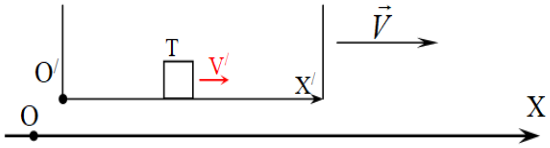


Рис. 8.

Для спостерігача у рухомому вагоні (в системі відліку $O'X'$) тіло знаходиться у стані спокою. Для спостерігача в нерухомій системі відліку OX тіло перебуває у прямолінійному і рівномірному русі.

Тобто в обох системах виконується І закон Ньютона. Такі системи, в яких І закон Ньютона виконується повністю, називають інерціальними системами системами відліку.

Якщо в системі відліку на тіло не діють інші тіла або сили, і тіло рухається відносно даної системи рівномірно і прямолінійно (тобто за інерцією) або перебуває у стані спокою, то таку систему називають **інерціальною.**

Нехай тепер вагон різко гальмує, тобто починає рухатись з прискоренням (рівносповільнено).

Спостерігач в точці O' (тобто у вагоні) помітить, що тіло без причини почало ковзати вздовж $O'X'$ (як люди в тролейбусі, що різко гальмує).

Спостерігач же в т. O буде бачити подальший рівномірний прямолінійний рух тіла в напрямі OX, поки не стане відчутною дія сили тертя тіла в підлогу вагона.

Системи, в яких не виконується І закон Ньютона, називаються неінерціальними (в нашому випадку вагон, що гальмує).

Системи, що рухаються з прискоренням відносно інерціальної, називають. **неінерціальними системами відліку.**

3. Принцип відносності Галілея

Повернемось до вагона, що рухається прямолінійно і рівномірно відносно системи, що зв'язана з Землею.

Поставимо собі задачу: визначити, чи рухається вагон прямолінійно і рівномірно, чи знаходиться в стані спокою відносно системи OX.

Проведемо дослідження періоду і орієнтації площини коливань математичного маятника, закріпленого до стелі вагону.

Математичним маятником називається точкове тіло, що закріплене на невагомій нерозтяжній нитці і виконує коливальні рухи під дією сили ваги.

Результати таких досліджень показують, що як в $O'X'$, так і в OX період коливань і орієнтація площини коливань відносно осей є однаковими і незмінними.

Подібні експерименти привели Галілея до формулювання **принципу відносності**: ніякі механічні досліди і спостереження, що проводяться всередині інерціальної системи, не дають можливості визначити: рухається дана система прямолінійно і рівномірно чи перебуває в спокої відносно іншої інерціальної системи.

На закінчення зауважимо, що «найближчою» інерціальною системою є **геліоцентрична система**: початок відліку знаходиться на Сонці, а осі направлені на відповідні зорі.

В багатьох дослідженнях Землю також можна вважати інерціальною системою, якщо на результати цих дослідів не

впливає добове і річне обертання Землі (обертальний рух – це рух з прискоренням).

§3. Другий закон Ньютона

1. II закон Ньютона

Мірою механічної дії одного тіла чи системи тіл на інше тіло є векторна величина, яка називається **силою.**

Механічна взаємодія може здійснюватись безпосередньо через контакт між тілами (сила тертя), або за допомогою відповідних полів (гравітаційне, електромагнітне).

Як ми вже знаємо, здатність фізичних тіл протистояти зміні свого стану під впливом інших тіл називається **інертністю**.

Кількісною характеристикою інертності є **маса тіла**. Маса тіла є величина **адитивна**, тобто маса фізичного тіла рівна масі частин, з яких воно складається.

Дія сили на тіло масою m викликає зміну його швидкості, тобто появу прискорення. Чим більша сила – тим більше прискорення. Чим більша маса тіла, при сталій силі, тим менше прискорення одержує тіло. Тобто:

$$\vec{a} \sim \vec{F}\ ,\ \vec{a} \sim \frac{1}{m}.$$

Узагальнюючи сказане, можна записати

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Одержали математичний запис II закону Ньютона або інакше **основний закон динаміки матеріальної точки.**

Його формулювання: прискорення матеріальної точки прямо пропорційне прикладеній до неї силі, співпадає з силою за напрямом і обернено пропорційне масі матеріальної точки.

2. Імпульс сили

Відомо, що вектор прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}.$$

Тоді, відповідно до другого закону Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

а отже

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}.$$

Маса не залежить від часу, тому внесемо її під знак диференціалу:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{\mathrm{v}}\right).$$

Величина $m\vec{\mathrm{v}} = \vec{P}$ - імпульс матеріальної точки (кількість руху), тому

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Тобто: швидкість зміни імпульсу матеріальної точки рівна діючій на неї силі.

Якщо на матеріальну точку (чи в загальному на тіло) діє кілька сил одночасно, то остання формула запишеться у вигляді

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

тут $d\vec{P}$ - повний приріст кількості руху тіла чи матеріальної точки.

Останні два рівняння називають рівняннями руху.
Перепишемо рівняння руху у такому вигляді:

$$\vec{F}dt = d\vec{P} = md\vec{\mathrm{v}}$$

Величина, що рівна добутку сили на час її дії, називається ***імпульсом сили***.

Відповідно до останнього запису **зміна кількості руху тіла рівна одержаному ним імпульсу і має однаковий з ним напрям.**

§4. Третій закон Ньютона

Кількісний опис механічної взаємодії між тілами дає третій закон Ньютона: всяка дія тіл одне на одне має характер

взаємодії: якщо тіло 1 діє на тіло 2 з силою $\vec{F}_{21}$, то тіло 2 діє на тіло 1 з силою $\vec{F}_{12}$, причому

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Інакше: **сили, з якими тіла діють одне на одне, рівні за величиною і протилежні за напрямом**.

§5. Закон збереження імпульсу механічної системи

Закони Ньютона дозволяють перейти від динаміки точки до динаміки будь-якої механічної системи. Нехай механічна система складається з n точок.

Зовнішніми тілами будемо називати всі тіла, що не входять в дану систему.

Зовнішніми силами будуть ті сили, які діють на дану систему з боку зовнішніх тіл.

Сили взаємодії між тілами системи є **внутрішніми силами.**

Для кожної з n точок системи запишемо рівняння руху :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(m_1\bar{V}_1\right) == \bar{F}_{12} + \bar{F}_{13} + \bar{F}_{14} + ... + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_{1зовн.} \\ \dfrac{d}{dt}(m_2\vec{V}_2) = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} + ... + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_{2зовн.} \\ ..... \\ \dfrac{d}{dt}(m_n\vec{V}_n) = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \vec{F}_{n3} + ... + \vec{F}_{n,n-1} + \vec{F}_{nзовн.} \end{cases}$$

В даній системі рівнянь $\vec{F}_{nm}$ - сила, що діє з боку m-ного тіла на n-не.

1). Якщо система **ізольована**, тобто така, що дія зовнішніх сил на неї виключається, то:

а) $\vec{F}_{1зовн} = 0, ..., \vec{F}_{nзовн} = 0$;

б) Враховуючи, що за ІІІ законом Ньютона $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}$,… знайдемо сумарний імпульс системи. Для цього почленно додамо рівняння руху нашої системи. Одержимо:

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i) = 0,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = const$$

Отримали закон збереження імпульсу ізольованої системи:

Сумарна кількість руху ізольованої системи є величина постійна.

2). Якщо система неізольована, то

$$\vec{F}_{1зовн} + \vec{F}_{2зовн} + ... + \vec{F}_{nзовн} = \vec{F}_{зовн}.$$

Тоді:

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_{зовн},$$

або

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{зовн}$$

Отримали закон зміни імпульсу механічної системи: **зміна імпульсу механічної системи за час dt рівна сумарному вектору зовнішніх сил, що діють на систему протягом цього часу.**

§6. Теорема про рух центра мас механічної системи

Для характеристики руху системи матеріальних точок вводять поняття центра мас системи.

Центром мас (центром інерції) системи матеріальних точок називається точка С, радіус-вектор якої рівний

відношенню суми добутків мас всіх точок системи на їх радіус-вектори до маси всієї системи:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i ,$$

де

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Швидкість руху центра мас системи визначимо так:

$$\vec{\mathrm{v}}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} .$$

Тоді

$$\vec{\mathrm{v}}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i .$$

Враховуючи, що

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \vec{P} ,$$

остаточно отримаємо

$$\vec{\mathrm{v}}_c = \frac{\vec{P}}{m} ,$$

де m - маса системи матеріальних точок.

Перепишемо останнє рівняння у вигляді:

$$\vec{P} = m\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{c} .$$

Продиференціюємо даний вираз по часу:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{\mathrm{v}}_c) .$$

Відповідно до закону зміни імпульсу механічної системи:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{зовн} ,$$

попередній вираз запишемо:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}_c) = \vec{F}_{зовн}.$$

Отже, **центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої рівна масі всієї системи і на яку діє зовнішня сила, що дорівнює рівнодійній всіх зовнішніх сил, що діють на дану систему** (теорема про рух центра мас)**.**

Зауважимо: внутрішні сили взаємодії частин системи між собою можуть викликати зміни швидкостей цих частин системи, але не можуть вплинути на сумарний імпульс системи, чи швидкість її центра мас.

Центр мас системи співпадає з центром ваги системи в однорідному полі тяжіння.

Центром ваги називають точку, до якої прикладають рівнодійну всіх сил, що діють на частини системи в однорідному полі тяжіння.

Розмірність сили в СІ:

$$[F] = 1кг \cdot 1\frac{м}{с^2} = 1\frac{кг \cdot м}{с^2} = 1Н.$$

Розмірність імпульсу:

$$[P] = 1кг \cdot 1\frac{м}{с} = 1кг \cdot \frac{м \cdot с}{с \cdot с} = 1Н \cdot с.$$

Тема 3. Кінематика обертального руху

§1. Основні поняття кінематики обертального руху

Обертальним рухом матеріальної точки навколо нерухомої осі називають такий рух, при якому траєкторією є коло, що знаходиться в площині перпендикулярній до осі, а центр його лежить на осі обертання.

Обертальним рухом абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі називають такий рух, при якому всі точки тіла рухаються по концентричних (центри яких лежать на одній осі)

колах відповідно до правила для обертального руху матеріальної точки.

Нехай довільне тверде тіло T обертається навколо осі O, що перпендикулярна до площини рисунка (рис.1). Виберемо на даному тілі точку M. При обертанні ця точка буде описувати навколо осі O коло радіусом r.

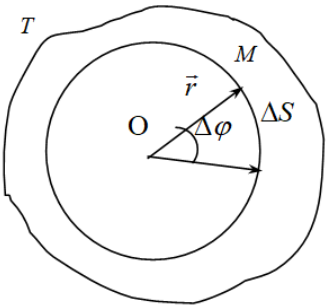


Рис. 1.

За певний час радіус повернеться відносно початкового положення на кут $\Delta\varphi$.

За додатній напрям повороту прийнято напрям правого гвинта (за годинниковою стрілкою).

Зміна кута повороту з часом називається **рівнянням обертального руху твердого тіла**:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Якщо φ вимірювати в радіанах (1 рад – це кут, що відповідає дузі, довжина якої рівна її радіусу, 1 рад ≈ 57°17′), то довжина дуги кола ΔS, яку пройде матеріальна точка M за час Δt, рівна:

$$\Delta S = \Delta\varphi \cdot r.$$

§2. Основні елементи кінематики рівномірного і нерівномірного обертального руху

I. Рівномірний обертальний рух

Мірою переміщення матеріальної точки за малий проміжок часу dt служить **вектор елементарного повороту** $d\vec{\varphi}$**,** який

направлений вздовж осі обертання за правилом правого гвинта (рис.2).

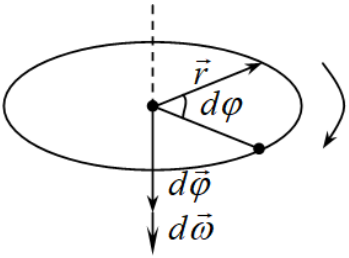


Рис. 2.

Кутова швидкість матеріальної тачки чи тіла це фізична величина, яка визначається відношенням вектора елементарного повороту до тривалості цього повороту:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Напрям вектора $\vec{\omega}$, як і $d\vec{\varphi}$, визначається за правилом правого гвинта вздовж осі О (рис.2). В скалярному вигляді:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Якщо $$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const,$$

то такий рух називається **рівномірним обертальним рухом**.

При рівномірному обертальному русі кутову швидкість визначають за формулою:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Відповідно до цього розмірність кутової швидкості: $[\omega] = 1\,\frac{Рад}{с}$.

Рівномірний обертальний рух можна характеризувати періодом обертання.

Період обертання T – фізична величина, що визначає час, за який тіло робить один повний оберт навколо осі обертання ($[T]=1c$). Якщо у формулі для кутової швидкості прийняти $t = T$, $\varphi = 2\pi$, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

а тому період обертання визначимо таким чином:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Число оборотів за одиницю часу називається **частотою обертання** (ν), яка рівна:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Одиниці вимірювання частоти: $[\nu] = \frac{1}{c} = 1c^{-1} = 1Гц$.

Порівнюючи формули для кутової швидкості та частоти обертання, одержимо вираз для зв'язку цих величин: $\omega = 2\pi\nu$

II. Нерівномірний обертальний рух

При нерівномірному обертальному русі матеріальної точки чи твердого тіла навколо нерухомої осі його кутова швидкість змінюється з часом.

Вектор $\vec{\varepsilon}$, що характеризує швидкість зміни кутової швидкості, називається вектором **кутового прискоренням.**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Якщо тіло обертається прискорюючись, тобто $\frac{d\omega}{dt} > 0$, то вектор $\vec{\varepsilon}$ направлений вздовж осі в ту ж сторону, що і $\vec{\omega}$ (рис.3).

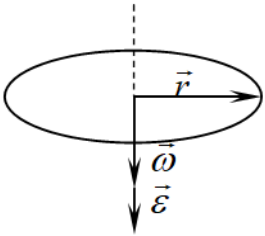


Рис. 3.

При сповільненому русі $\frac{d\omega}{dt} < 0$ і вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ протилежно направлені (рис.4).

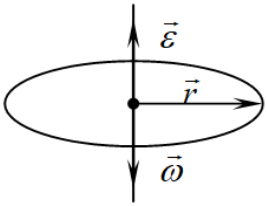


Рис. 4.

Зазначимо, що при нерівномірному обертальному русі вектор $\vec{\omega}$ може змінюватисьне не тільки за величиною, а і за напрямом (при повороті осі обертання).

§3. Зв´язок величин, що характеризують поступальний і обертальний рух

І. Лінійна швидкість матеріальної точки, що виконує обертальний рух

Відомо, що довжина дуги пов’язана з величиною радіуса і кутом його повороту співвідношенням:

$$\Delta S = \Delta\varphi \cdot r,$$

тоді

$$\mathrm{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi \cdot r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot r = \frac{d\varphi}{dr} \cdot r.$$

Отже,

$$\mathrm{v} = \omega \cdot r\,.$$

У векторній формі:

$$\vec{\mathrm{v}} = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right].$$

Напрям вектора $\vec{\mathrm{v}}$ відносно векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$ показано на рисунку 5.

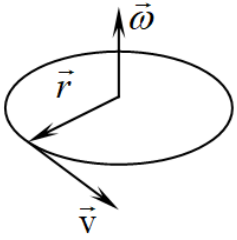


Рис. 5.

II. Нормальне прискорення матеріальної точки, що виконує обертальний рух визначимо таким чином:

$$a_{н} = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r}\,.$$

Отже, в скалярному вигляді:

$$a_{н} = \omega^2 r\,.$$

Вектор $\vec{a}_{н}$ протилежний до $\vec{r}$, тому у векторному представленні

$$\vec{a}_{н} = -\omega^2 \vec{r}\,.$$

III. Тангенціальне прискореня матеріальної точки, що виконує обертальний рух:

$$a_{\mathrm{т}} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r\,.$$

Отже в скалярному представленні:

$$a_{\text{т}} = \varepsilon \cdot r .$$

Для визначення напрямку вектора $\vec{a}_{\text{т}}$ по відношенню до векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{r}$ використовують векторний запис:

$$\vec{a}_{\text{т}} = \left[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}\right].$$

IV. Повне прискорення матеріальної точки, що виконує обертальний рух

Відповідно до формул для $a_{н}$ і $a_{\text{т}}$, враховуючи напрями векторів даних величин, а також використавши співвідношення Піфагора для співвідношення сторін у прямокутному трикутнику, для повного прискорення одержимо вираз:

$$a = \sqrt{a_{н}^2 + a_{\text{т}}^2} = \sqrt{\omega^4 r^2 + \varepsilon^2 r^2} .$$

Отже:

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} .$$

V.Подібність кінематичних формул для поступального і обертального руху

Рівномірний рух	
поступальний	Обертальний
$a = 0;$ $\text{v} = const;$ $s = \text{v} \cdot t .$	$\varepsilon = 0;$ $\omega = const;$ $\varphi = \omega \cdot t .$
Рівноприскорений рух	
поступальний	Обертальний
$a = const;$ $\text{v} = \text{v}_0 \pm at;$ $s = s_0 \pm \text{v}_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$	$\varepsilon = const;$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t;$ $\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$

§4. Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі

Таке перетворення обертальних рухів широко розповсюджене в техніці. Якщо осі обертання паралельні чи перетинаються, то обертання паралельні чи перетинаються, їх обертання можна передати за допомогою зубчастих або фрикційних передач. При цьому зчеплення може бути як зовнішнім (рис. 6, а, в), так і внутрішнім (рис. 6, б, г).

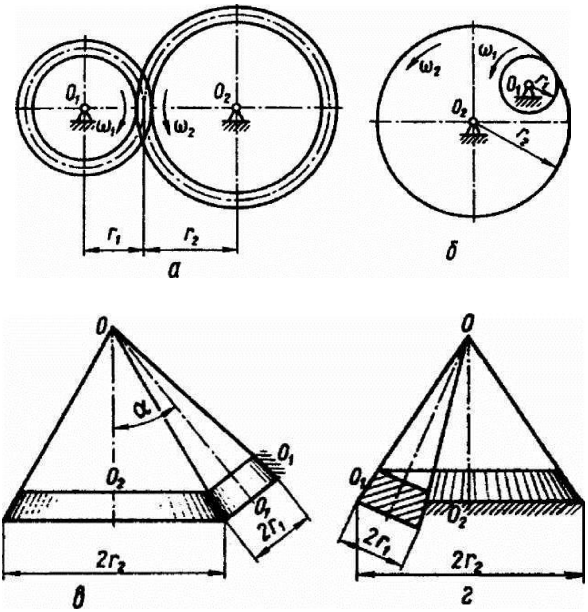


Рис. 6.

Перетворення обертальних рухів з паралельними осями можна реалізувати також і за допомогою пасових або ланцюгових передач. При цьому пасова передача із неперехресним рухом паса (рис. 7, а) еквівалентна внутрішньому зубчастому або фрикційному зчепленню, а з перехресним рухом паса (рис. 7, б) - зовнішньому зчепленню.

При передачі обертання від одного тіла до іншого перше тіло називають провідним або ведучим, друге - веденим, а весь механізм називають передавальним.

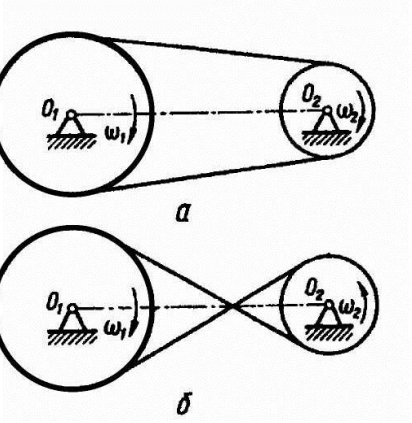


Рис. 7.

Основною для кінематичного розрахунку таких передач є припущення, що в системі немає ковзання чи зазорів між зубцями коліс, а паси, ланцюги тощо не деформуються. Це означає, що швидкості на ободі зубчастих коліс, які знаходяться у зчепленні, й швидкості на ободах шківів пасових і ланцюгових передач однакові, тобто в цих випадках має місце співвідношення:

$$\mathrm{v} = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 .$$

Отже, кутові швидкості коліс зубчастих, фрикційних, а також пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} .$$

Відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса називають передавальним числом:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} .$$

Коли врахувати, що кількість зубців пропорційна довжинам кіл, а значить і радіусам, то передавальне число можна визначити через відповідне відношення кількості зубців:

$$u = \frac{z_2}{z_1}.$$

Тема 4. Динаміка обертального руху

§1. Рівняння динаміки обертального руху. Момент сили, момент імпульсу

Нехай система складається з n матеріальних точок так, що маса системи (твердого тіла):

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i ,$$

де m_i – маса і-тої матеріальної точки.

Розглянемо обертальний рух такої системи відносно осі обертання О. Положення і-тої матеріальної точки системи визначається радіус-вектором $\vec{r}_i$, проведеним з центра мас системи. Позначимо $\vec{F}_{ik}$ силу, що діє на *i*-ту точку з боку *к*-тої, $\vec{F}_i$ - рівнодійну зовнішніх сил, що діють на *i*-ту точку.

Тоді за другим законом Ньютон, для *i*-тої матеріальної точки **рівняння руху** набере вигляду:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{\mathrm{v}}_i) = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i .$$

Помножимо векторно це рівняння на $\vec{r}$:

$$\left[\vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt}(m_i \vec{\mathrm{v}}_i)\right] = \left[\vec{r} \cdot \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r} \cdot \vec{F}_i\right].$$

Так як $\frac{d\vec{r}_i}{dt} \uparrow\uparrow \vec{\mathrm{v}}_i$, то знак диференціала зліва виносимо за векторний добуток. Справді :

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i,(m_i\vec{\mathrm{v}}_i)\right]=\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt},(m_i\vec{\mathrm{v}}_i)\right]+\left[\vec{r}_i,\frac{d}{dt}(m_i\vec{\mathrm{v}}_i)\right],$$

але,

$$\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt},(m_i\vec{\mathrm{v}}_i)\right]=0.$$

Отже рівняння руху набере вигляду:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i\cdot(m_i\vec{\mathrm{v}}_i)\right]=\left[\vec{r}\cdot\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\vec{F}_{ik}\right]+\left[\vec{r}\cdot\vec{F}_i\right].$$

Окремо розглянемо доданки цього рівняння .

а). Векторний добуток радіус-вектора матеріальної точки масою m_i на її імпульс називається **моментом імпульсу** цієї точки відносно осі обертання: $\vec{L}_i=\left[\vec{r}_i\cdot m_i\vec{\mathrm{v}}_i\right]$.

Напрям вектора $\vec{L}_i$ показано на рис. 6.

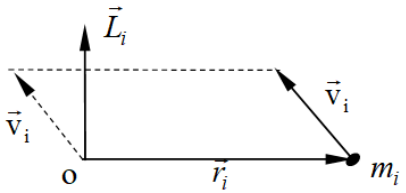


Рис. 6.

Момент імпульсу матеріальної точки ($\vec{L}_i$) направлений перпендикулярно до площини, проведеної через $\vec{r}_i$ і $\vec{\mathrm{v}}_i$ і утворює з ними праву трійку векторів. (Тобто при русі від кінця вектора $\vec{r}_i$ до $\vec{\mathrm{v}}_i$ правий гвинт покаже напрям вектора $\vec{L}_i$).

У скалярній формі

$$L_i=r_i\cdot m_i\mathrm{v}_i\cdot\sin(\vec{r}_i,\vec{\mathrm{v}}_i).$$

Враховуючи, що при русі по колу радіус – вектор і вектор лінійної швидкості для *i*-тої матеріальної точки взаємно перпендикулярні:

$$\sin(\vec{r}_i,\vec{\mathrm{v}}_i)=1.$$

Отже для обертального руху **момент імпульсу матеріальної точки** набере вигляду:

$$L_i = r_i \cdot m_i \mathrm{v}_i .$$

б). Векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}_i$, проведеного в точку прикладання сили $\vec{F}_i$, на цю силу називається **моментом сили** $\vec{F}_i$**, що діє на *i*-ту матеріальну точку** відносно осі обертання:

$$M_i = \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right].$$

Векторне представлення моменту сили $\vec{M}_i$ подано на рисунку 7.

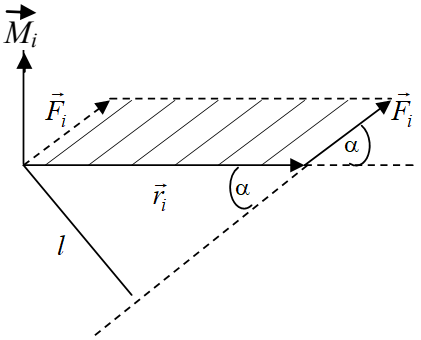


Рис. 7.

В скалярній формі:

$$M_i = r_i F_i \sin(\hat{\vec{r}_i, \vec{F}_i}).$$

Вважаючи, що

$$r_i \sin\alpha = l_i ,$$

$$M_i = F_i l_i .$$

Величина l_i, що рівна довжині перпендикуляра, опущеного з точки обертання на напрям дії сили називається **плечем сили** $\vec{F}_i$.

Перепишемо рівняння руху *i*-тої матеріальної точки враховуючи поняття моменту імпульсу і моменту сили:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \left[\vec{r} \cdot \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{F}_{ik} \right] + \vec{M}_i .$$

Для системи n - матеріальних точок рівняння руху набере вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{F}_{ik} \right] + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i .$$

Величина

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{M}$$

називається **результуючим моментом зовнішніх сил** системи точок (твердого тіла) відносно осі обертання.

Величина

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

називається **результуючим момент імпульсу** системи точок (твердого тіла) відносно осі обертання.

Відповідно до III закону Ньютона

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \vec{F}_{ik} = 0,$$

бо при такому сумуванні завжди є пари сил $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$.

Таким чином отримуємо **основний закон динаміки обертального руху** системи матеріальних точок (твердого тіла):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} .$$

Швидкість зміни моменту імпульсу тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює результуючому моменту відносно цієї осі всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла.

§2. Момент імпульсу і момент інерції

Відомо, що для і-тої матеріальної точки момент імпульсу в скалярній формі задається формулою:

$$L_i = r_i \cdot m_i \mathrm{v}_i .$$

Якщо замість лінійної швидкості підставити її вираз через кутову:

$$\mathrm{v}_i = \omega r_i ,$$

то вираз для моменту імпульсу набере вигляду

$$L_i = r_i m_i \omega r_i ,$$

або

$$L_i = m_i r_i^2 \cdot \omega .$$

Величина

$$I_i = m_i r_i^2$$

називається **моментом інерції *i*-тої матеріальної точки** абсолютно твердого тіла відносно осі, що проходить через його центр мас.

Отже момент імпульсу матеріальної точки запишемо:

$$L_i = I_i \omega .$$

Враховуючи, що момент інерції є адитивною величиною, тобто

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i ,$$

момент імпульсу абсолютно твердого тіла (системи матеріальних точок) запишемо:

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} I_i \cdot \omega,$$

$$L = I\omega.$$

Тобто момент імпульсу абсолютно твердого тіла відносно нерухомої осі рівний добутку його моменту інерції відносно цієї осі на кутову швидкість обертання.

§3. Момент сили і момент інерції

Відповідно до основним законом динаміки обертального руху

$$M = \frac{dL}{dt}.$$

Відомо, що момент імпульсу можна представити через момент інерції:

$$L = I\omega.$$

Тоді

$$M = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Враховуючи, що кутове прискорення визначається виразом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

одержимо формулу для **моменту сили представлену через момент інерції**:

$$M = I\varepsilon.$$

Зауважимо, що момент сили вважається додатнім, якщо кутове прискорення, що ним спричинене, більше від нуля, і навпаки.

§4. Момент інерції геометричного тіла

Щоб знайти момент інерції довільного твердого тіла відносно осі обертання, що проходить через його центр ваги, таке тіло уявно ділять на безконечне число матеріальних точок чи частин, з масою dm кожна, і сумують моменти інерції всіх цих частин, замінюючи суму в формулі для I інтегралом.

$$I = \int_0^m r^2 dm ,$$

де r - модуль радіус-вектора проведеного від осі обертання до елемента dm.

Для прикладу знайдемо **момент інерції однорідного диска** радіусом R_0.

Виберемо на диску круговий елемент радіусом R і товщиною dR з масою dm (рис. 8). За означенням

$$I = \int_0^m R^2 dm \ .$$

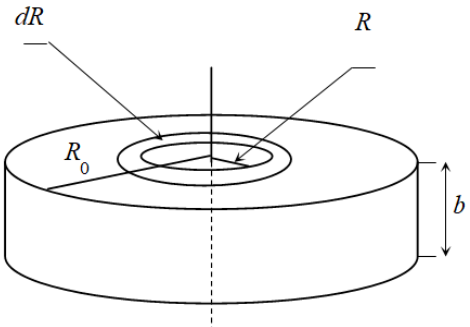


Рис. 8.

Виразимо елемент маси через густину речовини диска і елемент об’єму:

$$dm = \rho dV \ .$$

Тоді момент інерції запишемо:

$$I = \int_0^V R^2 \rho dV .$$

Об'єм елемента маси виразимо як об'єм пустотілого циліндра з внутрішнім радіусом R, висотою b і товщиною стінки dR:

$$dV = 2\pi R \cdot b \cdot dR .$$

Підставивши такий вираз для dV у формулу моменту інерції, одержимо:

$$I = \int_0^{R_0} R^2 \rho \cdot 2\pi R \cdot b \cdot dR = \int_0^{R_0} 2\pi \rho b R^3 dR ;$$

$$I = 2\pi \rho b \frac{R^4}{4}\Bigg|_0^{R_0} = 2\pi \rho b \frac{R_0^4}{4} = \pi R_0^2 b \rho \frac{R_0^2}{2} .$$

Враховуючи, що масу диска можна виразити як добуток об'єму на густину:

$$m = V\rho = \pi R_0^2 b \rho ,$$

для **моменту інерції диска відносно осі, що проходить через його центр маси** одержимо:

$$I_Д = \frac{1}{2} m R_0^2 .$$

Подамо без доведення формули моменту інерції відносно осі, що проходить через центр маси для таких геометричних фігур:

стержня - $I_C = \frac{1}{12} m l^2 ,$

де l - довжина стержня;

кулі - $I_K = \frac{2}{5} m R^2 ,$

тут R - радіус кулі.

§5. Теорема Штейнера

Момент інерції твердого тіла відносно довільної осі можна розрахувати за теоремою Штейнера: якщо вісь обертання (О) проходить не через центр маси тіла, то момент інерції його (I) відносно цієї осі рівний сумі моменту інерції (I_0) відносно осі, що проходить через центр маси (O_0) і добутку маси тіла на квадрат відстані (a) між осями (рис. 9):

$$I = I_0 + ma^2 .$$

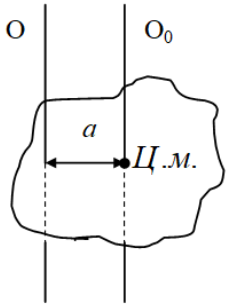


Рис. 9.

§6. Закон збереження моменту імпульсу. Гіроскоп

І. Закон збереження моменту імпульсу (формулювання):
якщо результуючий момент зовнішніх сил, що діють на тіло відносно нерухомої осі тотожно дорівнює нулю, то момент імпульсу такого тіла відносно цієї осі з бігом часу не змінюється.

Покажемо це математично. З основного закону динаміки обертального руху:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} .$$

Якщо, відповідно до формулювання, прийняти

$$\vec{M} = 0 , \text{ то } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 ,$$

а це означає, що

$$\vec{L} = const .$$

Тобто постійним є абсолютне значення і напрям вектора $\vec{L}$.

У замкненій системі момент зовнішніх сил рівний нулю, тому для таких системи завжди виконується закон збереження моменту імпульсу.

II. Гіроскоп

У справедливості закону збереження моменту імпульсу можна переконатись на досліді з гіроскопом.

Гіроскопом називають однорідне симетричне тіло, яке швидко обертається навколо своєї осі симетрії.

Гіроскоп, зображений на рисунку 10, має три ступені вільності відносно осей AA', BB', CC'.

Якщо знехтувати силами тертя, то момент довільної сили, що передається гіроскопу через стояк, буде рівний нулю (бо початок вектора будь-якої сили завжди буде проходити через центр мас гіроскопа, а значить, момент такої сили буде рівний

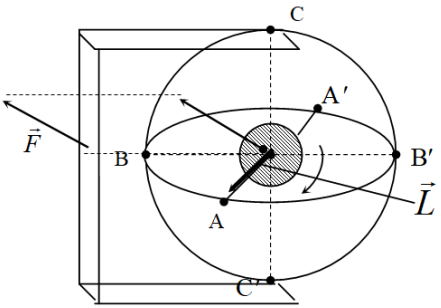


Рис. 10.

нулю). Тому при будь-яких діях на стояк, гіроскоп зберігатиме незмінним як значення, так і напрям вектора моменту імпульсу $\vec{L}$.

Збереження свого моменту імпульсу $\vec{L}$ гіроскопом можна спостерігати і тоді, коли ми захочемо повернути вісь AA' в іншому напрямі. Щоб це зробити, необхідно прикласти значних

зусиль, тобто значну силу, величина моменту якої рівна:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

В реальних ситуаціях при великій масі і швидкості обертання гіроскопа сили, що можуть змінити величину його моменту імпульсу, часто не досягають відповідного значення, і $\vec{L}$ залишається незмінним. Якщо з віссю AA' такого гіроскопа жорстко з'єднати корпус, наприклад, автомобіля, то це не дозволить йому перевернутись на крутому віражі. Якщо ж з віссю AA' гіроскопа з'єднати рульовий механізм літака, одержимо пристрій, що носить назву "автопілот".

III. Платформа Жуковського

Як відомо, $L = I\omega$. Розглянемо приклад із платформою Жуковського, яка може обертатись з малим тертям навколо своєї осі симетрії. Якщо в центрі платформи стоїть людина з розпростертими руками і платформа обертається, то маємо певні значення I та ω, а значить і L. Коли людина опустить руки, момент інерції її I зменшиться, і як показує експеримент, у стільки ж разів збільшиться ω. При цьому добуток $I\omega = L$ залишиться постійним.

Тобто якщо момент зовнішніх сил $M=0$, то $L = const$.

§7. Кінетична енергія тіла, що обертається

Кінетична енергія поступального руху i-тої матеріальної точки системи (чи абсолютно твердого тіла) рівна

$$W_{K_i} = \frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2}.$$

Якщо точка обертається відносно нерухомої осі з кутовою швидкістю ω, то

$$\mathrm{v}_i = \omega \cdot r_i,$$

де r_i – відстань від і-тої точки до осі обертання.

Підставивши таке значення v_i у формулу для кінетичної енергії, одержимо вираз, що визначає кінетичну енергію i - тої матеріальної точки при обертальному русі:

$$W_{к_i об.} = \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2},$$

$$W_{к_i об.} = \frac{I_i \omega^2}{2}.$$

Для системи точок:

$$W_{к.об.} = \sum_i W_{к_i об.} = \sum_i \frac{I_i \omega^2}{2}.$$

Враховуючи, що $\sum_i I_i = I$ (момент інерції системи), для кінетичної енергії обертального руху абсолютно твердого тіла (системи матеріальних точок) одержимо вираз:

$$W_{коб.} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}.$$

Якщо абсолютно тверде тіло рухається поступально з швидкістю $\vec{v}$ і при цьому обертається навколо осі, що проходить через його центр мас з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (куля по горизонтальній площині), то його повна кінетична енергія визначається формулою:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

У цій формулі перший доданок відповідає за кінетичну енергію поступального руху, другий – за кінетичну енергію обертального руху.

Тема 5. Робота і енергія

§1. Робота сили

Якщо тіло рухається прямолінійно і впродовж шляху S на нього діє стала за величиною і напрямом сила $\vec{F}$, яка утворює кут α з напрямом переміщення, то дію сили на цьому

шляху характеризують величиною, яку називають роботою:

$$A = FS\cos\alpha .$$

В загальному випадку сила може змінюватись як за модулем, так і за напрямком, а траєкторія руху може бути не прямолінійна. Якщо розглянути елементарне переміщення $d\vec{r}$, то силу $\vec{F}$ можна вважати сталою, а рух матеріальної точки, до якої сила прикладена, прямолінійним. Елементарною роботою dA сили $\vec{F}$ на переміщенні $d\vec{r}$ називається скалярна величина

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F\cos\alpha dS = F_S dS ,$$

де $dS = \left|d\vec{r}\right|$ - елементарний шлях, α – кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$, F_S - проекція вектора $\vec{F}$ на напрямок вектора $d\vec{r}$ (рис.1).

