

**Міністерство освіти та науки України  
Луцький національний технічний університет**



## **МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРОПОСТАЧАЛЬНИХ СИСТЕМ**

Конспект лекцій  
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
освітньої програми «Електроенергетика, електротехніка та  
електромеханіка»  
галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво  
спеціальності G3 Електрична інженерія  
денної та заочної форм навчання

Луцьк 2025

До друку

Голова вченої ради

факультету архітектури, будівництва та дизайну \_\_\_\_\_ О.В. Андрійчук

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ

Директор бібліотеки \_\_\_\_\_ Н.П. Поліщук

Затверджено вченою радою факультету архітектури, будівництва та дизайну ЛНТУ,

протокол № \_\_\_\_\_ від «\_\_\_» грудня 2025 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри електричної інженерії ЛНТУ, протокол № \_\_\_\_\_ від «\_\_\_» грудня 2025 року.

Завідувач кафедри електричної інженерії \_\_\_\_\_ Ю.В. Грицюк

Укладач: \_\_\_\_\_ В.І. Волинець, кандидат технічних наук, доцент кафедри електричної інженерії ЛНТУ.

Рецензент: \_\_\_\_\_ А.В. Гадай, кандидат технічних наук, доцент кафедри електричної інженерії ЛНТУ.

Відповідальний за випуск: \_\_\_\_\_ Ю.В. Грицюк, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри електричної інженерії ЛНТУ.

**М74** **Моделі елементів електропостачальних систем** [Текст]: конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 6 Інженерія, виробництво та будівництво спеціальності 63 Електрична інженерія денної та заочної форм навчання / уклад. В. І. Волинець. Луцьк : ВП ЛНТУ, 2025. 76 с.

Методичне видання складене відповідно до силабусу дисципліни. У виданні подано основні моделі електричної системи та електричних мереж, а також питання для самоконтролю, глосарій та перелік посилань.

# ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
1. МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРИЧНОЇ СИСТЕМИ	7
1.1. Лінія електропередачі	7
1.1.1. Конструктивне виконання та властивості лінії електропередачі	7
1.1.2. Модель лінії з розподіленими параметрами	9
1.1.3. Моделі лінії у вигляді схем заміщення	13
1.1.4. Спрощені моделі ЛЕП	16
1.2. Силовий трансформатор	18
1.2.1. Конструктивне виконання та принцип дії силового трансформатора	18
1.2.2. Електричні та магнітні властивості і параметри силового трансформатора	20
1.2.3. Моделі силового трансформатора	22
1.2.4. Г-подібна та П-подібна схеми заміщення силового трансформатора	25
1.2.5. Побудова зовнішньої характеристики трансформатора	28
1.3. Електричне навантаження	29
1.3.1. Статичні характеристики електричного навантаження	29
1.3.2. Моделювання електричних навантажень	34
2. МОДЕЛІ ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖ	40
2.1. Основи теорії графів	40
2.2. Застосування теорії графів для моделювання електричних мереж	44
2.3. Матричні форми моделей електричних мереж і їх режимів	47
2.4. Вузлові рівняння усталеного режиму	49
2.5. Форми лінійних рівнянь усталеного режиму та їх розв'язок	53
2.6. Нелінійні рівняння усталеного режиму	55
2.7. Моделювання генераторних вузлів електричної мережі	57
2.8. Еквівалентування схем електричних мереж	58
2.9. Моделювання схем електричних мереж за допомогою чотириполюсників	62
2.10. Використання чотириполюсників для еквівалентування схем електричних мереж	65
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	71
ГЛОСАРІЙ	72

## ПЕРЕДМОВА

Сучасні електроенергетичні системи (ЕЕС), призначені для виробництва, передачі і розподілу електроенергії між споживачами, можна віднести до класу великих систем кібернетичного типу. Вони складаються з великої кількості складних елементів: електростанцій, вузлів навантаження та електричної мережі, оснащені різними пристроями автоматичного регулювання та протиаварійної автоматики, мають складну ієрархічну структуру автоматизованого керування. ЕЕС характеризуються складно-замкненою топологічною структурою, з паралельною роботою електричних мереж різних номінальних напруг. Такий стан зумовлений необхідністю забезпечення високої надійності електропостачання при одночасному виконанні вимог оптимальності. Все це потребує поліпшення економічних показників і показників якості електроенергії для системи в цілому. Тому ускладнення ЕЕС можна вважати цілком закономірним процесом, який має тенденцію подальшого розвитку.

Розрахунки режимів роботи ЕЕС виконуються на основі математичних моделей з широким використанням ЕОМ. Слід розрізнати, з одного боку, математичні моделі процесів і режимів, а з другого методи обчислення за допомогою цих моделей. Форма використовуваної математичної моделі визначається особливостями відповідних режимних задач. Усі задачі можна класифікувати за характером режимів на усталені і перехідні, за швидкістю перебігу процесів на електромеханічні, електромагнітні і хвильові, за характером залежностей на лінійні і нелінійні, за значенням параметрів трифазної системи на симетричні і несиметричні, за поданням параметрів режиму і збурень на детерміновані і стохастичні та ін.

Модель у загальному розумінні – це інформаційне відображення реальної системи відповідно до поставленої мети досліджень. Існують поняття фізичного та математичного моделювання. Фізичне моделювання ґрунтується на тому, що процеси, які існують, відображаються в моделі за допомогою процесів такої ж фізичної природи. Дослідження процесів виконується за допомогою подібного фізичного об'єкта – аналога реальної ЕЕС, але в іншому (зменшеному) масштабі. Математичне моделювання, яке ґрунтується на математичній аналогії, передбачає описання математичних рівнянь і використання математичних методів їх розв'язання за допомогою ЕОМ. Обидва методи мають спільні риси. Розв'язування задачі розпочинається з розробки моделі, тобто такого відображення реальних процесів, у якому зберігаються суттєві сторони та відкидаються другорядні.

Найбільш поширений метод дослідження складних технічних систем передбачає використання математичних моделей. Під математичною моделлю взагалі розуміють аналітичне, графічне, аналогове чи будь-яке інше відображення реальних процесів. У більш конкретному розумінні математична модель – це сукупність математичних рівнянь, функціональних залежностей і їх параметрів, обмежень, які описують певний стан або процес, а також методів розрахунку. Замість рівнянь можуть використовуватись відповідні розрахункові схеми у вигляді електричних кіл, структурні схеми, передаточні функції тощо.

Стан системи може бути описаний за допомогою змінних і функцій, які відповідають параметрам режиму. Зв'язок між параметрами описується алгебраїчними, диференціальними або інтегральними рівняннями. Загальна кількість рівнянь має дорівнювати кількості параметрів режиму, які вважаються змінними для даної системи. Частина параметрів відома наперед і має назву параметрів системи.

Якщо система складається тільки з елементів із зосередженими параметрами (опори, індуктивності, ємності), то час є єдиною незалежною змінною. Під час вивчення електричних систем із розподіленими параметрами, наприклад, лінії електропередачі великої довжини, повинна братись до уваги ще одна незалежна змінна – довжина. Усі інші змінні називаються залежними. Рівняння, які містять в собі лише похідні за однією незалежною змінною (часом), називаються звичайними диференціальними рівняннями. Якщо незалежних змінних більше однієї, то математична модель складається з диференціальних рівнянь у часткових похідних.

Найпростіші математичні моделі – лінійні. Такі моделі звичайно формуються в матричному вигляді. Прикладом лінійної математичної моделі може бути система алгебраїчних рівнянь в розрахунках місцевих електричних мереж. Визначення поточкорозподілу потужностей в таких мережах може виконуватись наближено. Математична модель задачі формується з рівнянь контурних потужностей, які впливають з відповідних рівнянь контурних струмів. Однак для детального і всебічного аналізу реальних систем лінійні математичні моделі занадто спрощені та грубі. Реальні процеси, які спостерігаються у складних системах, виявляються априорно нелінійними.

Створення математичної моделі, тобто математична формалізація досліджуваних процесів, означає описування співвідношень між найважливішими змінними режиму системи. Математична модель служить основою для розробки алгоритму та дозволяє звести дослідження об'єкта до розв'язання математичної задачі шляхом

використання ретельно розроблених математичних методів і ЕОМ. Математична модель спочатку вибирається найбільш простою, а потім уточнюється відповідно до аналізу розв'язків і порівняння їх з експериментальними чи натурними даними. Увесь цей процес носить ітераційний характер: після одержання певного результату треба повернутись до уточнення математичної моделі й алгоритму. Так, у результаті тривалої творчої праці створюється математична модель.

# 1. МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРИЧНОЇ СИСТЕМИ

## 1.1. Лінія електропередачі

### 1.1.1. Конструктивне виконання та властивості лінії електропередачі

У простому уявленні лінія електропередачі – це провідники, протягнуті на велику відстань, якими передається електрична енергія. Можливість передачі електроенергії обумовлена головним чином великою напругою, при якій втрати при передачі знижуються до прийнятного рівня. Конструктивно повітря ЛЕП є дротами, підвішеними на безпечній відстані від землі, або кабелями, в яких провідні жили ізолювані один від одного і від зовнішнього середовища і захищені різними покриттями і бронею. Залежно від конструкції ЛЕП називають повітряними (ПЛ) або кабельними лініями (КЛ).

Практично у всьому світі для передачі електричної енергії прийнята система трифазного змінного струму 50 або 60 Гц. Проте в деяких випадках застосовуються інші системи змінного струму та передачі постійного струму. Розглядатимемо тільки трифазні повітряні лінії змінного струму високої напруги (до 1150 кВ), які передають електроенергію на великі відстані (до декількох тисяч кілометрів).

Передача електроенергії ЛЕП змінного струму обумовлена розповсюдженням електромагнітного поля в проводах і навколишньому просторі. Виникнення змінного електростатичного поля приводить до появи струмів зсуву – зарядних струмів (рис. 1.1). Зарядні струми, накладаючись на струм навантаження, визначають поступову зміну струму вздовж лінії. Магнітне поле, обумовлене струмом лінії, характеризується напруженістю лінії, яка також змінюється вздовж лінії. Це приводить до наведення ЕРС самоіндукції і взаємоіндукції, нерівних для різних ділянок лінії. Нерівність цих ЕРС визначає складний закон зміни напруги вздовж лінії, який в свою чергу визначає зміну струмів зсуву вздовж лінії.

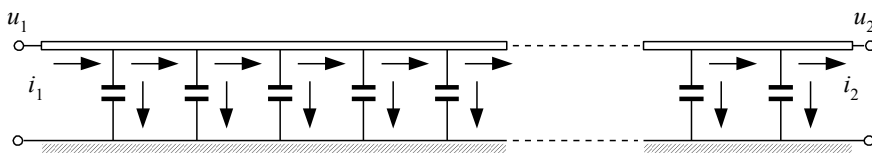


Рис. 1.1. Умове зображення розподілу струмів вздовж дроту ЛЕП

У загальному випадку ЛЕП слід розглядати як об'єкт з розподіленими вздовж однієї просторової координати параметрами (вздовж лінії). Параметри лінії електропередачі, до яких відносяться активний опір, індуктивність, активна провідність і ємність на одиницю довжини, вважають рівномірно розподіленими вздовж її довжини. Таку властивість ліній називають *однорідністю*.

Проводи ПЛ мають як провідний матеріал алюміній або його сплав. Практично завжди використовуються сталєалюмінієві дроти марки АС. Їх питомий опір постійному струму в середньому рівний  $\rho=29,1 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{км}$ . Активний опір змінному струму більше опору постійному струму внаслідок поверхневого ефекту, проте для частоти 50 Гц ця відмінність неістотна. Активний опір у електричних схемах ЛЕП є параметром, який визначає процес дисипації (розсіювання) енергії у вигляді віддачі тепла в навколишній простір.

Індуктивність ЛЕП викликана явищами самоіндукції та взаємоіндукції фаз лінії, і визначається залежно від діаметру проводів фази та відстані між фазами. У практиці розрахунків електричних мереж використовують індуктивний опір фаз ЛЕП. Погонний індуктивний опір ПЛ 330–1150 кВ  $x_0$  в середньому рівний 0,31 Ом / км.

Унаслідок недосконалості ізоляції ПЛ і явища корони в місцях приєднання проводів до гірлянд ізоляторів ПЛ мають місце втрати електроенергії від струмів витоку ізоляторами ПЛ і корони. Великий вплив на ці втрати мають вологість і забруднення навколишнього повітря. Залежно від погоди втрати від струмів витоку та на корону можуть змінюватися в десятки разів.

Моделювання втрат в ізоляції ПЛ можна виконати за допомогою введення активної провідності  $g_0$ , величина якої визначається за експериментальними даними, отриманими в результаті спостережень і розрахунків існуючих ПЛ. Для більшості ПЛ 330–1150 кВ погонна активна провідність задається в межах 0,01...0,1 мкСм / км.

Ємнісна провідність між фазами та між проводами і землею, грозозахисними тросами і заземленими частинами опори моделюються одним параметром – ємнісною провідністю фази  $b_0$ . Величина погонної ємнісної провідності ПЛ 330–1150 кВ в середньому складає 3,5 мкСм / км.

У колі з розподіленими параметрами інтервал часу розповсюдження електромагнітних хвиль вздовж лінії зіставимо з інтервалом часу, протягом якого струми і напруга змінюються на помітну величину від повної їх зміни.

Іншими властивостями лінії електропередачі можна вважати:

- безперервність змінних;
- стаціонарність;

- одновимірність відносно простору та багатовимірність відносно змінних, які характеризують роботу лінії в різних точках лінії;
- статизм або динамічність (залежно від досліджуваних процесів);
- лінійність або нелінійність (залежно від рівнянь, які описують режим роботи лінії) – при цьому параметри лінії вважаються постійними величинами.

Відносно детермінованості та стохастичності розглядаються різні підходи до моделювання лінії – параметри та змінні можуть бути представлені також і випадковими величинами.

### 1.1.2. Модель лінії з розподіленими параметрами

Елементи ЕЕС є, як правило, трифазними пристроями змінного струму, і ЛЕП має три фази, які приєднуються до інших трифазних елементів мережі, наприклад, підвищуючого або понижуючого трансформатора (рис. 1.2, а).

Тут і далі розглядатимемо тільки симетричні трифазні системи, які внаслідок симетрії можна графічно зображати в однолінійному вигляді (рис. 1.2, б), маючи на увазі, що змінний струм, який тече фазою, замикається через дві інші фази. Окрім того, трифазна система має нейтраль  $N$ , яка технічно може бути відсутньою, але струми витоку і ємнісні струми в лінії можуть моделюватися за допомогою введення нейтральної точки (лінії, площини). На рис. 1.2 з'єднання обмоток трансформаторів у зірку дає нейтральні точки трифазної системи, які можуть мати з'єднання із землею (заземлення).

Виділимо в лінії на відстані  $x$  від початку лінії (рис. 1.2, а, точка 1) ділянку нескінченно малої довжини  $dx$ . На цій ділянці лінії електричні параметри можна вважати зосередженими (рис. 1.3).

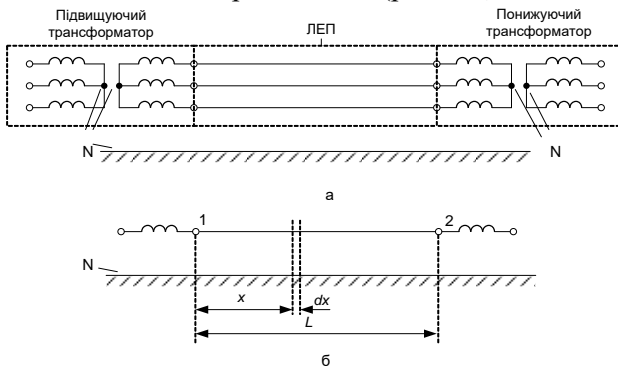


Рис. 1.2. Трифазна лінія електропередачі (а) та її однолінійне зображення (б)

Складемо рівняння Кірхгофа для електричного кола на виділеній ділянці лінії:

$$\begin{aligned} (-u) + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + \left( r_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} \right) &= 0, \\ (-i) + \left( i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + \left( g_0 dx u + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

або

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тут в  $C_0$  і  $L_0$  враховані впливи сусідніх фаз лінії.

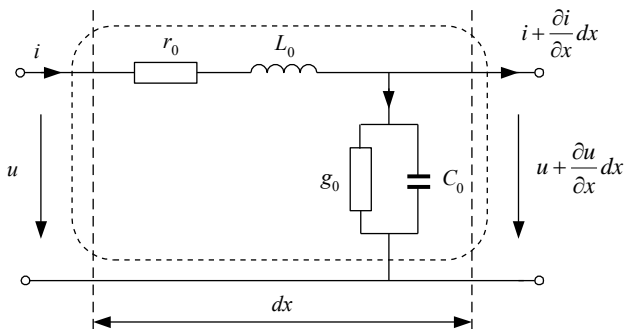


Рис. 1.3. Елементарний відрізок лінії

Отримані рівняння є диференціальними рівняннями у часткових похідних – моделлю ділянки лінії на мікрорівні. Незалежні змінні в них – це час  $t$  і одна просторова координата  $x$ .