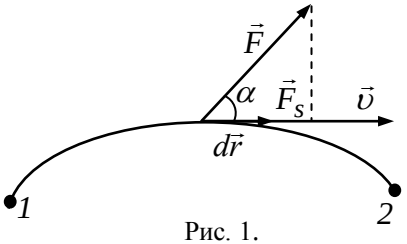


Рис. 1.

Робота сили на ділянці траєкторії від точки *1* до точки *2* дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт на окремих нескінченно малих ділянках шляху:

$$A = \int_1^2 FdS\cos\alpha = \int_1^2 F_S dS .$$

Отриманий інтеграл називається криволінійним інтегралом, оскільки він представляє інтеграл від функції F_S вздовж деякої кривої, яка є траєкторією руху.

§2. Зв'язок сили і роботи

Сила, що діє на тіло, не виконує роботу, якщо:

а) тіло перебуває у спокої (*dS=0*);

б) сила перпендикулярна до напрямку переміщення тіла

($\alpha = 90^\circ$, а отже $cos\alpha = 0$).

Якщо $\alpha < \pi/2$, то робота сили додатна і силу $\vec{F}$ називають рушійною силою.

Якщо кут $\pi \geq \alpha > \pi/2$, то робота сили від'ємна і силу $\vec{F}$ називають силою опору.

Якщо на тіло, яке рухається поступально, одночасно діють декілька сил, то робота рівнодійної сили при переміщенні на $d\vec{r}$ дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил:

$$dA = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\vec{F}_n\right)d\vec{r} = dA_1 + dA_2 + ... + dA_n .$$

§3. Кінетична енергія механічної системи та її зв'язок з імпульсом

Кінетичною енергією механічної системи називається енергія механічного руху цієї системи.

Сила $\vec{F}$, яка діє на тіло і викликає його рух, виконує роботу, а енергія рухомого тіла зростає на величину виконаної роботи:

$$dE_к = dA .$$

Використовуючи скалярний запис другого закону Ньютона та помноживши обидві його частини на елементарний шлях *dS*, отримаємо:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}dS = FdS .$$

Оскільки $\upsilon = \frac{dS}{dt}$, то

$$dA = FdS = m\upsilon\, d\upsilon = dE_к$$

і

$$E_к = \int_0^{\upsilon} m\upsilon\, d\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{2} .$$

Отже, кінетична енергія тіла, що рухається поступально дорівнює половині добутку маси цього тіла на квадрат його

швидкості, а зміна кінетичної енергії тіла дорівнює роботі, яка виконується над тілом.

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = dA.$$

Кінетичну енергію тіла можна представити і через імпульс:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{(m\upsilon)^2}{2m} = \frac{P^2}{2m},$$

де $P = m\upsilon$ – імпульс тіла.

Кінетична енергія тіла не може бути від'ємною.

Повна кінетична енергія $E_к$ системи дорівнює сумі кінетичних енергій $E_{кі}$ всіх тіл, що входять до неї:

$$E_к = \sum_i E_{кі} = \sum_i \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

§4. Потенціальна енергія

Потенціальною енергією механічної системи називається енергія, яка залежить від взаємного розміщення всіх матеріальних точок системи і характеру сил, які діють між матеріальними точками.

1. Потенціальна енергія матеріальної точки в однорідному силовому полі

Поле називається однорідним, якщо сила $\vec{F}$, яка діє на матеріальну точку з боку поля, однакова у всіх точках поля.

Для тіла масою *m*, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння ($F = mg$) біля поверхні Землі, потенціальна енергія визначається:

$$E_n(h) = mgh,$$

де *h* – висота тіла над поверхнею Землі, а початок відліку енергії E_n вибрано так, що біля поверхні Землі $E_n = 0$.

2. Потенціальна енергія пружно деформованого тіла

Під час деформації пружного тіла в ньому виникають внутрішні сили, які протидіють деформації тіла і називаються силами пружності. У разі поздовжнього розтягу або стиску тіла (наприклад, пружини вздовж осі *OX*) сила пружності визначається:

$$\vec{F} = -k\vec{x},$$

де k – коефіцієнт пружності, який характеризує пружні властивості тіла; $\vec{x}$ - вектор деформації.

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла, вважаючи, що вона дорівнює нулю у недеформованого тіла (при $x=0$), визначається:

$$dE_n = kxdx,\ E_n = k\int_0^x xdx = \frac{kx^2}{2}.$$

§5. Закон збереження механічної енергії. Закон збереження і перетворення енергії

Закон збереження механічної енергії: в системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, повна механічна енергія зберігається, тобто не змінюється з часом:

$$E_к + E_n = E = const.$$

При „зникненні" механічної енергії завжди виникає еквівалентна кількість енергії іншого виду. Перетворення енергії в такому випадку відбувається у відповідності із законом збереження енергії: енергія не виникає і не зникає, а тільки передається від одного тіла до іншого або перетворюється з одного виду в інший в еквівалентних кількостях.

Тема 6. Елементи механіки рідин

§1. Загальні поняття

Рідиною називається фізичне тіло, яке володіє двома характерними особливостями: незначною зміною свого об'єму

під дією великих зовнішніх сил та текучістю, тобто зміною своєї форми під дією навіть незначних зовнішніх сил.

Рідина – фізичне тіло, яке володіє легкою рухливістю часток, не має своєї форми та приймає форму посудини, в яку поміщено. В техніці рідину поділяють на: крапельну (вода) и газоподібну (стиснене повітря).

До фізичних властивостей рідин належать:

– питома маса та питома вага;

– тиск;

– температурне розширення;

– текучість;

– в'язкість.

Питомою масою або **щільністю** ρ (кг/м^3) називається маса одиниці об'єму рідини. Якщо рідина масою М займає об'єм V , тоді відношення

$$\rho = \frac{M}{V} \quad , (\text{кг/м}^3)$$

визначає щільність (густину) даної речовини.

Щільність рідин зменшується зі збільшенням температури. Виключення представляє вода у діапазоні температур від 0 до 4 ^{o}C, коли її щільність збільшується, досягаючи найбільшого значення при температурі 4^{o}C (ρ = 1000 кг/м^3) .

Якщо рідина займає об'єм V та має вагу G, то відношення ваги до об'єму називають **питомою вагою** рідини:

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad , (\text{Н/м}^3).$$

Питома вага прісної води при t = 4 ^{o}C – 9810 Н/м^3 .

Питома маса (густина) рідини залежить від температури та визначається за формулою:

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \beta_t \cdot t} \ ,$$

де ρ_0 – питома маса рідини при температурі 0 ^{0}C;

β_t – коефіцієнт температурного розширення рідини.

На підставі 2-го закону Ньютона **між питомою масою та питомою вагою існує зв'язок:**

$$\gamma = \rho g ,$$

де g – прискорення вільного падіння, що дорівнює 9,81 м/с^2.

Опір рідин до зміни свого об'єму під дією тиску і температури характеризується коефіцієнтами об'ємного стиснення та температурного розширення.

Коефіцієнт об'ємного стиснення β_V (Па$^{-1}$) – це відносна зміна об'єму рідини під час зміни тиску на одиницю:

$$\beta_V = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta p} = \frac{\Delta \rho}{\rho \cdot \Delta p},$$

де ΔV – зміна об'єму V або $\Delta \rho$ – зміна щільності ρ, які відповідають зміні тиску на величину Δp.

Величина, обернена до коефіцієнту об'ємного стиснення, називається **модулем пружності рідин** $E_{рід}$ (Па):

$$E_{рід} = \frac{1}{\beta_V} .$$

Значення модуля пружності рідин залежить від тиску і температури. Реальна рідина практично не стискається.

Коефіцієнт температурного розширення β_t , показує відносну зміну об'єму рідини під час зміни температури на один градус:

$$\beta_t = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta t},$$

де ΔV – зміна об'єму V, яка відповідає зміні температури на величину Δt. Коефіцієнт температурного розширення води збільшується разом зі збільшенням температури і тиску; для більшості інших крапельних рідин β_t зі збільшенням тиску зменшується. Досліди показали, що зміна об'єму рідини під час зміни температури незначна, так для води коефіцієнт об'ємного розширення дорівнює 0,00001.

Рух рідин називають **течією**, а сукупність частинок рухомої рідини – **потоком.**

Течію рідини називають **усталеною,** або **стаціонарною**, якщо швидкість рідини у кожній точці простору, який займає рідина, не змінюється з часом.

Рух рідин зображають за допомогою **ліній течії**, які проводять так, що дотичні до них збігаються за напрямком з векторами швидкостей рідини у відповідних точках простору. Лінії течії вказують не тільки напрямок швидкостей, а й дають змогу зробити висновок про величину швидкості частинок в даному місці.

Зображаючи потік, лінії течії проводять так, щоб їх густина, тобто кількість ліній, які пронизують одиницю площі поверхні, що проведена в потоці перпендикулярно до лінії течії, чисельно дорівнювала б швидкості частинок потоку в даному перерізі.

Поверхню, утворену лініями течії, проведеними через усі точки малого замкненого контуру, називають **трубкою течії.**

Частину рідини, обмежену трубкою течії, називають **струменем.**

При **стаціонарній течії** частинки рухаються так, що кожна з них весь час залишається в межах певної струмини.

§2. Рівняння нерозривності струменя

Розглянемо трубку течії, настільки тонку, що в кожному її перерізі швидкість можна вважати постійною (рис. 1).

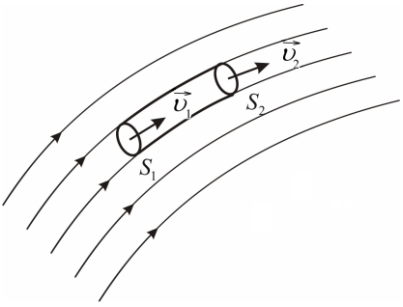


Рис. 1.

Виберемо довільно два перерізи, площі яких дорівнюють S_1 і S_2 і перпендикулярні до напрямку швидкостей, відповідно υ_1 і υ_2. За одиницю часу через переріз S_1 протече об'єм рідини, який дорівнює $S_1 \upsilon_1$, а через переріз S_2 - об'єм $S_2 \upsilon_2$. Якщо рідина нестискувана ($\rho = const$, де ρ - густина рідини), то за одиницю часу через перерізи S_1 і S_2 протечуть однакові об'єми рідини:

$$S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2 .$$

Для нестискувальної рідини добуток площі довільного поперечного перерізу на швидкість течії в цьому перерізі має однакове значення:

$$S\upsilon = const .$$

Це співвідношення називається **рівнянням нерозривності струменя.** З даного рівняння випливає, що під час стаціонарної течії швидкості руху частинок рідини через два довільних перерізи трубки обернено пропорційні площам цих перерізів. Найбільша швидкість рідини спостерігається у найвужчому місці трубки, а найменша – у найширшому.

§3. Рівняння Бернуллі

Нехай по нахиленій трубці потоку змінного перерізу рухається ідеальна рідина – рідина, в якій немає внутрішнього тертя – в напрямку зліва направо (рис. 2).

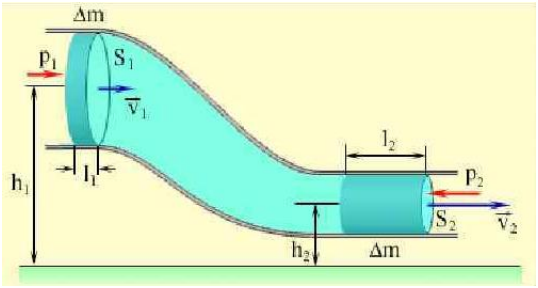


Рис. 2.

Умовно виділимо область трубки, обмежену перерізами S_1 і S_2. Нехай в місці перерізу S_1 швидкість рідини υ_1, тиск p_1 і висота, на якій розміщений цей переріз, h_1. Аналогічно в місці перерізу S_2 швидкість рідини υ_2, тиск p_2 і висота перерізу h_2.

Визначимо зміну повної енергії, яка відбувається в цій області між перерізами S_1 і S_2 за час Δt. За цей час маса рідини між перерізами S_1 і S_1' втікає в дану область, а маса що знаходиться між S_2 і S_2', витікає з неї.

Величина зміни повної енергії, яка є сумою кінетичної і потенціальної енергій маси Δm рідини, дорівнює різниці повних енергій мас, які витікають і втікають:

$$\Delta E = \left(E_{K,2} + E_{П,2}\right) - \left(E_{K,1} + E_{П,1}\right) =$$

$$= \left(\frac{\Delta m \upsilon_2^{\,2}}{2} + \Delta m g h_2\right) - \left(\frac{\Delta m \upsilon_1^{\,2}}{2} + \Delta m g h_1\right).$$

За законом збереження енергії енергія ΔE дорівнює роботі зовнішніх сил, що переміщують масу Δm рідини від перерізу S_1 до перерізу S_2:

$$\Delta E = A.$$

Робота A дорівнює роботі, яка виконується при переміщенні всієї ділянки рідини, що знаходиться між перерізами S_1 і S_2 протягом такого часу Δt, за який через ці перерізи буде перенесена маса рідини Δm.

Для перенесення маси рідини Δm в місці розміщення перерізу S_1 рідина повинна переміститься на відстань $l_1 = \upsilon_1 \Delta t$, а в місці перерізу S_2 – на відстань $l_2 = \upsilon_2 \Delta t$. Зазначимо, що l_1 і l_2 настільки малі, що величини швидкості, тиску і висоти між перерізами S_1 і S_1' та S_2 і S_2' є постійні.

Сили, що діють на обидва кінці виділеної ділянки рідини, відповідно, дорівнюють $F_1 = p_1 S_1$ і $F_2 = -p_2 S_2$. Сила F_2 – від'ємна, оскільки напрямлена в бік, протилежний до течії рідини.

Отже, робота зовнішніх сил із переміщення маси Δm:

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2 = p_1 S_1 \upsilon_1 \Delta t - p_2 S_2 \upsilon_2 \Delta t .$$

За законом нерозривності струменя:

$$S_1 \upsilon_1 \Delta t - S_2 \upsilon_2 \Delta t = \Delta V .$$

В результаті одержимо:

$$A = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V .$$

Враховуючи, що $\Delta E = A$, отримуємо:

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \\ = \frac{\Delta m \upsilon_2^{\,2}}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m \upsilon_1^{\,2}}{2} - \Delta m g h_1 .$$

Оскільки густина рідини $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$, то отримуємо:

$$\frac{\rho \upsilon_2^{\,2}}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho \upsilon_1^{\,2}}{2} + \rho g h_1 + p_1 .$$

Оскільки перерізи S_1 і S_2 вибрані довільно, тому

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} + \rho g h + p = const.$$

Це співвідношення називається **рівнянням Бернуллі**. Величина p називається статичним тиском, величина $\frac{\rho \upsilon^2}{2}$ – динамічним тиском, а величина $\rho g h$ – гідростатичним тиском.

Рівняння Бернуллі можна сформулювати так: в стаціонарному потоці ідеальної нестискуваної рідини сума статичного, динамічного і гідростатичного тисків є сталою у довільному поперечному перерізі потоку.

Для трубки течії, яка розміщена горизонтально ($h_1 = h_2$), рівняння Бернуллі має такий вигляд:

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} + p = const,$$

де $\frac{\rho \upsilon^2}{2} + p$ називається повним тиском потоку рідини.

Із рівняння Бернуллі для горизонтальної трубки течії і рівняння нерозривності струменя видно, що при течії рідини в горизонтальній трубці, що має різні перерізи, швидкість рідини більша в місцях звуження трубки, а тиск більший в місцях, де площа поперечного перерізу трубки більша. Це твердження називається **законом Бернуллі.**

§4. Режими руху рідини

Протікання реальної рідини характеризується різними режимами її руху, які можуть переходити один в інший за певних умов. Експериментальні дослідження гідравлічних опорів показують, що втрати напору (втрати енергії) залежать від існуючого в потоці режиму руху. Існування двох

принципово різних режимів руху рідини було відмічено Г. Хагеном у 1839 та 1854 рр.

Під час вивчення протікання різноманітних крапельних рідин з різними фізичними властивостями Рейнольдс встановив, що рух буває ламінарним та турбулентним. «Ламінарний» походить від латинського слова lamina – шар.

Ламінарним називається такий режим, коли потік рідини рухається окремими струменями або шарами і траєкторії окремих часток між собою не перетинаються. На практиці ламінарний режим має місце під час руху рідин з великою в'язкістю (нафти, змащувальних масел), під час руху води через тонкі трубки, в трубопроводах при малих швидкостях потоку. «Турбулентний» походить від латинського слова turbulentus – безладний, хаотичний.

Турбулентним називається такий режим, коли струменевість потоку порушена, всі струмені перемішуються, і траєкторії часток, що рухаються, набувають складної форми, перетинаючись між собою. На практиці найчастіше має місце турбулентний режим руху рідини.

У 1883 р. Рейнольдс в результаті експериментальних досліджень встановив, що критерієм режиму руху рідини являється безрозмірна величина, яка представляє собою відношення добутку середньої швидкості потоку υ та характерного для випадку, що розглядається, лінійного розміру L до кінематичної в'язкості рідини ν. Цей критерій називається числом Рейнольдса та позначається *Re.*

$$\mathrm{Re} = \frac{\upsilon L}{\nu} \ .$$

Фізичний зміст числа Рейнольдса полягає в тому, що воно виражає відношення сил інерції до сил в'язкості:

$$\mathrm{Re} = \frac{F_{in}}{F_{в\text{язк}}} \ .$$

Якщо переважають сили в'язкості – режим ламінарний, якщо ж переважають сили інерції – режим турбулентний.

РОЗДІЛ ІІ. Молекулярна фізика і термодинаміка

Тема 1. Закони ідеального газу

§1. Рівноважні стани і процеси

Теорія будови речовини, яка ґрунтується на положенні, що всі тіла в природі складаються з атомів і молекул, які перебувають у безперервному тепловому русі, називається молекулярно-кінетичною теорією.

Сукупність тіл, що обмінюються енергією між собою, а також із зовнішніми тілами, називається **термодинамічною системою.**

Сукупність значень всіх величин, що характеризують фізичні властивості термодинамічної системи **називають термодинамічними параметрами.**

Стан системи називається **стаціонарним**, якщо значення всіх її термодинамічних параметрів не змінюється з часом.

Стаціонарний стан називається **рівноважним**, якщо його незмінність в часі не зумовлена протіканням певних процесів у зовнішніх тілах. (Стан нагрітої води в термосі – рівноважний. Стан нагрітої води в посудині на плиті, коли температура води підтримується зовнішнім джерелом тепла – нерівноважний).

Для однозначного опису рівноважного стану довільної системи необхідне обмежене число її термодинамічних параметрів, які називаються параметрами стану. Для хімічно однорідної системи параметрами стану є тиск - P, об'єм - V і абсолютна температура - T. Зв'язок між цими параметрами називають рівнянням стану:

$$f(P,V,T)=0$$

§2. Закони ідеального газу

1. Основні поняття

Ідеальним називається газ, між молекулами якого відсутні сили взаємного притягання. При зіткненні молекули такого газу поводяться як абсолютно пружні кульки.

При низьких тисках і не дуже низьких температурах (при яких не припиняється тепловий рух) всі реальні гази поводять себе як ідеальний.

Основні параметри стану ідеального газу:

1). Об'єм газу. Він завжди рівний об'єму посудини.

2). Тиск газу. Тиском називається фізична величина, яка чисельно рівна силі, що діє з боку газу на одиницю площі поверхні стінки по нормалі до неї.

$$P = \frac{dF_n}{dS}.$$

3). Температура газу. Температура - це фізична величина, що характеризує ступінь нагрітості тіла.

У 1948 р. прийнято Міжнародну стоградусну температурну шкалу. За цією шкалою температура вимірюється в градусах Цельсія. При нормальному тиску $\approx 10^5 \frac{Í}{ì^2}$ (Па) температура плавлення льоду $t_1 = 0$, кипіння води при $t_2 = 100^0 C$.

У 1954р. встановлено Абсолютну термодинамічну температурну шкалу. Тут температура вимірюється в градусах Кельвіна (Т):

$$T = 273.15 + t.$$

Температура $T = 0$ називається абсолютним нулем температури. Термодинаміка вважає, що при $T = 0$ припиняється тепловий рух молекул.

2. Закон Бойля - Маріотта

При незмінній температурі і масі газу добуток його тиску на об'єм є величина стала:

$$PV = const.$$

Графічно залежність $P = f(V)$ представлена термодинамічною діаграмою стану (рис. 1), яка за фізичною суттю є ізотермою.

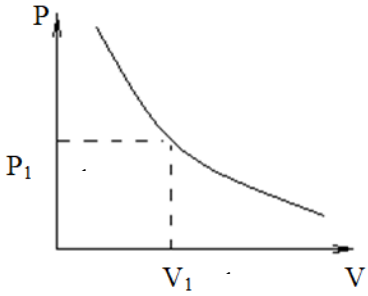


Рис. 1. Термодинамічна діаграма стану $P = f(V)$

3. Закон Шарля

Для даної кількості газу при сталому об'ємі, тиск зі зміною температури змінюється лінійно:

$$P = P_o(1 + \alpha_p t),$$

де P_0 - тиск при $t = 0^0 C$, α_p – термічний коефіцієнт тиску,

$$\alpha_P = \frac{1}{273{,}15}\,\frac{1}{град}.$$

Графічно залежність $P = f(t)$ зображується прямою, яка за фізичною суттю є ізохорою (рис. 2).

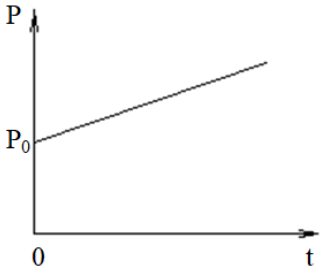


Рис. 2. Термодинамічна діаграма стану $P = f(t)$

4. Закон Гей - Люссака

Для даної кількості ідеального газу при сталому тиску, об'єм зі зміною температури змінюється лінійно:

$V = V_o(1 + \alpha_V t)$,

де V_0 - об'єм при $t = 0^0 C$, α_V – термічний коефіцієнт об'єму,

$$\alpha_V = \frac{1}{273{,}15}\ \frac{1}{град}.$$

Графічно залежність $V = f(t)$ зображується прямою, яка за фізичною суттю є ізобарою (рис. 3).

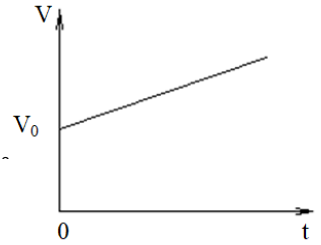


Рис. 3. Термодинамічна діаграма стану $V = f(t)$

5. Закон Клапейрона

На основі попередніх законів у 1834 році Клапейроном був сформульований закон: для даної маси m ідеального газу відношення добутку його тиску та об'єму до абсолютної температури є величина стала:

$$\frac{P \cdot V}{T} = const,$$

або

$$\frac{P \cdot V}{T} = B \cdot m,$$

де B – постійна, що залежить від природи газу.

6. Рівняння Менделєєва – Клапейрона

1. Молекулярною масою називають відношення маси молекули до 1/12 маси атома ізотопу вуглецю ^{12}C. Молекулярна маса є безрозмірна величина (для одноатомних газів наближено рівна числу нуклонів у ядрі).

2. Кілограм - молекулою або кілограм – молем (кмоль), називається така кількість речовини, маса якої виражена в кілограмах чисельно рівна її молекулярній вазі **(**μ - молярна маса або вага) (для азоту $\mu = 28$ *кг/кмоль)***.**

3. Число молекул N_A (число Авогадро), що міститься в одному кілограм– молі, дорівнює відношення маси кілограм - моля (μ) даної речовини до маси однієї молекули (m_0) вираженої у кілограмах:

$$N_A = \frac{\mu}{m_0}; \quad N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \frac{1}{кмоль}.$$

4. Закон Авогадро: в рівних об'ємах газу, при рівних температурах і тисках знаходиться рівне число молекул газу:

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \frac{1}{кмоль};$$

або кілограм – молі різних газів, при рівних температурах і тисках займають однакові об'єми.

5. Рівняння Менделєєва – Клапейрона

За Клапейроном для одного кіломоля газу

$$\frac{PV}{T} = B \cdot \mu = R,$$

де R – величина однакова для різних газів і називається універсальною газовою сталою.

$$R = 8.31 \ \frac{кДж}{кмоль \cdot град}\left(\frac{Дж}{моль \cdot град}\right).$$

З попереднього рівняння:

$$B = \frac{R}{\mu}.$$

Підставляючи таке значення B в закон Клапейрона для довільної маси газу m одержимо:

$$\frac{PV}{T} = m\frac{R}{\mu}$$

або

$$PV = \frac{m}{\mu}RT.$$

Одержали математичний вираз закону Менделєєва-Клапейрона, в якому $\frac{m}{\mu} = \nu$ - число кіломолів у даній масі газу.

6. Постійна Больцмана (k)

$$k = \frac{R}{N_A};$$

$$k = \frac{8,31}{6,023 \cdot 10^{26}} = 1,38 \cdot 10^{-26} \ \frac{кДж}{град} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{град}.$$

7. Нормальними умовами для газу вважається стан при $T = 273{,}15\ K\ (0^0\ C)$, $P = 1{,}0132 \cdot 10^5\ \frac{H}{м} = 1\ атм = 760\ мм.рт.ст.$

При цих умовах 1 кмоль газу займає об'єм $V_0 = 22{,}4\ м^3$, а 1 моль – $22{,}4 \cdot 10^{-3}\ м^3 = 22{,}4\ л$.

7. Закон Дальтона

Нехай в посудині з об'ємом V знаходиться суміш газів з молярними вагами $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$ і масами $m_1, m_2 \dots m_n$ при температурі T.

Тиск, який би створював один газ, якби він займав весь об'єм V називається парціальним тиском.

Відповідно до рівняння Менделєєва – Клапейрона для парціальних тисків маємо:

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{m_1}{\mu_1}\dfrac{RT}{V} \\ P_2 = \dfrac{m_2}{\mu_2}\dfrac{RT}{V} \\ \vdots \\ P_n = \dfrac{m_n}{\mu_n}\dfrac{RT}{V} \end{cases}.$$

Додамо ці рівняння почленно:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n}\right)\frac{RT}{V},$$

або

$$PV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n}\right)RT.$$

Одержали закон Дальтона: повний тиск суміші газів P рівний сумі парціальних тисків всіх газів, що входять в суміш.

Тема 2. Перший закон термодинаміки

§1. Перший закон термодинаміки

1. Енергія системи і перший закон термодинаміки

За законом збереження і перетворення енергії перший закон термодинаміки формулюється так: кількість теплоти, що надана системі, витрачається на збільшення її внутрішньої енергії і на виконання системою роботи над зовнішніми тілами:

$$\Delta Q=\Delta u + A.$$

Одержали математичний запис першого закону термодинаміки.

2. Вічний двигун першого роду

Якщо система є періодично діючою машиною, в якій газ за один період повертається до початкового стану, то зміна повної енергії його, а отже і внутрішньої, за один період рівна нулю:

$$\Delta u = 0.$$

У такому випадку робота, виконана системою чи тепловою машиною за один цикл рівна підведеній зовні теплоті ΔQ:

$$\Delta Q = A.$$

Виходячи з цього сформулюємо перший закон термодинаміки інакше: неможливо побудувати періодично діючий двигун, який виконував би роботу без підведення енергії ззовні, або виконував би роботу більшу, за кількість переданої йому ззовні енергії (вічний двигун першого роду неможливий).

§2. Робота газу при зміні його об'єму

1. Нехай газ міститься в циліндрі під невагомим поршнем з площею S (рис. 4). На газ діє лише зовнішній тиск P. Якщо поршень перебуває у рівновазі, то параметри газу такі $P_1, V_1, T_1,$ де $P_1 = P$. Якщо до газу підвести певну кількість теплоти δQ, то газ нагріється і, відповідно до рівняння стану

газу, його тиск зросте. Рівновага поршня порушиться і поршень підніметься на величину dx, таку, за якої зміна об'єму знову приведе до зрівноважування із зовнішнім тиском. Параметри газу стануть P_2, V_2, T_2 $(P_2 = P)$.

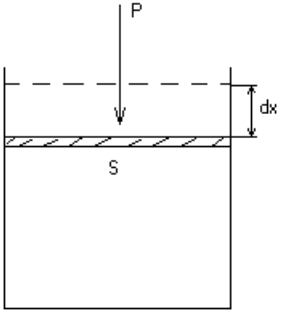


Рис. 4. Газ, що знаходиться під поршнем

Розширюючись, газ виконує роботу проти сил зовнішнього тиску:

$$\delta A = Fdx = PSdx,$$

або

$$\delta A = PdV.$$

Одержали формулу для елементарної роботи, що виконується проти сил зовнішнього тиску. Вона справедлива не тільки для газів, а й для довільних термодинамічних систем.

2. Зобразимо зміну термодинамічних параметрів газу графічно в координатах $(P-V)$ (рис. 5). Відповідно до формули для δA, робота по розширенню газу із стану C_1 в стан C_2 рівна площі фігури $V_1\, C_1\, C_2\, V_2$, тобто означеному інтегралу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \delta A = \int_{V_1}^{V_2} PdV.$$

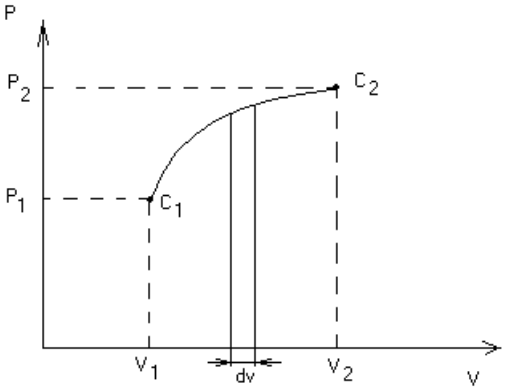


Рис. 5. Робота по розширенню газу із стану C_1 в стан C_2

Висновок:

1) З графіка видно, що, на відміну від внутрішньої енергії, робота залежить не лише від початкового і кінцевого станів системи, а і від вигляду термодинамічного процесу (від вигляду кривої C_1 C_2).

2) Якщо робота залежить від вигляду термодинамічного процесу, то і кількість теплоти Q, відповідно до першого начала термодинаміки, залежить від вигляду термодинамічного процесу. Тому для малих змін термодинамічних величин перший закон термодиеаміки запишемо:

$$\delta Q = du + \delta A.$$

Зауваження:

1) Величина значення якої залежить лише від значень параметрів стану в початковому і кінцевому положеннях, з математичної точки зору є повним диференціалом і її зміну позначають: du, dT .

2) Якщо ж значення величини залежить, ще і від способу її зміни, то можна говорити лише про частковий диференціал (часткову похідну) і зміну такої величини позначають: $\delta A, \delta Q$.

§3. Теплоємність газу

1. Питомою теплоємністю (c) називають фізичну величину, що чисельно дорівнює кількості теплоти, яку слід надати одиниці маси даної речовини, щоб змінити її температуру на один градус**:**

$$c = \frac{\delta \mathrm{Q}}{m \cdot dT}.$$

Одиниці вимірювання питомої теплоємності:

$$[c] = 1\frac{Дж}{кг \cdot K}.$$

2. Молярною теплоємністю (C) називають фізичну величину, що чисельно рівна кількості теплоти, яку треба надати одному кілограм молю речовини, щоб змінити його температуру на один градус.

Співвідношення між молярною і питомою теплоємностями задається виразом:

$$C = c\mu,$$

де μ – молярна маса речовини.

§4. Застосування першого закону термодинаміки до ізопроцесів

Ізопроцесами називають такі термодинамічні процеси, при яких один з параметрів стану (P, V, T) залишається постійним.

1. Зміна внутрішньої енергії газу при ізохорному процесі

Для ізохорного процесу об'єм газу є величина постійна:

$$V = const.$$

Тому елементарна зміна об'єму

$$dV = 0.$$

Враховуючи це, для малих змін термодинамічних величин, перший закон термодинаміки запишемо:

$$\delta Q = du,$$

бо в ізохорному процесі

$$\delta A = PdV = 0.$$

Висновок: в ізохорному процесі вся теплота, що підводиться до системи іде на зміну її внутрішньої енергії.

Для одиниці маси речовини (так, як $\delta Q = cdT$)

$$du = c_V dT,$$

де c_V - питома теплоємність при сталому об'ємі.

Зауваження: для ідеального газу ця формула справедлива для всіх процесів.

Для довільної маси газу зміна внутрішньої енергії визначається:

$$du = \frac{m}{\mu}\mu \cdot c_V dT,$$

або

$$du = \frac{m}{\mu} C_V dT,$$

де C_v - молярна теплоємність при постійному об'ємі.

Одержали формулу для зміни внутрішньої енергії довільної маси ідеального газу при ізохорному процесі,

2. Кількість теплоти і робота в ізобарному процесі

В ізобарному процесі тиск газу залишається постійним $(P = const)$.

Питома теплоємність в такому процесі позначається c_p і визначається виразом (для m=1 кг):

$$c_P = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Відповідно до цього, кількість теплоти, що надається одиниці маси газу для нагрівання його на один градус, визначиться таким чином:

$$\delta Q = c_p dT .$$

Для довільної маси газу кількість теплоти, необхідної для зміни температури на dT :

$$\delta Q = m c_p dT ,$$

або

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} \mu c_p dT .$$

Отже:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_p dT .$$

Одержали кількість наданої теплоти довільній масі газу в ізобарному процесі. Тут C_p - молярна теплоємність при сталому тиску:

$$C_p = \mu c_p .$$

Робота, яку виконує газ при ізобарному процесі:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P(V_2 - V_1) .$$

3. Рівняння Майєра

Запишемо перший закон термодинаміки для одиниці маси речовини в ізобарному процесі:

$$\delta Q = du + \delta A ,$$

або

$$c_p dT = du + P dV .$$

Для ідеального газу

$$du = c_V dT ,$$

тоді

$$c_p dT = c_V dT + PdV\,. \qquad \text{(а)}$$

З рівняння стану ідеального газу

$$PV = \frac{m}{\mu} RT\,,$$

для одиниці маси газу (m = 1кг):

$$PV = \frac{R}{\mu} T\,.$$

Вважаючи, що $P = const$, продиференціюєм дане рівняння:

$$PdV = \frac{R}{\mu} dT\,. \qquad \text{(б)}$$

Підставимо вираз (б) в (а) і одержимо:

$$c_p dT = c_V dT + \frac{R}{\mu} dT\,.$$

Скоротивши на dT матимемо:

$$R = \mu(c_p - c_V)\,,$$

або

$$R = C_p - C_V\,.$$

З останньої формули, яка являє собою рівняння Майєра, видно, що для ідеального газу універсальна газова стала рівна різниці молярних теплоємностей ідеального газу при сталому тиску і сталому об’ємі.

4. Фізичний зміст універсальної газової постійної

Робота в ізобарному процесі визначається виразом:

$$A = P(V_2 - V_1)\,.$$

З рівняння стану ідеального газу для одного кіло моля:

$$PV = RT\,.$$

Відповідно до останнього виразу, формули для об'ємів у двох різних станах запишемо:

$$V_1 = \frac{RT_1}{P},$$

$$V_2 = \frac{RT_2}{P}.$$

Тоді робота при ізобарному процесі для одного кіломоля речовини**:**

$$A = R(T_2 - T_1).$$

З даного виразу універсальна газова постійна:

$$R = \frac{A}{T_2 - T_1}.$$

Фізичний зміст універсальної газової постійної: універсальна газова постійна (R) чисельно рівна роботі ізобарного розширення одного кіломоля ідеального газу при нагріванні його на один градус.

5. Робота і кількість теплоти в ізотермічному процесі

Ізотермічним називають термодинамічний процес, що відбувається при незмінній температурі ($T = const$). Для даної кількості речовини з рівняння стану ідеального газу:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

При $T = const$

$$PV = const.$$

Термодинамічна діаграма стану такого процесу має вигляд, зображений на рис. 6.