Використовуючи символічний метод представлення синусоїдальних функцій часу комплексними величинами, для значень струмів і напруги, які діють, можна записати:

$$\begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= r_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = (r_0 + j\omega L_0) \underline{I} = \underline{z}_0 \underline{I}, \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= g_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = (g_0 + j\omega C_0) \underline{U} = \underline{y}_0 \underline{U}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отримана система рівнянь вже має одну незалежну змінну  $x$ . Позначимо напругу та струми на кінцях лінії:  $U_1$  і  $I_1$  при  $x = 0$  і  $U_2$  і  $I_2$  при

$x = l$ . Тоді з розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.3) отримаємо зв'язок між напругою та струмами на кінцях лінії:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1\phi} &= \operatorname{ch}(\gamma_0 l) \underline{U}_{2\phi} + \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\gamma_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}(\gamma_0 l) \underline{U}_{2\phi} + \operatorname{ch}(\gamma_0 l) \underline{I}_2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де  $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{(r_0 + jx_0)}{(g_0 + jb_0)}}$  – хвильовий опір лінії;

$\gamma_0 = \sqrt{(r_0 + jx_0)(g_0 + jb_0)} = \alpha_0 + j\beta_0$  – коефіцієнт розповсюдження хвилі;

$\alpha_0$  – коефіцієнт загасання хвилі;

$\beta_0$  – коефіцієнт фази.

Отримані рівняння називаються рівняннями довгої лінії або телеграфними рівняннями.

У (1.4) напруги записані у фазних значеннях. Проте в трифазних системах прийнято указувати лінійні значення напруги, які приводять до перерахунку на  $\sqrt{3}$  деяких доданків:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \operatorname{ch}(\gamma_0 l) \underline{U}_2 + \sqrt{3} \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\gamma_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_C \sqrt{3}} \operatorname{sh}(\gamma_0 l) \underline{U}_2 + \operatorname{ch}(\gamma_0 l) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для того щоб не вводити в запис рівнянь константу  $\sqrt{3}$  і в той же час використовувати лінійні значення напруги, використовують збільшене в  $\sqrt{3}$  значення струму лінії. Отже, математична модель довгої лінії матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \operatorname{ch}(\gamma_0 l) \underline{U}_2 + \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\gamma_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}(\gamma_0 l) \underline{U}_2 + \operatorname{ch}(\gamma_0 l) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тут  $I_1$  і  $I_2$  – фазні струми лінії, збільшені в  $\sqrt{3}$ .

Якщо необхідно обчислити напругу та струм в якій-небудь іншій точці лінії, яка знаходиться на відстані  $x$  від початку лінії (рис. 1.4), за напругою та струмом у кінці, використовують наступну модель:

$$\begin{aligned} \underline{U}_x &= \text{ch}[\gamma_0(l-x)]\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \text{sh}[\gamma_0(l-x)]\underline{I}_2, \\ \underline{I}_x &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}[\gamma_0(l-x)]\underline{U}_2 + \text{ch}[\gamma_0(l-x)]\underline{I}_2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

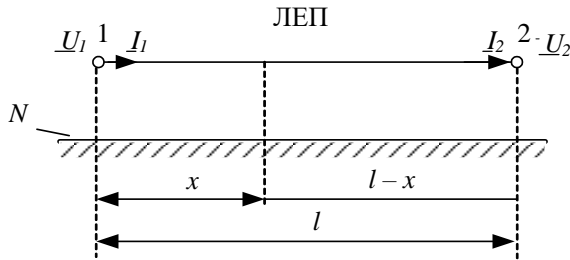


Рис. 1.4. Визначення напруги та струму в точці на лінії

Формально напругу та струм у будь-якій точці лінії можна розглядати як результат накладення двох хвиль, які рухаються в протилежні сторони. Із часом хвиля напруги переміщається від початку лінії до її кінця; вона носить назву прямої або падаючої хвилі. Хвиля напруги, яка переміщається від кінця лінії до її початку, носить назву зворотної або відбитої хвилі.

Розрахунки показують, що для ПЛ при частоті  $f = 50$  Гц коефіцієнт фази  $\beta_0 \approx 0,001$  рад/км (0,06 град/км.). За допомогою цього значення можна знайти довжину прямої та зворотної хвилі.

Уведемо поняття довжини хвилі напруги та струму  $\lambda$ , яка дорівнює відстані між двома точками лінії, в яких фази напруги (струму) падаючої або відбитої хвилі напруги (струму) розрізняються на  $2\pi$ .

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0}, \quad (1.8)$$

де  $\beta_0 = \text{Im}(\gamma_0)$  – коефіцієнт фази.

Швидкість переміщення падаючої хвилі вздовж лінії називається *фазовою швидкістю* хвилі. Це швидкість переміщення точки, фаза коливання в якій, залишається постійною:

$$\frac{dx}{dt} = v_\phi = \frac{\omega}{\beta_0}. \quad (1.9)$$

Із цього співвідношення з урахуванням  $\omega = 2\pi f$  отримаємо точніше значення коефіцієнта фази:

$$\beta_0 = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{314}{300\,000} = 1,0466 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км} \quad (1.10)$$

і довжини хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v_{\Phi} = \frac{v_{\Phi}}{f} = \frac{300\,000}{50} = 6000 \text{ км}. \quad (1.11)$$

Лінії з довжиною  $l = \lambda = 6000$  км називають *хвильовими*, а з  $l = \frac{\lambda}{2} = 3000$  км – *напівхвильовими* лініями.

Для спрощення досліджень режимів роботи ЛЕП надвисокої напруги іноді користуються рівняннями ідеальної лінії, в якій активні параметри вважаються рівними нулю:  $r_0 = 0$ ,  $g_0 = 0$ . Очевидно, що при цьому  $\alpha_0 = 0$ .

Із врахуванням

$$\begin{aligned} \text{sh}(j\beta_0 l) &= j \sin(\beta_0 l), \\ \text{ch}(j\beta_0 l) &= \cos(\beta_0 l) \end{aligned} \quad (1.12)$$

отримаємо математичну модель ідеальної лінії:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \cos(\beta_0 l) \underline{U}_2 + jZ_C \sin(\beta_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= j \frac{1}{Z_C} \sin(\beta_0 l) \underline{U}_2 + \cos(\beta_0 l) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

### 1.1.3. Моделі лінії у вигляді схем заміщення

Систему рівнянь (1.6) можна представити як рівняння чотириполосника (рис. 1.5).

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

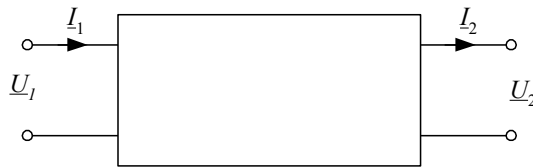


Рис. 1.5. Чотириполосник

Тут  $\underline{A} = \underline{D} = \text{ch}(\gamma_{-0} l)$ ;  $\underline{B} = \underline{Z}_C \text{sh}(\gamma_{-0} l)$ ;  $\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\gamma_{-0} l)$ , що

дозволяє вважати даний чотириполосник симетричним.

У практиці розрахунків зручно користуватися П-подібною схемою заміщення лінії (рис. 1.6).

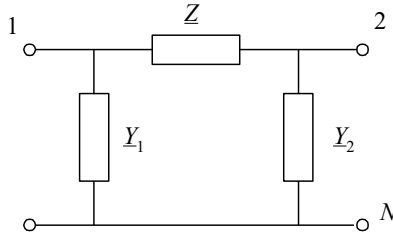


Рис. 1.6. П-подібна схема заміщення ЛЕП

Знайдемо співвідношення, які зв'язують параметри П-подібної схеми заміщення  $Z$ ,  $Y_1$  і  $Y_2$  із параметрами моделі довгої лінії (1.6).

Запишемо вираз, який зв'язує напругу на початку  $U_1$  та кінці  $U_2$  П-подібної схеми заміщення:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \Delta \underline{U} = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_Z, \quad (1.15)$$

де  $\Delta U$  – спад напруги в повздовжній ділянці на параметрі  $Z$  схеми заміщення;  $I_Z$  – струм в колі з параметром  $Z$ .

Співвідношення між струмами в колах схеми заміщення отримуються з першого закону Кірхгофа:

$$\underline{I}_Z = \underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_2}, \quad (1.16)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_Z + \underline{I}_{Y_1}.$$

Струми в поперечних колах з  $Y_1$  і  $Y_2$  обчислюються за формулами:

$$\underline{I}_{Y_1} = \underline{Y}_1 \underline{U}_1, \quad (1.17)$$

$$\underline{I}_{Y_2} = \underline{Y}_2 \underline{U}_2.$$

Підставимо струм  $I_Z$  з (1.16) в (1.15) і з врахуванням (1.17) матимемо:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_Z = \underline{U}_2 + \underline{Z} (\underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_2}) = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2 + \underline{Z} \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = \\ &= (1 + \underline{Z} \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Тепер запишемо співвідношення для струму на початку схеми заміщення  $I_1$ , виразив його також через напругу і струм на кінці схеми заміщення. Підставивши у вираз для струму  $I_1$  з (1.16) вираз для струму  $I_Z$  і струму  $I_{Y_1}$ , отримаємо:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_Z + \underline{I}_{Y_1} = \underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_1} + \underline{I}_{Y_2} = \underline{I}_2 + \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2. \quad (1.19)$$

Підставимо в цей вираз  $U_1$  з (1.18), матимемо:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{Y}_1 \left[ (1 + \underline{Z}\underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2 \right] + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = \\ &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}\underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Остаточню отримуємо систему рівнянь для П-подібної схеми заміщення:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z}\underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}\underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Модель (1.21) за своєю структурою співпадає з рівняннями чотириполосника (1.14). Із цього з урахуванням виду моделі довгої лінії (1.6) виходить, що

$$\begin{aligned} \underline{A} &= (1 + \underline{Z}\underline{Y}_2) = \text{ch}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{B} &= \underline{Z} = \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{C} &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) = \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{D} &= (1 + \underline{Z}\underline{Y}_1) = \text{ch}(\underline{\gamma}_0 l). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Розв'язок (1.22) щодо параметрів П-подібної схеми заміщення дає:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= \frac{\text{ch}(\underline{\gamma}_0 l) - 1}{\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l)}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Використовуючи відомі математичні співвідношення:

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) &= 2\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right), \\ \text{ch}(x) &= 2\text{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1, \end{aligned} \quad (1.24)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Для ідеальної лінії параметри П-подібної схеми заміщення отримуємо у вигляді:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= jZ_C \sin(\beta_0 l), \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= j \frac{1}{Z_C} \operatorname{tg} \frac{\beta_0 l}{2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

#### 1.1.4. Спрощені моделі ЛЕП

Для П-подібної схеми заміщення ЛЕП (див. рис. 1.6) в п. 1.1.3 було отримано:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\gamma_0 l), \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{th} \frac{\gamma_0 l}{2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Величини складових комплексного параметра  $\gamma_0 = \alpha_0 + j\beta_0$  для ліній надвисокої напруги мають порядок:  $\alpha_0 - 10^{-5}$  і  $\beta_0 - 10^{-3}$ . Тому коли довжина лінії  $l$  невелика, приблизно можна прийняти:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\gamma_0 l) &\approx \gamma_0 l, \\ \operatorname{th} \frac{\gamma_0 l}{2} &\approx \frac{\gamma_0 l}{2}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Отже, для параметрів П-подібної схеми заміщення з математичною моделлю довгої лінії отримуємо:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}} \sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0} \cdot l = \underline{z}_0 l = (r_0 + jx_0)l, \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}}} \frac{\sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0}}{2} l = \frac{\underline{y}_0}{2} = \frac{(g_0 + jb_0)}{2} l. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Підставимо в рівняння для П-подібної схеми заміщення (1.21) отримані значення (1.29):

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z}\underline{Y}_2)\underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2 = \left(1 + \frac{\underline{z}_0 l \underline{y}_0 l}{2}\right)\underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2)\underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}\underline{Y}_1)\underline{I}_2 = \\ &= \left(\underline{y}_0 l + \frac{\underline{y}_0 l \underline{z}_0 l \underline{y}_0 l}{4}\right)\underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{z}_0 l \underline{y}_0 l}{2}\right)\underline{I}_2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

або остаточно

$$\underline{U}_1 = \left( 1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2} \right) \underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \quad (1.31)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{y}_0 l \left( 1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{4} \right) \underline{U}_2 + \left( 1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2} \right) \underline{I}_2.$$

Отримані рівняння є спрощеною математичною моделлю ЛЕП, в якій не враховується розподіленість параметрів, а зосереджені опори та провідність обчислюються за (1.29).

Для зовсім коротких ліній другий доданок у виразі  $\left( 1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2} \right)$  є дуже маленьким внаслідок того, що провідність  $\underline{y}_0$  має порядок  $(10^{-6} \dots 10^{-4})$ . Тоді рівняння (1.31) набувають ще більш простий вигляд:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \quad (1.32)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{y}_0 l \underline{U}_2 + \underline{I}_2.$$

Така модель відповідає Г-подібній схемі заміщення лінії, в якій тільки одна поперечна гілка  $\underline{Y}_1 = \underline{y}_0 l$ .

Усі математичні моделі ЛЕП зручно співставити в табличній формі записів параметрів чотириполюсника (табл. 1.1). Розподіленість параметрів у двох останніх моделях не враховується.

У інших випадках нехтують або опорами струмопровідних жил лінії (активним або реактивним), або ємністною провідністю між фазами лінії.

Таблиця 1.1

Коефіцієнти чотириполюсника моделей ЛЕП

Модель	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>
Рівняння довгої лінії	$\text{ch}(\underline{\gamma}_0 l)$	$\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$	$\frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$	$\text{ch}(\underline{\gamma}_0 l)$
Рівняння ідеальної лінії	$\cos(\beta_0 l)$	$j \underline{Z}_C \sin(\beta_0 l)$	$j \frac{1}{\underline{Z}_C} \sin(\beta_0 l)$	$\cos(\beta_0 l)$
Модель із ЗП П-подібної схеми заміщення	$1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}$	$\underline{z}_0 l$	$\underline{y}_0 l \left( 1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{4} \right)$	$1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}$
Модель із ЗП Г-подібної схеми заміщення	1	$\underline{z}_0 l$	$\underline{y}_0 l$	1

## 1.2. Силовий трансформатор

### 1.2.1. Конструктивне виконання та принцип дії силового трансформатора

*Трансформатором* називають статичний електромагнітний пристрій, який має дві (або більш) індуктивно зв'язані обмотки та призначений для перетворення за допомогою електромагнітної індукції однієї системи змінного струму в іншу систему змінного струму. При цьому кількість фаз, форма кривої напруги (струму) та частота залишаються незмінними.

Силові трансформатори застосовуються в системах передачі та розподілу електроенергії; для установок з перетворювачами змінного струму в постійний (випрямлячі) або постійний в змінний (інвертори); для отримання необхідної напруги живлення у електроприймачів. Силові трансформатори встановлюються на електростанціях, на понижувальних підстанціях, в центрах живлення споживачів і безпосередньо у споживачів електричної енергії.

У електричних мережах використовуються трифазні трансформатори або групи з трьох однофазних трансформаторів. Силові трансформатори виконують двообмотковими та триобмотковими. Існують також триобмоткові автотрансформатори та двообмоткові трансформатори з розщипленою вторинною обмоткою.

Основними елементами силових трансформаторів є: магнітопровід, обмотки, ізоляція, бак, розширювач і високовольтні вводи. Інші частини – це елементи системи охолодження, пристрої регулювання напруги, а також захисні та вимірювальні пристрої.

Магнітопровід є магнітною системою силового трансформатора та служить конструктивною підставою для установки та кріплення обмоток, відводів від обмоток і інших деталей (рис. 1.7). Магнітопровід виконується з електротехнічної сталі.

Обмотки є частиною електричного кола та складаються з обмотувального дроту (мідного або алюмінієвого) та ізоляційних деталей. До обмоток також відносять ввідні кінці обмоток, відгалуження для регулювання напруги та регулювальну обмотку, ємкісні кільця і електростатичні екрани ємнісного захисту від перенапружень.

Обмотки складаються з послідовно сполучених котушок, які можуть намотуватися безперервно, без спайки. Між котушками ставляться прокладки з електрокартону. Фази обмоток однієї напруги з'єднуються між собою в зірку або трикутник.

У трансформаторах із масляним охолодженням магнітопровід з обмотками розміщується в баку з трансформаторним маслом (рис. 1.8). Омиваючи обмотки та магнітопровід, трансформаторне масло відбирає від них тепло і, володіючи більшою теплопровідністю, ніж повітря, через стінки радіатора віддає її в навколишнє середовище.

Існують також сухі трансформатори.



Рис. 1.7. Магнітопровід з обмотками силового трансформатора

Вводи призначені для приєднання до збірних шин розподільних пристроїв станцій і підстанцій. Вводи складаються із струмопровідної частини, металевого фланця, який служить для кріплення на кришці бака, і фарфорового ізолятора.

Для компенсації температурних змін застосовується розширювач, який розміщений у верхній частині бака трансформатора або окремим виносним баком (рис. 1.8).

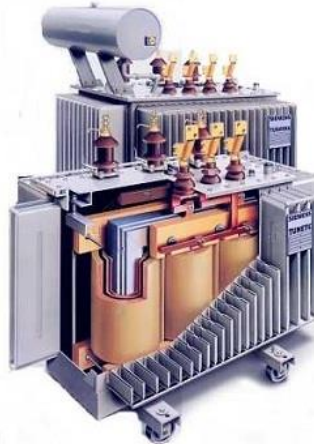


Рис. 1.8. Загальний вигляд силового трансформатора

Принцип дії трансформатора заснований на явищі електромагнітній індукції. При підключенні первинної обмотки до джерела змінного струму з напругою  $u_1$  у витках цієї обмотки протікає змінний струм  $i_1$ , який створює в магнітопроводі змінний магнітний потік  $\Phi$ . Замикаючись на магнітопроводі, цей потік зчеплюється з обома обмотками (первинною та вторинною) та індукуює в них ЕРС:

$$\begin{aligned} e_1 &= -w_1 \frac{d\Phi}{dt}, \\ e_2 &= -w_2 \frac{d\Phi}{dt}, \end{aligned} \tag{1.33}$$

де  $w_1$  і  $w_2$  – кількість витків в первинній та вторинній обмотках трансформатора.