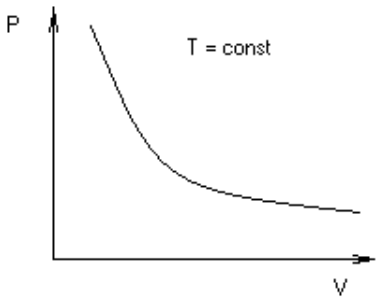


Рис. 6. Ізотерма ідеального газу

Перший закон термодинаміки для одного кіломоля при елементарних змінах параметрів стану запишемо у вигляді:

$$\delta Q = du + \delta A$$

Вся теплота, що підводиться до ідеального газу (при $T = const$), іде на виконання роботи. Внутрішня енергія залишається сталою. Тобто

$$du = C_v dT = 0 .$$

Виходячи з останнього

$$\delta Q = \delta A .$$

Повна зміна параметрів стану системи при ізотермічному процесі приводить до визначення кількості теплоти, а значить і роботи методом інтегрування.

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} P dV .$$

З рівняння стану ідеального газу:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT ,$$

для одного кіломоля

$$PV = RT \quad \Rightarrow \quad P = \frac{RT}{V} .$$

Підставимо таке значення тиску в інтеграл і одержимо:

$$\mathrm{Q} = A = \int_{V_1}^{V_2} RT \frac{dV}{V}.$$

Тоді

$$\mathrm{Q} = A = RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Одержали вираз для роботи і кількість теплоти в ізотермічному процесі для одного кіломоля ідеального газу.

Для довільної кількості газу формула для роботи і кількість теплоти при ізотермічному процесі буде мати вигляд:

$$\mathrm{Q} = A = RT \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Враховуючи, що при $T = const$ для двох станів ідеального газу

$$P_1 V_1 = P_2 V_2,$$

а отже

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2},$$

формула для роботи і кількість теплоти при ізотермічному процесі набуде вигляду:

$$\mathrm{Q} = A = RT \frac{m}{\mu} \ln \frac{P_1}{P_2}.$$

6. Адіабатний процес

Цей процес відбувається при відсутності теплообміну системи з навколишнім середовищем ($\delta \mathrm{Q} = 0$). Тому для малих змін термодинамічних параметрів системи перший закон термодинаміки запишеться:

$$du + \delta A = 0,$$

або

$$\delta A = -du.$$

Виконання газом роботи при адіабатному процесі веде до зменшення його внутрішньої енергії, а значить і температури.

1). Рівняння Пуассона для адіабатного процесу

Продиференціюємо рівняння стану ідеального газу вважаючи, що P,V,T змінні величини:

$$d(PV) = d(\frac{m}{\mu}RT).$$

Для одиниці маси газу ($m = 1\,кг$) даний вираз набере вигляду:

$$d(PV) = d(\frac{R}{\mu}T).$$

Тоді

$$PdV + VdP = \frac{R}{\mu}dT\ .$$

Звідси

$$dT = \frac{PdV + VdP}{\frac{R}{\mu}}.$$

З рівняння Майєра

$$R = \mu(c_p - c_V) \Rightarrow \frac{R}{\mu} = c_p - c_V\ .$$

Тому формула для dT набере вигляду:

$$dT = \frac{PdV + VdP}{c_p - c_V}. \qquad (а)$$

У свою чергу, перший закон термодинаміки для адіабатного процесу одиниці маси ідеального газу матиме вигляд:

$$c_V dT + PdV = 0. \qquad (б)$$

Підставимо формулу (а) в (б):

$$\frac{c_V}{c_p - c_V}(PdV + VdP) + PdV = 0.$$

$$c_p PdV - c_V PdV + c_V PdV + c_V VdP = 0.$$

$$c_p PdV + c_V VdP = 0.$$

Розділимо даний вираз на PV:

$$c_p \frac{dV}{V} + c_V \frac{dP}{P} = 0,$$

або:

$$\frac{c_p}{c_V}\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0.$$

Неозначений інтеграл останнього рівняння дасть формулу:

$$\frac{c_p}{c_V}\ln V + \ln P = \ln C.$$

За правилами логарифмів $\begin{cases} \ln a^в = в \ln a \\ \ln a + \ln в = \ln ав \end{cases}$.

Отже, попередня формула набуде вигляду:

$$\ln V^{\frac{c_p}{c_V}} + \ln P = \ln c;$$

$$\ln PV^{\frac{c_p}{c_V}} = \ln c.$$

Таким чином одержали **рівняння Пуассона**:

$$P \cdot V^{\frac{c_p}{c_V}} = const,$$

де c_p і c_V – питомі теплоємності ідеального газу,

$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ - коефіцієнт Пуассона (показник адіабати).

Враховуючи, що $C_p = \mu c_p$ і $C_V = \mu c_V$,

коефіцієнт Пуассона можна записати:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}.$$

Тоді **рівняння Пуассона** набуде вигляду:

$$P \cdot V^{\gamma} = const.$$

Відповідно до цього, залежність тиску від об'єму в адіабатному процесі представляється кривою – адіабатою (див. рис. 7).

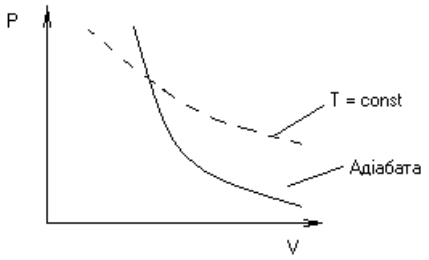


Рис. 7. Адіабата ідеального газу

Часто використовують видозмінені рівняння Пуассона:

$$PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = const,$$
$$TV^{\gamma-1} = const,$$
$$VT^{\frac{1}{\gamma-1}} = const,$$
$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const.$$

2). Робота при адіабатному процесі

Відповідно до загальної формули для роботи ідеального газу:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV.$$

З рівняння Пуассона:

$$PV^{\gamma} = P_1V_1^{\gamma} \Rightarrow P = \frac{P_1V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}},$$

де P_1 і V_1 - постійні параметри заданого стану ідеального газу в адіабатному процесі. Тоді:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}} dV = P_1V_1^{\gamma} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}}.$$

Отже, формула для роботи ідеального газу в адіабатному процесі має вигляд:

$$A = \frac{P_1V_1^{\gamma}}{1-\gamma}\left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right].$$

На практиці користуються і іншими формулами для роботи ідеального газу при адіабатному процесі:

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right],$$

$$A = \frac{P_1V_1(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)T_1}.$$

§5. Внутрішня енергія ідеального газу

Числом ступенів вільності (i) молекули називають найменше число незалежних координат, які необхідно задати, щоб повністю визначити положення даної молекули в просторі.

Молекули одноатомного газу можна розглядати, як матеріальні точки, тому вони мають три ступені вільності (три координати x, y, z): i =3.

Як буде показано вище, середня кінетична енергія поступального руху одноатомної молекули визначається формулою:

$$\bar{\varepsilon}_{кін} = \frac{3}{2}kT,$$

тому на один ступінь вільності припадає енергія:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3}\bar{\varepsilon}_{кін},$$

або

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2}kT.$$

Якщо молекула складається з двох атомів, то її можна розглядати, як жорстку гантелю з п'ятьма ступенями вільності: 3 ступені поступального руху (як для одноатомної молекули) і два ступені обертального руху (обертання навколо осі, що проходить вздовж "гантелі" не враховується через мале значення кінетичної енергії обертання відносно цієї осі) (i =5).

Для молекул, що складаються з трьох і більше атомів, існує шість ступенів вільності: три – поступального і три – обертального руху (i =6).

Відповідно до закону рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності, на кожний ступінь вільності молекули в середньому припадає однакова кінетична енергія, яка рівна:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2}kT.$$

Якщо молекула має i ступенів вільності, то її середня кінетична енергія рівна:

$$\bar{\varepsilon}_{кін} = \frac{i}{2}kT.$$

Оскільки в ідеальному газі потенціальних міжмолекулярних взаємодій не існує, то внутрішня енергія такого газу рівна сумі кінетичних енергій його молекул.

Для одного кіломоля ідеального газу внутрішня енергія визначиться:

$$u = \bar{\varepsilon}_{кін}N_A.$$

Враховуючи значення $\overline{\varepsilon}_{кін}$:

$$u = \frac{i}{2} kTN_A,$$

або

$$u = \frac{i}{2} RT .$$

Для довільної кількості газу внутрішня енергія рівна:

$$u = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT .$$

Як видно з виразу, особливістю внутрішньої енергії ідеального газу є її лінійна залежність від абсолютної температури: $u = f(T)$.

§6. Висновки класичної теорії теплоємності

Внутрішня енергія одного кіломоля ідеального газу

$$u = \frac{i}{2} RT .$$

З іншого боку, відомо, що зміна внутрішньої енергії одного кіломоля ідеального газу:

$$du = C_V dT ,$$

тому

$$C_V = \frac{du}{dT},$$

або

$$C_V = \frac{d}{dT}(\frac{i}{2} RT) .$$

Остаточно молярна теплоємність ідеального газу при постійному об'ємі з i ступенями вільності запишеться:

$$C_V = \frac{i}{2} R .$$

З рівняння Майєра ($R = C_p - C_V$) знайдемо молярну теплоємність ідеального газу при постійному тиску з i ступенями вільності (C_p):

$$C_p = R + C_V;$$

$$C_p = R + \frac{i}{2}R;$$

$$C_p = \frac{2+i}{2}R.$$

Отже, як видно з формул для C_p і C_V, молярні теплоємності в класичній теорії не залежать від температури.

Тема 3. Кінетична теорія газів та елементи молекулярної статистики

§1. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів

Виділимо на стінці посудини з газом малу плоску круглу ділянку площею ΔS. Якщо припустити, що всі молекули ідеального газу рухаються з середньою швидкістю $\upsilon_{ср}$, то враховуючи рівнозначність усіх шести напрямків руху для кожної молекули, число молекул, які вдаряться в площадку ΔS за час Δt буде рівне:

$$\Delta N = \frac{1}{6}nV, \qquad (1)$$

де V - об'єм циліндра з основою ΔS і твірною, що рівна $\upsilon_{ср}\Delta t$ (див. рис.8),

n - концентрація молекул газу у посудині.

Підставивши вираз для об'єму одержимо:

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \upsilon_{ср} \Delta t \Delta S . \qquad (2)$$

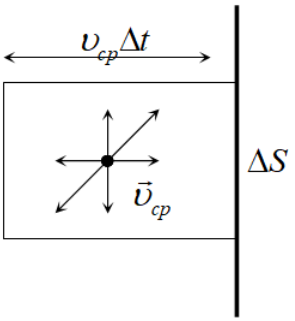


Рис. 8. До виведення основного рівняння молекулярно – кінетичної теорії газів

З розділу “Механіка” відомо, що при абсолютно пружному ударі, яким є удар молекули газу в стінку, імпульс молекули зміниться на величину

$$\Delta p = 2m\upsilon_{ср} , \qquad (3)$$

де m - маса однієї молекули.

Імпульс такої ж величини одержить і стінка посудини з газом. Якщо за час Δt на ділянку стінки ΔS падає не одна, а ΔN молекул, то зміна імпульсу стінки буде рівна:

$$\Delta P = 2m\upsilon_{ср}\Delta N . \qquad (4)$$

Підставивши з (2) значення ΔN у (4) одержимо:

$$\Delta P = \frac{1}{3} nm\upsilon_{ср}^2 \Delta t \Delta S . \qquad (5)$$

За другим законом Ньютона зміна імпульсу тіла рівна імпульсу сили F , що діє на нього:

$$\Delta P = F\Delta t\,, \tag{6}$$

або:

$$\frac{1}{3} nm\upsilon_{cp}^2 \Delta t \Delta S = F\Delta t\,. \tag{7}$$

Скоротивши на Δt одержимо:

$$\frac{1}{3} nm\upsilon_{cp}^2 \Delta S = F\,. \tag{8}$$

З означення для тиску P газу:

$$P = \frac{F}{\Delta S}\,. \tag{9}$$

З формули (9) :

$$F = P\Delta S\,. \tag{10}$$

Порівнюючи вирази для сили з формул (8) і (10) та скорочуючи на ΔS, одержимо формулу для тиску, який створюють молекули газу на стінку посудини:

$$P = \frac{1}{3} nm\upsilon_{cp}^2\,, \tag{11}$$

або:

$$P = \frac{2}{3} n\frac{m\upsilon_{cp}^2}{2}\,. \tag{12}$$

Величина

$$\overline{\varepsilon}_{пост} = \frac{m\upsilon_{cp}^2}{2} \tag{13}$$

є середньою кінетичною енергією поступального руху однієї молекули.

Тоді формулу (12) запишемо:

$$P = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}_{пост}. \qquad (14)$$

Одержали основне рівняння молекулярно – кінетичної теорії газів.

§ 2. Повна енергія поступального руху усіх молекул ідеального газу

Концентрація молекул газу n визначається відношенням кількості молекул N у даному об'ємі V, до величини цього об'єму:

$$n = \frac{N}{V}. \qquad (15)$$

Підставимо формулу для концентрації у вираз (14):

$$PV = \frac{2}{3} N \bar{\varepsilon}_{пост}. \qquad (16)$$

Вираз

$$E_{пост} = N \bar{\varepsilon}_{пост} \qquad (17)$$

визначає сумарну кінетичну енергію поступального руху всіх молекул ідеального газу в об'ємі V.

Порівнюючи рівняння Мендєлєєва – Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \qquad (18)$$

з формулою (16), враховуючи (17), одержимо вираз для **сумарної кінетичної енергії поступального руху всіх молекул ідеального газу**:

$$E_{пост} = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT. \qquad (19)$$

§3. Середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули ідеального газу

З формули (17):

$$\overline{\varepsilon}_{пост} = \frac{E_{пост}}{N}. \qquad (20)$$

Кількість молекул можна визначити, як добуток числа молів даного газу ν на число Авогадро N_A:

$$N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A. \qquad 1)$$

Підставивши у (20) вирази для відповідних величин з (19) і (21), враховуючи, що

$$\frac{R}{N_A} = k, \qquad (22)$$

одержимо формулу для визначення кінетичної енергії поступального руху однієї молекули:

$$\overline{\varepsilon}_{пост} = \frac{3}{2} kT. \qquad (23)$$

Зауваження. При підстановці формули (23) у (14) одержимо ще один запис **основного рівняння молекулярно – кінетичної теорії газів**:

$$P = nkT. \qquad (24)$$

§4. Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями. Закон Максвела. Статистичні швидкості

При будь-якій температурі ідеального газу його молекули мають різні значення кінетичної енергії, а значить і різні швидкості. Розподіл молекул за швидкостями при певній температурі газу визначає закон Максвела: якщо в одиниці об'єму ідеального газу знаходиться n_0 молекул при температурі T, то число молекул dn, які мають швидкості, що лежать в інтервалі від υ до $\upsilon + d\upsilon$ дається виразом:

$$dn = 4\pi n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^2 d\upsilon ,$$

де m - маса молекули;

k - постійна Больцмана.

Особливості закону Максвела:

1. Закон Максвела є статистичним законом, тобто він буде тим точнішим, чим більшою є концентрація n_0 молекул даного газу.

2. Закон Максвела не діє у випадку, якщо на газ впливає певна сила (наприклад сила тяжіння).

3. Якщо закон Максвела записати у вигляді

$$\frac{dn}{d\upsilon} = f(\upsilon),$$

де $\frac{dn}{d\upsilon}$ - число молекул в одиничному інтервалі швидкостей для даної температури газу, то графічно залежність (26) набере вигляду зображеному на рисунку 9.

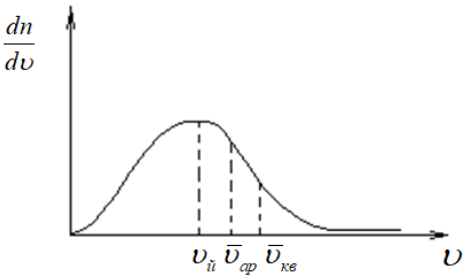


Рис. 9. Розподіл молекул газу за швидкостями

Найбільш ймовірною ($\upsilon_{й}$) називають таку швидкість, яку при даній температурі має найбільше число молекул даного газу.

$$\upsilon_{й} = \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

де m - маса одної молекули.

Враховуючи, що

$$k = \frac{R}{N_A}, \quad \text{а} \quad m = \frac{\mu}{N_A}$$

вираз для найбільш ймовірної швидкості молекул газу матиме вигляд:

$$\upsilon_{й} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

На графіку розподілу молекул за швидкостями (рис. 9) $\upsilon_{й}$ знаходиться в точці, що відповідає пікові кривої.

Середня квадратична швидкість:

$$\overline{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

або

$$\overline{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

На графіку розподілу молекул за швидкостями (рис. 9) $\overline{\upsilon}_{кв}$ знаходиться в точці справа від $\upsilon_{й}$.

Середня арифметична швидкість:

$$\bar{\upsilon}_{ар} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

або

$$\bar{\upsilon}_{ар} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.$$

На графіку розподілу молекул за швидкостями (рис. 9) $\bar{\upsilon}_{ар}$ знаходиться між точками, що відповідають $\upsilon_{й}$ та $\bar{\upsilon}_{кв}$.

§5. Середнє число зіткнень молекул в одиниці об'єму за одиницю часу

При русі у газі кожна молекула буде стикатися з іншими, центри яких лежать на відстанях від центра даної молекули не більших за її діаметр (d). Тому, за рахунок хаотичності руху молекул, зіткнення будуть відбуватись у ламаному циліндрі, радіус якого рівний d (рис. 10).

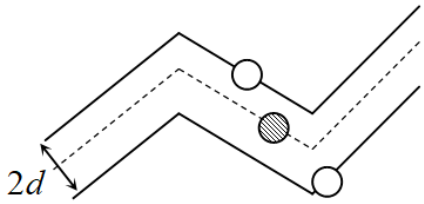


Рис. 10. Схема руху молекули газу

За одиницю часу розглядувана молекула проходить шлях

$$l = \bar{\upsilon}_{відн} \cdot 1(c) = \bar{\upsilon}_{відн},$$

де $\bar{\upsilon}_{відн}$ - середня швидкість даної молекули відносно інших молекул газу.

Об'єм циліндра, що відповідає цьому шляхові

$$V = l \cdot \pi d^2,$$

або, враховуючи вираз для l:

$$V = \bar{\upsilon}_{відн} \cdot \pi d^2.$$

Якщо n - концентрація молекул газу, то середнє число молекул ($\bar{z}$), центри яких за одиницю часу попадуть у вище описаний циліндр визначимо за формулою:

$$\bar{z} = nV,$$

або:

$$\bar{z} = n\pi d^2 \bar{\upsilon}_{відн}.$$

Беручи до уваги, що

$$\bar{\upsilon}_{відн} = \sqrt{2}\bar{\upsilon},$$

де $\bar{\upsilon}$ - середня швидкість руху молекули, отримаємо формулу середнього числа зіткнень однієї молекули за одиницю часу:

$$\bar{z} = \sqrt{2} n\pi d^2 \bar{\upsilon}.$$

Повне число зіткнень всіх молекул в одиниці об'єму за одиницю часу ($\bar{Z}$) визначимо, якщо помножимо $\bar{z}$ на концентрацію молекул n і введемо коефіцієнт $\frac{1}{2}$ для виключення подвійного обрахунку зіткнень молекул (молекула 1 стикається з молекулою 2 і молекула 2 стикається з молекулою 1 – те ж саме зіткнення, яке без коефіцієнта $\frac{1}{2}$ рахувалося б двічі):

$$\bar{Z} = \frac{1}{2} n\bar{z},$$

враховуючи вираз для $\bar{z}$:

$$\bar{Z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi d^2 n^2 \bar{\upsilon},$$

або

$$\bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi d^2 n^2 \bar{\upsilon} .$$

Отримали формулу для визначення повного числа зіткнень всіх молекул газу в одиниці об'єму за одиницю часу.

§8. Середня довжина вільного пробігу молекули

Шлях λ_i, який проходить молекула від одного зіткнення до іншого називають довжиною вільного пробігу молекули. За рахунок хаотичного руху усіх молекул газу $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \cdots$. Тому вводять величину середньої довжини вільного пробігу.

Середньою довжиною вільного пробігу молекули називають шлях, який всередньому проходить молекула у газі між двома зіткненнями за даних умов.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i ,$$

де N - число зіткнень за певний проміжок часу.

За одиницю часу одна молекула проходить шлях

$$l = \bar{\upsilon} \cdot 1(c) = \bar{\upsilon} .$$

На цьому шляху вона виконує $\bar{z}$ зіткнень. Отже, середній шлях між двома зіткненнями, або інакше – середню довжину вільного пробігу молекули визначимо такою формулою:

$$\bar{\lambda} = \frac{l}{\bar{z}} .$$

Враховуючи вирази для l і $\bar{z}$ отримаємо формулу для середньої довжини вільного пробігу молекули:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\upsilon}}{\sqrt{2} n \pi d^2 \bar{\upsilon}} ,$$

Або:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} .$$

§9. Поняття про вакуум

Для даного сорту газу ($d = const$) вираз для середньої довжини вільного пробігу молекули запишемо:

$$\bar{\lambda} n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2} = const .$$

Згідно виразу для основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів P пропорційне n, тому останню формулу запишемо так:

$$\bar{\lambda} P = const ,$$

або

$$\bar{\lambda} \sim \frac{1}{P} .$$

Якщо помістити двоатомний газ у посудину з лінійними розмірами $L = 0.1 м$ і поступово його відкачувати, то при тиску $10^{-3} мм.рт.ст.$

$$\bar{\lambda} \approx L .$$

Подальше відкачування газу не змінить $\bar{\lambda}$ бо молекули будуть стикатись лише із стінками посудини.

Такий стан газу, при якому молекули пролітають між стінками посудини так, ніби інших молекул там не існує, називається **вакуумом**.

На закінчення зауважимо, що поняття вакууму є відносним. У розглядуваному вище прикладі при тиску $10^{-3} мм.рт.ст.$ в посудині з лінійними розмірами $L = 0.1 м$ знаходиться приблизно ще $2.7 \cdot 10^{13}$ молекул газу.

Тема 4. Явища переносу

Якщо в газі чи в рідині існує просторова неоднорідність густини, температури, чи швидкості впорядкованого руху окремих шарів, то за рахунок хаотичного руху молекул ці

неоднорідності вирівнюються. Такі процеси вирівнювання називаються **явищами переносу**.

До таких явищ відносяться дифузія, теплопровідність і внутрішнє тертя в газі.

§1. Дифузія

Явище переносу – дифузія полягає у самовільному взаємному проникненні і перемішуванні частинок двох газів, рідин, чи навіть твердих тіл, що стискаються. В хімічно чистих речовинах дифузія виникає внаслідок різної густини молекул даної речовини в різних частинах її об'єму. Основною причиною дифузії, як і інших явищ переносу, є накладання на хаотичний рух молекул даного газу чи рідини, направленого їх руху, який викликаний неоднорідністю густини.

Перенесення маси речовини при дифузії підлягає закону А. Фіка: маса газу dM, яка переноситься за одиницю часу через взятий всередині газу елемент поверхні, площею рівною одиниці, прямопропорційна зміні густини газу на одиницю довжини x в напрямку нормалі до розглядуваної поверхні.

$$dM = -D\frac{d\rho}{dx},$$

$\frac{d\rho}{dx}$ – градієнт густини в газі, який показує напрям найшвидшого зменшення густини;

D – коефіцієнт дифузії.

Коефіцієнтом дифузії називають фізичну величину, яка чисельно рівна масі речовини, що переноситься через одиничну площадку, в напрямі нормалі до неї, за одиницю часу при градієнті густини рівному одиниці. Розмірність коефіцієнта дифузії:

$$[D] = 1\frac{м^2}{с}.$$

Знак “ - “ у формулі показує, що маса речовини переноситься в напрямі меншої густини.

В загальному, для довільної площі і часу перенесення використовується диференціальна форма виразу:

$$dM = -D\frac{d\rho}{dx}dS \cdot dt,$$

де dS і dt – безконечно малі значення площі і часу переносу.

Якщо дифузія є незмінною в часі і в усьому об’ємі газу чи рідини, то останню формулу можна використовувати у вигляді:

$$\Delta M = -D\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S \cdot \Delta t.$$

§2. Коефіцієнт дифузії

Нехай густина газу ρ залежить лише від координати x: $\rho = f(x)$. Це означає, що густина є однаковою в усіх точках довільної площини перпендикулярної до осі $0x$ (рис. 11).

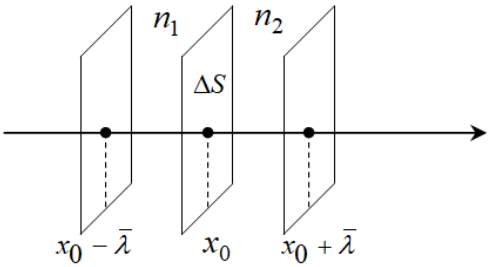


Рис. 11. Площини однакової густини

Враховуючи хаотичність руху молекул будемо вважати, що лише 1/3 з їх загальної кількості (n_0), рухається вздовж $0x$.

Крім того, лише половина з них рухається в додатному напрямі. Отже вздовж осі $0x$ у додатному напрямі рухається $\frac{1}{6}n_0$ (n_0 - концентрація молекул газу).

Нехай всі молекули мають однакову середню швидкість $\bar{u}$. Через різну густину газу справа і зліва від площини x_0, за одиницю часу через неї переноситься різна кількість молекул.

Визначимо різницю Δn числа молекул, що проходять через площу x_0 в обидва боки. На відстані середньої довжини вільного пробігу ($\bar{\lambda}$) в молекули не змінюються ні величина ні напрям швидкості. Тому вважається, що з кожного боку від площини x_0, її вільно і незмінно досягає 1/6 всіх молекул, які перебувають від неї на відстані не більшій за довжину вільного пробігу (тобто обмежені площинами ($x_0 - \bar{\lambda}$) і ($x_0 + \bar{\lambda}$)). Тоді

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{1}{6}\bar{u}\Delta t n_o \Delta S(x_o - \bar{\lambda}) - \frac{1}{6}\bar{u}\Delta t n_o \Delta S(x_o + \bar{\lambda}),$$

або

$$\Delta n = n_1 - n_2 \equiv \frac{1}{6}\bar{u}\left[n_o(x_o - \bar{\lambda}) - n_o(x_o + \bar{\lambda})\right]\Delta t \Delta S,$$

де $n_0(x_0 - \bar{\lambda})\Delta S$ – число молекул між площинами ($x_0 - \bar{\lambda}$) і (x_0);

$n_0(x_0 + \bar{\lambda})\Delta S$ – число молекул між площинами (x_0) і ($x_0 + \bar{\lambda}$);

Δt – час спостереження;

ΔS – площа площини x_0.

Для одиничної площі і одиниці часу спостереження

$$\Delta n = \frac{1}{6}\bar{u}\left[n_0(x_0 - \bar{\lambda}) - n_0(x_0 + \bar{\lambda})\right].$$

Помножимо цю рівність на масу молекули і одержимо вираз для маси речовини ΔM, що пройшла за одиницю часу через одиничну площадку в напрямі осі $0x$:

$$\Delta M = \frac{1}{6}m\bar{u}\left[n_0(x_0 - \bar{\lambda}) - n_0(x_0 + \bar{\lambda})\right].$$

Методами математичної фізики можна довести, що

$$n_0(x_0 - \bar{\lambda}) = n_0(x_0) - \bar{\lambda}\frac{dn_0}{dx},$$

а також

$$n_0(x_0 + \bar{\lambda}) = n_0(x_0) + \bar{\lambda}\frac{dn_0}{dx}.$$

Тоді

$$\Delta M = \frac{1}{6} m\bar{u}\left[n_0(x_0) - \bar{\lambda}\frac{dn_0}{dx} - n_0(x_0) - \bar{\lambda}\frac{dn_0}{dx} \right],$$

або

$$\Delta M = -\frac{1}{3}\bar{u}\bar{\lambda}\frac{d(mn_0)}{dx}.$$

Так, як густина газу визначається:

$$\rho = m \cdot n_0,$$

то

$$\Delta M = -\frac{1}{3}\bar{u}\bar{\lambda}\frac{d\rho}{dx}\ .$$

Таким чином одержуємо вираз для **коефіцієнта дифузії** через параметри руху молекул:

$$D = \frac{1}{3}\bar{u}\bar{\lambda},$$

де $\bar{u}$ – середня швидкість руху молекул за даних умов;

$\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу молекули.

§3. Теплопровідність

Теплопровідність – явище передачі теплоти від більш нагрітих частин газу до менш нагрітих за допомогою переносу її молекулами, що мають різну кінетичну енергію в різних частинах газу.

Молекули у більш нагрітих частинах газу мають більшу кінетичну енергію. Хаотично рухаючись, вони потрапляють у менш нагріті частини газу і там віддають частину своєї енергії навколишнім молекулам. Навпаки, молекули з більш холодних

частин газу, потрапляючи у більш нагріті частини, збільшують свою кінетичну енергію внаслідок зіткнень з швидкими молекулами. Так виникає направлений потік теплоти з більш нагрітої частини газу у менш нагріту.

Перенесення теплоти при теплопровідності підлягає **закону Ж. Фур'є**: кількість теплоти ΔQ , яка переноситься за одиницю часу, через одиничну площадку, прямо пропорційна зміні температури на одиниці довжини x в напрямі нормалі до площадки.

$$\Delta Q = -K \frac{dT}{dx},$$

де $\frac{dT}{dx}$ – градієнт температури, який показує напрям найбільшого зростання температури;

K – **коефіцієнт теплопровідності**, що показує яка кількість теплоти переноситься, через одиницю площі, за одиницю часу при градієнті температури рівному одиниці.

Розмірність коефіцієнта теплопровідності:

$$[K] = 1 \frac{Дж}{м \cdot с \cdot К}.$$

Знак " - " у формулі показує, що енергія переноситься в сторону меншої температури.

Для довільної площі і часу теплопередачі використовується диференціальна форма виразу для перенесеної кількості теплоти:

$$dQ = -K \frac{dT}{dx} \cdot dS \cdot dt,$$

де dS і dt – безконечно малі значення площі і часу;

dQ – відповідне їм значення перенесеної кількості теплоти.

Для стаціонарної теплопередачі вираз набирає вигляду:

$$\Delta Q = -K \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t.$$

Коефіцієнт теплопередачі у всіх вище згаданих формулах має значення:

$$K = \frac{1}{3}\overline{u}\overline{\lambda}C_v\rho,$$

де C_v – питома теплоємність газу при постійному об'ємі;

ρ - густина газу.

§4. Внутрішнє тертя

Явище внутрішнього тертя (в'язкості) пов'язане з виникненням сил тертя між шарами газу або рідини, які переміщуються паралельно один одному з різними за величиною швидкостями.

З погляду кінетичної теорії газів причиною внутрішнього тертя є взаємодія окремих молекул шару А, що рухається з швидкістю $\vec{\upsilon}_1$ із молекулами шару В і навпаки (Рис. 12).

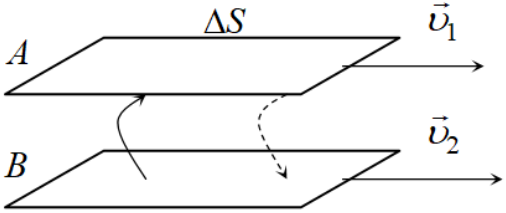


Рис. 12. Схема руху шарів рідини чи газу

Окремі молекули шару А попадаючи у шар В переносять туди імпульси ($m\vec{\upsilon}_1$) свого впорядкованого руху. Якщо $\upsilon_1 > \vec{\upsilon}_2$ то це пришвидшує рух шару В, якщо $\upsilon_1 < \vec{\upsilon}_2$ то - сповільнює. Аналогічний процес відбувається і при переході окремих молекул шару В у шар А. Зауважимо, що перехід молекул з шару А в шар В, чи навпаки, відбувається за рахунок їх хаотичного руху.

Явище внутрішнього тертя підлягає закону І. Ньютона: сила внутрішнього тертя, що діє на одиницю площі поверхні

шару, пропорційна зміні швидкості руху шарів на одиницю довжини x в напрямку перпендикулярному до поверхні шару.

$$dF = -\eta \frac{d\upsilon}{dx},$$

де $\frac{d\upsilon}{dx}$ – градієнт швидкості;

η – коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість), який чисельно рівний сумі внутрішнього тертя, що діє на одиницю площі поверхні шару, при градієнті швидкості рівному одиниці.

Розмірність коефіцієнта внутрішнього тертя:

$$[\eta] = 1\frac{H \cdot c}{м^2}.$$

У розрахунках часто використовується також коефіцієнт кінематичної в'язкості (ν):

$$\nu = \frac{\eta}{\rho},$$

де ρ - густина речовини.

Розмірність коефіцієнта кінематичної в'язкості:

$$[\nu] = 1\frac{м^2}{c}.$$

Знак " - " показує, що сила внутрішнього тертя направлена проти руху розглядуваного шару.

Для довільної площі шару використовується диференціальна форма запису закону Ньютона:

$$dF = -\eta \frac{dv}{dx} dS,$$

де dS – безконечно мале значення площі шару;

dF – значення сили внутрішнього тертя, що діє на шар площею dS.

Для стаціонарної картини руху шарів рідини чи газу:

$$\Delta F = -\eta \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} \Delta S .$$

Коефіцієнт динамічної в'язкості визначається за формулою:

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} \rho .$$

§5. Співвідношення між коефіцієнтами у явищах переносу

Коефіцієнти переносу не залежать від тиску газу бо зі збільшенням тиску все більше число молекул бере участь в явищах переносу, але при цьому суттєво зменшується їх довжина вільного пробігу.

Між коефіцієнтами переносу існують певні співвідношення. Якщо:

$D = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda}$ - коефіцієнт дифузії;

$K = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} C_V \rho$ - коефіцієнт теплопровідності;

$\eta = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} \rho$ - коефіцієнт внутрішнього тертя,

то, порівнюючи дані формули, отримаємо:

$$K = D \cdot C_V \cdot \rho ;$$

$$K = \eta \cdot C_V ;$$

$$\eta = D \cdot \rho ;$$

З цих співвідношень видно, що знайшовши з експерименту значення одного з коефіцієнтів можна обчислити два інші.

Тема 5. Другий закон термодинаміки

§1. Оборотні та необоротні процеси. Колові процеси

Термодинамічний процес називають оборотним, якщо він дозволяє повернення розглядуваної системи в попередній стан без будь-яких змін у навколишньому середовищі.

Процес є оборотним, якщо при виконанні його системою, спочатку у прямому, а потім у зворотному напрямі, у вихідний

стан повертається сама система і всі зовнішні тіла, з якими система взаємодіяла. Всякий процес, що не відповідає таким умовам є необоротним.

Прикладом оборотного процесу є коливання ідеального математичного маятника у вакуумі. Всі ж реальні процеси, як в механіці, так і в термодинаміці є необоротними. Прикладом необоротного процесу є гальмування внаслідок тертя. При цьому кінетична енергія тіла перетворюється у внутрішню енергію частинок тіла і навколишнього середовища. Для повернення такої системи у попередній стан, тобто виконання зворотного процесу, необхідно:

а) відібрати одержану кількість теплоти від тіла і навколишнього середовища;

б) виконати роботу по наданню тілу кінетичної енергії.

Для здійснення такого процесу необхідно виконати компенсуючий процес, який завжди приводить до зміни стану зовнішніх тіл.

Коловим процесом, або циклом називають такий процес, у результаті якого термодинамічне тіло повертається у початковий стан.

В діаграмах стану $P-V$, $P-T$, $V-T$ і інших, колові процеси зображуються у вигляді замкнених кривих (Рис. 13).

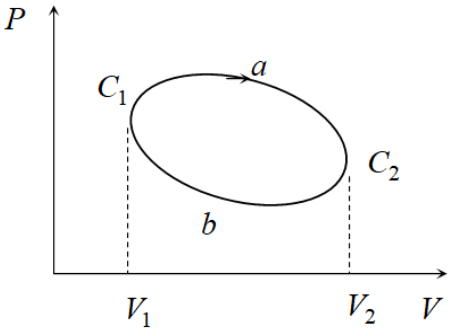


Рис. 13. Коловий термодинамічний процес

Коловий процес $C_1aC_2bC_1$, що відбувається в ідеальному газі можна розбити на два процеси:

1) розширення газу з стану C_1 в C_2 (процес C_1aC_2). При цьому виконується додатна робота A_1, яка рівна площі фігури $V_1C_1aC_2V_2$;

2) стискання газу з стану C_2 в C_1 (процес C_2bC_1). При цьому виконується робота над газом $(-A_2)$, що рівна площі фігури $V_1C_1bC_2V_2$.

В цілому за один цикл виконується робота, що рівна сумі робіт:

$$A = A_1 + (-A_2),$$

або:

$$A = A_1 - A_2.$$

Ця робота є додатна і чисельно рівна площі фігури $C_1aC_2bC_1$. Такий коловий процес, у якому виконується додатна робота, називають прямим коловим процесом.

Якщо коловий процес відбувається так, що сумарна робота є від'ємною (обхід контура відбувається у зворотному напрямі - $C_1bC_2aC_1$), то сумарна робота

$$A = A_2 - A_1$$

є від'ємною, але вимірюється площею тієї ж фігури $C_1aC_2bC_1$. Такий процес називається зворотним коловим процесом.

Зауваження: внутрішня енергія системи залежить від термодинамічного стану, а не від способу його зміни, тому в результаті колового процесу $\Delta U = 0$ і перший закон термодинаміки набуде вигляду:

$$Q = A,$$

де Q – загальна кількість теплоти, що надана системі в коловому процесі; A – робота газу в цьому процесі.

§2. Теплова машина. Цикл Карно і його коефіцієнт корисної дії для ідеальної теплової машини

І. Теплова машина

Робочим тілом називають газ (або інше термодинамічне тіло), який виконує коловий (необов'язково оборотний) процес і обмінюється енергією з іншими тілами.

Тепловим двигуном називається система, в якій робоче тіло виконує прямий цикл. При цьому $A>0,\ Q>0$.

Тіло, що має температуру T_1 і надає робочому тілу енергію в прямому циклі, називають нагрівником.

Тіло, якому робоче тіло віддає частину невикористаної на роботу енергії, називають холодильником. Температура холодильника $T_2 < T_1$.

Холодильною машиною називають систему, в якій робоче тіло виконує зворотний цикл: $A<0, Q<0$.

Як тепловий двигун, так і холодильна машина складається з нагрівника, температура якого T_1, холодильника з температурою T_2 і робочого тіла.

В холодильній машині за рахунок зовнішніх сил теплота відбирається від холоднішого тіла і передається теплішому.

ІІ. Цикл Карно

Циклом Карно називають циклічний термодинамічний процес, який складається з двох ізотерм і двох адіабат (рис. 14).

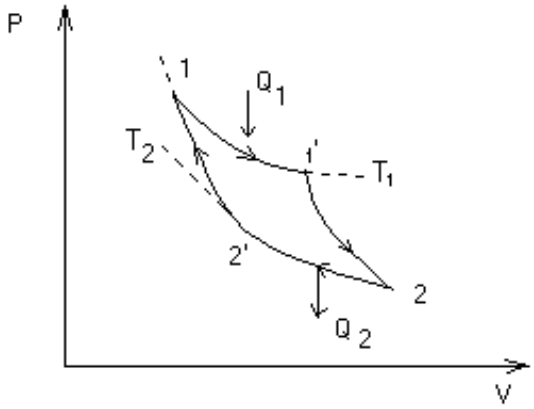


Рис. 14. Цикл Карно

Прямий цикл складається з таких процесів:

1 - 1' – ізотермічне розширення газу при T_1 ($T_1 = T_1^{'}$);

1' - 2 – адіабатне розширення газу;

2 - 2' – ізотермічне стискання газу при T_2 ($T_2 = T_2^{'}$);

2'-1 – адіабатне стискання газу.

В процесі 1 - 1' робочому тілу від нагрівника надається певна кількість теплоти ($Q_1 > 0$), яка іде на розширення газу. У процесі 2 - 2' робоче тіло віддає невитрачену частину теплоти до холодильника ($Q_2 < 0$). Адіабатність процесів 1' - 2 і 2' - 1 досягається великою швидкістю протікання цих процесів, при якій обмін енергією із зовнішніми тілами не встигає відбутись.

Розглянемо ідеальний цикл Карно, тобто такий, в якому робочим тілом є ідеальний газ.

Як у всякому коловому процесі $\Delta U = 0$ і за першим началом термодинаміки

$$A = \Delta Q,$$

тобто теплота іде на виконання системою роботи.

На основі цього, робота, що її виконує одиниця маси газу за один цикл рівна повній кількості теплоти, що надана системі (враховано, що Q_2 <0):

$$A = Q_1 + Q_2 .$$

Відомо, що в ізотермічному процесі для довільної маси (m) газу:

$$Q = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{P_1}{P_2},$$

де P_1 і P_2 - тиск в початковому і кінцевому стані термодинамічного процесу.

Тоді вираз для роботи набере вигляду:

$$A = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{P_1}{P_1'} + \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{P_2}{P_2'} .$$

Для ідеального циклу Карно:

$$\frac{P_1}{P_1'} = \frac{P_2'}{P_2},$$

тому:

$$A = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{P_1}{P_1'} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{P_2'}{P_2},$$

або:

$$A = \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2) \ln \frac{P_1}{P_1'} .$$

Отримали формулу для обчислення роботи, яка виконується довільною масою ідеального газу у прямому циклі Карно.

III. Коефіцієнт корисної дії циклу Карно

З формули $A = Q_1 - Q_2$

видно, що не вся надана робочому тілу енергія йде на виконання роботи. Тепловий двигун буде тим досконаліший, чим більша частина теплоти Q_1 перетвориться у корисну роботу.

Для кількісної характеристики досконалості теплового двигуна вводиться термічний коефіцієнт корисної дії:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

або через температури нагрівника і холодильника:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Холодильна машина, побудована на зворотному циклі Карно, відбирає від холоднішого тіла з температурою T_2, кількість теплоти Q_2 і віддає теплішому тілу з температурою T_1 кількість теплоти Q_1. При цьому над робочим тілом за один цикл зовнішні сили виконують роботу A.

Кількість відданої робочим тілом теплоти Q_1 рівна сумі отриманої кількості теплоти Q_2 і роботи A, яку виконують зовнішні сили:

$$Q_1 = Q_2 + A.$$

Ефективність холодильної машини характеризується холодильним коефіцієнтом корисної дії:

$$\eta_{x.м.} = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

§3. Другий закон термодинаміки

Перший закон термодинаміки твердить, що теплота надана системі, витрачається на збільшення її внутрішньої енергії, і на виконання системою роботи.

Суперечності першого закону термодинаміки:

1) не вказується напрям передачі теплоти: від гарячого до холодного тіла, чи навпаки – від холодного тіла до гарячого;

2) при умові $\Delta U = 0$, перший закон термодинаміки не виключає можливості такого процесу, єдиним результатом якого було б перетворення всієї теплоти, одержаної від якогось тіла, в еквівалентну роботу ($A = Q$). Такий процес називається вічним двигуном другого роду.

Зауважимо, що вічним двигуном першого роду вважають такий двигун, який виконував би роботу без підведення енергії ззовні, або виконував би роботу більшу, ніж кількість підведеної до нього ззовні енергії.

Для усунення наведених неоднозначностей, на основі експериментальних даних був сформульований другий закон (друге начало) термодинаміки.

Відповідно до першої суперечності, друге начало термодинаміки формулюється так: неможливий процес, єдиним результатом якого є передавання енергії у формі теплоти від холодного тіла до гарячого.

Відповідно до другої суперечності: неможливий процес, єдиним результатом якого є перетворення всієї теплоти, одержаної від нагрівника, в еквівалентну її роботу.

§4. Ентропія

З формули для коефіцієнта корисної дії прямого циклу Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

або:

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

звідки:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Остаточно отримаємо:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}.$$

Величина $\frac{Q}{T}$ називається **зведеною кількістю теплоти**. На безконечно малій ділянці термодинамічного процесу зведена кількість теплоти має вигляд $\frac{\delta Q}{T}$. Теоретичні розрахунки показують, що для оборотного колового процесу сума всіх елементарних зведених кількостей теплоти за один цикл рівна нулю:

$$\int \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

З того, що інтеграл по замкнутому контуру рівний нулю випливає, що підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції, яка визначається лише початковим та кінцевим станом системи і не залежить від способу зміни стану:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS.$$

Така функція стану системи, інтеграл по замкнутому контуру якої рівний нулю, **називається ентропією** (S). Зміна ентропії при переході системи із стану 1 в стан 2 визначається:

$$S_2 - S_1 = \Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}.$$

Властивості ентропії:

1. Кожен стан термодинамічної системи характеризується певним значенням ентропії.

2. Ентропія адитивна функція. Ентропія системи тіл рівна сумі ентропій всіх тіл, які входять у систему.

3. При різних термодинамічних процесах ентропія може лише зростати, або залишатись незмінною ($\Delta S \geq 0$).

4. Фізичний зміст має не сама ентропія, а її зміна (ΔS): різниця ентропій ($S = S_2 - S_1$) у двох рівноважних станах визначається необхідною кількістю теплоти, що приходиться на одиницю абсолютної температури (T), при якій ця кількість теплоти була одержана для переводу системи зі стану 1 у стан 2.

5. З того, що надання системі певної кількості теплоти веде до зростання її ентропії слідує, що ентропію можна характеризувати, як міру безладдя термодинамічної системи (зростання температури системи веде до зростання хаотичності руху її елементів).

Тема 6. Властивості реальних газів

§1. Рівняння Ван-дер-Ваальса

Молекулярно-кінетична теорія ідеального газу ґрунтується на моделі, за якою:

1) розміри молекул набагато менші за відстані між ними, тому розмірами молекул нехтується;

2) сили міжмолекулярної взаємодії діють лише в момент співудару молекул, тобто існують лише сили пружного відштовхування.

Відомо, що властивості реальних газів не можна описати рівняннями ідеального газу. Відхилення від ідеального газу обумовлені:

1) існуванням власних розмірів молекул;

2) характер взаємодії між молекулами значно відрізняється від пружної взаємодії при співударі.

У зв'язку з існуванням власного об'єму у кожної молекули об'єм, що надається для вільного руху молекул одного кіломоля газу буде меншим за об'єм посудини V_0 на деяку величину b ($\approx$ 4 власним об'ємам молекул). Тому рівняння стану для одного кіломоля газу запишемо так:

$$P\left(V_0 - b\right) = RT\ .$$

В такому випадку, при $T = const$, об'єм, що займає газ при $P \to \infty$ прямує до деякої величини b, що рівна об'єму всіх молекул даної кількості газу при їх щільній упаковці.

В результаті існування сил притягання між молекулами газ займає об'єм менший, ніж виходить з рівняння стану ідеального газу. Це зменшення об'єму таке, ніби газ знаходиться не під тиском P, а під більшим тиском P', таким, що:

$$P' = P + P_i\ .$$

Тоді рівняння стану такого газу запишеться:

$$\left(P + P_i\right)\left(V_0 - b\right) = RT\ .$$

Знайдемо вираз для P_i. Завдяки незначній відстані дії сил притягання між молекулами, на кожну з них діють лише ближні до неї молекули. Всередині газу дія всіх таких молекул на дану взаємно компенсується. Біля стінки на молекулу газу діють

лише інші молекули, що знаходяться з одного боку від даної До того ж такі молекули, за рахунок малих відстаней сил притягання, знаходяться всередині такого шару.

Взагалі кажучи, на молекули, що знаходяться біля стінки, діють сили притягання і з боку молекул стінки. Але при тепловій рівновазі кількість молекул, що підходять до стінки, рівна кількості молекул, що відходять від стінки. Тому притяганням стінки можна знехтувати.

Число молекул всередині такого шару біля стінки пропорційне числу молекул в одиниці об'єму n_0. Крім того, число молекул, що знаходяться безпосередньо біля стінки (на які діють молекули тонкого шару), також пропорційне n_0. Тому сила притягання, що діє на всі молекули, які знаходяться безпосередньо біля стінки, направлена всередину газу і пропорційна n_0^2. Ця сила, що припадає на одиницю площі, і являє собою внутрішній тиск (P_i) газу:

$$P_i = a' n_0^2,$$

де a' - постійна, що залежить від сорту газу.

Враховуючи, що:

$$n_0 = \frac{N_A}{V_0},$$

де N_A – число Авогадро, V_0 – об'єм одного кіломоля газу, формулу для внутрішнього тиску запишемо:

$$P_i = a' \frac{N_A^2}{V_0^2}.$$

Позначимо $a' N_A^2 = a$, де a – нова постійна, яка залежить від сорту газу, тоді вираз набуде вигляду:

$$P_i = \frac{a}{V_0^2}.$$

Маючи значення P_i, отримаємо рівняння стану реального газу (рівняння Ван-дер-Ваальса)для одного кіломоля :

$$\left(P+\frac{a}{V_0^2}\right)\left(V_0-b\right)=RT\,.$$

Поправки a і b експериментально визначені з великою точністю для більшості використовуваних газів і приведені у відповідних таблицях.

Зауваження. При дуже великому молярному об'ємі V_0, величинами $\frac{a}{V_0^2}$ та b можна знехтувати і дане рівняння переходить в рівняння стану ідеального газу.

Запишемо отримане рівняння для довільної маси газу. Так, як V_0 – об'єм одного кіломоля, то маса газу m займе об'єм

$$V=\frac{m}{\mu}V_0\,,$$

тоді для V_0 матимемо:

$$V_0=V\frac{\mu}{m}\,.$$

Підставимо таке значення V_0 в рівняння Ван-дер-Ваальса:

$$\left(P+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V\frac{\mu}{m}-b\right)=RT\,.$$

Винесемо у даному виразі за дужки множник $\frac{\mu}{m}$:

$$\left(P+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)\frac{\mu}{m}=RT\,,$$

або

$$\left(P+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)=\frac{m}{\mu}RT\,.$$

Отримали рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної маси газу. Поправки a і b в даному рівнянні мають ті ж значення, що і в рівнянні для одного кіломоля.

§2. Ізотерми реальних газів

У 1866 році англійським вченим Т. Ендрюсом було досліджено залежність об'єму одного кіломоля V_0 вуглекислого газу від тиску при ізотермічному стисканні. Результати досліджень приведені на рисунку 15.

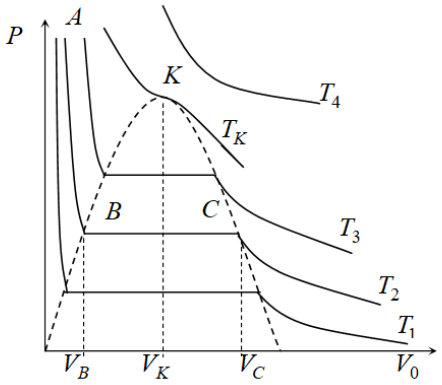


Рис. 15. Ізотерми реального газу

Характеристика ізотерми CO_2:

1. При $T < T_к$ всі ізотерми мають горизонтальну ділянку.

2. На горизонтальній ділянці $T = const$, $P = const$, а об'єм може приймати значення від V_B до V_C.

3. Інтервал об'ємів V_B - V_C зростає із зниженням температури.

4. При наближенні T до T_K інтервал об'ємів V_B - V_C прямує до нуля. T_K називають критичною температурою.

5. Точка К називається критичною точкою. Відповідні її значення тиску P_K і V_K називаються критичним тиском і критичним об'ємом.

6. Кожну докритичну ізотерму можна поділити на три ділянки:

а) АВ – тиск монотонно зростає при зменшенні молярного об'єму і речовина перебуває в рідкому стані;

б) СТ – тиск також монотонно зростає при зменшенні молярного об'єму і речовина перебуває в газоподібному стані;

в) ВС – зменшення об'єму не приводить до зростання тиску і речовина одночасно перебуває в рідкому і газоподібному станах. Точка В відповідає стану киплячої рідини, а точка С – стану сухої пари.

7. Якщо нанести на діаграму $P-V_0$ точки B і C для різних докритичних температур, то одержимо наступну залежність (рис. 16):

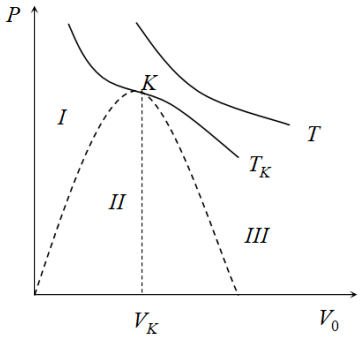


Рис. 16. Критична ізотерма реального газу

На даному графіку область I – однофазна область рідкого стану, III – однофазна область газоподібного стану, II – двофазна область.

8. З графіка (рис. 16) видно, що при $T > T_K$ не можна перевести газ у рідкий стан шляхом ізотермічного стискання.

9. Ізотерму з T_K називають критичною ізотермою.

10. Значення критичних параметрів відповідно до рівняння Ван-дер-Ваальса для одного кіломоля:

$$P_к = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2};$$

$$V_k = 3b;$$

$$T_к = \frac{8}{27}\frac{a}{bR}.$$

§3. Фазові переходи I і II роду

Під фазою розуміють сукупність усіх частин системи, що мають однаковий хімічний склад і перебувають в однаковому термодинамічному стані (рідина – одна фаза, газ – інша фаза).

Якщо перехід з однієї фази в іншу супроводжується поглинанням або виділенням певної кількості теплоти, то такий перехід називається фазовим переходом I роду (перехід рідина – пара , тверде тіло – рідина, тверде тіло – газ).

Теплота, що поглинається чи виділяється при таких переходах, називається прихованою теплотою переходу (бо не збільшує температуру тіла).

Фазові переходи, що не зв'язані з поглинанням чи виділенням теплоти, називаються фазовими переходами II роду (перехід з однієї кристалічної модифікації в іншу без затрат теплоти).

§ 4. Внутрішня енергія реального газу

Внутрішня енергія U реального газу рівна сумі кінетичної W_K енергії хаотичного руху молекул та їх потенціальної енергії взаємодії $W_П$:

$$U = W_K + W_П.$$

Так як сили взаємного притягання реально існують лише між близькими молекулами , яких є відносно загальної кількості безмежно мале число, то з великою точністю для одного кіломоля реального газу W_K збігається з кінетичною енергією

ідеального газу $W_{K,i\partial}$, яка у свою чергу рівна внутрішній енергії ідеального газу:

$$W_K = W_{K,i\partial} = U_{i\partial}.$$

Внутрішня енергія ідеального газу, відповідно до І начала термодинаміки для ізохорного процесу, визначається:

$$U_{i\partial} = C_V T,$$

C_V – молярна теплоємність при ізохорному процесі.

Кінетична енергія, у свою чергу, має вигляд:

$$W_K = C_V T.$$

Отже, внутрішня енергія одного кіломоля реального газу буде рівна:

$$U = C_V T + W_{\Pi}.$$

Потенціальна енергія взаємодії молекул між собою залежить від відстаней між ними, тому при постійному об'ємі (ізохорний процес)

$$W_{\Pi} = const,$$

бо середні відстані між молекулами сталі.

Зміна внутрішньої енергії одного кіломоля реального газу в такому випадку матиме вигляд:

$$dU = C_V dT.$$

Для довільної кількості реального газу зміна внутрішньої енергії рівна:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT.$$

§5. Ефект Джоуля – Томсона

Експериментально було виявлено, що при адіабатному розширенні реального газу, без виконання ним корисної роботи, температура газу змінюється. Явище зміни температури газу у такому процесі називають ефектом Джоуля – Томсона.

Проведемо уявний експеримент (рис. 17). В теплоізоляційній трубі утворимо пористу перегородку. Тиски з різних боків перегородки підтримуються сталими, причому

$$P_1 > P_2 .$$

Під дією перепаду тисків, що підтримується постійним, газ просочується через пористу перегородку і при цьому розширюється. Заставляючи розширюватись газ з об'єму I до об'єму I+II над газом, за рахунок різниці тисків, виконується робота:

$$A = \Delta(PV) = (P_2V_2 - P_1V_1) .$$

А так, як при адіабатному процесі робота виконується за рахунок внутрішньої енергії газу, то згідно з I началом термодинаміки

$$\Delta U = -A .$$

Зміну внутрішньої енергії реального газу у розглядуваному процесі знайдемо, враховуючи, що зміна $\Delta W_{ї}$ відбувається за рахунок зміни об'єму з I у I+II. Тоді попередня формула набере вигляду:

$$C_V \Delta T + \Delta W_{II} = -(P_2V_2 - P_1V_1) .$$

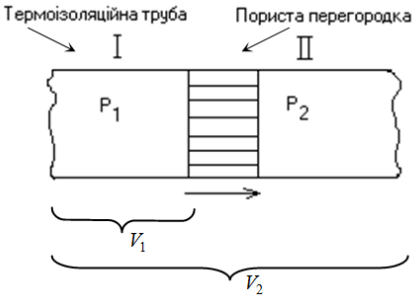


Рис. 17. Ефект Джоуля-Томсона

Знайдемо зміну температури в такому процесі :

$$\Delta T = \frac{-\Delta(PV)}{C_V} - \frac{\Delta W_n}{C_V}.$$

Одержали формулу зміни температури у інтегральному ефекті Джоуля – Томсона.

Якщо $\triangle T > 0$ ефект називається негативним , якщо $\triangle T < 0$ – позитивним.

У випадку ідеального газу, коли $\triangle W_{\Pi} = 0$, враховуючи**,** що згідно з рівнянням Менделєєва – Клапейрона

$$\triangle(PV) = \frac{m}{\mu} R \triangle T,$$

одержимо:

$$\triangle T C_V = -\frac{m}{\mu} R \triangle T.$$

Така рівність може виконуватись лише при одній умові, якщо $\triangle T = 0$**.** Тобто в ідеальному газі ефект Джоуля – Томсона не спостерігається**.**

Для реальних газів, при нескінченно малій зміні тисків dP, зміна температури dT, при аналогічному процесі називається диференціальним ефектом Джоуля – Томсона.

РОЗДІЛ ІІІ. Електрика
Тема 1. Електростатика
§1. Електричний заряд. Закон Кулона

Однією з чотирьох видів фундаментальних взаємодій є електромагнітна. Вона проявляється лише між електрично зарядженими тілами. Усі тіла в природі можуть електризуватись, тобто набувати електричного заряду q. Наявність електричного заряду проявляється в тому, що заряджене тіло взаємодіє з іншими зарядженими тілами. Одиницею вимірювання заряду є кулон (Кл).

Електричний заряд не можна ділити до нескінченності. Він є однією з основних характеристик частинок, з яких складається речовина, тому існує найменша його величина e (яка є одночасно характеристикою елементарної частинки, що його несе). Елементарний заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Довільний заряд q утворюється сукупністю N елементарних зарядів e:

$$q = \pm Ne. \qquad (1)$$

Існує два види електричних зарядів, які умовно називають додатними та від'ємними. Зазвичай елементарні частинки (електрони, протони), що несуть заряди різних знаків, присутні в речовині в однакових кількостях, тому тіло в цілому електрично нейтральне.

Закон збереження електричного заряду стверджує: сумарний електричний заряд замкненої системи не може змінюватись.

1785 року Шарль Огюстен Кулон (Coulomb) експериментально установив закон взаємодії електричних зарядів, котрий носить його ім'я. Відповідно до закону Кулона сила $\vec{F}$ взаємодії двох точкових зарядів q_1 та q_2 пропорційна добутку зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані r між ними (див. рис. 1) і направлена вздовж прямої, що сполучає заряди:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r}\,. \qquad (2)$$

Тут ε – діелектрична проникність середовища, а ε_0 – електрична стала:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{Ф}{м} \ . \qquad (3)$$

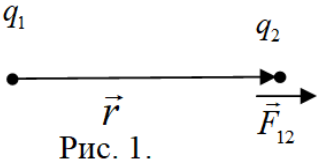


Рис. 1.

Заряди одного знаку відштовхуються, а різних знаків – притягуються один до одного. У випадку, коли взаємодіють декілька (N) зарядів (див. рис. 2), відповідно до принципу суперпозиції сила дорівнює векторній сумі усіх сил, що діють на окремий заряд:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N-1} \vec{F}_i \ . \qquad (4)$$

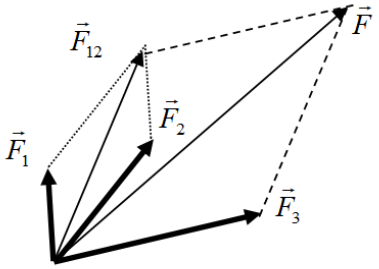


Рис. 2.

§2. Напруженість електричного поля

Кожен заряд змінює властивості навколишнього простору – створює в ньому електричне поле. Взаємодія між нерухомими зарядами здійснюється саме через електричне поле. Щоб з'ясувати, чи є в даному місці електричне поле, досить

помістити туди пробний заряд $q_{пр}$, на який має діяти сила. Наприклад, для точкових зарядів, відповідно до закону Кулона:

$$\vec{F} = q_{пр}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}|^3}\vec{r}\right). \qquad (5)$$

Величину сили, приведену до одиниці пробного заряду,

$$\vec{E} = \frac{1}{q_{пр}}\vec{F}, \qquad (6)$$

називають напруженістю електричного поля. Із (5) та (6) видно, що точковий заряд q створює напруженість

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}|^3}\vec{r}. \qquad (7)$$

Напруженість вимірюють у $\left[В/м\right]$.

Очевидно, що

$$\vec{F} = q_{пр}\vec{E}. \qquad (8)$$

Якщо заряд додатний, напрям сили $\vec{F}$ збігається з напрямом напруженості $\vec{E}$.

Відповідно до принципу суперпозиції електричних полів напруженість поля системи N зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів окремих зарядів:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i \qquad (9)$$

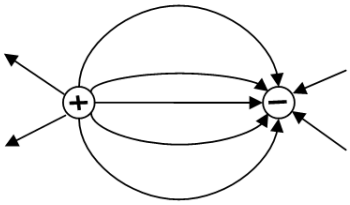


Рис.3.

Геометрично електричне поле можна зобразити лініями напруженості (силовими лініями, див. рис. 3). Густина ліній указує на величину напруженості.

§3. Потенціал електричного поля

Роботу з переміщення точкового електричного заряду в полі іншого точкового заряду можна визначити, використавши формулу Ж. Понселе для механічної роботи, елемент *dA* якої буде:

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right). \tag{13}$$

Конкретизувавши силу взаємодії між електричними зарядами відповідно до формули (5) Кулона, отримаємо:

$$dA = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\left(\vec{r}, d\vec{r}\right)}{\left|\vec{r}\right|^3}. \tag{14}$$

Зважаючи, що скалярний добуток векторів $\left(\vec{r}, d\vec{r}\right)$ дорівнює добутку їхніх скалярів rdr (у чому можна переконатись, диференціюючи тотожність $\left(\vec{r}, \vec{r}\right) = r^2$, де r – відстань між зарядами, а dr – абсолютний її приріст при переміщенні), перетворимо формулу (14) до вигляду:

$$dA = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2}. \tag{15}$$

Роботу A з переміщення зарядів отримаємо, інтегруючи вираз (15) по всій траєкторії переміщення:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\vec{F}\left(\vec{r}\right), d\vec{r}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{16}$$

Тут r_1 та r_2 – відстані між зарядами в кінцевій та початковій точках їхнього взаємного переміщення (див. рис. 4). Із (16) видно, що робота з переміщення електричного заряду не залежить від форми траєкторії, а залежить лише від початкової та кінцевої точок траєкторії. Так і повинно бути, адже електро - статичне поле центральне, а значить, консервативне. Для останніх полів застосовне поняття потенціальної енергії. Зв'яжемо з кожною відстанню r між електричними зарядами взаємну енергію Π, яку називають потенціальною:

$$\Pi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}. \qquad (17)$$

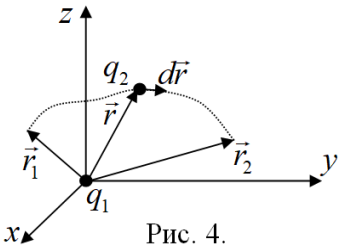


Рис. 4.

Потенціальна енергія однойменних зарядів додатна, а різнойменних – від'ємна.

При практичних розрахунках зручно користуватись потенціальною енергією, приведеною до одиничної величини одного із зарядів, який називають пробним і позначають $q_{пр}$. Таку величину називають потенціалом:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\Pi(\vec{r})}{q_{пр}}. \qquad (18)$$

Потенціал вимірюють у вольтах (1В) на честь засновника електрометрії Алессандро Вольти. Для точкового заряду вираз для обчислення потенціалу отримає вигляд:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \qquad (19)$$

Роботу при зміні відстані між зарядами можна визначити за зміною потенціалів цих точок:

$$A = -\left[\Pi(\vec{r}_2) - \Pi(\vec{r}_1)\right] = -q\left[\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)\right]. \qquad (20)$$

Різницю потенціалів $\varphi(\vec{r}_1)$ та $\varphi(\vec{r}_2)$ називають напругою U між точками з координатами $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$:

$$U = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2). \qquad (21)$$

Напругу, як і потенціал, вимірюють у вольтах.

Враховуючи, що $\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = -d\Pi$, а $\vec{F} = q\vec{E}$, матимемо:

$$\left(\vec{E}, d\vec{r}\right) = -\frac{d\Pi}{q} = -d\varphi; \quad \vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}. \tag{22}$$

Таким чином, напруженість електричного поля дорівнює швидкості зміни потенціалу в просторі.

§4. Електричний диполь

Електричним диполем називають систему двох однакових за абсолютною величиною і протилежних за знаком точкових зарядів $+q$ та $-q$, розташованих на деякій відстані l. Якщо ця відстань l стала, то диполь називають твердим. Якщо довжина l мала порівняно з відстанню r від диполя до точки спостереження, то диполь називають точковим. Пряму, яка проходить через обидва заряди, називають віссю диполя.

Електричним моментом $\vec{p}$ диполя називають вектор, що чисельно дорівнює добутку заряду q на вектор $\vec{l}$:

$$\vec{p} = q\vec{l}, \tag{23}$$

причому вектор $\vec{l}$ напрямлений уздовж осі диполя від його від'ємного заряду до додатного (див. рис. 5).

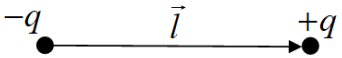


Рис. 5.

Внаслідок принципу суперпозиції електричне поле диполя дорівнює сумі полів, утворених кожним із зарядів $+q$ та $-q$ окремо: напруженості полів сумуються як вектори, а потенціали – як скаляри.

Тема 2. Електричне поле в діелектриках

Діелектриками називають речовини, які не проводять електричного струму (проводять, але в 10^{15}-10^{20} разів гірше, ніж

провідники, тому їх використовують для виготовлення ізоляторів).

Різнойменні заряди в діелектриках зв'язані. Це значить, що в електричному полі вони можуть зміщуватись один відносно одного на незначні відстані (порядку відстані між атомами). Для опису поведінки зв'язаних зарядів користуються поняттям дипольного моменту $\vec{p}$.

При відсутності зовнішнього електричного поля полярні молекули більшості речовин розміщені хаотично, тому речовина в цілому не має вираженого дипольного моменту.

Якщо діелектрик внести в електричне поле, то останнє зміниться. Це відбувається тому, що молекули речовини діелектрика мають (чи одержують) певні дипольні моменти, які, орієнтуючись у зовнішньому полі, змінюють його – діелектрик поляризується.

§1. Поляризованість діелектрика

Для характеристики поляризації діелектрика вводять величину $\vec{P}$ – поляризованість діелектрика. Поляризованість дорівнює сумарному дипольному моменту одиниці об'єму діелектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}. \qquad (24)$$

Тут $\sum_{\Delta V} \vec{p}_i$ – сумарний дипольний момент об'єму ΔV.

Експериментально встановлено, що в ізотропних діелектриках поляризованість пропорційна напруженості $\vec{E}$ зовнішнього електричного поля:

$$\vec{P} = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E}. \qquad (25)$$

У (25) $\varkappa$ – діелектрична сприйнятливість діелектрика (безрозмірна величина).

§2. Вектор електричного зміщення

Поле в діелектрику буде створюватись накладанням зовнішнього поля та поля, створеного внаслідок поляризації діелектрика. Для діелектриків вводять величину $\vec{D}$ – електричне зміщення:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \tag{26}$$

Для ізотропних діелектриків

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varkappa \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \varkappa) \vec{E}. \tag{27}$$

Величину $\varepsilon = 1 + \varkappa$ називають відносною діелектричною проникністю середовища. Таким чином, вектор електричного зміщення записують у формі:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \tag{28}$$

Зважаючи на зв'язок (73), електростатичну теорему Ґауса для вектора електричного зміщення можна переписати у вигляді:

$$\oiint_S \left(\vec{D}, d\vec{S} \right) = \sum_{i=1}^{N} q_i \,. \tag{29}$$

Потік вектора $\vec{D}$ електричного зміщення через довільну замкнену поверхню S дорівнює алгебричній сумі всіх електричних зарядів, що знаходяться в об'ємі, обмеженому даною поверхнею.

§3. Сегнетоелектрики

Існує ряд речовин, які можуть мати спонтанну поляризованість при відсутності зовнішнього електричного поля. Вперше це явище було виявлено братами Жаком і П'єром Кюрі для сегнетової солі ($NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$). Саме з цієї причини такі речовини називають сегнетоелектриками. Сегнетоелектрики характеризують:

1. Велике ε (порядку декількох тисяч, у той час, як для решти речовин, – одиниці);
2. Нелінійна залежність P від E (петля гістерезису);

3. Наявність точки Кюрі – температури, вище якої такі аномальні властивості зникають.

В окрему групу виділяють електрети – діелектрики, поляризованість яких формують при їх виготовленні. Найчастіше електретами є воскоподібні речовини, що, тверднучи в сильному електричному полі, зберігають свою поляризованість надалі.

§4. П'єзоелектричний ефект

Виникнення поляризації кристалу внаслідок механічних деформацій називають п'єзоелектричним ефектом. П'єзоелектричний ефект спостерігається лише у йонних кристалах, наприклад, у кристалічному кварці, титанаті барію та інших. Явище відкрите 1880 року братами Кюрі. П'єзоелектричний ефект використовують для виготовлення ультразвукових випромінювачів, високоточних резонаторів, ґенераторів імпульсів високої напруги тощо.

Тема 3. Провідники в електричному полі

Уперше поділив речовини на провідники і непровідники електрики англієць Стефан Грей 1729 року. Зміщення електричних зарядів у провідниках та діелектриках мають зовсім різний характер. У той час, як у діелектриках заряди можуть тільки зміщуватись у межах молекул, у провідниках вони можуть переміщуватись на відстані, значно більші від атомних. У провідниках:

1) При рівновазі зарядів (електростатика) напруженість поля біля поверхні провідника спрямована по нормалі до поверхні (див. рис. 6), бо інакше виникав би рух зарядів. Значить: $E = E_n$; ($E_\tau = 0$).

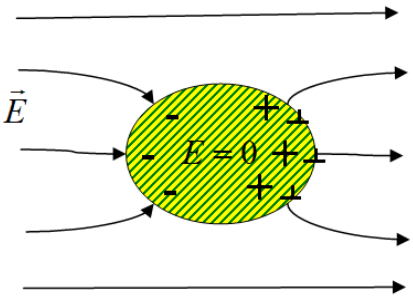


Рис. 6.

2) Усередині провідника $E = 0$. Інакше наявність поля приводила б у рух заряди.

У зовнішньому електричному полі проходить перерозподіл зарядів у провіднику – додатні заряди в межах провідника рухаються за напрямом поля, від'ємні – проти напряму зовнішнього поля. Такий перерозподіл буде відбуватись доти, поки внутрішнє електричне поле, створене таким перерозподілом зарядів, не скомпенсує те зовнішнє поле, яке викликало цей перерозподіл .

Таким чином, електричні заряди розміщуються лише на поверхні провідника, а не в його середині.

§1. Електроємність

І. Для окремого провідника, віддаленого від інших, при наданні йому заряду q його потенціал φ буде змінюватись пропорційно q:

$$q = C\varphi . \qquad (30)$$

Коефіцієнт пропорційності C називають електроємністю (ємністю) провідника. За одиницю ємності приймають ємність такого провідника, потенціал якого змінюється на 1 В при наданні йому заряду 1 Кл. Ємність вимірюють у фарадах:

$$1Ф = \frac{1Кл}{1В} . \qquad (31)$$

Наприклад, для зарядженої кулі радіусом R:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{R} E dr = -\int_{-\infty}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R}, \qquad (32)$$

таким чином,

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \qquad (33)$$

Більш важливим є поняття ємності конденсатора. Конденсатор – це дві металеві обкладки, розділені тонким шаром діелектрика (див. рис. 7). Якщо q – заряд на одній з обкладок, а $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів між обкладками, то ємність конденсатора буде:

$$C = \frac{q}{U}. \qquad (34)$$

Для плоского конденсатора, нехтуючи краєвими ефектами, отримаємо ось таку послідовність формул. Поверхнева густина заряду:

$$\sigma = \frac{q}{S}.$$

Тут S – площа поверхні кожної з пластин.