При підключенні навантаження до виводів вторинної обмотки трансформатора під дією ЕРС  $e_2$  в колі цієї обмотки створюється струм  $i_2$ , а на виводах вторинної обмотки встановлюється напруга  $u_2$ .

Із (1.33) виходить, що ЕРС  $e_1$  і  $e_2$  відрізняються одна від одної кількістю витків обмоток, у яких вони наводяться. Тому, застосовуючи обмотки з необхідним співвідношенням витків, можна виготовити трансформатор на будь-яке відношення напруги.

Обмотку трансформатора, який підключений до мережі з вищою напругою, називають обмоткою вищої напруги (ВН); обмотку, яка приєднана до мережі меншої напруги, – обмоткою низької напруги (НН).

Трансформатори володіють властивістю зворотності; один і той же трансформатор можна використовувати в якості підвищувального та понижувального.

*Трансформатор* – це апарат змінного струму, але якщо його первинну обмотку підключити до джерела постійного струму, то магнітний потік в магнітопроводі трансформатора також буде постійним як за величиною, так і за напрямком ( $d\Phi/dt = 0$ ). Тому в обмотках трансформатора не наводиться ЕРС.

## 1.2.2. Електричні та магнітні властивості та параметри силового трансформатора

Основними електричними елементами силового трансформатора є обмотки, які мають електричний опір. Струм, протікаючи ними, викликає їхній нагрів. Потоки розсіювання обмоток обумовлюють власні індуктивності обмоток. Отже, в обмотках трансформатора, якими протікають струми, є активні та індуктивні опори.

Процес намагнічування активної сталі магнітопровода характеризується кривою намагнічування  $B = f(H)$ . Ця залежність є нелінійною: на кривій є ділянка, після якої подальше зростання напруженості магнітного поля практично не приводить до збільшення індукції в сталі. Ця зона характеризує насичення електротехнічної сталі. Відношення індукції до напруженості поля в будь-якій точці кривої намагнічування називають *магнітною проникністю* ( $\mu$ ), яка характеризує здатність матеріалу до намагнічування. Залежність магнітної проникності електротехнічної сталі від індукції є також нелінійною.

Унаслідок безперервної зміни величини та напрямку струму намагнічування, який протікає в первинній обмотці трансформатора, в магнітопроводі створюється змінний магнітний потік, зміна якого приводить до перемагнічування електротехнічної сталі.

Електрична енергія, витрачена на перемагнічування, перетворюється в теплову енергію, і це приводить до нагріву магнітопровода трансформатора.

Втрати в активній частині магнітопровода обумовлюються природою процесів намагнічування феромагнітних матеріалів і складаються з трьох частин: втрат на гістерезис ( $P_c$ ), втрат на вихрові струми ( $P_e$ ) і втрат на магнітну післядію ( $P_n$ )

Втрати на гістерезис при перемагнічуванні викликаються витратою енергії на перебудову меж доменів, і напрямки їх намагніченості в електротехнічній сталі залежать від її мікроструктури і параметрів зовнішнього магнітного поля.

Втрати на вихрові струми викликаються витратою енергії на нагрів активної сталі від вихрових струмів, які наводяться в ній змінним магнітним потоком. Вихрові струми циркулюють в листах у площинах, які перпендикулярні напрямку магнітного потоку, у площинах поперечного перетину магнітопровода.

Величина втрат на вихрові струми пропорційна квадрату товщини і навпаки пропорційна питомому електричному опору активного матеріалу, тому для зменшення втрат на вихрові струми магнітопровід набирається з тонких, ізольованих один від одного шарів, товщина яких в основному визначається товщиною електротехнічної сталі. Шари магнітопровода виконуються з окремих пластин або стрічок.

Виміряні втрати в сталі завжди більші, ніж розрахункова сума втрат на гістерезис і на вихрові струми, за рахунок наявності втрат на магнітну післядію або, як їх іноді називають, «додаткових» втрат. Природа цих втрат в даний час недостатньо зрозуміла, і вони не піддаються аналітичному розрахунку. Збільшення загальних втрат в сталі магнітопровода може бути викликано також за рахунок механічних дій

на неї при технологічній обробці та недосконалості міжлистової ізоляції. Окрім того, потоки розсіювання обмоток частково замикаються через бак і інші сталеві елементи трансформатора, створюючи додаткові втрати на перемагнічування та вихрові струми. Для зниження цих втрат сталеві баки трансформатора екранують пакетами електротехнічної сталі або пластинами з немагнітних матеріалів (міді, алюмінію).

Струм намагнічування і струм, що викликає втрати в сталі трансформатора, також протікає первинною обмоткою. Внаслідок нелінійності характеристики намагнічування струм намагнічування не є синусоїдальним – залежність струму намагнічування від часу є періодичною функцією, але з декілька витягнутою по відношенню до функції синуса формою кривої. Оскільки струм навантаження зазвичай в десятки разів більше струму намагнічування, то сумарний струм (намагнічування та навантаження) первинної обмотки є практично синусоїдальним. У режимах роботи трансформатора, близьких до холостого ходу, слід рахуватися з несинусоїдальністю струму трансформатора. Несинусоїдальність струму трансформатора сильно збільшується при зростанні струму намагнічування, що відбувається при перевищенні напруги, поданої на трансформатор.

### 1.2.3. Моделі силового трансформатора

Розглянемо математичні моделі силових трансформаторів, які застосовуються в задачах, пов'язаних з розрахунком усталених режимів схем електричних мереж. У таких моделях не враховуються ємнісні зв'язки між витками в кожній з обмоток, між самими обмотками і обмотками та землею, а також розподіленість електричних і магнітних параметрів. Крім того, обмежимося розглядом симетричних режимів навантаження трансформаторів.

Отримаємо математичну модель однофазного двообмоткового трансформатора. Спочатку припустимо, що трансформатор не має магнітопроводу (повітряний трансформатор), тоді він може бути представлений схемою рис. 1.9, у якій активні опори обмоток зображені окремо. Полярності обмоток на схемі відмічені зірочками.

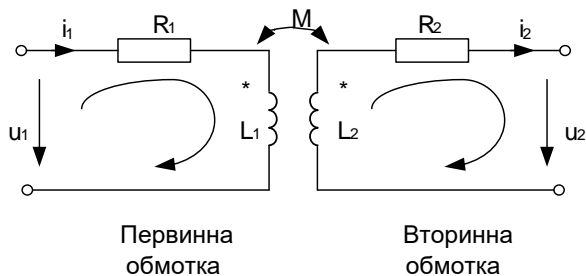


Рис. 1.9. Схема трансформатора без магнітопроводу

При обході контурів на схемі рис. 1.9 відповідно до заданих напрямів за другим законом Кірхгофа отримуємо рівняння трансформатора в диференціальній формі:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \\ -u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Оскільки напрямки струмів на схемі зорієнтовані не однаково у відношенні до зірочок, то полярність  $M \frac{di_1}{dt}$  не співпадає з  $i_2$ , навпаки, полярність  $M \frac{di_2}{dt}$  не співпадає з  $i_1$ .

При синусоїдних струмах і напрузі рівняння (1.34) в комплексній формі записуються так:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2, \\ -\underline{U}_2 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ці рівняння рівносильні наступним:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega(L_1 - M) \underline{I}_1 + j\omega M (\underline{I}_1 - \underline{I}_2), \\ -\underline{U}_2 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega(L_2 - M) \underline{I}_2 - j\omega M (\underline{I}_1 - \underline{I}_2). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Останнім рівнянням відповідає схема заміщення рис. 1.10. На відміну від рис. 1.9 у схемі заміщення первинне та вторинне коло трансформатора зв'язані не індуктивно, а гальванічно.

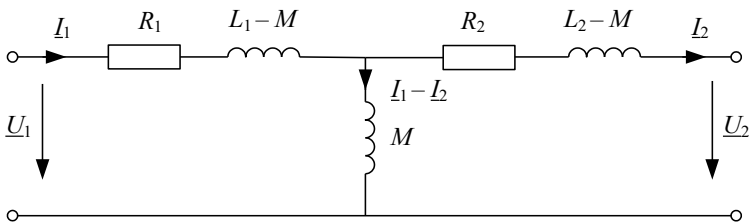


Рис. 1.10. Схема заміщення трансформатора без магнітопроводу

Різниці, які входять в схему рис. 1.10  $L_1 - M$  і  $L_2 - M$  мають фізичний сенс тільки при однаковій кількості витків первинної  $w_1$  і вторинною  $w_2$  обмоток ( $w_1=w_2$ ). У цьому випадку вони є індуктивностями розсіювання  $L_{s1}$  і  $L_{s2}$  первинної та вторинної обмоток трансформатора.

У реальних трансформаторах для моделювання втрат у сталі в схему заміщення трансформатора вводять активну провідність  $G_\mu$ . Для моделювання ефекту намагнічування сердечника вводять реактивну провідність  $B_\mu$ .

Якщо узяти за основу математичної моделі трансформатора так званий ідеальний трансформатор з коефіцієнтом трансформації  $n = \frac{w_1}{w_2}$

для якого відносна магнітна проникність дорівнює нескінченності та струм намагнічування дорівнює нулю, то додаванням до нього елементів, які враховують основні паразитні ефекти, можна отримати повну схему заміщення трансформатора (рис. 1.11).

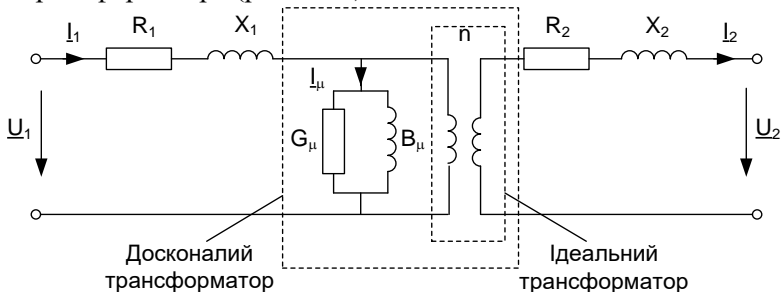


Рис. 1.11. Повна T-подібна схема заміщення трансформатора

Втрати енергії в обмотках трансформатора при протіканні ними струмів враховуються активними опорами  $R_1$  і  $R_2$ , послідовно з ними ввімкнені індуктивності розсіювання, які враховують ефект запасання енергії та наведення напруги в обмотках від потоків розсіювання. Цими індуктивностям відповідають індуктивні опори обмоток  $X_1$  і  $X_2$ . Струм

намагнічування обумовлює силу, яка намагнічує та створює потік взаємної індукції. Величина струму намагнічування  $I_\mu$  пропорційна напрузі первинної обмотки. Паралельно індуктивній провідності намагнічування  $B_\mu$  включають активну провідність  $G_\mu$ , яка враховує втрати в сердечнику.

Отже, *ідеальним трансформатором* є трансформатор, для якого за будь-яких умов  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = n$ .

Трансформатор, для якого при будь-якому навантаженні  $\frac{U_1}{U_2} = n$

називається *досягалим трансформатором* (рис. 1.11).

У багатьох випадках користуються приведеною Т-подібною схемою заміщення трансформатора (рис. 1.12). Отримується вона приведенням опорів вторинної обмотки до напруги первинної обмотки за співвідношеннями:

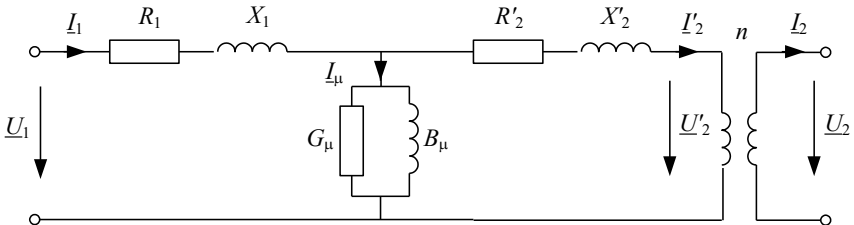


Рис. 1.12. Приведена Т-подібна схема заміщення трансформатора

На схемі рис. 1.12 відмічені струм і напруга:

$$\underline{U}'_2 = n\underline{U}_2, \quad \underline{I}'_2 = \frac{1}{n}\underline{I}_2. \quad (1.37)$$

#### 1.2.4. Г-подібна та П-подібна схеми заміщення силового трансформатора

Зазвичай для силових трансформаторів доцільніша так звана Г-подібна схема заміщення, елементи якої мають простий фізичний сенс і можуть бути обчислені або виміряні.

Коло намагнічування переноситься на затискачі первинної обмотки та стає ввімкненою на напругу  $U_1$ . Це вносить похибку до математичної моделі, оскільки насправді струм намагнічування (струм холостого ходу) протікає первинною обмоткою. Зазвичай струм холостого ходу силових трансформаторів менше одного відсотка від номінального струму трансформатора, і таке спрощення вважається

допустимим. Опори первинної обмотки виявляються послідовно ввімкненими з приведеними опорами вторинної обмотки, і при їх додаванні виходять так звані опори трансформатора  $R_m$  і  $X_m$  (рис. 1.13):

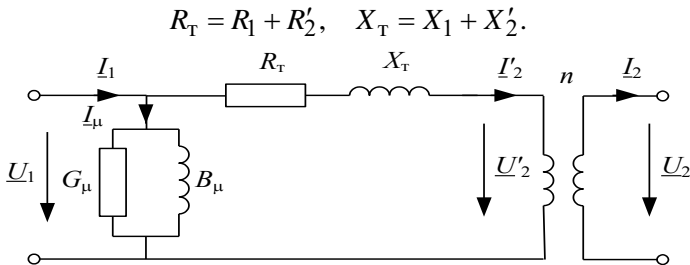


Рис. 1.13. Г-подібна схема заміщення трансформатора

Отримана схема носить назву Г-подібної схеми заміщення трансформатора та застосовується для виконання розрахунків схем електричних мереж, де вона ще більше спрощується за допомогою представлення кола холостого ходу у вигляді постійних величин втрат активної та реактивної потужності на холостий хід (рис. 1.14).

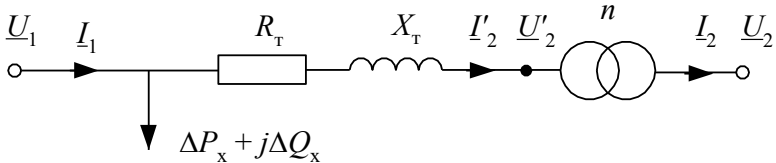


Рис. 1.14. Спрощена Г-подібна схема заміщення трансформатора

Усе отримане вище для однофазних трансформаторів можна використати для кожної фази трифазного трансформатора.

Опори та провідність Г-подібної схеми заміщення трансформатора, які приведені до напруги обмотки первинної напруги, визначаються за формулами:

$$R_T = \frac{P_K U_{\text{НОМ}}^2}{S_{\text{НОМ}}^2}; \quad X_T = \frac{U_K U_{\text{НОМ}}^2}{100 S_{\text{НОМ}}}; \quad (1.38)$$

$$G_\mu = \frac{P_x}{U_{\text{НОМ}}^2}; \quad B_\mu = \frac{I_x S_{\text{НОМ}}}{100 U_{\text{НОМ}}^2} = \frac{Q_x}{U_{\text{НОМ}}^2}.$$

Моделювання елементів схем електричних мереж при використанні спеціальних програм для розрахунку їх режимів роботи зручно виконувати за П-подібною схемою заміщення. Таку схему заміщення можна отримати і для трансформатора.

Отримаємо параметри П-подібної схеми заміщення (див. рис. 1.6) на основі Г-подібної схеми заміщення двообмоткового понижувального трансформатора з коефіцієнтом трансформації  $n > 1$  (рис. 1.13).

Знайдемо напругу та струм первинної обмотки:

$$\underline{U}_1 = n\underline{U}_2 + \Delta\underline{U}_T = n\underline{U}_2 + (R_T + jX_T) \frac{I_2}{n} \quad (1.39)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_\mu + \frac{I_2}{n} = (G_\mu - jB_\mu) \underline{U}_1 + \frac{I_2}{n}. \quad (1.40)$$

Після підстановки (1.39) в (1.40) отримаємо:

$$\underline{I}_1 = n(G_\mu - jB_\mu) \underline{U}_2 + \frac{1}{n} \left( (R_T + jX_T)(G_\mu - jB_\mu) + 1 \right) I_2. \quad (1.41)$$

Співставляючи вирази (1.39) і (1.41) з рівняннями чотириполосника

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2, \quad (1.42)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2$$

і враховуючи співвідношення між коефіцієнтами чотириполосника і параметрами П-подібної схеми заміщення [див.(1.22)]:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_2,$$

$$\underline{B} = \underline{Z},$$

$$\underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z} \underline{Y}_2 + \underline{Y}_2, \quad (1.43)$$

$$\underline{D} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_1,$$

матимемо:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_2 = n,$$

$$\underline{B} = \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_T}{n},$$

$$\underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z} \underline{Y}_2 + \underline{Y}_2 = n\underline{Y}_\mu, \quad (1.44)$$

$$\underline{D} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_1 = \frac{1}{n} \left( 1 + \underline{Z}_T \underline{Y}_\mu \right).$$

Із отриманих співвідношень можна знайти параметри П-подібної схеми заміщення трансформатора:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Z}_T}, \quad \underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_T} (1 - n) + \underline{Y}_\mu, \quad \underline{Y}_2 = \frac{n}{\underline{Z}_T} (n - 1). \quad (1.45)$$

П-подібна схема заміщення трансформатора на відміну від П-подібної схеми заміщення ЛЕП є несиметричною.