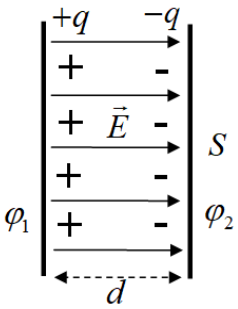


Рис. 7.

Враховуючи формулу (39), матимемо напруженість поля між пластинками конденсатора:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Зважаючи на зв'язок (41) при $\Delta r = d$, отримаємо співвідношення:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Таким чином, пропорційність заряду та напруги має наступний вигляд:

$$q = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} U.$$

Отже, ємність плоского конденсатора буде:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (35)$$

Із (35) видно, що ємність конденсатора пропорційна діелектричній проникності ε середовища між пластинами конденсатора. Саме ця залежність і складає основу одного з методів вимірювання діелектричної проникності.

II. Для одержання електричної ємності певної величини часто застосовують систему конденсаторів, з'єднаних певним чином.

1. Паралельне з'єднання конденсаторів (рис. 8а).

Сумарна ємність такої системи конденсаторів визначається із співвідношення:

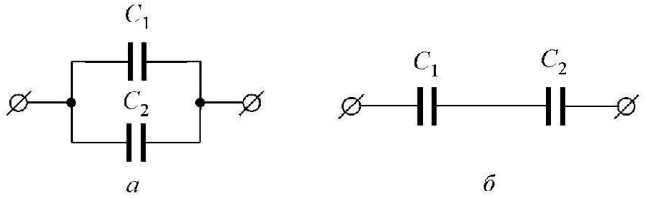
$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4.$$

2. Послідовне з'єднання конденсаторів (рис. 8б).

Сумарна ємність такої системи конденсаторів визначається із співвідношення:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}.$$

Способи з'єднання конденсаторів:



а) паралельно; **б) послідовно.**

Рис. 8.

§2. Енергія електричного поля

Визначимо роботу, необхідну для того, щоб зарядити конденсатор ємністю C до напруги U. Конденсатор заряджатимемо, переносячи заряд з однієї пластини на другу маленькими порціями dq. Робота з перенесення такої порції заряду буде пропорційна величині порції заряду та напрузі U між пластинами:

$$dA = Udq. \qquad (36)$$

Зміна заряду призводитиме до зміни напруги U. Оскільки $dq = CdU$, то й елемент роботи $dA = CUdU$. Усю роботу знайдемо, просумувавши елементарні роботи:

$$A = \int_0^U CUdU = \frac{1}{2}CU^2. \qquad (37)$$

Робота, затрачена для переміщення зарядів, зосереджена в електричному полі E між обкладками конденсатора. Так як

$$E = \frac{U}{d},$$

а

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

потенціальна енергія поля чисельно дорівнюватиме:

$$W = A = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V\,, \qquad (38)$$

де V – об'єм простору між пластинами.

Густина w енергії електричного поля дорівнює половині добутку напруженості на електричне зміщення:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}, \vec{D}\right). \qquad (39)$$

Тема 4. Постійний електричний струм (електричний струм провідності)

Електричний струм провідності – це впорядкований рух електричних зарядів у речовині. В металах носіями струму є електрони, в надпровідниках – електрони й дірки, а в газах та електролітах – додатні і від'ємні йони.

Кількісною характеристикою електричного струму є сила струму – величина заряду, що переноситься через поперечний переріз провідника за одну секунду:

$$I = \frac{dq}{dt}\,. \qquad (40)$$

За додатний напрям струму приймають напрям, в якому рухаються додатні носії. Одиниця сили струму – 1 ампер (А). У системі SI 1 Кл дорівнює заряду, що проходить за 1 с через поперечний переріз провідника, по якому тече струм 1 А .

§1. Рівняння неперервності

Розглянемо деяку замкнену поверхню S. Використавши закон збереження заряду, для густини струму $\vec{j}$ запишемо:

$$I = \oiint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = -\frac{dq}{dt}\,. \qquad (41)$$

Зважаючи, що $q = \iiint_V \rho dV$, перепишемо (41) у вигляді:

$$\oiint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho dV\right) = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV . \qquad (42)$$

За теоремою Остроградського –Ґауса:

$$\oiint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = \iiint_V div\vec{j} dV , \qquad (43)$$

отже,

$$\int_V \mathrm{div}\vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV . \qquad (44)$$

Зважаючи, що (44) виконується при довільному об'ємі V, отримаємо рівняння неперервності:

$$\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \qquad (45)$$

Рівняння неперервності відображає закон збереження заряду.

Для стаціонарного (постійного) струму його густина, потенціали і т.д. у різних точках середовища залишаються постійними, тому:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ; \qquad \mathrm{div}\vec{j} = 0 . \qquad (46)$$

Векторне поле, дивергенція якого дорівнює нулю, називають соленоїдальним. Таким чином, для постійного струму вектор $\vec{j}$ не має джерел: лінії струму замкнені.

§2. Електрорушійна сила

Для того, щоб тривалий час підтримувати струм у провіднику, необхідно неперервно відводити заряди, що збираються на одному кінці провідника, переносячи їх на інший його кінець. Тобто необхідно мати деяку силу, що переносила б заряди проти електричного поля. Вона повинна мати неелектростатичне походження. Такі сили називають сторонніми. Це можуть бути: хімічні процеси (як у автомобільних електричних акумуляторах), змінні електричні поля, дифузія носіїв у неоднорідних середовищах і т. д.

Сторонні сили можна характеризувати роботою, яку вони виконують над зарядами.

Величину, що дорівнює роботі сторонніх сил над одиничним додатним зарядом, називають електрорушійною силою (е.р.с.) $\mathcal{E}$, яка діє на даній ділянці кола:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}. \tag{47}$$

Сторонні сили можна формально представити у вигляді: $F_{ст} = qE_{ст}$, де $E_{ст}$ називають напруженістю поля сторонніх сил.

Крім сторонніх сил на заряд діють електростатичні поля. Результуюча сила буде:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{ст} = q\vec{E} + q\vec{E}_{ст}. \tag{48}$$

Робота на ділянці 1-2 над зарядом q дорівнюватиме:

$$A_{12} = \int_1^2 \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = q\int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) + q\int_1^2 \left(\vec{E}_{ст}, d\vec{l}\right) = \\ = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12}. \tag{49}$$

Величина роботи, приведена до одиничного заряду

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \tag{50}$$

називається падінням напруги, або просто напругою на даній ділянці кола. Напругу вимірюють у вольтах.

Ділянка кола, на якій не діють сторонні сили, називається однорідною. Напруга $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ на однорідній ділянці збігається з різницею потенціалів. Поняття електрорушійна сила, напруга, провідність увів німецький учений Георг Ом.

§3. Опір провідників. Закон Ома

Дослід показує, що для багатьох тіл у широких границях сила струму, що тече по зразку, пропорційна падінню напруги на ньому:

$$I = GU. \tag{51}$$

Коефіцієнт пропорційності G називають провідністю зразка. Провідність вимірюють у сіменсах (См).

Частіше користуються величиною, оберненою до провідності – електричним опором зразка:

$$R = \frac{1}{G}. \tag{52}$$

Електричний опір вимірюють в омах (Ом, Ω). Таким чином, закон Ома отримує вигляд:

$$I = \frac{U}{R}. \tag{53}$$

Величина опору залежить від форми і розмірів зразка, його матеріалу. Для циліндричного зразка довжиною l та площею поперечного перерізу S:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \tag{54}$$

Тут ρ – питомий опір матеріалу, який вимірюють в "ом-метр" (Ом·м).

У диференціальній формі закон Ома записують у такому вигляді:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma \vec{E}. \tag{55}$$

Тут σ – питома провідність речовини, яку вимірюють у сіменсах на метр (См/м), або в (1/(Ом·м).

Опір більшості матеріалів змінюється пропорційно абсолютній температурі. Температурна залежність опору для більшості металів лінійна в достатньо широкому діапазоні температур:

$$R_T = R_0 (1 + \alpha \Delta T),$$

де R_T - опір провідника при температурі T;

R_0 - опір провідника при температурі T_0;

α - температурний коефіцієнт опору (K^{-1});

$\Delta T = T - T_0$ – зміна абсолютної температури, що приводить до зміни опору провідника.

Зауважимо, що на даному явищі заснована робота різноманітних датчиків температури, в тому числі і в автомобілях.

Для деяких матеріалів при низьких температурах опір стрибком стає нульовим. Це явище називають надпровідністю.

Явище надпровідності відкрив 1911 року голландський фізик Х. Камерлінг-Оннес. Він виявив, що при 4,15 К опір ртутного провідника раптово зникає. Відразу було запропоновано використати це явище для побудови надзвичайно сильних магнетів. Однак перші ж досліди розчарували: вже в магнетному полі не дуже великої напруженості – (у вакуумі порядку 0,01 Тл) – соленоїд із надпровідного матеріалу втрачав надпровідні властивості. Тобто магнетне поле, створене надпровідністю, саму цю надпровідність знищувало.

Теорію надпровідності вдалось побудувати лише 1957 р. Дж. Бардіну, Л. Куперу, Дж. Шріфферу (БКШ-теорія). Тоді ж, 1957 р. А.А. Абрикосовим було передбачено, що може існувати ряд речовин із великим критичним магнетним полем. Уперше такі речовини вдалось знайти американцям Дж. Халму, Дж. Кюнцеру та Б. Маттіасу. Вони вивчили сплави типу станніду ніобію (Nb_3Sn) і 1960 р. побачили, що за допомогою таких магнетів можна отримувати поля більше 10 Тл і пропускати струм великої критичної густини $j > 10^5 \, A/см^2$.

§4. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

Закон Ома справедливий і для ділянки кола, де діють сторонні сили:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{стор}). \qquad (56)$$

Напрями векторів $\vec{E}$ та $\vec{j}$ збігаються, тому проінтегруємо модулі (56) на ділянці 1-2:

$$\int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) + \int_1^2 \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l}\right) = I \int_1^2 \frac{dl}{\sigma S}. \qquad (57)$$

Зважаючи, що напруга на неоднорідній ділянці $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$, із (57) випливає, що й для повного кола:

$$I = \frac{U}{R+r}. \qquad (58)$$

де $R+r$ – сумарний опір всього кола. Для замкненого кола $\varphi_1 = \varphi_2$ тому:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}, \qquad (59)$$

§5. Потужність струму. Закон Джоуля-Ленца

Елементарна робота, яка виконується над зарядом q на ділянці кола 1-2 на протязі часу dt, визначається:

$$dA_{12} = dqU_{12} = U_{12}Idt. \qquad (60)$$

Ця робота може йти на переміщення провідника, протікання хімічних реакцій, зміну полів (електричного чи магнетного), нагрівання провідника та інше. Якщо вся робота струму йде лише на збільшення внутрішньої енергії провідника, тобто на його нагрівання, тоді:

$$dA = dQ = IU_{12}dt. \qquad (61)$$

Залежність (61) уперше була встановлена Джеймсом Прескотом Джоулем, а саме співвідношення називають законом Джоуля-Ленца.

Потужність, тобто робота, яка виконується за одиницю часу, визначатиметься відповідно:

$$P = \frac{dA}{dt}; \qquad P = IU_{12}. \qquad (62)$$

§6. Розгалужені електричні мережі. Правила Кірхгофа

Розглянемо довільну розгалужену електричну мережу, яка має N вузлів. Вузлом називатимемо точку мережі, в якій

електрично з'єднано більше двох елементів. (Елементами мережі постійного струму виступатимуть резистори з опорами R_i та електрорушійні сили $\mathcal{E}_i$.) Послідовне з'єднання елементів між вузлами називатимемо віткою. Усі вітки є

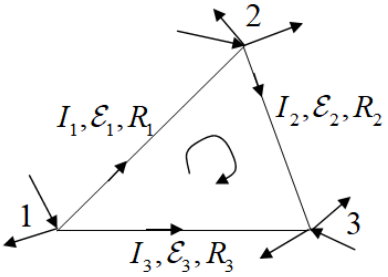


Рис. 9.

орієнтованими. Напрям вітки задається напрямом струму в ній.

Вітки мережі можуть утворювати замкнені контури, як наведено на рис. 9. Нехай у мережі є M віток. Відповідно до теореми Л. Ойлера кількість незалежних контурів $K = M - N + 1$.

Розрахунок таких кіл спрощується, якщо користуватись правилами Кірхгофа:

1. Алгебраїчна сума струмів віток, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum I_k = 0. \qquad (63)$$

При цьому умовно приймають, що струми, які входять у вузол є додатними, а які виходять із нього – від'ємними. Кількість незалежних вузлових рівнянь дорівнює $N - 1$.

2. Для довільного замкнутого контуру сума електрорушійних сил, що діють у ньому, дорівнює сумі добутків сил струмів в окремих вітках цього контуру на опори віток. При цьому використовують наступне правило: якщо напрям електричного струму чи електрорушійної сили збігається з напрямом обходу контура, доданки беруть із

знаком “плюс”, а якщо не збігається – зі знаком “мінус”. Кількість незалежних контурних рівнянь дорівнює K .

Перше правило Кірхгофа випливає із рівняння неперервності, тобто з закону збереження заряду. Друге правило – із потенціальності електростаничного поля.

Дійсно, нехай маємо один із контурів електричної мережі, наведений на рис. 9. Відповідно до закону Ома для ділянок кола можна записати:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + \mathcal{E}_1 = R_1 I_1;$$
$$\varphi_3 - \varphi_2 + \mathcal{E}_2 = R_2 I_2;$$
$$\varphi_1 - \varphi_3 + \mathcal{E}_3 = R_3 I_3. \qquad (64)$$

Сумуючи три рівняння бачимо, що друге правило Кіргофа виконується:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3. \qquad (65)$$

§7. Теплова дія електричного струму. Закон Джоуля-Ленца

Закон Джоуля-Ленца дає кількісну оцінку теплової дії електричного струму. Закон був експериментально встановлений у 1840 році англійським фізиком Джеймсом Прескоттом Джоулем і незалежно від нього російським вченим Еміліем Ленцом в 1842 році.

Фізичною природою виділення тепла при проходженні струму через провідник є те, що енергія носіїв заряду, які подолали ділянку кола зменшується. Втрачена носіями заряду енергія передається коливанням атомів провідника і таким чином переходить у тепло.

1. **Закон Джоуля-Ленца в інтегральній формі**: кількість теплоти, що виділяється в провіднику зі струмом, прямо пропорційна силі струму, напрузі й часу проходження струму через провідник:

$$Q = UIt, \qquad (66)$$

де Q - кількість теплоти (енергія), що виділяється у провіднику;

U - напруга на кінцях провідника;

I - сила струму у провіднику;

t - час протікання струму.

2. Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі: питома теплова потужність струму (кількості теплоти, що виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу у провіднику) дорівнює добутку питомої провідності матеріалу провідника на квадрат напруженості електричного поля, яке створює даний стум:

$$\omega = \sigma E^2. \qquad (67)$$

3. Електронагрівальні прилади. В основі роботи багатьох електронагрівальних приладів лежить закон Джоуля-Ленца. Такі прилади використовують нагрівальний елемент, що є провідником з високим опором. Підвищення опору досягається вибором сплаву з високим питомим опором (наприклад, ніхрому, константану), збільшенням довжини провідника і зменшенням його поперечного перерізу.

4. Плавкі запобіжники. Для захисту електричних кіл від протікання надмірно великих струмів використовується відрізок провідника зі спеціальними характеристиками. Це провідник малого перерізу і виготовлений з такого сплаву, що при допустимому струмі нагрів провідника не перегріває його, а при великих струмах перегрів провідника стає настільки значним, що провідник розплавлюється і розмикає коло.

РОЗДІЛ IV. Електромагнетизм
Тема 1. Магнітне поле і його характеристики
§1. Характеристики магнітного поля

Експерименти показали, що навколо провідників зі струмом і постійних магнітів існує магнітне поле, яке можна виявити за силовою дією, з якою воно впливає на інші провідники зі струмом або постійні магніти.

Струм у провіднику – це впорядкований рух електричних зарядів. Навколо всякого рухомого заряду існує магнітне поле.

Магнітне поле діє лише на рухомі в цьому полі електричні заряди.

Контур зі струмом характеризується магнітним моментом $\vec{p}_m$, який дорівнює добутку сили струму I, що протікає у контурі, на площу поверхні контуру S:

$$\vec{p}_m = I\,S\,\vec{n},$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні рамки. Напрямок вектора $\vec{p}_m$ збігається з напрямком позитивної нормалі рамки.

Контур зі струмом в магнітному полі повертається, набуваючи рівноважного положення і його позитивна нормаль розміщується вздовж осі стрілки в напрямку від її північного полюса (рис. 1).

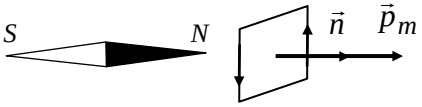


Рис. 1.

\Якщо в дане місце розглядуваного магнітного поля поміщати контури з різними магнітними моментами, то на них діятимуть різні обертальні моменти, але відношення M_{max}/p_m для всіх контурів однакове і служить кількісною характеристикою магнітного поля:

$$B = \frac{M_{max}}{p_m}.$$

Магнітна індукція $\vec{B}$ в даному місці магнітного поля визначається максимальним обертальним моментом, що діє на контур з одиничним магнітним моментом.

Одиниця магнітної індукції – одна тесла: *1 Тл* – магнітна індукція такого магнітного поля, в якому на рамку з магнітним моментом *1 А·м*^{2} діє максимальний момент сили *1 Н·м*.

За напрямок магнітної індукції $\vec{B}$ приймається напрямок магнітного моменту контуру p_m, який знаходиться в рівноважному положенні у цьому полі.

Для графічного зображення магнітних полів зручно користуватись лініями магнітної індукції. Лініями магнітної індукції називають такі лінії, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком вектора $\vec{B}$ в цих точках поля.

Напрямок ліній індукції магнітного поля струму визначається за правилом правого гвинта: якщо вкручувати правий гвинт за напрямком руху струму в провіднику, то напрямок руху його рукоятки покаже напрям ліній магнітної індукції. Вигляд лінії магнітної індукції простих магнітних полів показаний на рис. 2.

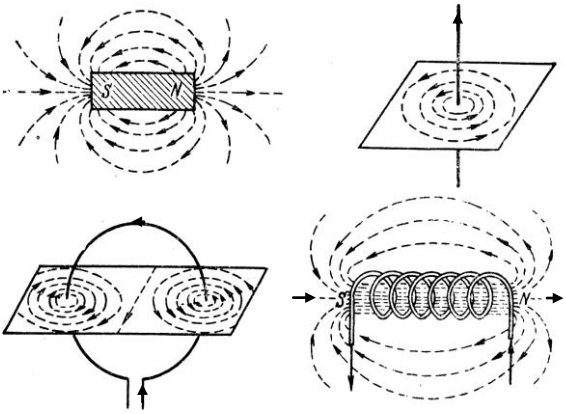


Рис. 2.

Лінії індукції магнітного поля ні в яких точках не можуть обриватися, вони завжди замкнені. Лінії індукцій постійного магніту виходять із його північного полюса і входять у південний.

Необхідно зауважити, що найбільш часто енергетичною характеристикою магнітного поля служить величина напруженості магнітного поля, яка визначається за формулою:

$$\vec{H} = \mu\mu_0\vec{B}.$$

§2. Закон Біо-Савара-Лапласа

Біо і Савар намагалися знайти загальний закон, який дав би змогу Однак зробити це їм не вдалося. Розв'язав це завдання П. Лаплас.

Узагальнивши результати експериментів Біо і Савара Лаплас знайшов загальний закон для обчислення магнітної індукції в кожній точці поля, створеного електричним струмом, що протікає по провіднику будь-якої форми, який називається законом Біо - Савара - Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l}\ \vec{r}\right]}{r^3},$$

де $d\vec{l}$ – вектор, що чисельно дорівнює довжині dl елемента провідника і збігається за напрямом з напрямом електричного струму, $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від елемента провідника dl до точки поля A, що розглядається (рис. 3), μ_0 – магнітна стала, μ - відносна магнітна проникність середовища.

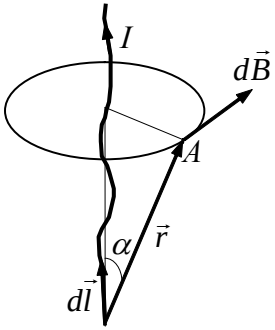


Рис. 3.

Отже, модуль індукції $d\vec{B}$ магнітного поля малого елемента dl провідника зі струмом прямо пропорційний до сили струму I, довжини елемента dl провідника, обернено пропорційний до квадрата відстані r від елемента провідника до розглядуваної точки поля, а також залежить від кута α між напрямками струму і радіус-вектора $\vec{r}$ (рис. 3):

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}.$$

Напрям $d\vec{B}$ визначається з векторного добутку $\left[d\vec{l}\,\vec{r}\right]$ і може бути знайдений за правилом правого гвинта.

Експерименти показали, що для магнітного поля справедливий принцип суперпозиції.

Відповідно до принципу суперпозиції магнітна індукція $\vec{B}$ у будь-якій точці магнітного поля провідника зі струмом I дорівнює векторній сумі індукцій $\Delta\vec{B}_i$ елементарних магнітних полів, створених окремими ділянками Δl_i цього провідника:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n}\Delta\vec{B}_i .$$

Необмежено збільшуючи кількість ділянок n і переходячи до границі при n, що прямує до нескінченності, можна замінити суму інтегралом:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B},$$

Отже, магнітна індукція поля, яке створене у вакуумі струмом I, що тече по провіднику скінченної довжини і довільної форми, дорівнює

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int_l \frac{\left[d\vec{l}\ \vec{r}\right]}{r^3}.$$

Закон Біо-Савара-Лапласа разом з принципом суперпозиції дає змогу розрахувати магнітну індукцію конкретних полів.

1. Магнітне поле прямолінійного провідника зі струмом

Розглянемо прямий провідник довільної довжини, по якому проходить струм силою I, наприклад згори вниз (рис. 4). Відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа вектор магнітної

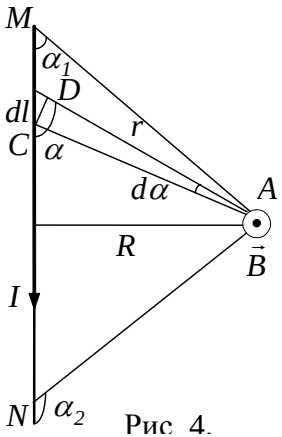


Рис. 4.

індукції $d\vec{B}$ поля, створеного в точці A елементом dl провідника зі струмом I, чисельно дорівнює:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2},$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{r}$.

Опускаючи доведення, для індукція магнітного поля прямолінійного провідника *MN* у точці *A* одержимо:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

Якщо провідник *MN* нескінченно довгий, то $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$.

Отже, магнітна індукція нескінченно довгого провідника зі струмом визначається $(\cos 0 = 1, \cos\pi = -1)$,

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}.$$

2. Магнітне поле колового струму

Знайдемо індукцію магнітного поля в центрі *O*, колового струму радіусом *R*, по якому протікає струм *I* (рис. 5):

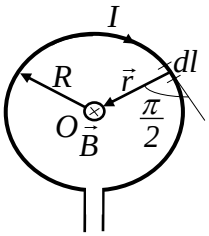


Рис. 5.

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\left(\hat{d\vec{l}\,\vec{r}}\right)}{r^2},$$

$$\sin\left(\hat{d\vec{l}\,\vec{r}}\right) = 1,\ r = R.$$

Тоді

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{R^2}.$$

Усі вектори $d\vec{B}$ магнітних полів, які створені в точці *O* різними ділянками $d\vec{l}$ колового струму, напрямлені перпендикулярно до площини рисунка „від нас”. Тоді:

$$B = \int_0^l dB = \int_0^{2\pi R}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}dl = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}2\pi R.$$

Отже, магнітна індукція поля колового струму рівна:

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Тема 2. Закон Ампера

На провідники зі струмом, що знаходяться в магнітному полі, діють сили Ампера.

Узагальнюючи результати дослідження дії магнітного поля на різні провідники зі струмом, Ампер встановив, що сила $d\vec{F}$, з якою магнітне поле діє на елемент довжини dl провідника зі струмом, що знаходиться в магнітному полі, прямо пропорційна до сили струму I в провіднику і до векторного добутку елемента довжини $d\vec{l}$ на магнітну індукцію $\vec{B}$:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\ \vec{B}\right].$$

Це співвідношення називається законом Ампера.

В загальному випадку для визначення напрямку сили Ампера $d\vec{F}$ слід скористатись правилом векторного добутку: вектор $d\vec{F}$ напрямлений перпендикулярно до площини, утвореної векторами $d\vec{l}$ і $\vec{B}$ так, щоб з кінця вектора $d\vec{F}$ обертання від вектора $d\vec{l}$ до вектора $\vec{B}$ найкоротшим шляхом відбувалося проти годинникової стрілки (рис. 6).

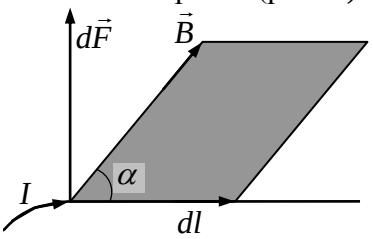


Рис. 6.

Модуль сили Ампера розраховується за формулою

$$dF = IBdl\sin\alpha,$$

де α - кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{B}$.

Закон Ампера дає змогу визначити іншим способом, ніж

раніше, фізичний зміст магнітної індукції $\vec{B}$.

Припустимо, що елемент провідника dl із струмом I перпендикулярний до напрямку магнітного поля $(sin\alpha = 1)$, тоді закон Ампера можна записати у вигляді:

$$B = \frac{1}{I}\frac{dF_{max}}{dl}.$$

Звідси, магнітна індукція $\vec{B}$ чисельно дорівнює силі, що діє з боку поля на одиницю довжини провідника, по якому протікає електричний струм одиничної сили і який розташовано перпендикулярно до напрямку магнітного поля.

Отже, магнітна індукція є силовою характеристикою магнітного поля.

Використовуючи закон Ампера можна розрахувати силу взаємодії між двома прямими нескінченно довгими провідниками зі струмами I_1 і I_2, які розміщені паралельно один до одного на відстані R:

$$dF = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{R}dl.$$

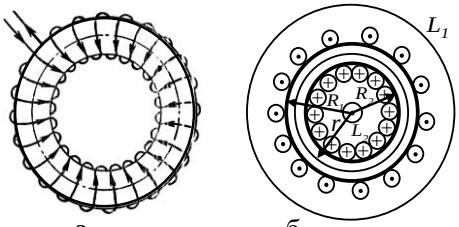
Тема 3. Магнітне поле тороїда і соленоїда

Закон повного струму

$$\oint_L Bdl\cos\alpha = \mu\mu_0\sum_{i=1}^{n} I_i$$

можна використати для розрахунку магнітних полів тороїда і довгого соленоїда.

1. Тороїдом називають кільцеву котушку, витки якої намотано на осердя, що має форму тора (рис. 7а). Лінії магнітної індукції поля тороїда повинні мати форму кіл, центри яких лежать на прямій, що проходить через центр тороїда і перпендикулярна до площини рисунка.



а б

Рис. 7.

Циркуляція вектора $\vec{B}$ вздовж кола радіусом r дорівнює (рис. 7б):

$$\oint_L Bdl\cos\alpha = B\int_0^{2\pi r} dl = 2\pi rB.$$

Позначимо кількість витків обмотки тороїда N, а струм у ній - I.

Як показують розрахунки, поза тороїдом магнітного поля немає. Воно цілком локалізується всередині об'єму тороїда $(R_2 < r < R_1)$. Коло радіусом r, яке лежить всередині тороїда, охоплює N провідників, струми в яких дорівнюють I і однаково напрямлені. Тому

$$\oint_L Bdl\cos\alpha = \mu\mu_0\sum_{i=1}^{n} I_i = \mu\mu_0 NI.$$

Прирівнявши праві частини розглянутих виразів одержимо:

$$2\pi Br = \mu\mu_0 NI,$$

звідки:

$$B = \mu\mu_0\frac{NI}{2\pi r}.$$

Магнітна індукція поля всередині тороїда зменшується зі збільшенням відстані від його центра:

$$B_{max} = \mu\mu_0\frac{NI}{2\pi R_2},$$

$$B_{min} = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi R_1} = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi\left(R_2 + d\right)},$$

де d – діаметр тора.

Індукція на осьовій лінії тороїда з радіусом

$$r = R_{cp} = \frac{1}{2}\left(R_1 + R_2\right)$$

дорівнює

$$B_{cp} = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi R_{cp}} = \mu\mu_0 nI,$$

де n – кількість витків на одиницю довжини середньої лінії тороїда.

2. Розглянемо магнітну індукцію поля всередині соленоїда (рис. 8) – циліндричної котушки, яка складається з великої кількості витків, рівномірно намотаних на загальне осердя. Розглянемо соленоїд завдовжки l, що має N витків, по якому тече струм.

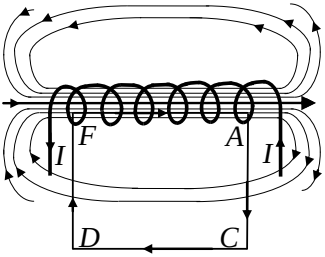


Рис. 8.

Циркуляція вектора $\vec{B}$ вздовж контуру у вигляді прямокутника $ACDF$, в якому сторона CD дуже віддалена від соленоїда і який охоплює всі N витків соленоїда, дорівнює

$$\oint_{ACDFA} Bdl\cos\alpha = \mu_0 NI.$$

Інтеграл вздовж контуру $ACDA$ можна подати у вигляді чотирьох інтегралів:

$$\oint_L Bdl\cos\alpha = \int_{DF} Bdl\cos\alpha + \int_{FA} Bdl\cos\alpha +$$

$$+\int_{AC} Bdl\cos\alpha+\int_{CD} Bdl\cos\alpha .$$

Магнітне поле соленоїда практично локалізовано в його об'ємі і на великій відстані від соленоїда магнітна індукція поля дорівнюватиме нулю:

$$\int_{CD} Bdl\cos\alpha = 0 ,$$

А також

$$\int_{DF} Bdl\cos\alpha = \int_{AC} Bdl\cos\alpha = 0 ,$$

тому що $\cos\alpha = 0$. Тоді

$$\oint_{L} Bdl\cos\alpha \approx \oint_{FA} Bdl\cos\alpha .$$

Вектори магнітної індукції в усіх точках всередині довгого соленоїда однакові, тобто чисельно рівні і мають однакові напрямки. Таке магнітне поле називається однорідним. Крім того, напрямок вектора індукції та переміщення збігаються, тому $\cos\alpha = 1$. Отже,

$$\oint_{FA} Bdl = B\int_{0}^{l} dl = Bl = \mu\mu_0 IN .$$

В результаті магнітна індукція поля всередині соленоїда у вакуумі дорівнює:

$$B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I = \mu\mu_0 nI ,$$

де n – число витків на одиницю довжини соленоїда.

Тема 4. Сила Лоренца

Виникнення сили Ампера, що діє на провідник із струмом у магнітному полі, можна пояснити так. При проходженні струму носії заряду в провіднику рухаються напрямлено. Тому магнітне поле відхиляє їх в один бік. При цьому вони стикаються з кристалічною ґраткою металу і

передають їй певний імпульс, якого набули під дією магнітного поля. Макроскопічним результатом елементарних процесів зіткнення окремих носіїв заряду з кристалічною ґраткою провідника є виникнення сили Ампера.

Для обчислення сили, що діє на окремий рухомий заряд в магнітному полі, розглянемо елемент провідника dl зі струмом I у магнітному полі з індукцією $\vec{B}$. На цей елемент діє сила Ампера $dF = BIdl\sin\alpha$. Якщо елемент dl містить dN вільних носіїв заряду, то сила $F_л$, що припадає на один електрон, дорівнює:

$$F_л = \frac{dF}{dN},$$

де $F_л$ – сила Лоренца.

Кількість носіїв заряду dN в елементі провідника dl запишемо через їх концентрацію n та об'єм dV елемента: $dN=ndV=nS\,dl$, S – площа поперечного перерізу провідника. Тоді

$$F_л = \frac{BIdl\sin\alpha}{nSdl} = \frac{B}{n}\frac{I}{S}\sin\alpha = \frac{Bj\sin\alpha}{n}.$$

За електронною теорією густина струму $j = ne\upsilon$, тому

$$F_л = Be\upsilon\sin\alpha, \text{ або } \vec{F}_л = e\left[\vec{\upsilon}\vec{B}\right],$$

де α – кут між векторами $\vec{\upsilon}$ і $\vec{B}$.

В загальному випадку

$$\vec{F}_л = q\left[\vec{\upsilon}\vec{B}\right].$$

Напрямок сили Лоренца визначається за правилом векторного добутку. На негативний заряд сила діє в протилежному напрямку (рис. 9).

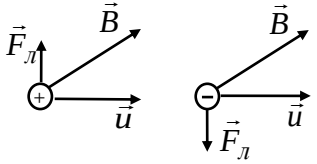


Рис. 9.

Сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості руху зарядженої частинки, тому вона змінює лише напрямок цієї швидкості, не змінюючи її модуля. Отже, сила

Лоренца роботи не виконує і кінетична енергія частинки при русі в магнітному полі не змінюється.

Якщо на рухомий електричний заряд, крім магнітного поля з індукцією $\vec{B}$, діє і електричне поле з напруженістю $\vec{E}$, то результуюча сила $\vec{F}$, яка прикладена до заряду визначається формулою Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}\,\vec{B}\right].$$

Якщо заряджена частинка рухається в магнітному полі зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ вздовж ліній магнітної індукції або в протилежний бік до напрямку магнітної індукції, то $\alpha = 0$, або $\alpha = \pi$. У такому разі $F_л = 0$, магнітне поле на частинку не діє і вона рухається рівномірно і прямолінійно.

Якщо заряджена частинка рухається в магнітному полі з швидкістю $\vec{\upsilon}$ перпендикулярно до вектора $\vec{B}$, то сила Лоренца є стала за модулем і нормальна до траєкторії частинки. Частинка рухатиметься по колу, бо сила Лоренца за другим законом Ньютона буде створювати доцентрове прискорення. Отже,

$$q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{r}. \quad \text{Звідси} \quad r = \frac{m}{q}\frac{\upsilon}{B},$$

де r - радіус кола.

Використавши зв'язок $\upsilon = \omega r$, знайдемо циклічну частоту ω та період T обертання частинки навколо ліній індукції в магнітному полі:

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{q}{m}B, \quad T = \frac{2\pi r}{\upsilon} = \frac{2\pi}{B}\frac{m}{q}.$$

Період обертання частинки в однорідному магнітному полі не залежить від її швидкості. На цьому ґрунтується дія циклічних прискорювачів заряджених частинок.

Якщо швидкість $\vec{\upsilon}$ зарядженої частинки напрямлена під кутом α до вектора $\vec{B}$ (рис. 10), то її рух можна подати у вигляді суперпозиції:

1) рівномірного прямолінійного руху вздовж поля з швидкістю

$\upsilon_{\parallel} = \upsilon \cos\alpha$;

2) рівномірного руху з швидкістю $\upsilon_{\perp} = \upsilon \sin\alpha$ вздовж кола, яке перпендикулярне до поля.

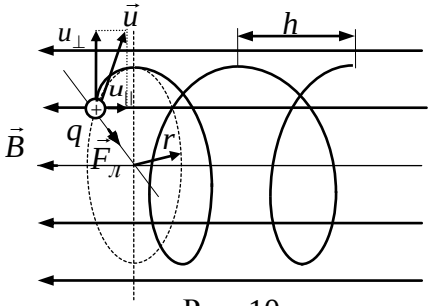


Рис. 10.

В результаті складання обох рухів виникає рух вздовж гвинтової лінії, вісь якої паралельна до магнітного поля. Крок гвинтової лінії:

$$h = \upsilon_{\parallel} T .$$

Напрям гвинтової лінії, залежить від знаку заряду частинки.