### 1.2.5. Побудова зовнішньої характеристики трансформатора

Зовнішньою характеристикою трансформатора називають залежність зміни вторинної напруги  $U_2$  від струму навантаження  $I_2$  при постійному коефіцієнті потужності приймача  $\cos\varphi = \text{const}$  і номінальній первинній напрузі  $U_1 = U_{\text{ном}}$ . Співставляючи зовнішні характеристики, отримані для різних математичних моделей трансформатора, з експериментально знайденою характеристикою трансформатора, можна оцінити величину похибок різних моделей та визначити область їх використання.

Побудуємо зовнішню характеристику силового трансформатора за його математичною моделлю при зміні струму вторинної обмотки від нуля до  $I_{\text{ном}}$  для трьох різних коефіцієнтів потужності: 0,8; 0,9 і 1,0.

Зовнішню характеристику  $U_2 = f(I_2)$  побудуємо за рівнянням:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \sqrt{3}\underline{B}\underline{I}_2. \quad (1.46)$$

Прийемо  $U_1 = \text{const}$ , тоді векторна діаграма струмів і напруги трансформатора матиме вигляд, як на рис. 1.15.

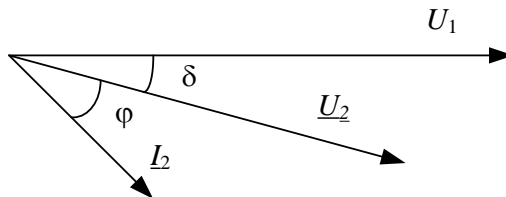


Рис. 1.15. Векторна діаграма струмів і напруги 1

Виразимо з (1.46) напругу  $U_2$ :

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \sqrt{3}\underline{B}\underline{I}_2}{\underline{A}}. \quad (1.47)$$

Тут струм  $I_2$  має кут зміщення щодо головної осі  $-(\delta + \varphi)$ , а напруга вторинної обмотки представлена в комплексному вигляді:  $|U_2|$  і  $\delta$ , де  $\delta$  входить в ліву частину рівняння:  $U_2 = U_2 e^{-j\delta}$  і в праву:  $I_2 = I_2 e^{-j(\varphi + \delta)}$ .

Для зручності прийемо суміщений з дійсною віссю вектор  $U_2$ , тоді векторна діаграма струмів і напруги прийме вигляд, показаний на рис. 1.16.

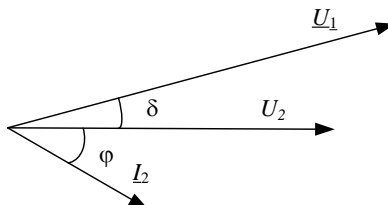


Рис. 1.16. Векторна діаграма струмів і напруги 2

Тоді напруга  $U_2$ :

$$U_2 = \frac{U_1 - \sqrt{3}BI_2}{A}, \quad (1.48)$$

де  $U_1 = U_1 e^{j\delta}$ ;  $I_2 = I_2 e^{-j\varphi}$ .

З урахуванням  $A = n$  і  $B = B' + jB''$  матимемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{A} [U_1' - \sqrt{3}(B'I_2' + B''I_2'')], \\ 0 &= \frac{1}{A} [U_1'' - \sqrt{3}(B''I_2' - B'I_2'')]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Оскільки  $I_2' = I_2 \cos \varphi$ ,  $I_2'' = I_2 \sin \varphi$  та  $U_1 = \sqrt{U_1'^2 + U_1''^2}$ , то отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{A} [U_1' - \sqrt{3}(B'I_2 \cos \varphi + B''I_2 \sin \varphi)], \\ 0 &= \frac{1}{A} [U_1'' - \sqrt{3}(B''I_2 \cos \varphi - B'I_2 \sin \varphi)], \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$U_1^2 = U_1'^2 + U_1''^2$$

з невідомими  $U_2$ ,  $U_1'$  і  $U_1''$ .

Змінюючи струм  $I_2$  у межах від нуля до  $I_{2ном}$ , шукатимемо розв'язок системи рівнянь (1.50) для кожного значення  $I_2$  і будуватимемо залежність  $U_2 = f(I_2)$ .

У *Mathcad* є можливість визначення функції як розв'язок системи рівнянь. Для цього вираз з *Find* має вид визначення функції:  $f(x) := \text{Find}(x)$  і далі в документі *Mathcad*  $f(x)$  стає визначеною та є функцією аргументу  $x$ .

У нашому випадку аргументами функції з *Find* буде  $U_2$  (за умовою з кутом рівним нулю) і  $\cos \varphi$ , який також буде різним для різних вихідних характеристик.

### 1.3. Електричне навантаження

#### 1.3.1. Статичні характеристики електричного навантаження

Процес споживання електричної енергії ототожнюється з поняттям електричного навантаження, яке характеризується потужністю та енергією. Навантаженням може бути один електроприймач, група однотипних електроприймачів або сукупність різних електроприймачів – змішане навантаження.

До основних електроприймачів в електричній системі відносяться:

- асинхронні двигуни;
- синхронні двигуни;
- освітлювальні прилади;
- печі опору;
- дугові печі.

Існує також велика кількість пристроїв і побутових приладів, у яких поєднуються різні за типом електроприймачі.

У задачах аналізу ustalених режимів електричних систем необхідна величина активної та реактивної потужності навантаження. Фізична природа споживання енергії електричним навантаженням така, що її активна та реактивна потужності залежать від підведеної напруги і частоти в електричній системі. Такі залежності носять назву статичних характеристик навантажень за частотою та за напругою. Різні типи електричних навантажень мають різні статичні характеристики. У сукупності різних типів електроприймачів розглядаються статичні характеристики змішаного навантаження.

Статичні характеристики використовуються при регулюванні частоти та напруги в ЕЕС. Загалом вони записуються як  $P = \varphi(f, U)$ ,  $Q = \psi(f, U)$ .

Тут ми розглядатимемо залежності потужності навантаження тільки від напруги – статичні характеристики навантаження за напругою  $P(U)$  і  $Q(U)$ . При цьому рахуватимемо частоту в ЕЕС незмінною величиною. За статичними характеристиками, побудованими у відносних номінальних одиницях, можуть бути визначені регулювальні ефекти навантаження – як похідні  $\frac{\partial P}{\partial U}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial U}$  у якій-небудь робочій точці характеристики, наприклад при  $U = U_{ном}$ .

Регулювальний ефект показує як знижується активне та реактивне навантаження при зміні напруги. Чим більше регулювальний ефект, тим сильніше змінюється потужність, споживана навантаженням при зміні напруги або частоти.

Для різних електроприймачів і їх поєднань статичні характеристики виходять різними та залежними від їх робочих режимів. Практично доводиться користуватися статичними характеристиками, отриманими експериментально. У деяких випадках їх вдається отримати розрахунковим шляхом.

Статичні характеристики зображають в координатах відносних величин – активній і реактивній потужності від частоти і напруги (рис. 1.17).

На рис. 1.17 відносна величина напруги  $U^* = U/U_{ном}$ , а відносні потужності визначаються за відношенням до номінальної або будь-якої вибраній величині потужності навантаження:  $P^* = P/P_{ном}$ ,  $Q^* = Q/Q_{ном}$ .

Слід зазначити, що в ЕЕС і конкретно у споживачів встановлюються спеціальні автоматичні регулюючі пристрої, які компенсують зміну напруги на електроприймачах, що значною мірою знижує регулювальні ефекти навантаження. У простому випадку це стабілізатори напруги, а у високовольтних мережах – потужні регульовані компенсувальні пристрої реактивної потужності і регулятори напруги силових трансформаторів. Розглянемо статичні характеристики окремих видів навантаження.

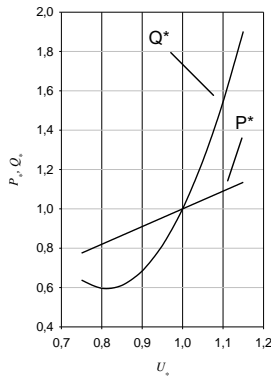


Рис. 1.17. Середні статичні навантаження за напругою для змішаного навантаження

### Асинхронні двигуни

Принцип дії асинхронного двигуна заснований на явищі електромагнітній індукції. У нерухомому трифазному обмотку статора асинхронного двигуна подається змінний струм, який формує в статорі магнітне поле, яке обертається. Це поле перетинає провідники замкнутої обмотки ротора та наводить в них ЕРС, під дією якого в обмотці ротора протікатиме струм. Взаємодія цього струму з полем статора створює на провідниках обмотки ротора електромагнітні сили – обертальний момент, напрям якого визначається за правилом «лівої руки». Ці сили захоплюють ротор у бік обертання магнітного потоку. Швидкість обертання ротора завжди менше швидкості обертання магнітного поля статора. Якщо припустити, що в якийсь момент часу частота обертання ротора опинилася рівній частоті обертання поля статора, то провідники обмотки ротора не перетинатимуть магнітне поле статора та струму в роторі не буде. Обертальний момент стане рівним нулю, і частота

обертання ротора зменшиться в порівнянні з частотою обертання поля статора, поки не виникне обертальний момент, який врівноважує момент навантаження на валу двигуна і момент сил тертя в підшипниках.

Асинхронні двигуни мають різні статичні характеристики. Активна потужність двигунів значною мірою залежить від характеристик машин, які приводяться в обертання двигунами. Реактивна потужність має різну залежність від напруги, обумовлену номінальною потужністю двигуна. Малопотужні двигуни мають крутіші характеристики в порівнянні з потужними двигунами.

Реактивна потужність, споживана асинхронними двигунами, складається з потужності намагнічування, пов'язаної із намагнічувальним струмом і потужністю розсіювання, пов'язаної із створенням полів розсіювання в статорі та роторі. Під час зниження напруги реактивна потужність розсіювання росте, а потужність намагнічування знижується. Сумарна потужність спочатку знижується, а потім знов починає зростати. При певній нарузі, названою *критичною*, двигун зупиняється і його подальша робота стає неможливою.

#### Синхронні двигуни

Обертове магнітне поле статора синхронної машини захоплює за собою ротор, який є електромагнітом-індуктором. Різноіменні полюси магнітного поля статора та ротора притягуються, і ротор обертається з постійною швидкістю. Для того, щоб ротор став електромагнітом, на нього подається постійний струм – струм збудження. Цей струм при обертанні ротора викликає магнітне поле в статорі – реакцію якоря. Залежно від величини струму збудження синхронний двигун може працювати в режимі перезбудження або недозбудження. Режим перезбудження – це нормальний режим роботи двигуна. Потужні синхронні двигуни виготовляють з номінальним коефіцієнтом потужності 0,9 і 0,8 при роботі з перезбудженням.

У режимі перезбудження синхронний двигун видає реактивну потужність, має ємнісний характер реактивної потужності у відношенні до мережі. При недозбудженні синхронний двигун має реактивну потужність індуктивного характеру, але внаслідок обмежень за стійкістю роботи та перегріву лобових частин машини максимально можлива споживана реактивна потужність не перевищує 30 % від номінальної реактивної потужності при перезбудженні.

Синхронні двигуни використовуються як джерела реактивної потужності в ЕЕС і застосовуються для регулювання напруги. Струм збудження синхронних машин змінюється відповідно до закону регулювання напруги в мережі, тому статичні характеристики синхронного двигуна за реактивною потужністю залежать від закону

регулювання напруги у вузлі навантаження, до якого він приєднаний. В цілому синхронні двигуни мають позитивний регулювальний ефект як за активною, так і за реактивною потужністю.

#### Освітлювальне навантаження

Установки електричного освітлення з лампами розжарювання, люмінесцентними, дуговими ртутними, натрієвими, ксеноновими застосовуються на всіх підприємствах для внутрішнього та зовнішнього освітлення, для побутових споживачів, потреб міського освітлення і так далі.

Лампи розжарювання випромінюють світло за рахунок розжарення нитки розжарення при великій температурі. При цьому значна частина споживаної лампами розжарювання енергії витрачається на перетворення на теплову енергію. Якщо вважати опір  $R$  нитки розжарення незмінним, а індуктивним опором нехтувати, то активна потужність лампи буде пропорційна квадрату підведеної напруги:

$$P(U) = \frac{U^2}{R}. \quad (1.51)$$

Проте зі зміною струму, який протікає ниткою розжарення, її температура і опір змінюються: із збільшенням струму зростає температура та збільшується опір у нитці і, навпаки, при зниженні напруги нитка холодне і опір знижується.

Експериментально встановлено, що споживана лампами розжарювання потужність пропорційна напрузі в степені 1,5...1,6. Реактивна потужність лампами розжарювання практично не споживається

Люмінесцентні лампи менш чутливі до відхилень напруги. При підвищенні напруги споживана потужність та світловий потік збільшуються, а при зниженні – зменшуються, але не в такий ступінь, як у ламп розжарювання. Проте при зниженні напруги на люмінесцентних лампах до величини  $0,9U_{ном}$  вони починають мерехтіти, а при величині напруги  $0,8U_{ном}$  просто не спалахують. Регулювальний ефект люмінесцентних ламп за схемою з розщипленою фазою дорівнює приблизно 1,9 для активної потужності, а для реактивної потужності може бути оцінений величиною 1,5.

#### Печі опору

Вони мають характеристики, схожі з характеристиками ламп розжарювання.

### Дугові печі

Дугові печі є складним і важким навантаженням для енергомережі – це великий несиметричний та нестабільний споживач за реактивною потужністю. Флуктуації реактивної потужності, особливо виражені на стадії розплаву, приводять до спадів напруги, які зменшують активну потужність, яка поступає до електропечі та інших електричних навантажень, приєднаних до тих же шин розподільного пристрою. Активна потужність, споживана піччю, змінюється пропорційно квадрату напруги.

### Компенсувальні пристрої

Пристрої типу індуктивності та ємності мають квадратичні залежності реактивної потужності від напруги (якщо їх реактивні опори постійні). Ємнісне навантаження має негативний регулювальний ефект.

Більшість компенсувальних пристроїв на даний час випускаються з регулювальними пристроями, тобто при зміні напруги на шинах, де підключені компенсувальні пристрої, останні змінюють свою потужність відповідно до закону регулювання. Найчастіше компенсувальні пристрої стабілізують напругу, тобто, підтримують її на заданому рівні, що еквівалентно позитивному регулювальному ефекту.

### 1.3.2. Моделювання електричних навантажень

Статичні характеристики для кожного типу електричного навантаження та їх сукупність можуть бути отримані експериментально. Проте у кожному конкретному випадку це складно і найчастіше користуються так званими типовими характеристиками. Так, наприклад, можна виділити статичні характеристики асинхронних двигунів малої, середньої та великої потужності або статичні характеристики певного складу змішаного навантаження. Отримані за такими навантаженнями статичні характеристики узагальнюються та представляються у вигляді математичних моделей. У загальному випадку статичні характеристики навантаження за напругою можуть бути представлені у вигляді:

$$\begin{aligned} P(U) &= P_0 P^*(U) = P_0 \left[ a_P \left( \frac{U}{U_{\text{НОМ}}} \right)^2 + b_P \left( \frac{U}{U_{\text{НОМ}}} \right) + c_P \right]; \\ Q(U) &= Q_0 Q^*(U) = Q_0 \left[ a_Q \left( \frac{U}{U_{\text{НОМ}}} \right)^2 + b_Q \left( \frac{U}{U_{\text{НОМ}}} \right) + c_Q \right]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

де  $P_0$  і  $Q_0$  – активна і реактивна потужності навантаження при номінальній напрузі;  $P^*(U)$  і  $Q^*(U)$  – статичні характеристики

навантажень у відносних одиницях;  $U_{ном}$  – номінальна напруга навантаження або мережі;  $a_P, a_Q, b_P, b_Q, c_P$  і  $c_Q$  – коефіцієнти (параметри) моделей, отримані в результаті обробки експериментальних даних.