Тема 5. Магнітний потік. Робота по переміщенні провідника і контура зі струмом у магнітному полі

1. Потоком вектора магнітної індукції (магнітним потоком) через площадку dS називається скалярна фізична величина, яка дорівнює добутку проекції B_n вектора $\vec{B}$ на напрямок нормалі $\vec{n}$ до площадки dS і величини цієї площадки:

$$d\Phi_B = B_n dS = \left(\vec{B}\, d\vec{S}\right),$$

де $B_n = B\cos\alpha$ - проекція вектора $\vec{B}$ на напрямок нормалі до площадки dS (α - кут між векторами $\vec{n}$ і $\vec{B}$) (рис. 11), $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор, модуль якого дорівнює dS, а напрямок збігається з нормаллю $\vec{n}$ до площадки dS.

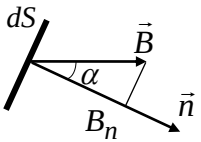


Рис. 11.

Потік вектора $\vec{B}$ може бути як

позитивним, так і негативним залежно від знаку $\cos\alpha$ (визначається вибором позитивного напрямку нормалі $\vec{n}$).

Потік вектора магнітної індукції $\vec{\Phi}_B$ через довільну поверхню *S* дорівнює:

$$\Phi_B = \int\limits_S B_n dS = \int\limits_S \left(\vec{B}\, d\vec{S}\right).$$

Для однорідного поля і плоскої поверхні, розміщеної перпендикулярно до вектора $\vec{B}$, $B_n = B = const$ і $\Phi_B = BS$.

2. На провідник зі струмом у магнітному полі діє сила Ампера. Якщо провідник не закріплено, то під впливом сили Ампера він переміщуватиметься у магнітному полі.

Обчислимо роботу *dA*, виконану силою Ампера **при переміщенні елемента *dl* провідника** зі струмом *I* у магнітному полі (рис. 12).

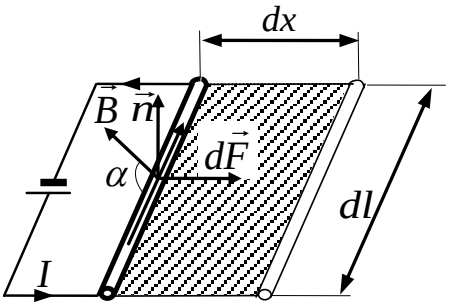


Рис. 12.

Елемент провідника переміщується в напрямку сили $d\vec{F}$, яка діє на нього на відстані *dx*. Робота *dA* дорівнює:

$$dA = dFdx.$$

За законом Ампера:

$$dF = IBdl\sin\alpha.$$

Тоді:

$$dA = IB\sin\alpha dldx.$$

Сила $d\vec{F}$ і переміщення $d\vec{x}$ напрямлені перпендикулярно

до елемента провідника $d\vec{l}$. Добуток $dl\,dx = dS$ – площа поверхні, яка описана елементом провідника *dl* при його переміщенні на *dx*.

З рис. 12 видно, що $B\sin\alpha = B_n$ – проекція вектора $\vec{B}$ на напрямок нормалі $\vec{n}$ до площини *dS*.

Добуток $B_n dS = d\Phi_B$ – **магнітний потік** крізь поверхню *dS*. Тоді

$$dA = IB_n dS = Id\Phi_B .$$

Вважаючи силу струму сталою і, інтегруючи цей вираз, отримаємо:

$$A = I\Phi_B .$$

Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні в магнітному полі провідника, струм в якому постійний, дорівнює добутку сили струму на величину магнітного потоку крізь поверхню, яку описує провідник під час свого руху.

3. Знайдемо вираз для роботи, яку виконують сили Ампера при переміщенні в магнітному полі замкненого контуру, по якому проходить постійний струм *I*.

Нехай внаслідок нескінченно малого переміщення контур *C* зайняв положення C' (рис. 13).

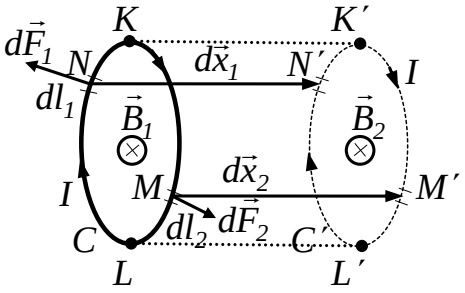


Рис. 13.

Контур *C* уявно розіб'ємо на два провідники *LNK* і *KML*, які з'єднані своїми кінцями. Повна робота *dA*, виконана силами

Ампера при переміщенні контуру, дорівнює алгебраїчній сумі робіт переміщення провідників $LNK\left(dA_1\right)$ і $KML\left(dA_2\right)$, тобто $dA = dA_1 + dA_2$.

Припустимо, що вектор $\vec{B}$ магнітної індукції напрямлений перпендикулярно до площини рисунка і в початковому положенні контуру дорівнює B_1, а в кінцевому - B_2, причому $B_2 > B_1$.

Сила Ампера $d\vec{F}_2$, що діє на довільний елемент dl_2, провідника *KML* утворює гострий кут з напрямком його переміщення $d\vec{x}_2$ і виконує позитивну роботу.

Сила $d\vec{F}_1$, що діє на елемент dl_1 провідника *LNK,* утворює з напрямком його переміщення $d\vec{x}_1$ тупий кут і виконує негативну роботу, тому роботи dA_1 і dA_2 переміщення провідників *LNK* і *KML* мають різні знаки. Щоб отримати абсолютні значення роботи dA_1 і dA_2, треба продиференціювати вираз $A = I\Phi_B$. Тому

$$dA = dA_1 + dA_2 = -Id\Phi_{B_1} + Id\Phi_{B_2} =$$
$$= I\left(d\Phi_{B_2} - d\Phi_{B_1}\right),$$

де $d\Phi_{B_1}$ – магнітний потік крізь поверхню $LNKK'N'L'$; $d\Phi_{B_2}$ – крізь поверхню $LMKK'M'L'$; $d\Phi_{B_2} - d\Phi_{B_1} = d\Phi_B$ – зміна магнітного потоку, що пронизує поверхню, обмежену контуром, при переміщенні контуру з положення *C* в положення C'.

Остаточний вираз для елементарної роботи *dA* буде

$$A = Id\Phi_B.$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо роботу *A*, яку виконує сила Ампера при будь-якому переміщенні контуру в магнітному полі

$$A = I\Delta\Phi_B.$$

Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні в

магнітному полі замкненого контура, по якому проходить постійний струм, дорівнює добутку сили струму на зміну магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

Тема 6. Явище електромагнітної індукції. Правило Ленца. Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея)

§ 1. Електромагнітна індукція

Після відкриття Ерстеда, в якому було доведено, що навколо провідників із струмом існує магнітне поле, природно було поставити питання про можливість утворення електричного струму у провідниках за допомогою магнітного поля. Це питання розв'язав М. Фарадей, який в 1831 р. показав, що в замкненому провіднику виникає електричний струм при будь-яких змінах магнітного потоку через поверхню, охоплену цим провідником.

Явище виникнення електрорушійної сили при зміні магнітного потоку, що пронизує поверхню, яка охоплена провідним, контуром, називається електромагнітною індукцією.

Струм, що виникає у провідниках при електромагнітній індукції, називається індукційним.

Виникнення індукційного струму завжди пов'язане із зміною магнітного потоку через поверхню, яку охоплює провідник. Ці зміни можуть відбуватися з різних причин, зокрема через:

- переміщення постійного магніту відносно нерухомого провідника;
- переміщення контуру відносно нерухомого магніту;
- замикання та розмикання струму в обмотці нерухомого електромагніту, розміщеного поблизу провідника;
- відносне переміщення контуру і електромагніту;
- зміну магнітної індукції поля електромагніту (виймання осердя при сталому струмі в обмотці або зміну струму реостатом);
- зміну комутатором напрямку струму в обмотці

електромагніту;
- постійний рух контуру в неоднорідному магнітному полі;
- обертальний рух контуру в однорідному магнітному полі.

Отже, індукційний струм в замкненому провідному контурі виникає тільки тоді, коли змінюється магнітний потік, який проходить через площу, охоплену контуром.

§ 2. Правило Ленца

Фарадей встановив, що напрямок індукційного струму в провіднику залежить від характеру зміни (збільшення чи зменшення) магнітного потоку $(\Delta\Phi > 0$ чи $\Delta\Phi < 0)$ через його контур. Якщо при внесенні постійного магніту в котушку стрілка гальванометра відхиляється в один бік, то при вийманні магніту вона відхиляється в протилежний бік.

Загальне правило, за допомогою якого можна визначити напрямок індукційного струму в замкненому провіднику, сформулював Е.Х. Ленц: індукційний струм у замкненому провіднику завжди має такий напрямок, що створений цим струмом власний магнітний потік протидіє тим змінам зовнішнього магнітного потоку, які збуджують індукційний струм.

Із закону Ленца можна встановити, що енергія індукційного струму у провіднику утворюється за рахунок тієї енергії, яка витрачається на подолання протидії магнітного поля індукційного струму.

Завдяки явищу електромагнітної індукції можна перетворити механічну енергію в електричну, а також передавати електричну енергію з одного кола в інше.

Якщо індукційний струм виникає у прямому провіднику, який є ділянкою замкненого кола і рухається в зовнішньому магнітному полі перпендикулярно до ліній індукції, напрямок струму можна визначити за правилом правої руки: праву руку треба помістити в магнітному полі так, щоб лінії напруженості входили в долоню, а відставлений під прямим кутом великий палець збігався з напрямом переміщення провідника, тоді чотири витягнуті пальці вкажуть напрямок індукційного струму

в цьому провіднику.

Індукційний струм I_i у замкненому провіднику з опором R виникає під дією $\mathcal{E}_i$, яку можна виразити за законом Ома

$$\mathcal{E}_i = I_i R .$$

Оскільки та сама *ЕРС* у провідниках з різним опором створює неоднакові струми, то для кількісної характеристики явища електромагнітної індукції зручніше користуватися величиною $\mathcal{E}_i$, а не силою індукційного струму I_i.

§ 3. Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея)

Дослідження Фарадея індукційного струму в контурах різної форми і розмірів показали, що *ЕРС* електромагнітної індукції $\mathcal{E}_i$ в контурі пропорційна до швидкості зміни магнітного потоку Φ_B через поверхню, обмежену цим контуром (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_i = k\frac{d\Phi_B}{dt} .$$

ЕРС електромагнітної індукції в контурі вважають позитивною, якщо магнітний момент $\vec{p}_m$ відповідного їй індукційного струму утворює гострий кут з лініями магнітної індукції того поля, яке наводить цей струм (рис. 14).

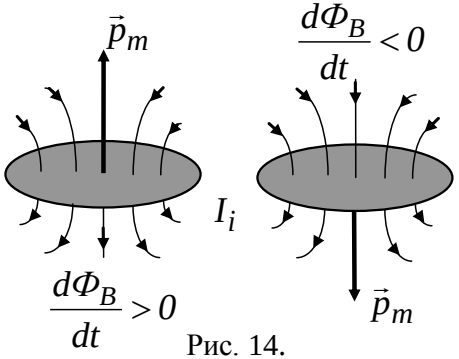


Рис. 14.

Тоді для випадку, зображеного на рисунку ліворуч,

$\mathcal{E}_i < 0$, а для зображеного праворуч – $\mathcal{E}_i > 0$. В системі СІ $k = -1$ і

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Знак „–" є математичним виразом правила Ленца.

Ця формула, яка об'єднує закони Фарадея і Ленца, є математичним виразом основного закону електромагнітної індукції: електрорушійна сила електромагнітної індукції в замкненому контурі чисельно дорівнює і протилежна за знаком швидкості зміні магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

Якщо *ЕРС* індукції виникає при зміні магнітного потоку, який пронизує котушку з *N* витків, то її величина буде відповідно в *N* разів більшою, ніж для одного витка, тобто

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}.$$

На основі закону електромагнітної індукції можна означити одиницю магнітного потоку вебер: *1 Вб* – це такий магнітний потік, при зменшенні якого до нуля протягом *1 с* в колі, яке він пронизував, виникає *ЕРС* індукції в *1 В*.

Тема 7. Явище самоіндукції. Індуктивність

Згідно із закону Фарадея, електрорушійна сила індукції $\mathcal{E}_i$ виникає при будь-яких змінах магнітного потоку Φ_B через поверхню, охоплену провідним контуром, незалежно від природи цього потоку і рівна

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}.$$

Під час проходження по контуру непостійного струму власний магнітний потік змінюється і в контурі теж наводиться *ЕРС* індукції.

Явище виникнення в контурі ЕРС індукції при змінах власного магнітного потоку, пов'язаних із зміною струму в

цьому контурі, називається самоіндукцією. Електрорушійна сила в цьому випадку називається ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}_c$.

Отже, самоіндукція – це окремий випадок загального явища електрорушійної індукції.

§1. Індуктивність контура. Електрорушійна сила самоіндукції

Розглянемо соленоїд, що має *N* витків, по яких проходить струм *I* від зовнішнього джерела. Цей струм створює в соленоїді магнітне поле, яке зосереджене в його об'ємі і це поле можна вважати однорідним. Нехай весь об'єм магнітного поля соленоїда заповнений однорідною речовиною з відносною магнітною проникністю μ. Якщо змінювати струм в соленоїді, то власний магнітний потік Φ_B, який пронизує його поперечний переріз, теж змінюватиметься. Магнітний потік Φ_{B_1} крізь площу *S*, що обмежена одним витком, дорівнює

$$\Phi_{B_1} = BS = \mu\mu_0 nSI = \mu\mu_0 \frac{NS}{l} I,$$

де *l* – довжина соленоїда.

За законом Фарадея

$$\mathcal{E}_c = -N\frac{d\Phi_{B_1}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} I\right).$$

Позначимо

$$\mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = L.$$

Тоді

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Якщо магнітна проникність середовища μ не змінюється, то

$$\mathcal{E}_c = -L\frac{dI}{dt}.$$

EPC самоіндукції прямо пропорційна швидкості зміни сили струму в контурі.

Параметр L характеризує індивідуальні властивості контуру. Його називають коефіцієнтом індуктивності, або просто індуктивністю контуру.

Індуктивність котушки (соленоїда):

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l^2} Sl$$

$$\Downarrow$$

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

де n - число витків на одиницю довжини соленоїда;

V - об'єм соленоїда.

Індуктивність контура залежить від форми контуру, його розмірів та відносної магнітної проникності середовища, в якому він знаходиться. Одиниця індуктивності – генрі (*Гн*).

У виразі для *EPC* самоіндукції знак „–", зумовлений правилом Ленца, показує, що наявність індуктивності контура приводить до сповільнення зміни струму в ньому. Тобто індуктивність контуру є мірою його інертності відносно зміни струму.

Якщо струм з часом збільшується, то $\frac{dI}{dt} > 0$ і, $\mathcal{E}_c < 0$, тобто струм самоіндукції напрямлений назустріч струму, який зумовлений зовнішнім джерелом і гальмує його зростання. Якщо струм з часом зменшується, то $\frac{dI}{dt} < 0$, і $\mathcal{E}_c > 0$, тобто індукційний струм має такий напрямок, як і спадний струм в контурі, і сповільнює його зменшення.

§2. Закон зміни струму при перехідних процесах

Процеси, що відбуваються в електричних колах при їх вмиканні чи розмиканні називають перехідними процесами.

Явище самоіндукції найбільш яскраво проявляється у

виникненні так званих екстраструмів замикання та екстраструмів розмикання в колах, що містять котушки з великою індуктивністю.

Закон зміни струму в колі, індуктивність якого L, а електричний опір - R, під час вмикання в це коло і вимикання з нього джерела *EPC* - $\mathcal{E}$, випливає із закону Ома для замкнутого кола і має вигляд:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

I. Для випадку вмикання джерела *EPC* початковий струм $I_0 = 0$ і отримуємо вираз для екстраструму замикання

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Струм у колі поступово збільшується від нуля при $t = 0$ до значення $\frac{\mathcal{E}}{R}$, яке відповідає величині постійного струму (рис. 15). Зростання струму відбувається тим швидше, чим більше відношення $\frac{R}{L}$.

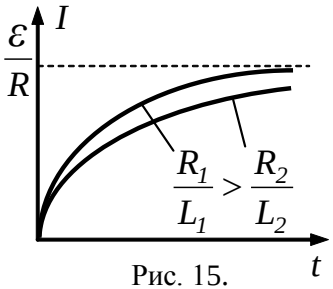


Рис. 15.

II. Для випадку вимикання джерела *EPC* $\mathcal{E} = 0$, і екстраструм розмикання змінюється за законом

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Струм у колі поступово зменшується від початкового

значення I_0 до нуля за експоненціальним законом (рис. 16).

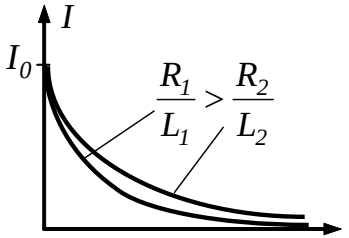


Рис. 16.

Струм зменшується тим швидше, чим більше значення $\frac{R}{L}$, тобто чим більший опір кола і чим менша його індуктивність.

Тема 8. Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність

Якщо два контури розміщені так, що магнітний потік, який створюється струмом в одному з них, хоч частково пронизує другий контур, то такі контури індуктивно пов'язані між собою і між ними виникає взаємоіндукція.

Розглянемо два нерухомі контури, індуктивності яких L_1 і L_2, що розміщені досить близько один від одного (рис. 17). Якщо в контурі *1* тече струм I_1, то магнітний потік, що створюється цим струмом, пропорційний до I_1.

Позначимо $\Phi_{B_{12}}$ ту частину потоку, яка пронизує контур *2*. Тоді

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1,$$

де L_{12} - коефіцієнт пропорційності.

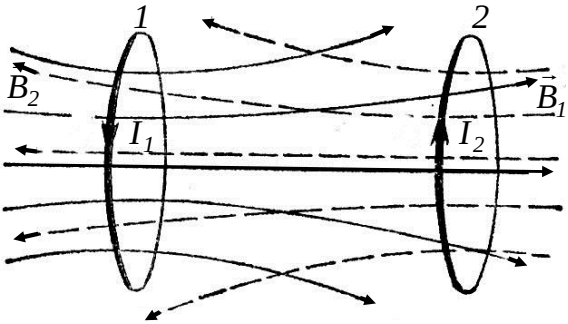


Рис. 17.

Якщо струм I_1 змінюється, то в контурі *1* індукція *ЕРС* $\mathcal{E}_{i_2}$, яка за законом Фарадея дорівнює швидкості зміни магнітного потоку $\Phi_{B_{12}}$:

$$\mathcal{E}_{i_2} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогічно, при протіканні в контурі *2* струму I_2 магнітний потік пронизує перший контур. Якщо $\Phi_{B_{12}}$ - частина потоку, що пронизує контур *1*, то

$$\Phi_{B_{12}} = L_{21}I_2.$$

Якщо струм I_2 змінюється, то в контурі *1* індукується *ЕРС* $\mathcal{E}_{i_1}$:

$$\mathcal{E}_{i_1} = -\frac{d\Phi_{B_{21}}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_2}{dt}.$$

Контури *1* і *2* називаються зв'язаними. Коефіцієнти L_{12} і L_{21} називаються взаємною індуктивністю контурів.

Вони є мірою магнітного індуктивно зв'язку між двома контурами і характеризують їх здатність збуджувати *ЕРС* індукції в одному з них при зміні струму в другому.

Розрахунки показують, що

$$L_{12} = L_{21}.$$

Коефіцієнти L_{12} і L_{21} залежать від геометричної форми, розмірів, взаємного розміщення контурів і від магнітної проникності середовища, яке оточує контури.

Розрахуємо взаємну індуктивність двох котушок, які намотані на спільне тороїдальне осердя (рис. 18). Магнітна індукція поля, що створюється в осерді з магнітною проникністю μ, струмом силою I_1 в першій котушці з кількістю витків N_1, дорівнює:

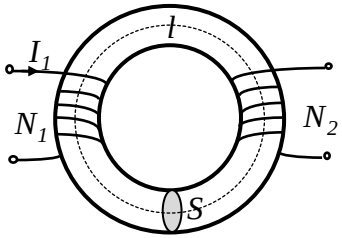


Рис. 18.

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l},$$

де l - довжина осердя по середній лінії.

Магнітний потік через один виток другої котушки

$$\Phi_{B_2} = B_1 S = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l} S.$$

Тоді потокозчеплення через вторинну обмотку, що має N_2 витків,

$$\psi_2 = \Phi_{B_2} N_2 = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1.$$

Потокозчеплення ψ_2 створюється струмом I_1, тому отримуємо

$$L_{12} = \frac{\psi_2}{I_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Якщо обчислити потокозчеплення, що створюється котушкою *2* через котушку *1*, коли по котушці *2* проходить струм I_2, то отримуємо

$$L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Отже,

$$L_{12} = L_{21}.$$

Оскільки індуктивність контурів

$$L_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1^2}{l} S \quad \text{і} \quad L_2 = \mu\mu_0 \frac{N_2^2}{l} S ,$$

то коефіцієнти взаємоіндукції

$$L_{12} = L_{21} = L_1 \frac{N_2}{N_1} = L_2 \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{L_1 L_2} .$$

Тема 9. Енергія магнітного поля

Провідник, по якому протікає електричний струм, завжди оточений магнітним полем, причому магнітне поле появляється і зникає разом з появою і зникненням струму. Отже, частина енергії струму йде на створення магнітного поля.

Енергія магнітного поля дорівнює роботі, яка затрачається струмом на створення цього поля.

Обчислимо енергію магнітного поля струму у випадку ізотропного середовища, в якому зв'язок індукції з напруженістю поля в ньому лінійний. Для цього розглянемо соленоїд з N витків, який має індуктивність L. Якщо за час dt струм у соленоїді зростає на величину dI, то при цьому змінюється і його власний магнітний потік відповідно на величину $d\Phi_B$. Якщо в момент часу t сила струму в соленоїді була I, то при зміні магнітного потоку на величину $d\Phi_B$, джерелом струму виконується додаткова робота dA:

$$dA = Id\Phi_B .$$

Оскільки соленоїд залишається нерухомим, то ця елементарна робота dA пов'язана із зміною енергії соленоїда, яка зумовлена наявністю в ньому магнітного поля, на величину $dW_м$:

$$dW_м = dA \quad \text{і} \quad dW_м = Id\Phi_B .$$

Оскільки

$$d\Phi_B = LdI , \text{ то } dW_м = LIdI .$$

Інтегруючи цей вираз, знаходимо

$$\int_0^{W_м} dW_м = \int_0^I LIdI\,;\; W_м = \frac{LI^2}{2}.$$

Це та енергія, яку було затрачено джерелом струму на утворення в соленоїді магнітного поля. За законом збереження енергії ця енергія дорівнює енергії магнітного поля $W_м$, яке пов'язане зі струмом I, що проходить по провіднику з індуктивністю L.

Оскільки $LI = \psi_c$, то вираз для енергії магнітного поля контуру зі струмом можна записати в такому вигляді:

$$W_м = \frac{\psi_c I}{2}.$$

Дослідження властивостей змінних магнітних полів було доказом того, що енергія магнітного поля локалізована у просторі.

Енергію магнітного поля струму можна визначити через характеристики цього поля - значення його напруженості H та індукції B. Для цього розглянемо частковий випадок – однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда, індуктивність якого

$$L = \mu\mu_0 n^2 V.$$

Тоді

$$W_м = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}\mu\mu_0 n^2 I^2 V.$$

Магнітна індукція поля в середині довгого соленоїда $B = \mu\mu_0 In$. Звідси

$$In = \frac{B}{\mu\mu_0}.$$

Тоді

$$W_м = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{B^2}{(\mu\mu_0)^2} V = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu\mu_0} V.$$

Оскільки $B = \mu\mu_0 H$, то

$$W_м = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 V = \frac{1}{2} BHV .$$

Магнітне поле соленоїда однорідне і зосереджене всередині соленоїда, а енергія поля розподілена в ньому з об'ємною густиною $\omega_м$, яка дорівнює

$$\omega_м = \frac{W_м}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} .$$

У випадку неоднорідного магнітного поля його енергію в деякому об'ємі V можна визначити так. Поділимо об'єм V на нескінченно малі елементи dV так, щоб поле в кожному з них можна було вважати однорідним. Тоді енергія елемента об'єму з локальною густиною $\omega_м$ в ньому дорівнює: $dW_м = \omega_м dV$.

Інтегруючи цей вираз по всьому об'єму поля V, отримаємо формулу для обчислення енергії неоднорідного поля:

$$W_м = \int_V \omega_м dV = \int_V \frac{BH}{2} dV .$$

Тема 7. Магнітні матеріали

Досліди і теорія показують, що всі речовини, які поміщені в магнітне поле, набувають магнітних властивостей, тобто намагнічуються і тому деякою мірою змінюють зовнішнє поле.

При цьому виявляється, що одні речовини послаблюють зовнішнє поле, а інші – підсилюють його; перші називаються **діамагнетиками**, другі – **парамагнетиками**. Більшість речовин належить до діамагнетиків.

§ 1. Діамагнетики

Діамагнетиками називають речовини, магнітні моменти атомів або молекул яких дорівнюють нулю, коли немає зов-

нішнього магнітного поля.

В цих речовинах спінові та орбітальні магнітні моменти електронів взаємно скомпенсовані.

До діамагнетиків належать інертні гази *He, Ne, Ar, Kr, Xe,* а також такі речовини, як H_2O, *C, Cu, Zn, Ag, Sb, Hg, Pb, Bi,* багато органічних сполук тощо.

Для пояснення природи діамагнетизму розглянемо вплив магнітного поля на рух електронів в атомах речовини.

Коли внести діамагнетик у зовнішнє магнітне поле, у кожному його атомі індукується магнітний момент $\vec{P}'_{ma}$, який напрямлений протилежно до вектора $\vec{B}$ магнітної індукції поля. В межах малого об'єму V ізотропного діамагнетика вектори $\vec{P}'_{ma}$ всіх N атомів (молекул) однакові. Вони пропорційні до вектора $\vec{B}$ і протилежні йому за напрямком. Тому вектор намагнічування дорівнює:

$$\vec{J} = \frac{N\vec{P}'_{ma}}{V} = n\vec{P}'_{ma} = -\frac{ne^2 \sum_{i=1}^{Z} < r_i^2 >}{6m} \vec{B} = \\ = \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0},$$

де n – концентрація атомів (молекул), χ – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи речовини:

$$\chi = -\frac{ne^2 \sum_{i=1}^{Z} < r_i^2 > \mu_0}{6m}.$$

Коефіцієнт χ називається **магнітною сприйнятливістю** речовини. Як видно, для всіх діамагнетиків $\chi < 0$ і за величиною $|\chi| \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$, тобто $|\chi| << 1$. Тому діамагнітний ефект малопомітний, цей ефект виникає у всіх речовинах, які

внесені у магнітне поле.

Стрижень з діамагнітного матеріалу намагнічується в напрямку, протилежному до напрямку зовнішнього магнітного поля. Тому в неоднорідному магнітному полі діамагнетик виштовхується в область слабшого поля і встановлюється так, щоб його вісь була перпендикулярна до вектора магнітної індукції $\vec{B}$ поля.

§ 2. Парамагнетики

Якщо векторна сума орбітальних магнітних моментів усіх електронів атома або молекули не дорівнює нулю, то атом загалом має деякий магнітний момент $\vec{P}_{ma}$. Такі атоми (молекули) називаються парамагнітними, а речовини, що складаються з них - **парамагнетиками.**

До парамагнетиків належать речовини, атоми яких мають незабудовану до кінця зовнішню електронну підоболонку: *Mg, Al, Ca, Cr, Mn, Pt,* кисень атомарний і молекулярний, солі заліза, кобальту, нікелю, рідкісноземельних елементів тощо.

За відсутності зовнішнього магнітного поля парамагнетик ненамагнічений, оскільки внаслідок теплового руху власні магнітні моменти атомів орієнтовані хаотично $(J = 0)$.

Розглянемо, що станеться при внесенні парамагнетика в однорідне магнітне поле, магнітна індукція якого дорівнює $\vec{B}$.

Кожен електрон атома парамагнітного тіла бере участь у двох рухах: орбітальному і прецесійному. Згідно з теоремою Лармора, всі магнітні моменти електронів атома і результуючий магнітний момент атома прецесують навколо напрямку $\vec{B}$ з однаковою кутовою швидкістю ω_L.

Тепловий рух атомів парамагнетика і їх зіткнення спричинюють поступове згасання прецесії магнітних моментів атомів, а також зменшення кутів між напрямами $\vec{P}'_{ma}$ і $\vec{B}$. Отже, незважаючи на утворюване тепловим рухом „розкидання" атомів, цей рух водночас сприяє переважній орієнтації

магнітних атомів у напрямку зовнішнього магнітного поля, оскільки саме по собі магнітне поле може спричинювати лише процесію $\vec{P}_{ma}$ навколо напрямку $\vec{B}$.

Магнітний момент $\vec{P}_{ma}$ окремого атома має величину $\sim 10^{-23}\,\frac{Дж}{Тл}$, але сукупна дія магнітних моментів усіх атомів, що містяться в одиниці об'єму речовини приводить до ефекту намагнічування, що значно перевищує діамагнітний ефект. Тому парамагнетик намагнічується „за полем", тобто в напрямку магнітної індукції $\vec{B}$ зовнішнього магнітного поля.

Класичну теорію парамагнетизму розвинув П. Ланжевен, який розглянув задачу про поведінку молекулярних струмів в однорідному магнітному полі.

Орієнтуюча дія магнітного поля на атом залежить від магнітного моменту атома і від магнітної індукції $\vec{B}$ поля. „**Розкидаюча**" дія теплового руху визначається величиною kT, пропорційною до середньої теплової енергії однієї частинки. Виявилося, що результуюча дія двох протилежних факторів залежить від відношення

$$\alpha = \frac{P_{ma}B}{kT}.$$

Ланжевен знайшов залежність намагніченості J парамагнетика від параметра a:

$$J = nP_{ma}L(\alpha),$$

де $L(\alpha)$ - класична функція Ланжавена, яка має вигляд:

$$L(\alpha) = \left\{\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Якщо $\alpha << 1$, то $L(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3}$; якщо $\alpha >> 1$, тоді $L(\alpha) \to 1$.

При $T \approx 300K$ умова $\alpha = 1$ може справджуватися лише в

дуже сильних магнітних полях.

У дуже сильних магнітних полях або при дуже низьких температурах, коли більша частина векторів $\vec{P}_m$ „орієнтована" вздовж напрямку індукції магнітного поля, спостерігається **явище насиченості**: намагніченість не залежить від $\vec{B}$.

Далеко від області насиченості $L(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3}$, тоді

$$\vec{J} = \frac{nP_{ma}^2 \mu_0}{3kT} \vec{B} = \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0}.$$

Магнітна сприйнятливість парамагнітних речовин $\chi = \frac{nP_{ma}^2 \mu_0}{3kT}$. Отже $\chi > 0$ і значення $\chi \sim 10^{-3} - 10^{-5}$.

Макроскопічно парамагнетизм виявляється в тому, що парамагнетики втягуються в неоднорідне магнітне поле, а в однорідному полі парамагнітний стрижень орієнтується паралельно до ліній індукції магнітного поля.

При нагріванні парамагнетика, який внесений у зовнішнє магнітне поле, тепловий рух атомів зростатиме і руйнуватиме ту орієнтацію елементарних магнітних моментів частини атомів, яка встановилася під дією зовнішнього поля. Отже, магнітна сприйнятливість парамагнетиків χ як величина, що характеризує з макроскопічного погляду магнітні властивості речовини, повинна залежати від *T*:

$$\chi = \frac{C}{T},$$

де $C = \frac{n\mu_0 P_{ma}^2}{3к}$ - стала Кюрі.

Це співвідношення виражає **закон Кюрі:** магнітна сприйнятливість парамагнетика обернено пропорційна до його термодинамічної температури.

§3. Феромагнетики

У дев'яти чистих хімічних елементів, а саме залізі (Fe), нікелі (Ni), кобальті (Co) і ланоганидах - гадолінію, тербію, диспрозію, гольмію, ербію (Er) і тулію (Ty) та їх численних сплавах виявлено властивість миттю намагнічуватися навіть у слабких магнітних полях. Усі вони утворюють групу сильномагнітних речовин - **феромагнетиків.** Феромагнетики підсилюють зовнішнє поле в сотні і тисячі разів.

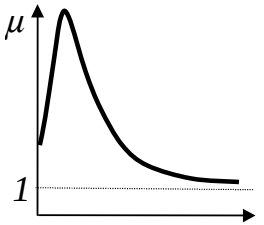


Рис. 19.

Відносна магнітна проникність μ феромагнетика спочатку швидко зростає із збільшенням H, досягає максимуму і потім спадає, прямуючи до одиниці при сильних намагнічуючих полях (рис. 19). Це пов'язано з тим, що

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{\mu_0 H + J}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{\mu_0 H}.$$

Тому при $J = J_н = const$ із зростанням H відношення $\frac{J}{H} \to 0$, а $\mu \to 1$.

О. Столетов вивчив явище намагнічування феромагнетика у змінному за величиною і напрямком зовнішньому магнітному полі.

Залежність намагніченості J від напруженості поля H визначається передісторією намагнічення феромагнетика (рис. 20).

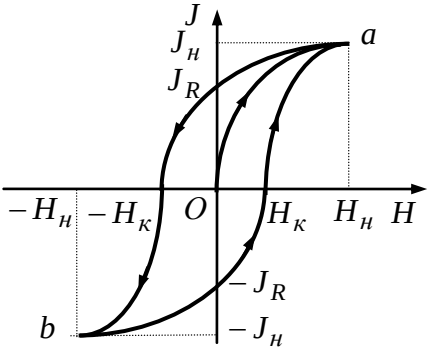


Рис. 20.

Це явище називається **магнітним гістерезисом.**

Помістимо стрижень з феромагнетика, який після виготовлення ні разу не був у зовнішньому магнітному полі, у соленоїд і монотонно збільшуватимемо струм у його обмотці. При цьому зростатиме напруженість H поля та намагнічення J стрижня (крива Oa), при напруженості поля H_H намагнічення досягає насичення J_H.

Якщо поступово зменшувати струм в обмотці соленоїда, то зменшується напруженість H поля соленоїда і намагнічення J стрижня. Але крива $J(H)$ вже не збігається з первинною кривою намагнічення Oa. В той момент, коли намагнічуюче поле $H=0$, у феромагнітного стрижня спостерігатиметься залишкове намагнічення J_R.

Після зміни на клемах соленоїда полярності джерела і монотонного збільшення струму виникає магнітне поле, яке напрямлене протилежно до залишкового намагнічення, і стрижень розмагнічуватиметься.

Та напруженість $H_к$ поля, яка потрібна, щоб повністю розмагнітити попередньо намагнічений стержень, називається **коерцитивною напруженістю** (коерцитивною силою).

При подальшому збільшенні магнітного поля, протилежного початковому, намагнічення стрижня знову

досягає намагнічення насичення - $J_н$ при $H = -H_н$. Повертаючись поступово до напруженості магнітного поля $H_н$, дістанемо замкнену криву, яка називається **петлею гістерезису.**

Коерцитивна сила характеризує властивість феромагнетика зберігати намагніченість. Матеріали з великою коерцитивною напруженістю дають широку петлю гістерезису і називаються „твердими" магнітними матеріалами. З них виготовляють постійні магніти.

„М'які" магнітні матеріали мають малу коерцитивну силу і дають вузьку петлю гістерезису. Ці матеріали використовують для виготовлення осердь трансформаторів. Перемагнічення феромагнетика пов'язане з повертанням областей спонтанного намагнічення. Робота, необхідна для цього, здійснюється за рахунок енергії зовнішнього магнітного поля. Кількість тепла, яке виділяється під час перемагнічування, пропорційна до площі петлі гістерезису.

В експериментах із залізом П. Кюрі встановив, що при певній температурі воно втрачає властивість феромагнетика і переходить в парамагнітний стан. Цю температуру називають точкою Кюрі.

Залежність магнітної сприйнятливості феромагнетиків від абсолютної температури T речовини у феромагнітному стані наближено описується законом Кюрі:

$$\chi = C(T_C - T)^{\gamma},$$

де $\gamma \neq 1$ і набуває різних значень у різних температурних інтервалах. Наприклад, при температурах T, близьких до точки фазового переходу T_C, $\gamma = \frac{4}{3}$.

Перехід речовини з феромагнітного стану в парамагнітний не супроводжується виділенням або поглинанням тепла.

Класична теорія феромагнетизму була розроблена П. Вейсом. В основу цієї теорії покладено дві гіпотези. **Перша**

гіпотеза полягає в тому, що в певній області температур (від $T = 0$ до $T = T_C$) феромагнетикам властива спонтанна намагніченість, яка не залежить від наявності зовнішнього магнітного поля.

Проте досліди показали, що у разі відсутності зовнішнього магнітного поля, якщо не брати до уваги явище магнітного гістерезису, будь-яке феромагнітне тіло буде в цілому розмагнічене.

Це примусило ввести **другу гіпотезу** про те, що при $T < T_C$ будь-яке феромагнітне тіло розділяється на малі області, яким властива однорідна спонтанна намагніченість. Такі області називаються **доменами**. Лінійні розміри доменів досягають $10^{-2} - 10^{-3}\,см$. Межі доменів (доменні стінки) не слід уявляти у вигляді геометричних площин. Фактично це області, що охоплюють сотні атомних шарів, в яких напрямок намагнічення змінюється монотонно.

Коли зовнішнього магнітного поля немає, вектори магнітних моментів окремих доменів орієнтуються в просторі хаотично, так що результуючий магнітний момент усього тіла дорівнює нулю. Зовнішнє магнітне поле, яке діє на феромагнетики, орієнтує магнітні моменти не окремих частинок як у парамагнетиках, а цілих областей спонтанної намагніченості, домени починають збільшуватись в об'ємі за рахунок сусідніх доменів, що мають інші орієнтації намагніченості.

При досить сильному полі $H_н$ всі домени повертаються в напрямку поля і феромагнетик намагнічується до насичення.

Класична теорія феромагнетизму дала змогу пояснити існування магнітного насичення, яке полягає в тому, що вектори магнітних моментів в усіх областях спонтанної намагніченості встановлюються паралельно до зовнішнього магнітного поля.

Макроскопічно феромагнетизм виявляється в тому, що феромагнетики втягуються в сторону сильнішого магнітного поля (що використовується у техніці, див рис. 21),

феромагнітний стрижень орієнтується паралельно до ліній індукції магнітного поля.

Рис. 21.

Подальший розвиток теорії феромагнетизму Гейзенбергом і Френкелем, а також ряд експериментальних фактів дозволили з'ясувати природу елементарних носіїв феромагнетизму. Магнітні властивості феромагнетиків визначаються **спіновими магнітними моментами електронів.**

Феромагнітні властивості можуть мати лише кристалічні речовини, в атомах яких недобудовані внутрішні електронні оболонки з нескомпенсованими спінами. У цих кристалах можуть виникати сили, які примушують спінові магнітні моменти електронів орієнтуватися паралельно один до одного, що і призводить до виникнення областей спонтанного намагнічення. Ці сили, що називаються **обмінними силами,** мають квантову природу - вони зумовлені хвильовими властивостями електронів.

РОЗДІЛ V. Коливання та хвилі.
Тема 1. Гармонійні коливання.
§1. Кінематика гармонійних коливань

Коливанням називається всякий рух або зміну стану тіла, що характеризується певним ступенем повторюваності в часі значень фізичних величин, які визначають цей рух або стан тіла.

Коливання називаються періодичними, якщо значення фізичних величин, які змінюються в процесі коливань, повторюються через однакові проміжки часу.

Якщо значення фізичних величин змінюється з часом за законом косинуса чи синуса то такі коливання називають гармонійними коливаннями.

Коливання називаються вільними або власними, якщо вони здійснюються за рахунок одноразово наданої енергії, за відсутності в подальшому зовнішніх впливів на коливну систему.

Залежність координати x від часу t для вільних гармонійних коливань вздовж осі OX задається рівнянням:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Тут x – зміщення коливної точки від положення рівноваги; A – амплітуда коливання $(A = x_{max})$; ω_0 – власна циклічна частота коливної системи; φ_0 – початкова фаза коливань в момент часу $t = 0$; $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза коливань в момент часу t.

Найменший проміжок часу (T), після проходження якого повторюються значення всіх фізичних величин, що характеризують дане коливання, називається періодом коливання.

За час T здійснюється одне повне коливання системи і фаза коливань отримує приріст 2π *рад*, тобто:

$$\omega_0(t+T)+\varphi_0=(\omega_0 t+\varphi_0)+2\pi,$$

$$\Downarrow$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Частотою коливань називається кількість повних коливань, що здійснюються за одиницю часу:

$$\nu=\frac{N}{t},$$

де N – кількість коливань, виконаних за час t.

Частота коливань – величина обернена до періоду коливань:

$$\nu=\frac{1}{T}.$$

Циклічна частота дорівнює кількості повних коливань, що здійснюється за $2\pi c$:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu.$$

Коливальний процес характеризується швидкістю і прискоренням коливної точки:

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}=-A\omega_0\,sin(\omega_0 t+\varphi_0),$$

або:

$$\upsilon=\upsilon_0\,cos\left(\omega_0 t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

або:

$$a = a_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi\right) = -\omega_0^2 x,$$

де $\upsilon_0 = A\omega_0$ – амплітуда швидкості, $a_0 = A\omega_0^2$ – амплітуда прискорення.

Фаза швидкості відрізняється від фази зміщення на $\frac{\pi}{2}$, а фаза прискорення відрізняється від фази зміщення на π (рис. 1).

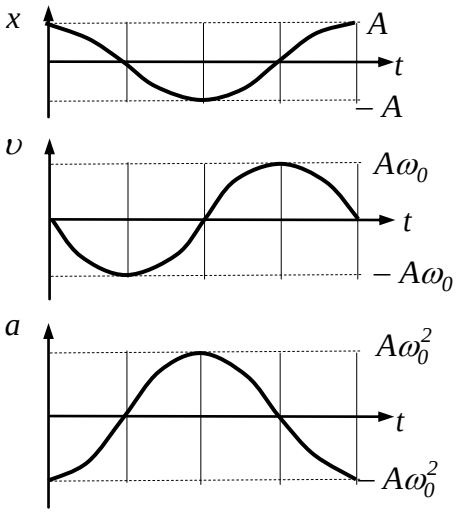


Рис. 1

В моменти часу, коли $x = 0$, швидкість υ набуває найбільшого значення, коли ж x досягає максимального від'ємного значення – прискорення a набуває найбільшого додатнього значення.

Прискорення завжди напрямлене до положення

рівноваги: віддаляючись від положення рівноваги, коливна точка рухається сповільнено, наближаючись до нього – прискорено.

§2. Диференціальне рівняння гармонійних коливань

Другий закон Ньютона дає змогу в загальному вигляді записати зв'язок між силою і прискоренням для вільних гармонійних коливань матеріальної точки з масою m:

$$F = ma,$$

$$\Downarrow$$

$$F = -mA\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right),$$

$$\Downarrow$$

$$F = -m\omega_0^2 x,$$

$$\Downarrow$$

$$F = -kx.$$

Сила, що діє на коливну матеріальну точку прямо пропорційна до зміщення і завжди напрямлена до положення рівноваги. Таку силу називають повертаючою силою. Фаза сили F збігається з фазою прискорення.

Прикладом сил, що задовольняють співвідношення $F = -kx$, є пружні сили. Сили F, що мають іншу природу, ніж пружні сили, але також задовольняють дану умову, називаються квазіпружними, а

$$k = m\omega_0^2$$

називають коефіцієнтом квазіпружної сили.

Для вільних гармонійних коливань вздовж осі *OX* прискорення $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Тоді, за другим законом Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Одержали диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань, збуджених пружними або квазіпружними силами.

Загальними розв'язками такого диференціального рівняння є функції:

$$x_1 = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ або } x_2 = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0').$$

§3. Енергія гармонійних коливань

Кінетична енергія матеріальної точки, що здійснює гармонійні коливання, визначається:

$$E_K = \frac{1}{2}m\upsilon^2,$$

$$\Downarrow$$

$$E_K = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\Downarrow$$

$$E_K = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2 \left[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\right].$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання під дією квазіпружної сили, визначається:

$$E_П = -\int_0^x F_x d\,x,$$

$$\Downarrow$$

$$E_П = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2,$$

$$\Downarrow$$

$$E_П = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\Downarrow$$

$$E_П = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2 \left[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\right].$$

Отже, кінетична і потенціальна енергії здійснюють гармонійні коливання з циклічною частотою $2\omega_0$ і амплітудою $\frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2$.

Повна механічна енергія коливної точки:

$$E = E_к + E_n = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2.$$

Графіки залежностей $E_к$, $E_п$ і E від часу t для випадку $\varphi_0 = 0$ наведені на рис. 2.

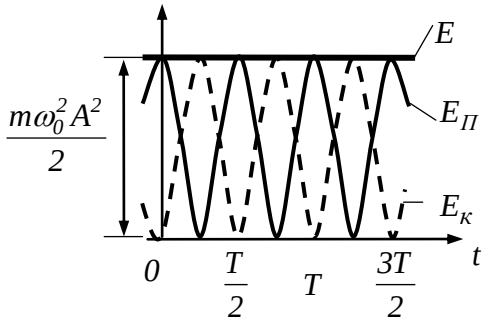


Рис. 2

Квазіпружна сила є консервативною. Тому повна енергія гармонійного коливання залишається сталою.

У процесі коливання відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки. В момент найбільшого відхилення точки від положення рівноваги повна енергія складається лише з потенціальної енергії. При проходженні точки через положення рівноваги повна енергія складається лише з кінетичної енергії, яка в цей момент є максимальною.

Тема 2. Маятники

§1. Пружинний маятник

Пружинний маятник – це тіло масою m, яке підвішене на невагомій абсолютно пружній пружині і здійснює гармонійні коливання під дією пружної сили:

$$\vec{F} = -k\vec{x},$$

де k – коефіцієнт пружності, який у випадку пружини називається жорсткістю (рис. 3). Крім того, на тіло діє сила тяжіння:

$$\vec{F}_T = m\vec{g}\,.$$

Рис. 3

Запишемо основне рівняння динаміки для такого випадку:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg = -k(x - x_0),$$

де $x_0 = \frac{mg}{k}$ - статична деформація пружини під дією сила тяжіння mg.

Позначимо $x_1 = x - x_0$ і, враховуючи, що

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2},$$

бо x_0 не залежить від часу, диференціальне рівняння коливного руху тіла набере вигляду:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Отже, пружинний маятник здійснює вільні гармонійні коливання за законом (розв'язок диференціального рівняння) :

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

з власною циклічною частотою:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

та періодом :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ця формула справедлива для пружних коливань в межах, в яких виконується закон Гука, та коли маса пружини мала порівняно з масою тіла.

Потенціальна енергія пружинного маятника дорівнює:

$$E_П = \frac{kx^2}{2}, \text{ де } x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

а кінетична:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}, \text{ де } \upsilon = \upsilon_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

§2. Математичний маятник

Математичним маятником називається матеріальна точка, підвішена на невагомій нерозтяжній нитці і коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 4).

Сила, що повертає математичний маятник у положення рівноваги, є складовою його сили тяжіння mg:

$$F_\tau = -mg\sin\alpha .$$

Складова $\vec{F}_n$ зрівноважується силою натягу нитки $\vec{F}_н$.

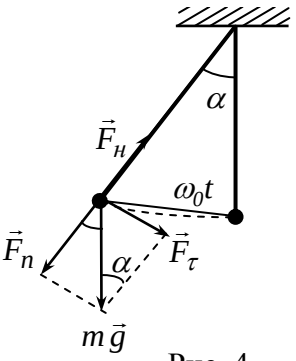


Рис. 4

Для малих кутів відхилення $\sin\alpha$ можна замінити кутом α, а дугу, вздовж якої рухається маятник, можна вважати відрізком прямої. Силу що повертає маятник до положення рівноваги, можна вважати квазіпружною силою:

$$F_\tau = -\frac{mg}{l}x = -kx .$$

Отже, малі коливання математичного маятника є гармонійними.

Період коливань визначається з виразу:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Математичний маятник зберігає площину, в якій він коливається.

§3. Фізичний маятник

Фізичний маятник – абсолютно тверде тіло, що здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі *O,*

яка не проходить через його центр мас C (рис. 5).

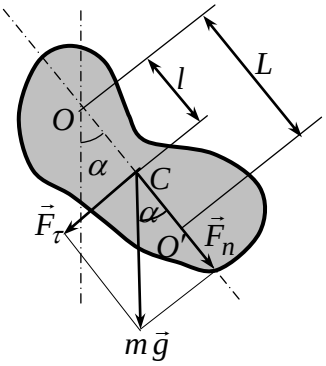


Рис. 5

Нехай маятник відхилено з положення рівноваги на невеликий кут α. Складова сили тяжіння маятника $\vec{F}_n$, напрямлена вздовж осі OO', зрівноважується реакцією осі O. Складова F_τ, яка перпендикулярна до OC, намагається повернути маятник у положення рівноваги.

Відповідно до рівняння динаміки обертального руху твердого тіла момент M обертальної сили F_τ можна записати у вигляді:

$$M = J\,\varepsilon = J\,\ddot{\alpha} = F_\tau\, l = -m\,g\,l\,\sin\alpha \approx -m\,g\,l\,\alpha\,,$$

де J - момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку O, l - відстань між точкою підвісу і центром мас маятника, $\sin\alpha \approx \alpha$ відповідає малим коливанням маятника. Тоді

$$J\,\ddot{\alpha} + m\,g\,l\,\alpha = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{\alpha} + \frac{m\,g\,l}{J}\,\alpha = 0\,.$$

Позначивши

$$\frac{m\,g\,l}{J} = \omega_0^2\,,$$

отримаємо рівняння

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\,\alpha = 0\,.$$

Розв’язок цього рівняння такий:

$$\alpha = \alpha_0\,\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

При малих коливаннях фізичний маятник здійснює гармонійні коливання з частотою ω_0 і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,l}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

де $L = \frac{J}{ml}$ - зведена довжина фізичного маятника.

Точка O' на продовженні прямої OC, що знаходиться від осі підвісу на відстані зведеної довжини L, називається центром гойдання фізичного маятника.

Точка підвісу O і центр гойдання O' мають властивість спряженості: якщо вісь підвісу проходить через центр гойдання, то точка O попередньої осі підвісу стане новим центром гойдання і період гойдання фізичного маятника не зміниться.

Тема 3. Додавання гармонійних коливань одного напряму

§1. Метод векторних діаграм

Із довільної точки O, яка вибрана на осі X, під кутом φ_0, що дорівнює початковій фазі коливань, відкладемо вектор $\vec{A}$, модуль якого дорівнює амплітуді A коливання (рис. 6).

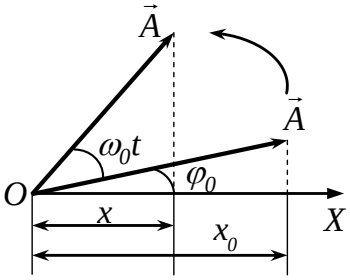


Рис. 6

Проекція вектора $\vec{A}$ на вісь *OX* дорівнює зміщенню x_0 у момент початку відліку часу $(t=0)$:

$$x_0 = A\cos\varphi_0 .$$

Обертатимемо вектор амплітуди навколо осі *O*, яка перпендикулярна до площини рисунка, з кутовою швидкістю ω_0. За проміжок часу *t* вектор амплітуди повертається на кут $\omega_0 t$. Проекція вектора $\vec{A}$ в цьому положенні на вісь *OX* дорівнює:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

За час *T*, що дорівнює періоду коливань, вектор амплітуди повертається на кут 2π, а проекція його кінця зробить одне повне коливання навколо положення рівноваги *O*.

§2. Додавання гармонійних коливань одного напряму

Нехай точка бере участь у двох гармонійних коливаннях однакової частоти, які напрямлені вздовж однієї прямої:

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_{01}), \quad x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_{02}).$$

Ці коливання зручно додати, користуючись методом обертального вектора амплітуди. Для цього відкладемо з точки *O* під кутом φ_{01} вектор амплітуди $\vec{A}_1$, а під кутом φ_{02} - вектор амплітуди $\vec{A}_2$ (рис. 7).

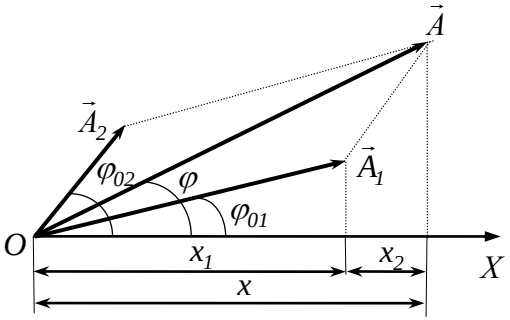


Рис. 7

Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються з однаковою кутовою швидкістю, то різниця фаз $\varphi_{02}-\varphi_{01}$ між ними постійна. Оскільки сума проекцій двох векторів на одну вісь дорівнює проекції на ту саму вісь вектора, який є їх сумою, то результуюче коливання можна подати вектором амплітуди $\vec{A}$, що дорівнює сумі векторів $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$:

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2,$$

який обертається навколо точки O з тією самою кутовою швидкістю ω_0, що й вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$. Результуюче коливання описуються рівнянням:

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega_0 t+\varphi),$$

де A – амплітуда результуючого коливання, а φ – його початкова фаза.

Застосовуючи теорему косинусів до одного з трикутників, на які паралелограм розбивається діагоналлю, з рис. 7 видно, що:

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01}),$$

$$tg\,\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}}.$$

Амплітуда A результуючого коливання залежить від різниці початкових фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ коливань, що додаються. Можливі значення A лежать в межах:

$$A_1 + A_2 \geq A \geq |A_2 - A_1|.$$

Розглянемо окремі випадки:

1) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm 2m\pi$, $(m = 0, 1, 2, ...)$,

тоді $\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 1$ і $A = A_1 + A_2$.

2) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm(2m+1)\pi$, $(m = 0, 1, 2, ...)$,

тоді $\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = -1$ і $A = |A_1 - A_2|$.

§3. Биття

Періодичні зміни амплітуди коливання, які виникають при додаванні двох гармонійних коливань одного напрямку з близькими частотами, називаються биттям.

Нехай амплітуди коливань $A_1 = A_2 = A$, $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$, а частоти дорівнюють ω_0, $\omega_0 + \Delta\omega$ і $\Delta\omega << \omega_0$.

Тоді рівняння коливань матимуть вигляд:

$$x_1 = A\cos\omega_0 t,\ x_2 = A\cos(\omega_0 t + \Delta\omega t).$$

Додаючи ці вирази і застосовуючи тригонометричну формулу для суми косинусів, отримуємо:

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega_0 t.$$

Оскільки $\Delta\omega << \omega_0$, то множник $2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ із зміною

часу майже не змінюється, у той час, як множник $\cos\omega_0 t$ суттєво реагує на зміну t. Тому результуюче коливання x можна розглядати як гармонійне з частотою ω_0 й амплітудою

$$A_\delta = \left| 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \right|.$$

Частота зміни A_δ удвоє більша від частоти зміни косинуса (оскільки береться за модулем). Частота биття дорівнює різниці частот коливань, що додаються, тобто $\omega_\delta = \Delta\omega$.

Період биття: $T_\delta = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Суцільні лінії на рис. 8 дають графік результуючого коливання у випадку $\dfrac{\omega}{\Delta\omega} = 10$.

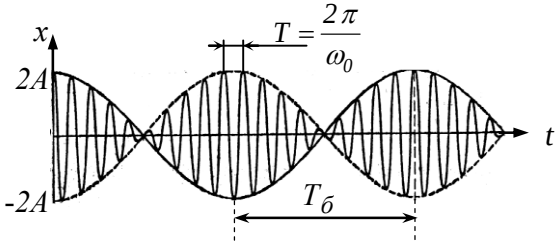


Рис. 8

Тема 4. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

§1. Рівняння траєкторії руху матеріальної точки при додаванні взаємно перпендикулярних коливань

Нехай матеріальна точка *C* одночасно бере участь у двох гармонійних коливаннях з однаковою частотою у двох взаємно перпендикулярних напрямках як вздовж осі *X*, так і вздовж осі *Y* (рис. 9). Якщо збудити обидва коливання, матеріальна точка буде рухатись вздовж деякої криволінійної траєкторії, форма якої залежить від різниці фаз обох коливань.

Виберемо початок відліку часу так, щоб початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю. Тоді рівняння коливань матимуть вигляд:

$$x = A\cos\omega_0 t, \quad y = B\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

де φ - різниця фаз обох коливань.

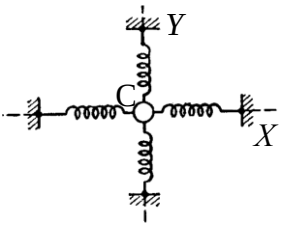


Рис. 9

Щоб отримати рівняння траєкторії треба виключити з цих рівнянь параметр t. Проведемо наступні перетворення:

$$\frac{x}{A} = \cos\omega_0 t, \quad \sin\omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}};$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos\omega_0 t\cos\varphi -$$

$$-\sin\omega_0 t\sin\varphi = \frac{x}{A}\cos\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi;$$

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\varphi\right)^2 = \left(-\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi\right)^2;$$

$$\frac{x^2}{A^2}\cos^2\varphi - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} =$$

$$= -\frac{x^2}{A^2} - \sin^2\varphi + \sin^2\varphi.$$

В результаті отримаємо:

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi.$$

Це рівняння еліпса, осі якого повернуті відносно координатних осей *OX* і *OY*. Орієнтація еліпса і величини його півосей залежать від амплітуд *OA* і *OB* і різниці фаз φ.

§2. Частинні випадки при додаванні взаємно перпендикулярних коливань

I. $\varphi = \pm 2m\pi \quad (m = 0,\ 1,\ 2,...)$. Тоді рівняння траєкторії набуде вигляду:

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0;$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{B}{A}x.$$

Результуюче коливання є гармонійним вздовж прямої з частотою ω і амплітудою $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 10). Пряма утворює з віссю *X* кут $\alpha = arctg\frac{B}{A}$.

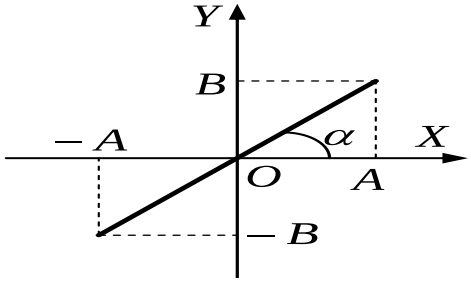


Рис. 10

II. $\varphi = \pm(2m+1)\pi$, $(m = 0,\ 1,\ 2,...)$. У цьому випадку:

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0;$$

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{B}{A}x.$$

Результуючий рух – це гармонійне коливання вздовж прямої.

III. $\varphi = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$ $(m = 0, 1, 2,...)$. В результаті одержимо:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Це рівняння еліпса, осі якого збігаються з осями координат, а його півосі дорівнюють відповідним амплітудам (рис. 11).

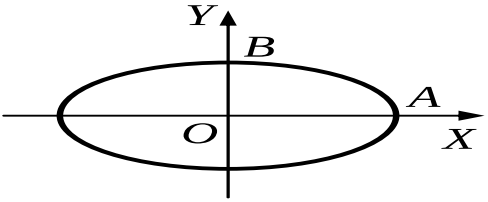


Рис. 11

Якщо $A=B$, то еліпс вироджується в коло.

IV. Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань, що додаються, різні, то замкнена траєкторія результуючого коливання досить складна.

Замкнені траєкторії точки, яка здійснює одночасно такі два взаємно перпендикулярні коливання, називаються фігурами Ліссажу. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз коливань, що додаються (рис. 12).

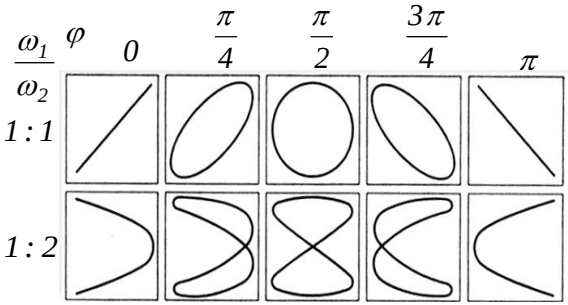


Рис. 12

РОЗДІЛ VI. Оптика.

Тема 1. Інтерференція світла

§1. Умова максимуму і мінімуму при інтерференції когерентних світлових хвиль

Інтерференція хвиль (лат. inter взаємно + ferens несучий) – це стаціонарний перерозподіл у просторі амплітуди та фази результуючої хвилі, що утворюється при накладанні декількох когерентних хвиль. Для монохроматичного світла інтерференція спостерігається на екрані чи іншій поверхні у вигляді чергування світлих та темних смуг чи плям, а для білого – різнокольорових ділянок.

Когерентними називають хвилі, різниця фаз між якими для кожної точки простору не змінюється в часі. Тому що світло – хвилі поперечні, інтерферуватимуть лише ті пучки, поляризація яких однакова.

1. Часова когерентність

Монохроматичним називають світло одного кольору. При накладанні двох різних хвиль з циклічними частотами ω_1 та ω_2, зсув фази δ для деякої точки простору буде змінюватися з часом t:

$$\delta = (\omega_2 - \omega_1)t .$$

Час $t_{ког}$, за який зсув фази δ зміниться на π, називають **часом когерентності**. За час $t_{ког}$ інтерференційна картина зміниться на протилежну. Реєструвати стійку інтерференційну картину можна в двох випадках:

- коли час реєстрації t_p менший від часу когерентності;
- коли випадкові зміни циклічних частот ω_1 та ω_2 забезпечують виконання умови когерентності $\delta < \pi$ для довільного проміжку часу t_p реєстрації.

Для ока час t_p реєстрації складає біля 0,1с, для фотоматеріалів – 10^{-2}–10^{-4}с, для фотоелектричних приймачів – біля 10^{-10}с. Навіть такі часи t_p є дуже великими порівняно з періодом T коливань світлових хвиль. Так, у видимій ділянці спектру $T \approx 10^{-15}$ с.

Світло випромінюється збудженими атомами чи молекулами. Час випромінювання скінченний і складає приблизно 10^{-8} с. Внаслідок скінченого часу τ випромінювання квант світла займатиме деякий діапазон частот $[\omega - \Delta\omega, \omega + \Delta\omega]$. Ширина $2\Delta\omega$ цього інтервалу диктується співвідношенням невизначеності:

$$\Delta\omega \cdot \tau \geq \pi .$$

Тобто реальні світлові хвилі в принципі немонохроматичні.

Відстань $\ell_{ког}$, на яку поширюється хвиля за час $t_{ког}$, називають довжиною когерентності:

$$\ell_{ког} = ct_{ког} .$$

Тут c – швидкість поширення хвилі. Для світла, породженого тепловим випромінюванням, $\ell_{ког} \approx 0{,}1$ мм. Якщо ж світло генерується лазером, $\ell_{ког} > 50$ м**.**

2. Просторова когерентність

Джерела світла неточкові, тобто хвилі, породжені одними його ділянками, даватимуть інтерференційні максимуми в одних місцях, а породжені іншими – в других. Може скластись ситуація, коли інтерференційні максимуми від одних ділянок джерела збігатимуться з мінімумами від інших його ділянок. У таких випадках контрастність інтерференційної картини погіршиться настільки, що перепади інтенсивності не будуть помітними. Для чіткої реєстрації інтерференції необхідно, щоб кутові розміри φ джерела задовольняли умову просторової когерентності:

$$\varphi < \lambda / \rho_{ког} .$$

Тут $\rho_{ког}$ – радіус просторової когерентності.

3. Максимум і мінімум інтенсивності

Нехай від лінійних джерел S_1 та S_2 поширюються монохроматичні когерентні світлові хвилі ξ_1 та ξ_2. Збурення, що створюються ними в певній точці залежатимуть як від часу, так і від пройденого шляху r:

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - kr_1);$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega t - kr_2).$$

Результуюче коливання, що збуджується даними коливаннями, буде:

$$\xi = A\cos(\omega t + \delta).$$

Величину δ називають різницею фаз коливань (зсувом фази). Її значення залежить від фаз хвиль ξ_1 та ξ_2, з якими вони приходять у цю точку простору:

$$\delta = (\omega t - kr_1) - (\omega t - kr_2) = k(r_2 - r_1).$$

Відстань $r_2 - r_1$ називають різницею ходу променів. У випадку, коли промені проходять через середовища з різними показниками заломлення n, говорять про оптичну різницю ходу:

$$\Delta = n_2 r_2 - n_1 r_1 \ .$$

Амплітуду A коливань в певній точці можна визначити за теоремою косинусів:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos\delta \ .$$

Інтенсивність I світла, що пропорційна квадрату амплітуди, буде:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta .$$

Для когерентних хвиль зсув фази δ у кожній точці може бути різним, однак він незмінний у часі. Незмінною в часі, хоча різною для окремих точок буде й інтенсивність світла. Таким чином, при накладанні когерентних хвиль відбувається

перерозподіл у просторі світлового потоку, в результаті чого його інтенсивність у різних точках екрану буде різною – в одних місцях спостерігатимуться максимуми, а в інших мінімуми.

Максимуми інтенсивності інтерференційної картини спостерігаються тоді, коли $\cos\delta$=1, тобто за умови:

$$\delta = \pm 2\pi m \text{, де } m = 0, 1, 2, \ldots$$

Таке значення зсуву фаз отримаємо, коли оптична різниця ходу променів дорівнює цілому числу довжин хвиль λ:

$$\Delta = \pm m\lambda \text{, де } m = 0, 1, 2, \ldots$$

Мінімуми інтенсивності спостерігатимуться тоді, коли $\cos\delta$=-1, а це значить, що

$$\delta = \pm\left(2\pi m + \pi\right) \text{, де } m = 0, 1, 2, \ldots,$$

тобто оптична різниця ходу відрізняється на ціле число довжин хвиль плюс половини довжини хвилі:

$$\Delta = \pm\left(m + 1/2\right)\lambda .$$

§2. Інтерференція світла в тонких плівках

Тонкими називають плівки, товщина яких набагато менша від довжини $\ell_{ког}$ часової когерентності світа.

При падінні світла на плоскопаралельну пластинку (плівку) товщиною d та показником заломлення n (рис. 1), воно відбивається від обох її поверхонь.

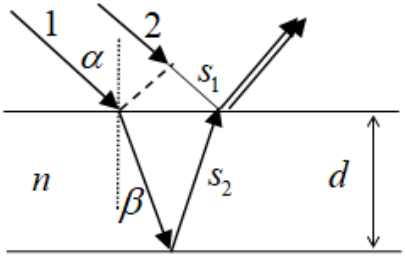


Рис. 1.

Якщо на пластинку падає плоска монохроматична хвиля, то оптична різниця ходу променів 1 та 2, що відбилися відповідно від задньої та передньої поверхонь, буде:

$$\Delta = 2ns_2 - s_1 .$$

Використавши геометричні співвідношення, отримуємо зв'язок:

$$s_1 = 2dtg\beta \sin\alpha ;$$

$$s_2 = \frac{d}{\cos\beta} .$$

Враховуючи закон заломлення $n\sin\beta = \sin\alpha$, матимемо:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} .$$

Дана формула не враховує факту, що при відбиванні світла від середовища з більшим показником заломлення відбувається зміна фази світлового вектора на π, а при відбиванні від середовища з меншим показником заломлення фаза світлового вектора не змінюється. Тому, остаточно вираз для обчислення оптичної різниці ходу променів набуде вигляду:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \lambda/2 .$$

Якщо пластинка має різну товщину в різних місцях, то при освітленні її паралельним пучком монохроматичного світла мінімуми та максимуми інтерференції спостерігатимуться в різних місцях пластинки, утворюючи темні та світлі смуги. Таку інтерференцію називають лініями однакової товщини (класичний приклад – кільця Ньютона).

Якщо пластинку освітлювати розсіяним монохроматичним світлом, у якому наявні промені різних напрямів, то оптична різниця ходу променів буде різною для різних кутів α. За допомогою лінзи промені, що поширюються в однакових напрямах, збиратимуться у фокальній площині лінзи в різних місцях, утворюючи світлі та темні смуги. Таку інтерференцію називають лініями однакового напряму.

При освітленні пластинки сонячним світлом, внаслідок невеликої довжини його часової когерентності, спостерігати інтерференцію можна лише в плівках, товщина яких не перевищує 0,05 мм. Кольори світла, для яких спостерігаються максимуми інтерференції, залежать від товщини плівок. Саме тому райдужні розводи на масляних плівках, плівках вірчування сталевих виробів, мильних бульбашках та інше, які можна спостерігати при невеликій товщині цих плівок, дістали назву кольори тонких плівок.

Тема 2. Дифракція паралельних променів

§1. Дифракція паралельних променів на щілині

Розглянемо спосіб розрахунку дифракції Фраунгофера (паралельних променів) на довгій прямокутній щілині. Нехай на щілину шириною b нормально падає плоска монохроматична хвиля (рис. 2). Світлове поле за щілиною визначатимемо відповідно до принципу Гюйгенса-Френеля.

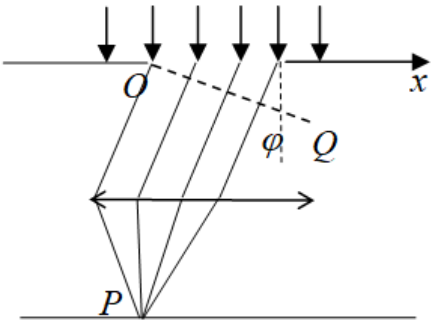


Рис. 2.

Якщо амплітуда світлової хвилі до щілини є A_0, то лінійна густина амплітуди A від окремих ділянок, що містяться на лінії щілини, буде $A = A_0 / b$. Тобто кожна ділянка dx щілини збуджує коливання світлового вектора:

$$dE = A\cos\delta_x dx,$$

де δ_x – фаза цього коливання.

При розрахунку коливання, що створюється на екрані в точці P, будемо виходити з того, що паралельні промені, які поширюються від поверхні OQ (перпендикулярна до напряму поширення променів) до точки P таутохронні, тобто приходять

в однаковій фазі. Різниця фаз променів, що поширюються від щілини, визначатиметься лише різницею ходу променів від лінії щілини до площини OQ. Якщо прийняти, що фаза коливання в точці $x=0$ є $\delta_0 = \omega t$, то зсув фази δ_x між коливанням на лінії щілини та на площині OQ визначається місцеперебуванням x цього джерела на лінії щілини:

$$\delta_x = \omega t - kx\sin\varphi .$$

Сумарне коливання світлового вектора в точці P, що створюється всією щілиною, можна визначити інтегруванням виразу для світлового вектора:

$$E = \int_0^b dE = A\int_0^b \cos\left(\omega t - kx\sin\varphi\right)dx = -\frac{A}{k\sin\varphi}\sin\left(\omega t - kx\sin\varphi\right)\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{A_0 b}{kb\sin\varphi}\left[\sin\left(\omega t - kb\sin\varphi\right) - kb\sin\omega t\right].$$

Використавши тригонометричні співвідношення, отримаємо:

$$E = A_0\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi}\cos\left(\omega t - \frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi\right).$$

Як видно, амплітуда A_φ коливань світлового вектора, що створюється сукупністю променів, які поширюються від щілини під кутом φ, дорівнюватиме:

$$A_\varphi = \left|A_0\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi}\right|.$$

При кутах, що задовольняють умову

$$\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi = \pm m\pi\ ;\ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ..$$

A_φ буде мінімальною. Умову мінімуму можна переписати в іншому вигляді:

$$b\sin\varphi = \pm m\lambda .$$

Такий запис означає, що різниця ходу променів, що виходять із крайніх точок щілини, повинна містити ціле число довжин хвиль. Наприклад, при $m=1$ щілину можна умовно розбити на дві рівні частини: перша з них даватиме збільшення амплітуди, а друга зменшення, що в результаті призведе до її повної компенсації в точці, де $\sin\varphi = \lambda / b$. При $\varphi=0$, тобто в центрі дифракційної картини, $A_\varphi = A_0$.