Середні статичні характеристики приблизно відповідають наступному складу навантаження %:

Великі асинхронні двигуни.....	15
Малі асинхронні двигуни.....	35
Великі синхронні двигуни.....	9
Печі і ртутні випрямлячі.....	11
Освітлення і побутове навантаження.....	22
Втрати в мережах.....	8

Зазвичай приймається  $a_P=0$ , лінійна залежність активного навантаження від напруги. Коефіцієнти  $b_P$  і  $c_P$  залежно від характеристики вузла навантаження приведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Значення коефіцієнтів  $b_P$  і  $c_P$

Характер навантаження	Статичні характеристики					
	пологі		середні		круті	
	$b_P$	$c_P$	$b_P$	$c_P$	$b_P$	$c_P$
Переважають крупні промислові підприємства	0,3	0,7	0,6	0,4	0,9	0,1
В середньому	0,4	0,6	0,9	0,1	1,4	-0,4
Великих промислових підприємств немає	0,9	0,1	1,2	-0,2	1,5	-0,5

Коефіцієнти  $a_Q, b_Q$  і  $c_Q$  залежно від коефіцієнта потужності приведені в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Значення коефіцієнтів  $a_Q, b_Q$  і  $c_Q$

Коефіцієнт потужності	Статичні характеристики								
	пологі			середні			круті		
	$a_Q$	$b_Q$	$c_Q$	$a_Q$	$b_Q$	$c_Q$	$a_Q$	$b_Q$	$c_Q$
0,83...0,87	10	-18	9	9,6	-15,3	6,7	10	-14,4	5,4
0,88...0,90	11,9	-21,8	10,9	11,4	-18,5	8,1	11,9	-17,4	6,5
0,91...0,93	14,1	-26,2	13,1	13,5	-22,2	9,7	14,1	-21	7,9

Моделювання електричних навантажень статичними характеристиками за напругою в розрахунках усталених режимів вважається найбільш точним способом обліку споживаної потужності

навантаження. Проте для отримання дійсних статичних характеристик потрібні експериментальні дослідження, а для підбору типових статичних характеристик повинен бути відомий склад навантаження, який може сильно змінюватися в часі. Окрім того, в цьому випадку в розрахунках неодмінно слід враховувати дію регуляторів напруги, а це значно ускладнює підготовку даних і вимагає знання законів регулювання.

Тому в більшості випадків користуються найпростішою моделлю навантаження – постійними значеннями активної та реактивної потужності:  $P = \text{const}$ ,  $Q = \text{const}$ .

У деяких задачах, в яких виконуються розрахунки усталених режимів, струмів короткого замикання в електричній мережі або розрахунки стійкості ЕЕС, навантаження прийнято представляти схемами заміщення. Таке уявлення є точним в тому випадку, якщо для навантаження відомі її статичні характеристики і величина підведеної напруги. У інших випадках такі моделі є наближеними.

Розглянемо електричне коло, в якому є навантаження, представлене у вигляді опору  $Z_H$ . Це опір в загальному випадку є змінною величиною, тобто, отримаємо нелінійне електричне коло. Навіть якщо рахувати потужність, споживану навантаженням, постійною, опір змінюватиметься залежно від напруги за формулою:

$$\underline{Z}_H = \frac{U_H^2}{S_H^*} \quad (1.53)$$

Окрім того, потужність також залежить від напруги за статичною характеристикою і тому:

$$\underline{Z}_H = \frac{U_H^2}{P_H(U_H) - jQ_H(U_H)} \quad (1.54)$$

Навантаження може бути представлене у вигляді двох схем заміщення: з послідовним і паралельним з'єднанням елементів (рис. 1.18).

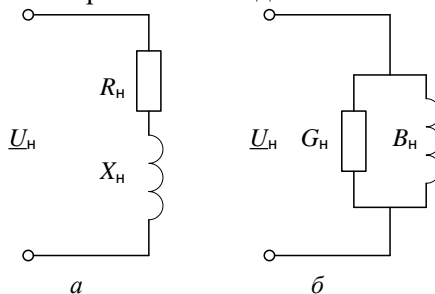


Рис. 1.18. Схеми заміщення навантаження

При послідовному з'єднанні:

$$\underline{Z}_H = \frac{U_H^2}{S_H^*} = \frac{U_H^2}{S_H} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = R_H + jX_H, \quad (1.55)$$

а при паралельному:

$$\underline{Y}_H = \frac{S_H^*}{U_H^2} = \frac{S_H}{U_H^2} (\cos \varphi - j \sin \varphi) = G_H - jB_H. \quad (1.56)$$

При постійній величині заданого опору або провідності моделювання за допомогою виразів (1.55) і (1.56) дає характеристики:

$$P_H(U_H) = \frac{S_H^2}{U_H^2} R_H, \quad Q_H(U_H) = \frac{S_H^2}{U_H^2} X_H, \quad (1.57)$$

$$P_H(U_H) = U_H^2 G_H, \quad Q_H(U_H) = U_H^2 B_H.$$

Моделювання постійним опором дає зворотню квадратичну залежність від напруги, а постійною провідністю – залежність пропорційну квадрату напруги. Друга модель добре узгоджується з моделлю статичної характеристики реактивної потужності навантаження (1.52), тому для реактивної потужності цілком прийнятна. Для активної потужності можна, наприклад, скористатися лінійною моделлю, тоді матимемо:

$$P_H(U_H) = U_H U_{\text{ном}} G_H, \quad Q_H(U_H) = U_H^2 B_H, \quad (1.58)$$

де  $G_H$  і  $B_H$  обчислені при номінальній напрузі навантаження.

На рис. 1.19 представлені дійсні статичні характеристики навантаження (суцільні лінії) і характеристики, отримані за моделями (1.58) – пунктирні лінії.

Іноді в якості даних по навантаженню бувають відомі виміряні струми навантаження. Приймаючи будь-яке значення коефіцієнта потужності навантаження, її можна моделювати постійними значеннями струмів  $I_H$ :

$$\begin{aligned} P_H(U_H) &= \sqrt{3} \cdot U_H I_H \cos \varphi; \\ Q_H(U_H) &= \sqrt{3} \cdot U_H I_H \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.59)$$

що дає лінійні статичні характеристики як активної, так і реактивної потужності. Такі моделі навантаження використовуються в низьковольтних мережах і мережах середньої напруги.

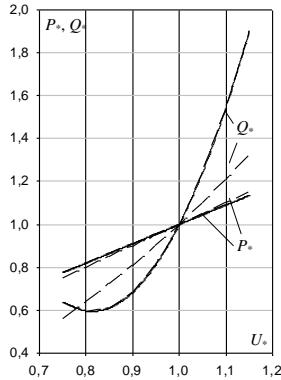


Рис. 1.19. Дійсні статичні характеристики навантаження та залежності потужностей від напруги при моделюванні навантаження схемою заміщення

Усі моделі електричних навантажень, розглянуті вище, зведені в табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Моделі електричних навантажень

Моделі	Потужність навантаження	Примітки
Статичні характеристики навантаження за напругою	$P_H = \varphi(U_H), \quad Q_H = \psi(U_H)$	Виходять за даними експерименту або підбором типових характеристик
Постійні значення потужності навантаження	$P_H = \text{const}, \quad Q_H = \text{const}$	-
Схема заміщення: $Y_H = G_H - jB_H = \text{const}$	$P_H = U_H^2 G_H$ або $P_H = U_H U_{\text{НОМ}} G_H,$ $Q_H = U_H^2 B_H$	$\underline{Y}_H = \frac{S_{H0}}{U_{\text{НОМ}}^2} (\cos \varphi - j \sin \varphi)$
Схема заміщення: $Z_H = R_H + jX_H = \text{const}$	$P_H(U_H) = \frac{S_{H0}^2}{U_H^2} R_H,$ $Q_H(U_H) = \frac{S_{H0}^2}{U_H^2} X_H$	$\underline{Z}_H = \frac{U_{\text{НОМ}}^2}{S_{H0}} (\cos \varphi + j \sin \varphi)$
Постійне значення струму навантаження: $I_H = \text{const} (= \text{const})$	$P_H = \sqrt{3} \cdot U_H I_H \cos \varphi,$ $Q_H = \sqrt{3} \cdot U_H I_H \sin \varphi$	$I_H = \frac{S_{H0}}{\sqrt{3} U_{\text{НОМ}}}$

Примітка. У всіх формулах  $S_{н0}$  – повна потужність навантаження, яке може бути прийнята рівній номінальній або максимальній потужності, а також потужності деякого вихідного або початкового режиму роботи електроприймача або споживача.

### **Питання для самоконтролю:**

1. Назвіть основні електричні та магнітні властивості ЛЕП.
2. Поясніть фізичний сенс параметрів ПЛ.
3. Які рівняння називаються рівняннями довгої лінії?
4. Як можна обчислити напругу та струм в довільній точці на лінії?
5. Як отримати рівняння ідеальної лінії?
6. Які лінії називаються хвильовими (напівхвильовими)?
7. Як знайти параметри П-подібної схеми заміщення лінії?
8. У яких випадках можна користуватися спрощеними моделями ПЛ?
9. Поясніть фізичний сенс параметрів схеми заміщення трансформатора.
10. Запишіть рівняння трансформатора в диференціальній формі.
11. Який трансформатор називається ідеальним і досконалим?
12. Намалюйте Г-подібну схему заміщення трансформатора.
13. Як визначаються параметри П-подібної схеми заміщення трансформатора?
14. Як побудувати зовнішню характеристику трансформатора?
15. Що таке статичні характеристики навантаження?
16. Що таке регулювальний ефект навантаження?
17. Які існують основні види електричних навантажень?
18. Які навантаження не споживають реактивної потужності?
19. Який регулювальний ефект мають печі опору та лампи розжарювання?
20. Як змінюється регулювальний ефект за реактивною потужністю асинхронного двигуна при зниженні напруги?
21. Які моделі використовуються для моделювання електричного навантаження в усталених режимах?
22. Що таке типові статичні характеристики?
23. Які схеми заміщення використовуються для моделювання навантаження?

## 2. МОДЕЛІ ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖ

### 2.1. Основи теорії графів

Графи широко використовуються в різних областях науки та техніки для моделювання відносин між об'єктами. На макрорівні граfi застосовуються для граfiчного зображення топологічних рівнянь.

Вважається, що теорія графів зародилася в XVIII сторіччі в м. Кенігсберзі (нині м. Калінінград), жителі якого намагалися вирішити задачу про перехід мостів міста (річка Прегель) за таким маршрутом, в якому б були пройдені всі мости, але кожен міст був пройдений тільки один раз (рис. 2.1, а). Цю задачу вдалося вирішити Ейлерові. Він показав, яким умовам повинен задовольняти граф, отриманий за схемою мостів, (рис. 2.1, б), щоб таке завдання мало розв'язок.

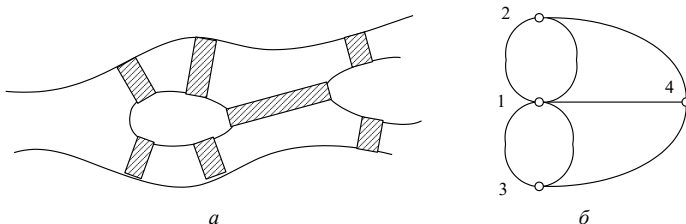


Рис. 2.1. Схема мостів (а) і граф маршрутів (б)

Графом називається сукупність вершин (вузлів) і пов'язаних з ними ребер (віток). Граф можна задати у вигляді  $G = \langle V, E \rangle$ , де  $V$  – безліч вершин;  $E$  – відношення на  $V (E \subset V \times V)$  – безліч ребер. На рис. 2.2, а показаний граф  $G$ , в якому безліч ребер  $E \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$ , а безліч вершин  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Підграфом називають таку частину графа, яка включає деякі вершини та ребра графа, причому серед ребер можуть бути тільки ті, які зв'язують вершини підграфа. На рис. 2.2, б показаний підграф  $G'$  графа  $G$ .

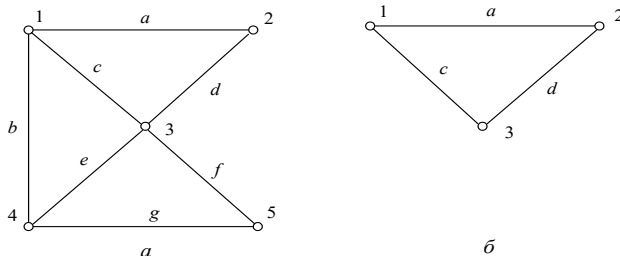


Рис. 2.2. Граф  $G$  (а) і його підграф  $G'$  (б)

Направлений (орієнтований) граф має ребра, на яких вказані напрями. Ребра направленного графа називають *дугами*. На рис. 2.3, а показаний орієнтований граф.

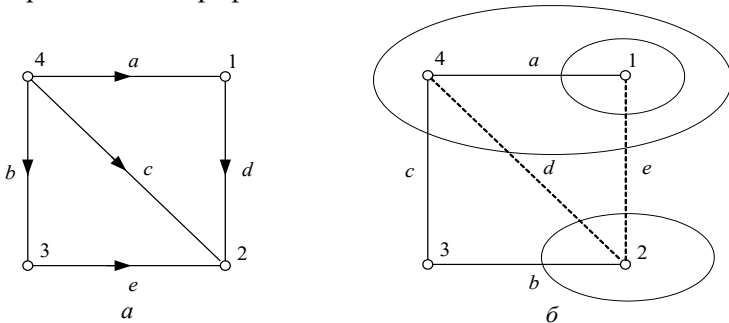


Рис. 2.3. Орієнтований граф (а), перетини дерева графа (б)

Степенем вершини  $V_i$  графа називають кількість ребер, інцидентних цій вершині. Термін «інцидентність» означає відношення об'єктів типу «проходять через...», «сполучені з...». Дві вершини називають суміжними, якщо вони сполучені ребром. Наприклад, на рис. 2.3, а вершина 4 суміжна з вершиною 2, оскільки вони сполучені за допомогою ребра с.

Граничні вершини ребра – вершини, інцидентні цьому ребру.

Кратні ребра – ребра з однаковими граничними вершинами.

Маршрутом (шляхом)  $S$  називають будь-яку послідовність ребер, в якій сусідні ребра інцидентні одній і тій же вершині. У графі на рис. 2.2, а послідовності  $(a, d, e, g)$  і  $(b, g)$  – маршрути, а послідовність  $(d, g)$  маршрутом не є, оскільки ребра  $d$  і  $g$  інцидентні різним вершинам. Якщо в маршруті немає ребер, які повторюються, то він називається *колом*. Якщо коло починається та закінчується в одній і тій же вершині, то вона називається *циклом-контуром*. Кількість ребер у  $S$  називають *довжиною маршруту*.

Якщо кожному ребру графа приписано якесь число (вага), то граф називають *зваженим*.

*Зв'язуючим* називають граф, в якому можна вказати маршрут, який зв'яже будь-які вершини.

Деревом зв'язуючого графа називають найменший зв'язуючий підграф даного графа.

Вітками дерева називають ребра графа, які увійшли до дерева, а хордами – ребра графа, які не увійшли до дерева. Для одного і того ж графа в загальному випадку можна вказати декілька дерев.

Контуром  $k$ -ї хорди називають безліч ребер, які створюють цикл у графові, який виходить при додаванні  $k$ -ї хорди до дерева.

Перетином вітки дерева називають безліч ребер, які перетинаються лінією перетину, якщо:

а) серед віток дерева перетинається єдина;

б) лінія перетину замкнута і будь-яке ребро може перетинатися не більше одного разу.

Для графа, показаного на рис. 2.3, б, перетини віток його дерева записуються:  $a - (a, e)$ ;  $b - (b, d, e)$ ;  $z - (c, d, e)$ .

Графи можна представити за допомогою різних матриць, які є зручним при використанні алгебраїчних методів розв'язку багатьох задач теорії графів. Найбільш важливими матричними представленнями є матриці інциденцій (з'єднань) і суміжності.

Перша матриця інциденцій  $\mathbf{M}$  для неорієнтованого графа є матрицею, рядки якої відповідають вершинам, а стовпці – ребрам. Елемент матриці рівний одиниці, якщо вершина інцидентна ребру. Інакше елемент матриці приймає значення нуль.

Для орієнтованого графа елемент матриці інциденцій  $\mathbf{M}$  рівний  $+1$ , якщо вершина, інцидентна дузі, є початковою вершиною дуги (тобто дуга виходить з цієї вершини). Елемент рівний  $-1$ , коли дуга входить у вершину. Якщо вершина не інцидентна дузі, то елемент матриці рівний  $0$ . Так, для графа на рис. 2.3, а матриця  $\mathbf{M}$  має наступний вигляд:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.1)$$

У кожному стовпці матриці  $\mathbf{M}$  знаходиться дві одиниці – одна позитивна, а інша негативна, оскільки кожне ребро інцидентне тільки двом вершинам. У кожному рядку є стільки одиниць, скільки ребер інцидентно відповідній вершині.

Друга матриця інциденцій  $\mathbf{N}$  встановлює відповідність між ребрами графа та незалежними контурами графа. Залежно від вибраної системи незалежних контурів – дерева графа можна скласти різні матриці  $\mathbf{N}$ . Кількість незалежних контурів позначають через  $k$ . Кожному рядку матриці  $\mathbf{N}$  ставлять у відповідність контури, отже, кількість рядків в матриці  $\mathbf{N}$  рівне кількості незалежних контурів  $k$ ; кожному стовпцю матриці  $\mathbf{N}$  ставлять у відповідність ребро, і кількість стовпців матриці  $\mathbf{N}$  рівне кількості ребер –  $m$ .

Матриця  $\mathbf{N}$  складається за наступними правилами. Незалежні контури нумерують від 1 до  $k$ ; вибирають напрями обходу контурів; починаючи з першого виконують обхід контурів відповідно до вибраних напрямів; перевіряють, чи співпадає напрям чергового ребра з напрямом обходу контура: якщо так, то у відповідному стовпці матриці  $\mathbf{N}$  ставиться  $+1$ , інакше  $-1$ ; для ребер, які не увійшли до даного контура, у відповідні стовпці проставляють нулі.

Так, якщо в якості дерева графа на рис. 2.3, взяти підграф з ребрами  $(a, b, c)$ , то при додаванні хорди  $d$  утворюється контур  $(a, d, c)$ , а при додаванні хорди  $e$  – контур  $(c, e, b)$ . Для такої системи незалежних контурів матриця  $\mathbf{N}$  має вигляд:

$$\mathbf{N} = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.2)$$

Матриця суміжності  $\mathbf{A}$  є квадратною матрицею і для незваженого графа складається з нулів і одиниць:  $A_{ij} = 1$ , якщо  $(i, j) \in E$ , і  $A_{ij} = 0$  в іншому випадку. Для зваженого графа  $A_{ij}$  дорівнює вазі відповідного ребра, а відсутність ребра у ряді задач зручно позначати нескінченністю. Якщо граф орієнтований, то для кожного ребра ставиться  $A_{ij} = 1$ , якщо напрям від  $i$  до  $j$ , а  $A_{ij} = -1$  і навпаки. Для неорієнтованих графів матриця суміжності завжди симетрична щодо головної діагоналі. Для графа на рис 2.3, а матриця  $\mathbf{A}$  має наступний вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

За допомогою матриць  $\mathbf{M}$  і  $\mathbf{A}$  легко перевірити, чи існує в графі ребро, яке сполучає вершину  $i$  з вершиною  $j$ . Основний недолік цих матриць полягає в тому, що вони вимагають, щоб об'єм пам'яті був достатній для зберігання відповідно  $nm$  і  $n^2$  значень.

Цього недоліку позбавлені такі способи зберігання графа, як одновимірний масив довжини  $n$  списків або множин вершин. У такому масиві кожен елемент відповідає одній з вершин і містить список або множину вершин, суміжних з нею.

Для реалізації деяких алгоритмів зручнішим є опис графа перерахуванням його ребер. У цьому випадку його можна зберігати в двовимірному масиві з двох рядків і довжиною  $m$ , кожен стовпець якого містить номер початкової вершини та номер кінцевої вершини графа.

При роботі з графами на комп'ютері зручно вершини графа зіставляти з числами від 1 до  $n$ , де  $n = |V|$  – кількість вершин графа, і розглядати  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Ребра нумерують числами від 1 до  $m$ , де  $m = |E|$ . Надалі ребра іменуватимемо не буквами, а цифрами.

## 2.2. Застосування теорії графів для моделювання електричних мереж

Лінії, трансформатори та інші елементи електричної мережі представляються в розрахунках своїми схемами заміщення, які складаються з віток із опорами та провідностями. Усі шини електричних станцій і підстанцій є вузловими точками мережі. Кількість цих вузлових точок або вузлів схеми мережі позначимо буквою  $n$ , а кількість віток, які сполучають ці шини,  $m$ . Якщо мережа не містить замкнутих контурів, то кількість вузлів і віток розрізняється на 1:  $n = m + 1$ . За наявності контурів  $n = m + 1 - k$ , де  $k$  – кількість незалежних контурів.

Графи є топологічними моделями схем електричних мереж.

Зображення електричної схеми у вигляді графа повторює графічне зображення схеми, але без елементів, з яких складається електричне коло. Вузли (вершини графа) з'єднуються безперервними лініями (ребрами), на яких при необхідності вказується додатній напрям струму або потоку потужності.

Елементами ЕЕС, які моделюються ребрами графа, є ЛЕП, трансформатори, реактори, батареї конденсаторів і ін. Як правило, всі вони представляються П-подібними схемами заміщення і тому мають елемент зв'язку між двома граничними вузлами – поздовжня вітка, і елементи, які пов'язують вузли з нейтральною точкою системи  $N$ , – поперечні вітки (рис. 2.4).

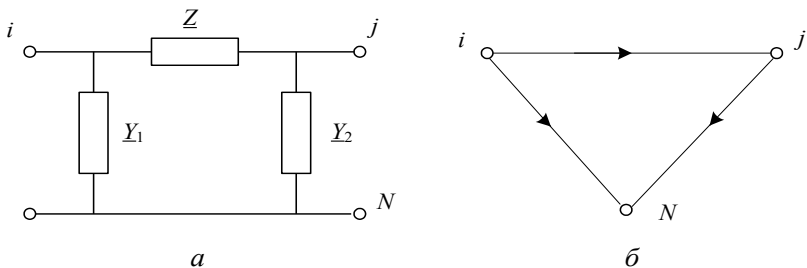


Рис. 2.4. П-подібна схема заміщення (а) та її граф (б)

Для ЛЕП:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \quad (2.4)$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{\text{ch}(\gamma_0 l) - 1}{\underline{Z}_C \text{sh}(\gamma_0 l)} = \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{th} \left( \frac{\gamma_0 l}{2} \right). \quad (2.5)$$

Зазвичай  $Z = (r_0 + jx_0)l$  і  $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{(g_0 + jb_0)l}{2}$ .

Для трансформатора:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_T}{k_T},$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_T} (1 - k_T) + \underline{Y}_\mu, \quad (2.6)$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{k_T}{\underline{Z}_T} (k_T - 1)$$

при  $k_T > 1$ . Якщо  $k_T = 1$ , то з (2.6) виходить Г-подібна схема заміщення трансформатора.

Для реакторів і батарей конденсаторів, які включаються у вигляді повздовжніх елементів мережі, параметри схеми заміщення:  $Z = jX_p$  і  $Z = jX_c$ .  $Y_1 = Y_2 = 0$  ( $Y_1$  або  $Y_2$  може бути відмінне від нуля і моделювати втрати активної потужності в реакторі або батареї конденсаторів). У разі їх включення у вигляді поперечних віток:  $Z=0$ , а  $Y_1$  і  $Y_2$  представляються однією поперечною віткою –  $Y$  шунта:  $\underline{Y} = -j \frac{1}{X_p}$  і  $\underline{Y} = j \frac{1}{X_c}$ .

Аналогічно можуть представлятися своїми схемами заміщення електричні навантаження.

Розглянемо приклад схеми електричної мережі, яка складається з ЛЕП і трансформатора (рис. 2.5, а). Її схемою заміщення є дві сполучені між собою П-подібні схеми заміщення – ЛЕП і трансформатора, а граф складатиметься з двох графів П-подібних схем (рис. 2.5, б).

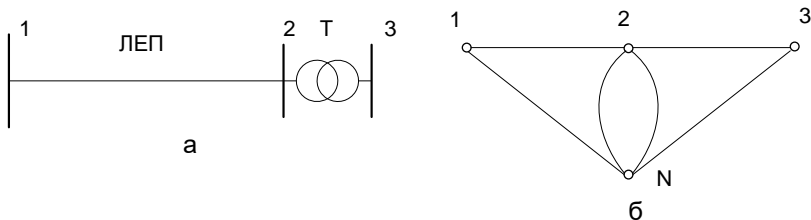


Рис. 2.5. Схема простої електричної мережі (а) та її граф (б)

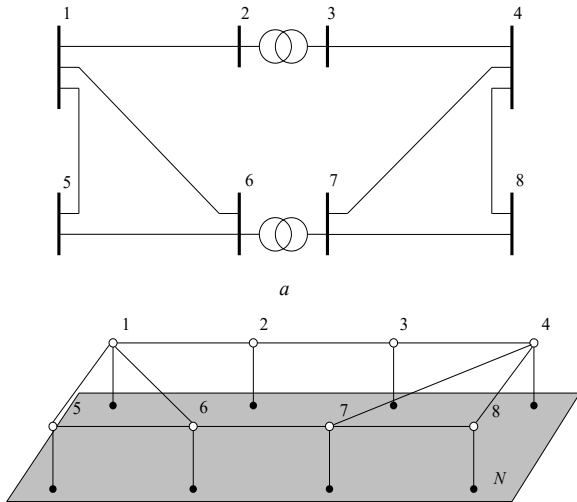
Для складніших схем, наприклад, схеми на рис. 2.6, а, зручно ввести в розгляд нейтральну площину в мережі та розглядати вузли графа мережі такими, що «висять» над нейтральною площиною  $N$  і сполученими з нею поперечними вітками (рис. 2.6, б).

Оскільки в загальному випадку кожна вершина графа інцидентна хоч би одному ребру, пов'язаному з вершиною (площиною)  $N$ , то при зображенні графа ці ребра не зображаються (рис. 2.7).

Для моделювання топології схем електричних мереж використовують матричні моделі, які відображають властивості графів. Це матриці інциденцій та суміжності. У практичних розрахунках зручнішою є компактна форма запису, наприклад у вигляді перерахування ребер графа. Так, для графа рис. 2.7 масив імен ребер  $L$  може бути записаний в наступному вигляді:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 7 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 8 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

У першому рядку масиву  $L$  вказується номер (ім'я) початкового вузла, а в другій того ж стовпця – номер (ім'я) кінцевого вузла. Пара номерів вузлів в стовпці утворює ім'я вітки, наприклад, для вітки  $b$  це 2 – 3.



б

Рис. 2.6. Схема електричної мережі з восьми вузлів і десяти віток (а) і її граф (б)

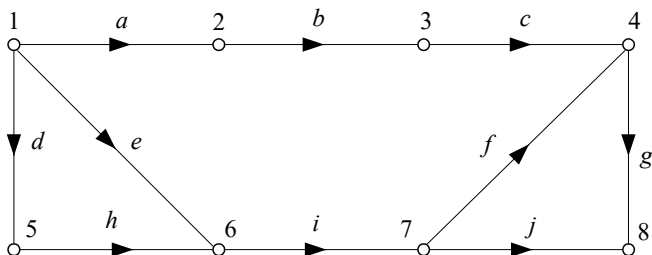


Рис. 2.7. Граф мережі без зображення ребер, пов'язаних з нейтральною площиною

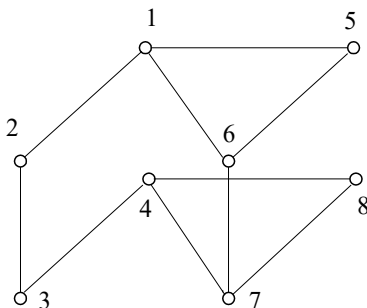


Рис. 2.8. Багатошаровий граф

У деяких випадках можна використовувати багатошарові графи, в яких мережа кожної напруги розташовується в окремому шарі. Виходить, що в горизонтальних шарах знаходяться вітки, які моделюють лінії електропередачі, а між ними вертикально зображаються трансформаторні зв'язки (рис. 2.8). Таких шарів може бути стільки, скільки ступенів номінальної напруги є в мережі.

### 2.3. Матричні форми моделей електричних мереж і їх режимів

Кожна подовжня вітка в графі електричної мережі характеризується опором  $Z_j = R_j + jX_j$ , а поперечна вітка – провідністю  $Y_i = G_i + jB_i$  ( $j=1,2,\dots,m$ ;  $i=1,2,\dots,n$ ), які утворюють матриці параметрів електричної мережі – матрицю опорів повздовжніх віток і матрицю-стовпець провідності поперечних віток – шунтів:

$$\underline{Z}_B = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{B11} & & & \\ & \underline{Z}_{B22} & & \\ & & \dots & \\ & & & \underline{Z}_{Bmm} \end{pmatrix}, \quad \underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{N1} \\ \underline{Y}_{N2} \\ \dots \\ \underline{Y}_{Nn} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Тут  $Z_{6ij}=Z_j$ , а  $Y_{Ni}=Y_i$ . Недіагональні елементи матриці  $Z_6$  зазвичай рівні нулю, хоча в деяких випадках враховують взаємні опори віток, які можуть бути відмінні від нуля, наприклад, для близько розташованих ЛЕП можлива наявність взаємної індукції.

Окрім пасивних віток в мережі існують активні вітки, які включають джерела ЕРС і струму. Ці вітки, як правило, є поперечними і моделюють генератори електричних станцій (ЕРС) і споживачів електричної енергії (джерела струму), – рис. 2.9, а.

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \dots \\ \underline{E}_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \dots \\ \underline{J}_n \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Вітка з ЕРС насправді містить ще і опір, і по суті є джерелом напруги, яка залежить від навантаження. В усталеному режимі досягається постійність значення напруги генераторів електростанцій за допомогою спеціальних пристроїв регулювання та можна нехтувати впливом опорів генераторів на їх напругу. Надалі вважатимемо ці вітки джерелами ЕРС.

Прийнято не зображати на графі мережі не тільки шунтуючу провідність, але і активні поперечні вітки ЕРС і джерелом струму, проте джерело струму все ж таки задають спрощеним зображенням у вигляді стрілки, направленої у вузол (рис. 2.9, б). Це показує, що в мережу «вливається» зовні струм генерації або навантаження (із зворотним знаком). Такі струми називаються струмами *ін'єкції* (injection current) або задаючими струмами.

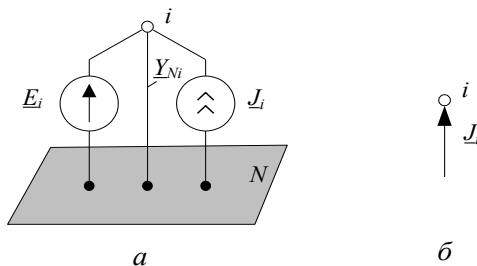


Рис. 2.9. Зображення поперечних віток

Матриці  $\underline{\mathbf{E}}$  і  $\underline{\mathbf{J}}$  задають режим роботи електричної мережі і є векторами незалежних змінних. Вони відносяться до режимних параметрів електричної мережі. Інші режимні параметри називаються залежними змінними. До них відноситься напруга у вузлах, струми і напруга в повздовжніх вітках і ряд інших параметрів режиму:

$\underline{U}$  – матриця напруги у вузлах (вузлова напруга);

$\underline{I}$  - матриця струмів віток;

$\underline{\Delta U}$  - матриця напруги в вітках (спад напруги на опорах віток);

$\underline{S}_B^{(H)}$  - матриця потоків потужності на початку віток;

$\underline{S}_B^{(K)}$  – матриця потоків потужності в кінці віток;

$\underline{\Delta S}_B$  – матриця втрат потужності в вітках.

## 2.4. Вузлові рівняння усталеного режиму

Розглянемо приклад направленного графа електричної мережі, зображеного на рис. 2.10.

Для зручності запису в матричній формі параметрів віток присвоємо кожній вітці її порядковий номер (на рис. 2.10 курсив). Складемо матрицю з'єднань  $\mathbf{M}$  для цього графа:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

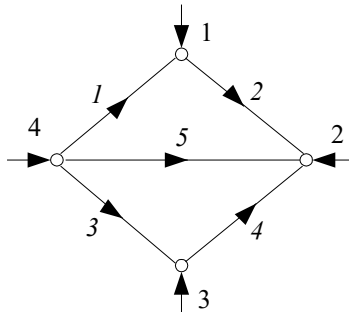


Рис. 2.10. Приклад графа електричної мережі

Помножимо цю матрицю на матрицю струмів віток, матимемо:

$$\mathbf{M} \cdot \underline{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ -\underline{I}_2 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 \\ -\underline{I}_3 + \underline{I}_4 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \\ \underline{J}_4 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Отримане співвідношення є першим законом Кірхгофа в матричній формі запису:

$$\mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{J}}. \quad (2.12)$$

Оскільки до вузлів графа електричної мережі ще приєднані інші поперечні вітки з ЕРС і провідністю шунта, то задаючий струм в (2.12) включає також струми даних віток:

$$\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}_Г - \underline{\mathbf{J}}_Н - \underline{\mathbf{J}}_У. \quad (2.13)$$

де  $\underline{\mathbf{J}}_Г$  – матриця струмів генерації (вітки з ЕРС), які визначаються через потужності генерації;  $\underline{\mathbf{J}}_Н$  – матриця струмів навантаження, які визначаються через потужності навантаження (має зворотний напрям – від вузла);  $\underline{\mathbf{J}}_У$  – матриця струмів в провідності шунтів, які залежать від провідності шунта з матриці  $\underline{\mathbf{Y}}_N$  і напруга у вузлі з матриці  $\underline{\mathbf{U}}$  (також має зворотний напрям – від вузла, оскільки моделює споживання потужності).

Помножимо транспоновану матрицю з'єднань  $\underline{\mathbf{M}}_t$  на матрицю вузлової напруги, отримаємо:

$$\mathbf{M}^T \cdot \underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{U}_1 + \underline{U}_4 \\ \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \\ -\underline{U}_3 + \underline{U}_4 \\ -\underline{U}_2 + \underline{U}_3 \\ -\underline{U}_2 + \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \underline{U}_1 \\ \Delta \underline{U}_2 \\ \Delta \underline{U}_3 \\ \Delta \underline{U}_4 \\ \Delta \underline{U}_5 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

або

$$\Delta \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^T \cdot \underline{\mathbf{U}}. \quad (2.15)$$

За законом Ома в матричній формі запису маємо:

$$\Delta \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}}_B \cdot \underline{\mathbf{I}} \quad (2.16)$$

або

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Z}}_B^{-1} \cdot \Delta \underline{\mathbf{U}}. \quad (2.17)$$

Підставимо в (2.12) вираз для матриці струмів віток (2.17) і потім (2.15), отримаємо:

$$\mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{Z}}_B^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{J}}. \quad (2.18)$$

Введемо позначення:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{Z}}_B^{-1} \cdot \mathbf{M}^T, \quad (2.19)$$

тоді (2.18) набуде вигляду:

$$\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{J}}. \quad (2.20)$$

Отримане співвідношення є рівнянням вузлової напруги (потенціалів) в матричній формі запису. Матрицю  $\underline{\mathbf{Y}}$  називають *матрицею вузлової провідності* електричної мережі. Розглянемо

структуру цієї матриці, для чого виконаємо матричні перемноження в (2.19).