§2. Дифракція Фраунгофера на дифракційній ґратці

Дифракційна ґратка – це оптичний прилад, що складається з великої кількості (до 10^5) однакових паралельних щілин, розміщених на поверхні на однаковій відстані одна від одної. Якщо b – ширина щілини, а a – ширина непрозорого проміжку між ними, то величину $d = a + b$ називають сталою дифракційної ґратки, або періодом повторення.

У ґратці відбувається багатопроменева інтерференція когерентних дифракційних пучків світла, що породжуються усіма щілинами ґратки при її освітленні. Розміщення максимумів та мінімумів дифракційної картини визначається виключно величиною d сталої ґратки.

Якщо на ґратку нормально до її поверхні падає плоска когерентна світлова хвиля, то різниця ходу між вторинними хвилями від сусідніх щілин залежатиме від кута φ дифракції:

$$\Delta = d\sin\varphi .$$

З умови максимуму інтерференційної картини отримуємо:

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda ; \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

У напрямах, що визначаються цією умовою, спостерігатимуться максимуми інтенсивності, які називаються

головними. Ціле число m називають порядком головного максимуму.

У випадку, коли $a = b$, головні максимуми парних порядків збігаються з мінімумами дифракції від кожної з щілин. Жодна щілина в цьому напрямі не створює світлового вектора, тому головні максимуми парних порядків не появляються.

§3. Дифракція Х-променів

Дифракція спостерігається не лише на плоских ґратках, а й на тривимірних структурах, утворених періодично розміщеними атомами кристалічної речовини. Період кристалічних ґраток складає декілька ангстрем (1 Å=10^{-10} м), що значно менше від довжини хвилі видимого світла. Однак для Х-променів (рентгенівських) таку дифракцію можна спостерігати, що вперше вдалося зробити німецькому фізику М. фон Лауе (Laue) в 1913 р. Теоретично умову для дифракційних максимумів отримали батько та син Бреги (Bragg):

$$2d \sin \vartheta = \pm m\lambda .$$

Це співвідношення носить назву формули Брега-Вульфа. Тут d – період кристалічної ґратки, ϑ – кут ковзання.

Дифракція Х-променів від кристалів має два основних застосування: для дослідження спектрального складу Х-променів та вивчення структури кристалів. Саме Брегам вдалося вперше за допомогою Х-променів розшифрувати атомні структури ряду кристалів (Нобелівська премія за 1915 р.).

Тема 3. Поляризація світла

§1. Поляризоване світло. Ступінь поляризації

Світлова хвиля поперечна, тобто напрями коливань вектора $\vec{E}$ напруженості електричного поля та вектора $\vec{H}$ магнітного поля перпендикулярні до напряму поширення світлового променя, як наведено на рис. 3. Вектор $\vec{E}$ називають світловим вектором.

Поляризованим називають світло, в якому напрям коливань світлового вектора якимось чином упорядкований.

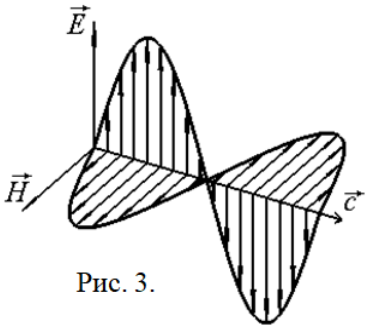


Рис. 3.

Площину, що проходить через світловий вектор та напрям поширення хвилі, називають площиною коливань. Площину, що проходить через напрям поширення хвилі перпендикулярно до площини коливань, називають площиною поляризації. Електромагнітну хвилю, в якої напрями коливань векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ фіксовані в просторі та не змінюються в часі, називають лінійнополяризованою (плоскополяризованою). При еліптичній поляризації світловий вектор описує еліпс у площині, перпендикулярній до напряму поширення світла.

Світловий промінь складається з багатьох квантів. Якщо у світловому промені напрями світлових векторів окремих квантів довільні, таке світло називають неполяризованим.

Плоскополяризоване світло можна отримати із неполяризованого, пропускаючи його через спеціальні пристрої – поляризатори. Поляризатори вільно пропускають кванти світла, поляризовані в площині поляризатора і повністю чи частково затримують решту квантів. Залежно від цього поляризатори поділяють на досконалі та недосконалі. На виході досконалого поляризатора світло буде поляризованим, а на виході недосконалого поляризатора лише частково-поляризованим.

Якщо частково-поляризоване світло пропустити через досконалий поляризатор, то, залежно від повороту площини

поляризатора, інтенсивність світла на виході буде змінюватися від $I_{\max}$ до $I_{\min}$. Вираз

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

визначає ступінь поляризації світла. Для плоскополяризованого світла P=1. У неполяризованому світлі всі напрями коливань світлового вектора представлені однаково, тому його ступінь поляризації P=0.

§2. Закон Малюса

Нехай на досконалий поляризатор падає плоскополяризоване світло з амплітудою світлового вектора A_0. Через поляризатор пройде складова коливань з амплітудою A, де

$$A = A_0 \cos\varphi. \qquad (36)$$

Тут φ – кут між площинами поляризатора та поляризації світла. Враховуючи, що інтенсивність I світла пропорційна квадрату амплітуди коливань світлового вектора, із (36) отримаємо:

$$I = I_0 \cos^2\varphi, \qquad (37)$$

де I_0 – інтенсивність світла на вході поляризатора. Співвідношення (37) уперше було експериментально відкрито Е.Л. Малюсом (Malus) на початку XIX ст. і носить його ім'я.

§3. Поляризація при відбиванні та заломленні світла

На границі розділу двох діелектриків електромагнітне поле повинно задовольняти таким умовам:

- по обидві сторони границі тангенціальні складові векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ однакові;
- нормальні складові векторів $\vec{D}$ та $\vec{B}$ по обидві сторони границі однакові.

Виявилось, якщо світловий вектор падаючої хвилі лежить у площині падіння, то при деякому куті $\alpha_{Бр}$ падіння відбитого променя не буде. Таке явище вперше експериментально спостерігав Д. Брюстер у 1815 р. Він виявив, що за умови, коли кут між відбитим та заломленим променями прямий, як наведено на рис. 4, відбитий промінь або відсутній, або повністю поляризований. В той час, як заломлений промінь буде частково поляризованим.

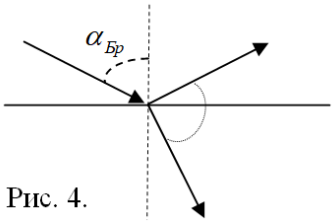


Рис. 4.

Співвідношення, що описує дане явище має вигляд:

$$tg\alpha_{Бр} = n,$$

де $\alpha_{Бр}$ – кут Брюстера, а n – відносний показник заломлення двох середовищ. Саме на використанні ефекту Брюстера будувалися перші поляризатори світла. Для збільшення інтенсивності відбитого променя скляні пластинки накладались одна на одну, створюючи так звану оптичну стопу.

РОЗДІЛ VII. Фізика твердого тіла.
Тема 1. Елементи зонної теорії твердих тіл
§1. Узагальнення електронів у кристалі

І. Два ізольовані атоми

Потенціальна енергія електрона у атомі має вигляд веретеноподібної потенціальної ями:

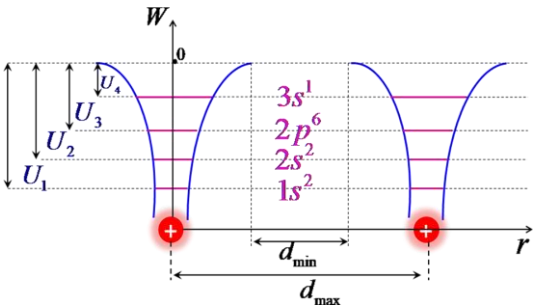
$$W = -\frac{q_{іон.зал.} q_e}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Ширина ями для електронів на різних енергетичних рівнях різна (різні радіуси орбіт). Максимальна потенціальна енергія електрона в атомі рівна нулю (бо є від'ємною, відповідно до формули).

Як приклад розглянемо атоми натрію з 11 електронами:

$$Na: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1.$$

Електрони в таких атомах розділені потенціальним бар'єром шириною $d_{\min}$ (рис. 1).



U_i – висота потенціального бар'єру для електронів різних енергетичних рівнів;
$d_{\min}$ – мінімальна ширина потенціального бар'єру.

Рис. 1.

II. Два атоми у кристалічній гратці

У кристалі атоми зближені на відстань a – постійної кристалічної гратки. Зближення атомів привело до перекриття границь їх потенціальних ям. При цьому зменшилась максимальна ширина потенціального бар'єру:

$$d_{\max} = a.$$

Зменшилась також висота потенціального бар'єру для електронів усіх енергетичних рівнів: $U_1' \rangle U_1, U_2' \rangle U_2, U_3' \rangle U_3$.

Для електронів 3S висота бар'єру стала меншою за значення їх енергії в утвореному кристалі (рис. 2).

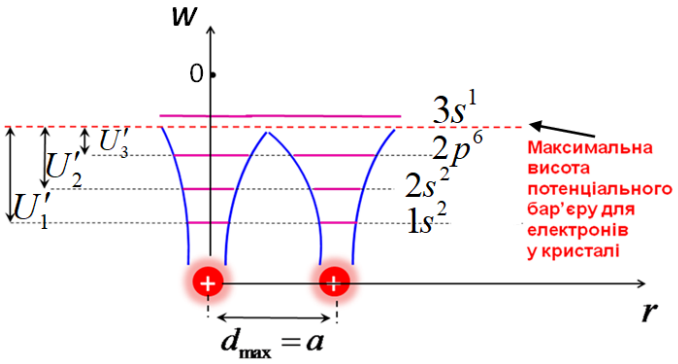


Рис. 2.

Вище описане означає, що $3s$ електрони у кристалі без перешкод можуть переходити від одного атома до іншого.

Зауваження. 1. Електрони, які можуть вільно переміщатись в межах кристалу називають **вільними електронами.**

2. Сукупність вільних електронів у кристалі називають **електронним газом.**

3. Для натрію параметр кристалічної гратки $a = 3,4\ \overset{o}{A}.$

§2. Утворення енергетичних зон у кристалі

Зонна теорія твердого тіла – це квантово-механічна модель, яка описує найбільш важливі властивості руху електронів у кристалі.

Зонна теорія ґрунтується на трьох припущеннях («зонне наближення»):

1) адіабатне наближення;
2) одноелектронне наближення;
3) періодичний характер самоузгодженого поля.

I. Адіабатне наближення (основні положення)

- Електрони у кристалі рухаються в полі нерухомих ядер, маси яких значно більші за маси електронів.
- Під ядрами розуміють «атомні остови» – ядра атомів з усіма електронами крім валентних.
- Швидкість електронів на два порядки більша за швидкість теплового руху ядер.
- В такому представленні виключається обмін енергією між електронною та ядерною системами, тому це наближення називається адіабатним.

Зауваження. В адіабатному наближенні не можна розглядати такі явища, як дифузія, іонна провідність та інші, пов'язані з рухом атомів чи іонів.

II. Одноелектронне наближення

1. Задача про кристал була б простою, якби можна було:

- знехтувати взаємодією між електронами;
- зберегти тільки взаємодію електронів з ядрами.

2. Це можливо здійснити, якщо взаємодію електронів замінити введенням **ефективного зовнішнього силового поля.**

3. В такому полі кожний електрон рухається незалежно від інших.

4. Таке ефективне поле, розраховане за зарядом усіх електронів та “атомних остовів” системи, називається **самоузгодженим полем.**

5. Метод самоузгодженого силового поля дозволяє багатоелектронну задачу звести в одноелектронну.

6. В **одноелектронному наближенні** задача зводиться до незалежного опису руху кожного електрона в зовнішньому полі кристалу з певною потенціальною енергією .

7. Вид функції, що описує рух електрона, визначається властивостями симетрії кристала.

III. Періодичний характер самоузгодженого поля

1. У вузлах ідеальної решітки кристала ядра атомів розміщуються строго періодично.

2. Врахування впливу ядер і поля електронів приводить до висновку, що **самоузгоджене поле має періодичний характер**, який визначається періодичною структурою кристалічної гратки.

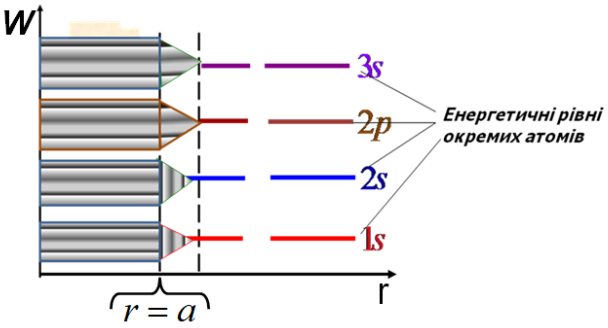
3. Для зонної теорії не є істотним конкретний вид цього самоузгодженого поля. Істотним є лише те, що це поле – періодичне з періодом кристалічної решітки.

4. **Наслідком цієї періодичності є зонна структура енергетичного спектра** електрона, тобто система дозволених зон (інтервалів) енергії, розділених забороненими зонами.

IV. Утворення енергетичних зон в кристалі

- Нехай є N ізольованих атомів певної речовини.
- Доки атоми ізольовані один від одного, вони мають однакові схеми енергетичних рівнів.
- При наближенні атомів $(r = a)$ між ними виникає взаємодія, яка приводить до зміни положення рівнів.

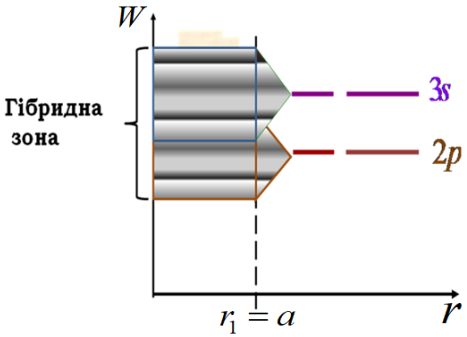
– Замість одного однакового для усіх атомів рівня з'являються N дуже близьких за значенням рівнів, які не співпадають.
– Такі N близько (по шкалі енергії) розташовані рівні утворюють смугу, або зону енергій (рис. 3 – 5).
– Число рівнів у енергетичній зоні визначається числом атомів N, об'єднаних у кристал, і орбітальним квантовим числом l : $N_{рів} = (2l+1)N, \quad l = 0,1,2,3...$



Утворення енергетичних зон в кристалі

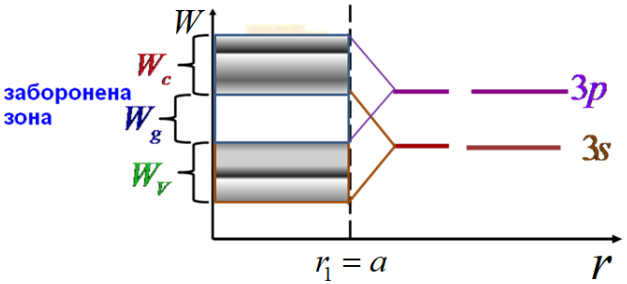
$X : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$

Рис. 3.



Від перекриття S і P зон утворюються гібридні зони

Рис. 4.



Утворення валентної зони (W_V) та зони провідності (W_C) від перекриття *S* і *P* зон у кристалах типу алмазу:

$$_{14}Si : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2.$$

Рис. 5.

V. Відстань між рівнями у зоні

- Ширина зони в кристалі $\approx 1\,eB.$
- В $1\,м^3$ є $\approx 10^{28}$ атомів.
- Відстань між рівнями у зоні:

$$\delta W \approx \frac{1eB}{10^{28}} \approx 10^{-28}\,eB.$$

Висновок. Відстань між рівнями у зоні набагато менша за ширину самої зони, тому зміну енергії у зоні вважають неперервною.

§3. Заповнення енергетичних зон електронами

Відстань в одиницях енергії між валентною зоною та зоною провідності називають **шириною забороненої зони**.

Схематичне зображення можливих енергетичних зон електронів у твердому тілі називають його **зонною структурою**.

Для різних матеріалів їх зонна структура має різну конфігурацію.

У провідниках: валентна зона та зона провідності перекриваються.

У діелектриках: $Wg > 3\ eB$.

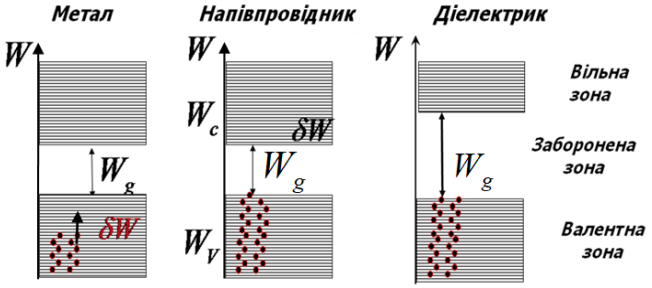
В алмазу $Wg = 5{,}2\ eB$.

У напівпровідниках: $Wg < 3\ eB$.

В Ge: $Wg = 0{,}66\ eB$;

Si : $Wg = 1{,}12 eB$.

Від ширини забороненої зони та заповнення електронами валентної зони всі тіла поділяють на провідники, напівпровідники і діелектрики (рис. 6).



Заповнення електронами валентної зони

Рис. 6.

Умови для утворення електричного струму у речовині:

- наявність у відповідній зоні незаповнених енергетичних рівнів;
- надання електронам зони малих енергій $\approx \delta W$ електричним полем;
- перехід електрона на вищий рівень у зоні відповідає одержанню цим електроном додаткового імпульсу: $\delta P = \sqrt{2m\delta W}$;

- одержання електроном додаткового імпульсу означає початок його руху у певному напрямі.

Тема.2. Напівпровідники

§1. Власний напівпровідник. Електрони провідності і дірки

Напівпровідники-речовини, у яких при $T = 0$ валентна зона є повністю заповнена електронами, а "порожня" зона провідності відділена невеликою (Wg < 3 eB) забороненою зоною (рис. 7).

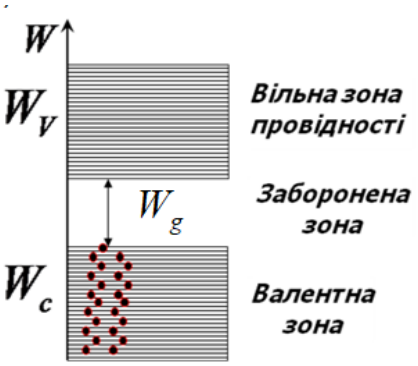


Рис. 7.

При вищих температурах частина електронів з верхніх рівнів валентної зони переходить на нижні рівні зони провідності. В такій ситуації електричне поле може змінити на δW енергію електронів, що з'явились у зоні провідності, а також тих, що залишились у валентній зоні.

1. Зміна імпульсу електронів, що мають енергію, значення якої знаходиться у зоні провідності, приводить до направленого їх руху згідно із зовнішнім електричним полем (струм електронів зони провідності).

2. Перехід електронів на вищі незаповнені рівні валентної зони також приводить до появи струму (струм електронів валентної зони).

3. Рух електронів валентної зони можна представити як рух позитивних квазічастинок-дірок. Струм, створений всіма електронами валентної зони з одним незаповненим енергетичним рівнем, еквівалентний струму, який створила б у цій зоні частинка із зарядом $+e$, що має швидкість відсутнього електрона (**дірка**).

Зауваження. На відміну від електронів, які біля поверхні валентної зони мають від'ємну ефективну масу, дірка крім додатного заряду у валентній зоні має додатну ефективну масу .

§2. Власна провідність напівпровідників

Власними напівпровідниками називають хімічно чисті напівпровідники, провідність яких обумовлена наявністю в них власних носіїв струму: електронів і дірок.

Власна провідність виникає в результаті переходу електронів з верхніх рівнів валентної зони у зону провідності.

Власними носіями струму називають електрони, що перейшли у зону провідності і дірки, що при цьому утворились у валентній зоні.

І. Питома електропровідність власного напівпровідника:

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p, \qquad (1)$$

де $\sigma_n = q_n n_n u_n$ та $\sigma_p = q_p n_p u_p$ (2)

називають питомою електропровідністю електронів (негативних частинок) та дірок (позитивних частинок), відповідно, для власного напівпровідника.

У цих формулах:

q_n, q_p – абсолютне значення заряду електрона і дірки;

n_n, n_p – концентрація електронів та дірок у власному напівпровіднику;

u_n, u_p – рухливість електронів та дірок в даному напівпровіднику.

Рухливістю називають фізичну величину, яка чисельно рівна дрейфовій швидкості носіїв заряду в електричному полі одиничної величини.

Відомо, що:

а) $|q_n| = |q_p| = q$;

б) для власного напівпровідника $n_n = n_p = n$.

Тому, підставляючи (2), а), б) → (1) для власного напівпровідника одержимо:

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = qn(u_n + u_p). \tag{3}$$

II. Температурна залежність питомої електропровідності власного напівпровідника

1. У власному напівпровіднику

$$u_n, u_p \approx T^{-\frac{3}{2}}.$$

2. Концентрація носіїв струму пропорційна ймовірності заповнення електронами зони провідності і температурі:

$$n \approx f(E) \approx \exp\left(-\frac{\Delta W_g}{2kT}\right);$$

$$n \approx T^{\frac{3}{2}}.$$

3. Виходячи з вище сказаного і формули (3):

$$\sigma = q \cdot k_1 e^{-\frac{\Delta W_g}{2kT}} \cdot k_2 T^{\frac{3}{2}} \cdot k_3 T^{-\frac{3}{2}}, \tag{4}$$

де k_1, k_2, k_3 – коефіцієнти пропорційності.

Враховуючи, що $\sigma_0 = qk_1k_2k_3$ є коефіцієнтом, характерним для даного власного напівпровідника, вираз (4) набуде вигляду:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta W_g}{2kT}}.$$

Одержали вираз для визначення температурної залежності питомої електропровідності для власного напівпровідника.

§3. Домішкова провідність напівпровідників

Домішкова провідність виникає при заміні частини атомів у вузлах кристалічної гратки напівпровідника на атомами, валентність яких відрізняється на одиницю від валентності основних атомів.

І. Донорні напівпровідники

1. В кристалічній гратці чотиривалентного германію окремі його атоми заміщають атомами п’ятивалентної домішки (фосфор, миш'як, сурма).

2. Чотири електрони домішкового атома будуть перебувати у валентних зв'язках із електронами сусідніх атомів германію.

3. П'ятий електрон домішкового атома не може утворити валентний зв'язок, тому він виявляється слабко зв’язаним з атомом домішки і при незначних енергіях активації стає “вільним”.

4. В такому випадку домішкові атоми віддають електрони, тобто є донорами електронів, що і пояснює їхню назву.

5. Основними носіями заряду у таких напівпровідниках є електрони і напівпровідники такого типу називаються напівпровідниками *n*-типу.

ІІ. Акцепторні напівпровідники

1. В решітку германію введено домішковий атом із трьома валентними електронами (галій, індій).

2. Для чотирьох зв’язків з атомами германію в нього не вистачає одного електрона.

3. Такий тривалентний атом зможе запозичити електрон у найближчого атома германію.

4. На місці запозиченого електрона утвориться позитивна «дірка», яка буде заповняться електроном із сусіднього атома германію.

5. Процес послідовного заповнення «вільного» зв'язку еквівалентний рухові «дірки» у напівпровіднику.

6. Число «дірок» у кристалі дорівнює числу атомів домішки.

7. Атоми домішки у цьому випадку називають атомами – акцепторами.

8. Основними носіями заряду в таких напівпровідниках будуть позитивні «дірки».

9. Описаний тип провідності називається провідністю *p* – типу, а напівпровідники з такою провідністю – дірковими або напівпровідниками *p* – типу.

III. Утворення домішкових енергетичних рівнів

1. Домішки викривляють поле кристалічної решітки, що приводить до виникнення на енергетичній схемі домішкових рівнів, розташованих у забороненій зоні.

2. У випадку напівпровідників *n* – типу домішкові рівні називаються донорними.

3. У випадку напівпровідників *p* – типу рівні називають акцепторними.

4. Рівень Фермі в напівпровідниках *n* – типу розташовується у верхній половині забороненої зони.

5. В напівпровідниках *p* – типу – в нижній половині забороненої зони.

6. При підвищенні температури рівень Фермі у напівпровідниках обох типів зміщується до середини забороненої зони.

IV. Температурна залежність питомої домішкової електропровідності

Температурна залежність питомої домішкової електропровідності для напівпровідників визначається формулою:

$$\sigma_{дом} = \sigma_{0\,дом} e^{-\frac{\Delta W_{дом}}{2kT}},$$

де $\sigma_{0дом}$ – постійна величина, характерна для даного напівпровідника.

Графічна інтерпретація температурної залежності питомої електропровідності для домішкових напівпровідників (на прикладі донорних) представлена на рис. 8.

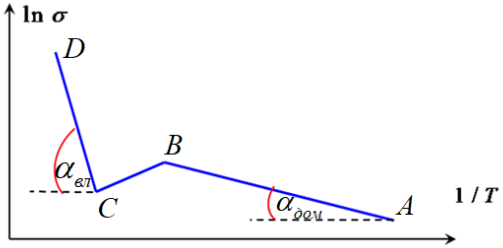


Рис. 8.

A-B: зростання провідності внаслідок іонізації домішкових рівнів (малі температури);

B-C: зменшення провідності внаслідок розсіювання носіїв на коливаннях гратки;

C-D: зростання власної провідності (всі домішкові атоми вже іонізовані).

Тема.3. Контактні явища у напівпровідниках

§1. n-p перехід

Область монокристалічного напівпровідника у якій відбувається зміна типу провідності з електронної у діркову називають електронно-дірковим переходом, або *n – p* переходом (рис. 9) .

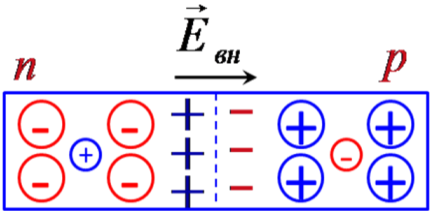


Рис. 9.

І. Утворення n – p переходу

1. Почергове внесенням у розплав основного напівпровідника, при його вирощуванні, донорних і акцепторних домішок приводить до утворення у напівпровідниковому монокристалі областей з *n* – і *p* – провідністю.

2. Вирізана певним чином пластинка з такого монокристалу містить сусідні області з *n* – і *p* – провідністю.

3. Електрони, як основні носії області *n* – типу провідності, дифундують у *p* – область, а «дірки» – основні носії *p* – області дифундують у *n* – область, створюючи при цьому на межі областей шари негативного і позитивного зарядів, що у свою чергу веде до виникнення внутрішнього електричного поля (див. рисунок 9). Область у напівпровіднику, де існує таке внутрішнє електричне поле називають ***n – p* переходом або запірним шаром**.

Зауваження: 1. Розширення шару відповідного заряду в сусідню область напівпровідника обмежується зростанням ймовірності рекомбінації таких зарядів, із зростанням глибини проникнення, на основних носіях сусідньої області.

2. У кожній з розглядуваних областей провідності (*n* – і *p* – типу) крім основних носіїв заряду, створених переходами електронів з домішкових рівнів у зону провідності (для донорного напівпровідника), існують неосновні носії заряду протилежного знаку створенні переходами: валентна зона – зона провідності.

II. Способи підключення до *n – p* переходу джерела Е.Р.С. (принцип роботи напівпровідникового діода)

1. Пряме включення (рис. 10)

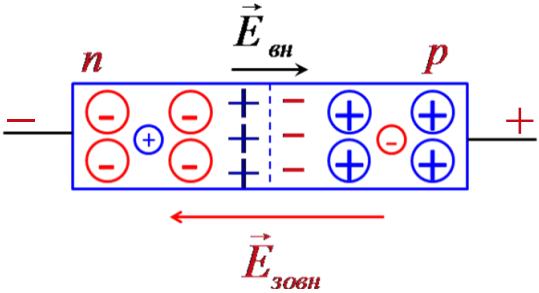


Рис. 10.

Зовнішнє електричне поле, компенсуючи внутрішнє, зменшує “ширину” запірного шару, при цьому опір переходу зменшується:

$$E_{зовн} \approx 1/\rho.$$

Зростання зовнішнього електричного поля веде до зростання струму, бо

$$E_{зовн} \approx j.$$

Накладання таких двох механізмів зростання струму через *n – p* перехід приводить до нелінійної залежності

$$j = f(E_{зовн}) = f(U_{зовн}),$$

представленої графічно на рисунку 12 віткою ОА.

2. Зворотне включення (рис. 11)

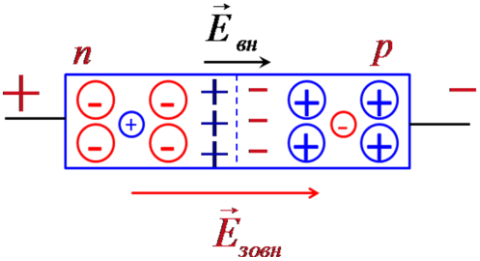


Рис. 11.

Зовнішнє електричне поле, підсилюючи внутрішнє, збільшує "ширину" запірного шару, при цьому опір переходу суттєво зростає.

Струм основних носіїв практично відсутній. Основну роль у зворотньому струмі відіграють неосновні носії заряду обох областей, рух яких слабо залежить від величини зовнішнього електричного поля (рис. 12, вітка ОВ).

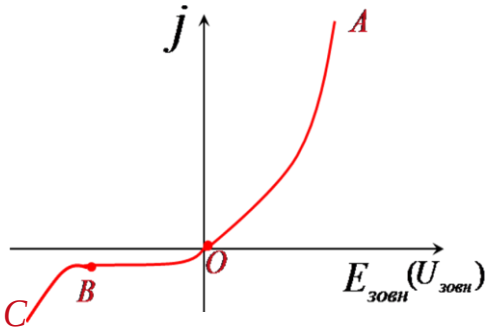


Рис. 12.

Подальше зростання зворотного електричного поля приводить до руйнування кристалічної гратки і виникнення великого зворотнього струму пробою (рис. 12, вітка ВС).

§2. Принцип дії напівпровідникового транзистора

Транзистор – напівпровідниковий пристрій, який складається із взаємодіючих n – p та p – n переходів і використовується для керування струмом, що проходить через нього.

Транзистори поділяють на біполярні та польові. До кожного з цих класів входять численні типи транзисторів, що відрізняються за будовою і характеристиками. Транзистори є основними елементами сучасної електроніки. Вони застосовуються в підсилювачах і логічних електронних схемах,

а також у мікросхемах, де в єдиний функціональний блок об'єднані тисячі окремих транзисторів.

І. Принцип дії біполярного транзистора (рис. 13)

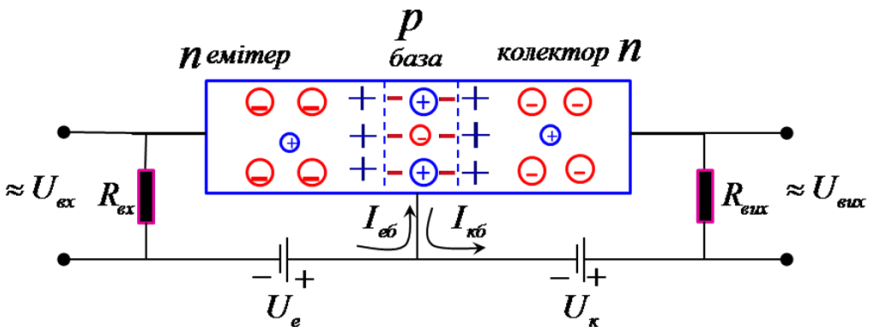


Рис. 13.

1. На перехід емітер – база подається постійна напруга у прямому напрямі (U_e), на яку накладають $\approx U_{вх}$.

2. На перехід база – колектор подається постійна напруга у зворотному напрямі $(U_к)$.

3. Опір зворотного переходу база – колектор є дуже великим, що дозволяє використати $R_{вих} \rangle\rangle R_{вх}$.

4. Протікання струму в колі емітер-база приводить до появи великої концентрації електронів в області бази.

5. Як неосновні носії на переході колектор-база ці електрони створюють струм, за величиною рівний струмові переходу емітер-база:

$$I_{еб} = I_{кб}.$$

6. Враховуючи, що $I = \frac{U}{R}$,

вищезгадану рівність струмів можна записати:

$$\frac{U_{вх}}{R_{вх}} = \frac{U_{вих}}{R_{вих}}$$

Тоді

$$\frac{U_{вих}}{U_{вх}} = \frac{R_{вих}}{R_{вх}}.$$

7. Враховуючи, що $R_{вих} \rangle\rangle R_{вх}$,

попередня формула дає вираз для співвідношення між вхідною та вихідною змінною напругою сигналу:

$$U_{вих} \rangle\rangle U_{вх}.$$

Отже, транзистор є підсилювачем напруги.

8. Знаючи, що $P = IU$,

а також те, що $I_{еб} = I_{кб}$,

одержимо: $P_{вих} \rangle\rangle P_{вх}$.

Отже, транзистор є також підсилювачем потужності.

Зауваження. Коефіцієнт підсилення транзистора по струму визначається:

$$K_I = \frac{\Delta I_{вих}}{\Delta I_{вх}};$$

по напрузі: $$K_U = \frac{\Delta U_{вих}}{\Delta U_{вх}};$$

коефіцієнт підсилення по потужності:

$$K_P = K_I \cdot K_U.$$

II. Принцип дії польового транзистора (рис. 14)

1. При розімкнутому ключі (Кл) напруга створена джерелом $\mathcal{E}_1$ буде прикладена до напівпровідника *n* – типу. Міліамперметр, під'єднаний до стоку (С), покаже, що по

напівпровіднику протікає струм. Цей струм створений електронами, як основними носіями *n* – області.

Зауваження: між металічними контактами витоку (В), стоку та напівпровідником (n) спади напруг будуть малими і практично не впливатимуть на величину напруги, що прикладена до напівпровідника джерелом $\mathcal{E}_1$.

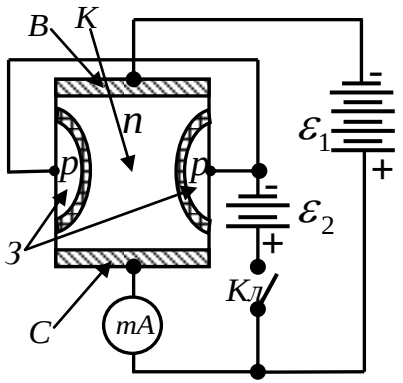


Рис. 14.

2. При замиканні ключа (Кл) до *n* – *p* переходів затвора (З) прикладається зворотна напруга джерела $\mathcal{E}_2$, яка приводить до зростання «ширини» запірних шарів збіднених носіями заряду, що у свою чергу звужує канал (К), через який рухаються електрони.

3. При збільшенні зворотньої напруги на затворі звужується канал і опір рухові електронів по напівпровіднику (*n*) зростає, а значить зменшується сила струму в електричному колі джерела $\mathcal{E}_1$.

Використана література

1. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Ільчук Г.А., Романишин Б.М. Фізика для інженерів. - Видавництво: Львівська політехніка, 2009. - 385 с.

2. Богацька І.Г., Головко Д.Б., Маляренко А.А., Ментковський Ю.Л. Загальні основи фізики. – К: “Либідь”, 1998. т.1, 2.

3. Бушак Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф. Курс фізики. – К.: “Либідь” 1995 р., 487 с.

4. Зачек І.Р., Кравчук І.М., Романишин Б.М., Габа В.М., Гончар Ф.М. Курс фізики. – Львів: “Бескид біт”, 2002, 370 с.

5. Чопан П.П. Основи фізики – К.: “Вища школа” 1995 р., 487 с.

6. Фізика для інженерних спеціальностей. Кредитно-модульна система: Навч. посібник. - У 2 ч. / В.В. Куліш, А.М. Соловйов, О.Я. Кузнєцова, В.М. Кулішенко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.

7. Волков О.Ф., Лумпієва Т.П. Курс фізики: У 2-х т. Т.1: Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електростатика. Постійний струм. Електромагнетизм: Навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. - Донецьк: ДонНТУ, 2009. - 224 с.

Фізика[Текст] : курс лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання / уклад. Ю.В. Коваль, Л.В. Ящинський. – Луцьк : ЛНТУ, 2026. – 228 с.

Ф 19

Комп'ютерний набір та верстка: Ю.В. Коваль

Редактор: Л.В. Ящинський

Підп. до друку «__»_____ 2026 р.
Формат 60х84/16. Папір офс.
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 14,25.
Тираж 50 прим.

Інформаційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – ІВВ ЛНТУ