Спочатку перемножимо перші дві матриці (2.19):

$$\mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{Z}}_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_3} \\ \frac{1}{\underline{Z}_4} \\ \frac{1}{\underline{Z}_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\underline{Z}_1} & \frac{1}{\underline{Z}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\underline{Z}_2} & 0 & -\frac{1}{\underline{Z}_4} & -\frac{1}{\underline{Z}_5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_4} & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_3} & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_5} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Отриману матрицю помножимо справа на матрицю  $\mathbf{M}^T$ . В результаті отримаємо:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right) & -\frac{1}{\underline{Z}_2} & 0 & -\frac{1}{\underline{Z}_1} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \left( \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \right) & -\frac{1}{\underline{Z}_4} & -\frac{1}{\underline{Z}_5} \\ 0 & -\frac{1}{\underline{Z}_4} & \left( \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4} \right) & -\frac{1}{\underline{Z}_3} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_1} & -\frac{1}{\underline{Z}_5} & -\frac{1}{\underline{Z}_3} & \left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Із отриманої матриці можна зробити наступні висновки про обчислення її елементів.

1. Елементи, розташовані на головній діагоналі матриці, обчислюються як сума провідності віток, відповідних до певного вузла:

$$\underline{Y}_{ii} = \sum_{j \in \omega_i} \frac{1}{\underline{Z}_j}, \quad (2.23)$$

де  $\underline{Y}_{ii}$  – діагональний елемент матриці  $\underline{Y}$ ;  $\underline{Z}_j$  – опір  $j$ -й вітки;  $\omega_i$  – безліч номерів вузлів, пов'язаних з  $i$ -м вузлом.

2. Недіагональні елементи дорівнюють провідностям віток, ім'я кожною з яких складається з номерів вузлів, відповідних номеру рядка і номеру стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент, і взятих з протилежним знаком. Матриця  $\underline{Y}$  є симетричною матрицею.

$$\underline{Y}_{ij} = -\frac{1}{\underline{Z}_{ij}}. \quad (2.24)$$

Запишемо рівняння вузлової напруги для вузла з номером  $i$ :

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{i1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2}\underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{ii}\underline{U}_i + \dots + \underline{Y}_{in}\underline{U}_n &= \underline{J}_i = \\ &= \underline{J}_{\Gamma i} - \underline{J}_{Hi} - \underline{J}_{Yi} = \underline{J}_{\Gamma i} - \underline{J}_{Hi} - \underline{Y}_{Ni}\underline{U}_i. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Об'єднавши подібні члени, отримаємо, що до діагональних елементів матриці  $\underline{Y}$  увійдуть додаткові доданки  $\underline{Y}_{Ni}$ :

$$\underline{Y}_{ii} = \sum_{j \in \omega_i} \frac{1}{\underline{Z}_j} + \underline{Y}_{Ni}, \quad (2.26)$$

тобто, діагональний елемент буде рівним сумі провідності всіх відповідних до  $i$ -го вузла віток, включаючи поперечну вітку – шунт  $\underline{Y}_{Ni}$ .

Задаючі струми вузлів в (2.20) складатимуться тільки із струмів генерації і струмів навантаження.

У разі відсутності зв'язків з нейтральною площиною  $N$  система рівнянь (2.20) не має жодного розв'язку, оскільки в цьому випадку визначник матриці  $\underline{Y}$  рівний нулю. Сума всіх задаючих струмів в такій мережі рівна нулю:

$$\sum_{i=1}^n J_i = 0. \quad (2.27)$$

Отже, серед всіх  $n$  вузлів можна виділити вузол, наприклад з номером  $n$ , струм в якому рівний:

$$J_n = -\sum_{i=1}^{n-1} J_i. \quad (2.28)$$

Для рівнянь вузлової напруги це означає, що одне рівняння зайве, тобто, залежить від решти рівнянь і може бути отримане через суму

решти інших рівнянь. Оскільки струм в цьому вузлі може бути отриманий з балансу струмів в мережі (2.28), то його називають *балансуючим*. Звичайно це шини потужної електростанції або системи.

Отже, з системи (2.20) виключається одне рівняння і тоді виходить система незалежних лінійних рівнянь порядку  $n-1$ . Проте, оскільки кількість невідомої напруги як і раніше рівне  $n$ , в одному з вузлів слід задати напругу за величиною і фазі так, щоб уся напруга обчислювалася щодо цієї відомої напруги. Такий вузол в мережі називається *базисним*. Зазвичай фазу напруги базисного вузла приймають рівною нулю, тобто, вектор напруги базисного вузла суміщають з дійсною віссю. Решта вузлів називає *незалежними* вузлами.

У багатьох випадках балансуючий вузол і базисний вузол суміщають, і надалі вважатимемо, що це один і той же вузол.

Отже, з виключенням рівняння для базисного балансуючого вузла з номером  $n$  матимемо систему рівнянь (2.20) з кількістю рівнянь  $n-1$ , проте в ці рівняння входить доданок із заданою напругою базисного вузла.

Змінимо номер базисного балансуючого вузла. Нехай його номер є 0 (нуль). Тоді рівняння (2.20) матиме наступний вигляд:

$$\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = \underline{\mathbf{J}}, \quad (2.29)$$

де  $\underline{\mathbf{Y}}_0$  – матриця провідності віток, яка пов'язує незалежні вузли з базисним балансуючим вузлом;  $U_0$  – напруга базисного вузла (скаляр).

Матриця вузлової провідності в (2.29) має порядок  $n-1$  і определется через матрицю інцидентий  $\mathbf{M}$ , в якій немає одного рядка, відповідного балансуючому вузлу.

Необхідно відмітити, що у всіх рівняннях, де одночасно присутні струми і напруга (2.16), (2.17), (2.18), (2.20), (2.25) і (2.29), напруга дана у фазних значеннях, хоча індекс (буква «ф») для спрощення не записувався. Ці ж рівняння можна вважати записаними і для лінійної напруги, проте струми будуть збільшеними в  $\sqrt{3}$  раз, і для обчислення дійсних струмів їх слід зменшувати в  $\sqrt{3}$ .

## 2.5. Форми лінійних рівнянь усталеного режиму та їх розв'язок

Відомими незалежними змінними в рівняннях усталеного режиму можуть бути задаючі струми вузлів і напруга базисного вузла. У цьому випадку розв'язок рівняння (2.29) може бути записане у вигляді:

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Y}}^{-1} (\underline{\mathbf{J}} - \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0) = \underline{\mathbf{Z}} (\underline{\mathbf{J}} - \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0). \quad (2.30)$$

де  $\underline{Z}$  – матриця вузлових опорів.

Чисельний розв'язок системи рівнянь (2.29) виконується методом Гауса або іншим методом розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

У разі, коли відомі потужності у вузлах мережі – задаючі потужності  $\underline{S}_i$ , струми можна обчислити наближено через номінальну

напругу  $\underline{J}_i = \frac{\underline{S}_i^*}{\sqrt{3}U_{ном}}$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ). Задаючі потужності так само, як і

струми, складаються з потужностей генерації та потужностей навантаження:

$$\underline{S} = \underline{S}_Г - \underline{S}_Н. \quad (2.31)$$

Інший наближений підхід пов'язаний з представленням задаючих струмів через напругу і провідність  $\underline{J}_i = \underline{U}_i \underline{Y}_{Si}$ , де  $\underline{Y}_{Si}$  – провідність генерації і/або навантаження (схема заміщення). Для  $i$ -го вузла маємо:

$$\underline{Y}_{i1} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2} \underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{ii} \underline{U}_i + \dots + \underline{Y}_{in-1} \underline{U}_{n-1} + \underline{Y}_{i0} U_0 = \underline{J}_i = \underline{Y}_{Si} \underline{U}_i. \quad (2.32)$$

Об'єднавши подібні члени, отримаємо:

$$\underline{Y}_{i1} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2} \underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{ii} \underline{U}_i + \dots + \underline{Y}_{in-1} \underline{U}_{n-1} + \underline{Y}_{i0} U_0 = 0, \quad (2.33)$$

де в елемент  $\underline{Y}_{ii}$  входить провідність  $\underline{Y}_{Si}$ . Знак перед цією провідністю залежить від того, яка потужність переважає у вузлі: плюс, якщо навантаження, і мінус, якщо генерація. У матричній формі запису:

$$\underline{Y} \cdot \underline{U} + \underline{Y}_0 U_0 = 0. \quad (2.34)$$

Розв'язок матричного рівняння (2.34) запишеться у вигляді:

$$\underline{U} = -\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{Y}_0 U_0 = -\underline{Z} \cdot \underline{Y}_0 U_0. \quad (2.35)$$

Комплексну матрицю вузлової провідності  $\underline{Y}$  іноді представляють в блоковій формі через її дійсну  $\mathbf{G}$  та уявну  $\mathbf{B}$  складові, і тоді система рівнянь (2.34) стає системою з дійсними величинами:

$$(\mathbf{G} + j\mathbf{B})(\mathbf{U}' + j\mathbf{U}'') + (\mathbf{G}_0 + j\mathbf{B}_0)U_0 = 0. \quad (2.36)$$

Після перемножування двочленів в (2.35) матимемо:

$$(\mathbf{G} \cdot \mathbf{U}' - \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}'') + j(\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}' + \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}'') + \mathbf{G}_0 U_0 + j\mathbf{B}_0 U_0 = 0. \quad (2.37)$$

Прирівняємо окремо дійсні та уявні частини отриманого рівняння і отримаємо два матричні рівняння з дійсними величинами:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}' - \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}'' + \mathbf{G}_0 U_0 &= 0, \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}' + \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}'' + \mathbf{B}_0 U_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

або в компактній формі запису:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{U}'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{pmatrix} U_0 = 0. \quad (2.39)$$

Розв'язок (2.39) запишеться у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{U}'' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{pmatrix} U_0. \quad (2.40)$$

## 2.6. Нелінійні рівняння усталеного режиму

Оскільки у багатьох випадках розрахунки ведуться при заданих потужностях навантажень і генерації, то їх слід ввести в рівняння усталеного режиму.

Потужність у трифазній мережі в симетричних режимах виражається сумарною потужністю всіх трьох фаз:

$$\underline{S}_i = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_i \underline{J}_i^*. \quad (2.41)$$

У матричній формі цей вираз можна записати, використовуючи операцію діагоналізації матриці  $\underline{\mathbf{U}}$ . Матриця  $\text{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\}$  є квадратною матрицею, в якій елементи матриці  $\underline{\mathbf{U}}$  розташовані на головній діагоналі, а решта елементів рівна нулю. Тоді:

$$\underline{\mathbf{S}} = \sqrt{3} \cdot \text{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*. \quad (2.42)$$

Рівняння усталеного режиму  $\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = \underline{\mathbf{J}}$  записано для фазних струмів і напруги. Помножимо обидві частини цього рівняння на  $\sqrt{3}$  і застосуємо до величин цього рівняння операцію сполучення, отримаємо:

$$\underline{\mathbf{Y}}^* \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\mathbf{Y}}_0^* U_0 = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*. \quad (2.43)$$

У лівій частині цього рівняння після множення на  $\sqrt{3}$  напруга стала лінійною.

Помножимо ліву і праву частини рівняння (2.43) зліва на матрицю  $\text{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\}$ , отримаємо:

$$\text{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\} \left( \underline{\mathbf{Y}}^* \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\mathbf{Y}}_0^* U_0 \right) = \sqrt{3} \cdot \text{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\} \underline{\mathbf{J}}^* = \underline{\mathbf{S}}. \quad (2.44)$$

Система рівнянь (2.44) є системою нелінійних рівнянь усталеного режиму. Залежно від форми представлення комплексних величин застосовують дві основні форми цієї системи рівнянь.

Спочатку розглянемо алгебраїчну форму запису. Для  $i$ -го вузла маємо:

$$(U_i' + jU_i'') \sum_{j=0}^{n-1} (G_{ij} - jB_{ij})(U_j' - jU_j'') = P_i + jQ_i. \quad (2.45)$$

Після перемножування двочленів і розділення рівняння на два рівняння з дійсними величинами отримаємо систему  $2(n-1)$  алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} U_i' \sum_{j=0}^{n-1} (G_{ij}U_j' - B_{ij}U_j'') + U_i'' \sum_{j=0}^{n-1} (B_{ij}U_j' + G_{ij}U_j'') &= P_i, \\ -U_i' \sum_{j=0}^{n-1} (B_{ij}U_j' + G_{ij}U_j'') + U_i'' \sum_{j=0}^{n-1} (G_{ij}U_j' - B_{ij}U_j'') &= Q_i. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Де  $i = 1, \dots, n-1$ .

Тригонометрична форма нелінійних рівнянь усталеного режиму може бути отримана, якщо комплексні величини в рівнянні (2.44) записати у вигляді:

$$\underline{U}_i = U_i e^{j\delta_i}, \quad \underline{Y}_{ij}^* = Y_{ij} e^{-j\psi_{ij}}, \quad \underline{U}_j^* = U_j e^{-j\delta_j}. \quad (2.47)$$

Тоді

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j e^{j(\delta_i - \psi_{ij} - \delta_j)} = P_i + jQ_i. \quad (2.48)$$

Рівняння (2.48) в тригонометричній формі запишеться як:

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j (\cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) + j \sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij})) = P_i + jQ_i, \quad (2.49)$$

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j (\cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) + j \sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij})) = P_i + jQ_i, \quad (2.50)$$

і після розділення на два дійсні рівняння:

$$\begin{aligned} U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) &= P_i, \\ U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) &= Q_i. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Зазвичай замість кута  $\psi_{ij}$  використовують доповнюючий до  $90^\circ$  кут  $\alpha_{ij}$ .  $\alpha_{ij} = 90 - \psi_{ij}$ ,  $\psi_{ij} = 90 - \alpha_{ij}$ .

Тоді  $\cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) = \cos(\delta_i - \delta_j - 90^\circ + \alpha_{ij})$ , а з урахуванням парності функції косинус  $\cos(\delta_i - \delta_j - 90^\circ + \alpha_{ij}) = \cos(90^\circ - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij})$ . Маючи на увазі, що  $\cos(90^\circ - \beta) = \sin(\beta)$ , отримаємо  $\cos(90^\circ - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij}) = \sin(\delta_i - \delta_j + \alpha_{ij})$ .

Аналогічно  $\sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) = \sin(\delta_i - \delta_j - 90^\circ + \alpha_{ij}) = -\sin(90^\circ - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij})$ , через непарність функції синус. Оскільки  $\sin(90^\circ - \beta) = \cos(\beta)$ , отримаємо

$-\sin(90^\circ - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij}) = -\cos(\delta_i - \delta_j + \alpha_{ij})$ . Підставляючи отримані співвідношення в (2.51), матимемо:

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \sin(\delta_i - \delta_j + \psi_{ij}) = P_i,$$

$$-U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \cos(\delta_i - \delta_j + \psi_{ij}) = Q_i. \quad (2.52)$$

У отриманій системі нелінійних рівнянь усталеного режиму шуканими змінними є модулі і фазові кути напруги, тоді як в рівняннях (2.46) невідомими є дійсна та уявна складові напруги.

## 2.7. Моделювання генераторних вузлів електричної мережі

Генераторними вузлами називають вузли, в яких генерується активна потужність. Реактивна потужність, як правило, також генерується у вузлах. Генераторні вузли – це шини електричних станцій або шини могутньої системи, схема якої не входить в модель для розрахункової схеми. Моделюються генераторні вузли по-різному:

- ✓ так само, як і вузол навантаження – постійними значеннями активної та реактивної потужності, але з протилежним знаком;
- ✓ постійним значенням активної потужності та фіксованим значенням модуля напруги у вузлі. Реактивна потужність не відома і підлягає розрахунку;
- ✓ генераторний вузол – це базисний та балансуєчий вузол одночасно. Активна та реактивна потужності вузла підлягають обчисленню;
- ✓ генераторний вузол – це базисний вузол, але з відомими значеннями активної та реактивної потужності – задані всі чотири незалежні параметри режиму –  $P, Q, U, \delta$ ;
- ✓ генераторний вузол – це балансуєчий вузол, але напруга в ньому не відома ні за модулем, ні за фазою. Підлягають визначенню усі чотири незалежні параметри режиму –  $P, Q, U, \delta$ .

Під час фіксації активної потужності та модуля напруги зазвичай в рівняння сталого режиму входить рівняння для активної потужності вузла (2.46) і рівняння вигляду:  $U_i^2 = U_i'^2 + U_i''^2$ , де  $U_i$  задане, а  $U_i'$  і  $U_i''$  підлягають визначенню.

У тих випадках, коли для одного з вузлів потрібно задати все чотири незалежні параметри режиму –  $P, Q, U, \delta$  (базисний вузол), то в мережі повинен з'явитися вузол, у якому не відомий жоден з цих

чотирьох параметрів – балансуєчий вузол. Відбувається розділення балансуєчого та базисного вузлів.

Форма рівнянь усталеного режиму змінюється, а саме – перебудовується матриця вузлової провідності. Так, наприклад, якщо для графа мережі на рис. 2.10 базисним став вузол 2, а балансуєчим залишився вузол 0, то матриця  $\underline{Y}$  приймає вигляд:

$$\underline{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right) & -\frac{1}{\underline{Z}_1} & 0 \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_5} & -\frac{1}{\underline{Z}_4} \\ 0 & -\frac{1}{\underline{Z}_3} & \left(\frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4}\right) \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{Вузли без базисного вузла}} \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Вузли без} \\ \text{балансуєчого} \\ \text{узла} \end{matrix}$$

## 2.8. Еквівалентування схем електричних мереж

Еквівалентування широко застосовується в розрахунках режимів складних електроенергетичних систем. Так, розглядаючи режими роботи окремої ЕЕС, всі сусідні енергосистеми представляємо їх еквівалентами, отриманими на підставі так званих критеріїв еквівалентності. Кількість таких критеріїв і їх зміст залежать від завдання, стосовно якого виконується еквівалентування.

Розглянемо ЕЕС, яка складається з двох підсистем: підсистеми I, яка не підлягає перетворенню, і підсистеми II, яку слід перетворити в еквівалент (рис. 2.12, а).

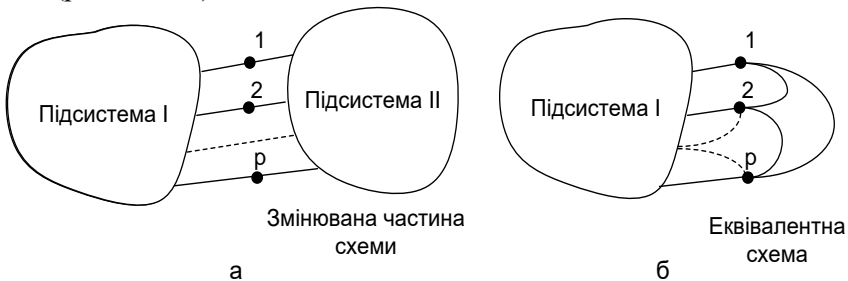


Рис. 2.12. Умовне зображення ЕЕС з еквівалентною частиною:  
 а – до еквівалентування; б – після еквівалентування

Вузли, в яких з'єднуються дві підсистеми, називаються вузлами приєднання, а вітки, які приходять до них з боку частини схеми, яка зберігається – вітками приєднання. Після перетворення підсистеми  $\Pi$  в ній можуть зберегтися деякі вузли, які мають принципове значення для режимів системи, або не зберегтися жодного вузла, як на рис. 2.12, б, і вся схема еквівалента є багатокутником, побудованим на вузлах приєднання  $1, 2, \dots, p$ . Слід зазначити, що еквівалент має також поперечні вітки на нейтральну площину системи як пасивні – провідність, так і активні – задаючі потужності навантаження і генерації (на рис. 2.12 не показані).

Розраховані напруги у вузлах приєднання еквівалента повинні бути рівні в початковій схемі та після її перетворення.

Потоки потужності у вітках приєднання еквівалента повинні бути рівні в початковій схемі та після її перетворення.

$$\begin{aligned} \underline{U}_j &= \underline{U}_j^3, \quad j \in a, \\ \underline{S}_{ij} &= \underline{S}_{ij}^3, \quad i \in b. \end{aligned} \tag{2.53}$$

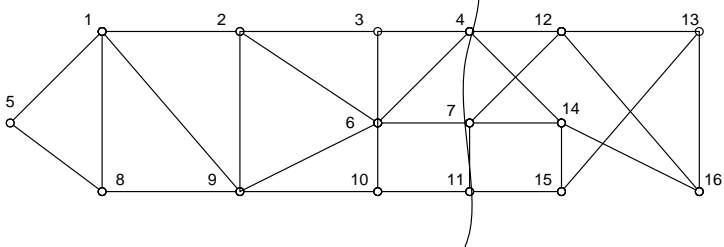
де  $a$  – безліч номерів вузлів приєднання;  $b$  – безліч номерів вузлів у неперетворюваній частині мережі, які мають суміжну вітку з вузлами приєднання.

Добитися виконання критеріїв еквівалентності можна, як правило, для якогось одного режиму роботи електричної системи.

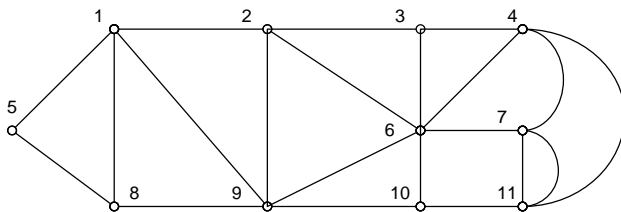
Зміна режиму вимагає і зміни (корегування) еквівалента.

Розглянемо приклад еквівалентування частини електричної схеми мережі (рис. 2.13, а). У даному прикладі: множина номерів вузлів приєднання  $(a) = \{4, 7, 11\}$ ; множина номерів вузлів з нееквівалентованої частини схеми, суміжних з вузлами приєднання  $(b) = \{3, 6, 10\}$ .

Вузли, які виключаються:  $\{12, 13, 14, 15, 16\}$ .



а)



б)

Рис. 2.13. Граф мережі з еквівалентною частиною:  
а) – до еквівалентування; б) – після еквівалентування

У даному прикладі в еквіваленті не збережено жодного вузла і граф еквівалента є багатокутником, який спирається вершинами на вузли приєднання (рис. 2.14).

За своєю суттю – це послідовно-паралельні перетворення, а також перетворення зірки в багатокутник і назад. Формалізується виключенням змінних методом Гауса.

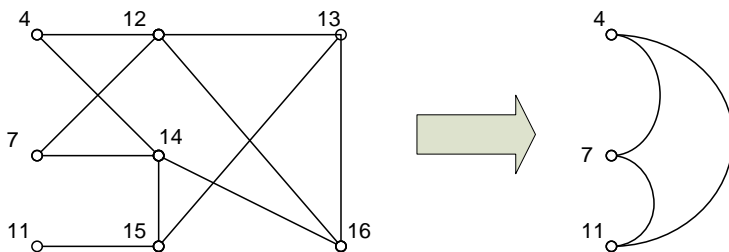


Рис. 2.14. Еквівалентування схеми в багатокутник

Під час побудови моделі еквівалента, який адекватно представляє перетворену частину електричної системи для множини режимів, потрібний облік нелінійності рівнянь усталеного режиму. У цьому випадку, а також у випадках еквівалентування за допомогою розрахунку провідності навантаження через номінальну напругу немінуча похибка моделювання.

Мінімізація похибки може бути виконана пошуком мінімуму деякої цільової функції:

$$C_1(\mathbf{R}) = \sum_{j=1}^m \left[ \left( y'_j - y''_j{}^e(\mathbf{R}) \right) / y'_j \right]^2, \quad (2.54)$$

де  $y'_j$  і  $y''_j{}^e$  – компоненти вектора вихідних змінних початкової і еквівалентної моделей, які повинні відтворюватися правильно;  $\mathbf{R}$  – вектор параметрів еквівалентної моделі;  $m$  – кількість вихідних змінних.

**Приклад.** Для схеми на рис 2.15 виконаємо виключення вузлів з номером 4 і 5.

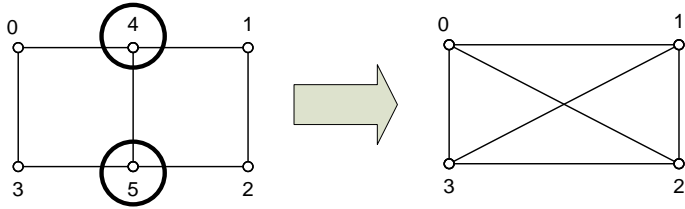


Рис. 2.15. Приклад еквівалентування схеми мережі

Розділимо на блоки матриці в лінійних рівняннях усталеного режиму (2.28) – виділимо блоки для вузлів, які зберігаються і виключаються.

Позначимо вектор задаючих струмів вузлів, які зберігаються:

$$\underline{\mathbf{J}}_3 = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \end{pmatrix}, \text{ а вектор струмів вузлів, які виключаються } \underline{\mathbf{J}}_B = \begin{pmatrix} \underline{J}_4 \\ \underline{J}_5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідно і для напруги } \underline{\mathbf{U}}_3 = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{U}}_B = \begin{pmatrix} \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \end{pmatrix}.$$

Рівняння вузлової напруги для електричної мережі:

$$\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = \underline{\mathbf{J}}$$

запишеться у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{33} & \underline{\mathbf{Y}}_{3B} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{B3} & \underline{\mathbf{Y}}_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}_3 \\ \underline{\mathbf{U}}_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{03} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{0B} \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{J}}_3 \\ \underline{\mathbf{J}}_B \end{pmatrix}.$$

Або в розширеній формі:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & 0 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{Y}_{14} & 0 \\ 0 & \underline{Y}_{25} \\ 0 & \underline{Y}_{35} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{Y}_{41} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_{52} & \underline{Y}_{53} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{Y}_{44} & \underline{Y}_{45} \\ \underline{Y}_{54} & \underline{Y}_{55} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{Y}_{01} \\ 0 \\ \underline{Y}_{03} \\ \underline{Y}_{04} \\ 0 \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \\ \underline{J}_4 \\ \underline{J}_5 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до правила множення матриць отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{33}\underline{\mathbf{U}}_3 + \underline{\mathbf{Y}}_{3B}\underline{\mathbf{U}}_B + \underline{\mathbf{Y}}_{03}U_0 \\ \underline{\mathbf{Y}}_{B3}\underline{\mathbf{U}}_3 + \underline{\mathbf{Y}}_{BB}\underline{\mathbf{U}}_B + \underline{\mathbf{Y}}_{0B}U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{J}}_3 \\ \underline{\mathbf{J}}_B \end{pmatrix},$$

Звідки отримується система двох матричних рівнянь:

$$\underline{Y}_{33}\underline{U}_3 + \underline{Y}_{3B}\underline{U}_B + \underline{Y}_{03}U_0 = \underline{J}_3,$$

$$\underline{Y}_{B3}\underline{U}_3 + \underline{Y}_{BB}\underline{U}_B + \underline{Y}_{0B}U_0 = \underline{J}_B.$$

Виключимо з цієї системи  $\underline{U}_B$  для чого помножимо праву та ліву частини другого рівняння на матрицю  $\underline{Y}_{BB}^{-1}$  і отримаємо:

$$\underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{Y}_{B3}\underline{U}_3 + \underline{U}_B + \underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{Y}_{0B}U_0 = \underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{J}_B,$$

звідки слідує

$$\underline{U}_B = \underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{J}_B - \underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{Y}_{B3}\underline{U}_3 - \underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{Y}_{0B}U_0.$$

Підставляючи тепер отриманий вираз в рівняння  $\underline{Y}_{33}\underline{U}_3 + \underline{Y}_{3B}\underline{U}_B + \underline{Y}_{03}U_0 = \underline{J}_3$  знаходимо:

$$\underline{Y}_{33}\underline{U}_3 + \underline{Y}_{3B}\left(\underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{J}_B - \underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{Y}_{B3}\underline{U}_3 - \underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{Y}_{0B}U_0\right) + \underline{Y}_{03}U_0 = \underline{J}_3,$$

звідки

$$\left(\underline{Y}_{33}\underline{U}_3 - \underline{Y}_{3B}\underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{Y}_{B3}\right)\underline{U}_3 + \left(\underline{Y}_{03} - \underline{Y}_{3B}\underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{Y}_{0B}\right)U_0 = \underline{J}_3 - \underline{Y}_{3B}\underline{Y}_{BB}^{-1}\underline{J}_B$$

або

$$\underline{Y}'\underline{U} + \underline{Y}'_0U_0 = \underline{J}'$$

і в розгорненій формі

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}'_{11} & \underline{Y}'_{12} & \underline{Y}'_{13} \\ \underline{Y}'_{21} & \underline{Y}'_{22} & \underline{Y}'_{23} \\ \underline{Y}'_{31} & \underline{Y}'_{32} & \underline{Y}'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{Y}'_{01} \\ \underline{Y}'_{02} \\ \underline{Y}'_{03} \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} \underline{J}'_1 \\ \underline{J}'_2 \\ \underline{J}'_3 \end{pmatrix}.$$

Отримана система рівнянь описує нову схему, де по відношенню до початкової відсутні два вузли 4 і 5. При цьому в даному прикладі змінилися всі параметри мережі та задаючі струми вузлів.

Еквівалентування частини ЕЕС зазвичай виконується не для одного, а для ряду режимів неперетворюваної підсистеми, тому задоволення критеріїв еквівалентності повинне забезпечити тотожність режиму вузлів і віток приєднання початкової та перетвореної схем не тільки для початкового, але і для всіх інших аналізованих режимів.

## 2.9. Моделювання схем електричних мереж за допомогою чотириполосників

Частина електричного кола, яка розглядається у відношенні до двох пар її виводів, називається чотириполосником. Раніше тут

використовувалося представлення чотириполюсником ЛЕП і трансформаторів, проте існує можливість представлення у вигляді чотириполюсника і з'єднань цих елементів – схем електричних мереж.

Моделювання чотириполюсником зручно застосовувати тоді, коли предметом дослідження є струми (потоки потужності) і напруга на його виводах, а не струми і напруга всередині самого чотириполюсника.

За властивістю лінійності елементів чотириполюсники розділяють на лінійні та нелінійні.

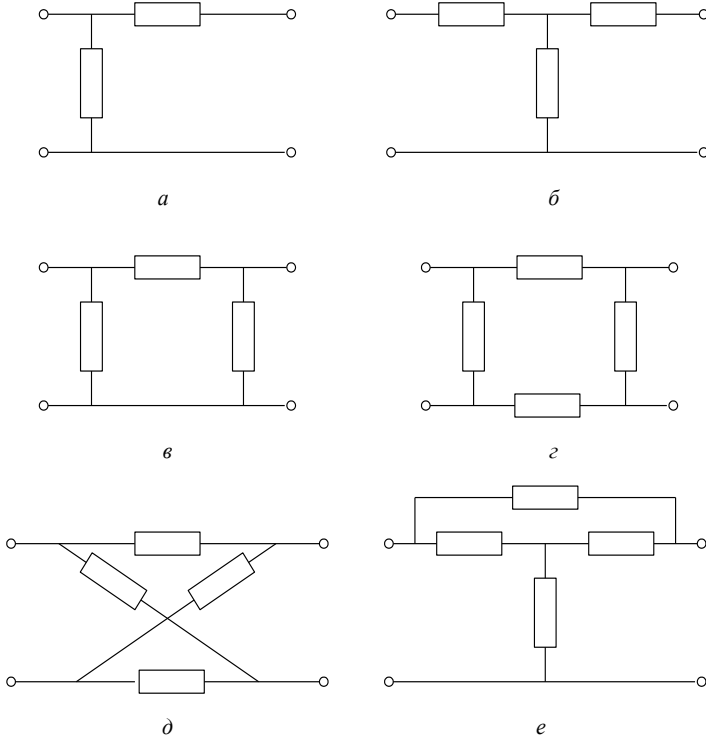


Рис. 2.16. Схеми заміщення чотириполюсника

Схема заміщення (внутрішня схема з'єднань) чотириполюсника може бути: Г-подібна (рис. 2.16,а), Т-подібна (рис. 2.16, б), П-подібна (рис. 2.16, в), чотирьохплечова (рис. 2.16, г), П-подібна мостова (рис. 2.16, д), Т-подібна мостова (рис. 2.16, е) та ін.

Чотириполюсник називається *активним*, якщо він усередині містить джерела електричної енергії, і пасивним, якщо усередині нього немає джерел енергії.

Розрізняють чотириполіусники симетричні та несиметричні. *Симетричним* називають чотириполіусник, коли зміна місць його входу і виходу не змінює струмів і напруги в колі, з яким він сполучений.

Основний сенс теорії чотириполіусників полягає в тому, що, користуючись узагальненими параметрами чотириполіусників, можна знаходити струми та напругу на вході і виході чотириполіусника.

Із безлічі з'єднань чотириполіусників в електричних мережах застосовуються тільки два: каскадне (рис. 2.17, а) і паралельне (рис. 2.17, б).

Електрична мережа, яка має в загальному випадку множину вузлів і віток, може розглядатися як сукупність чотириполіусників, сполучених за певною схемою. Відмінною рисою чотириполіусників, які моделюють елементи електричної мережі, є наявність у них одного загального полюса – нейтральної площини, тобто, по суті вони можуть вважатися трьохполіусниками. Складність схеми з'єднання електричної мережі та нелінійність, яка вноситься навантаженнями і генераторами, не дозволяють широко використовувати чотириполіусники для моделювання електричних мереж. Можливі два принципово різних підходів до використання чотириполіусників:

- моделювання окремих елементів або їх каскадно-паралельного з'єднання за відсутності в них джерела енергії або навантаження, заданих нелінійними математичними моделями;
- наближене представлення частини електричної мережі за наявності нелінійних моделей генерації або навантаження у вигляді еквівалентного чотириполіусника.

Останній підхід розповсюджується на моделювання електричних мереж за допомогою багатополіусників.

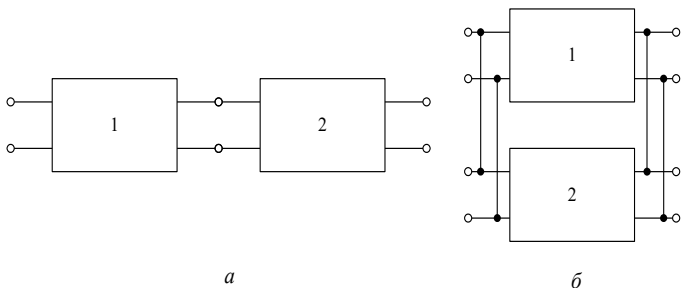


Рис. 2.17. З'єднання чотириполіусників:  
а – каскадне; б – паралельне

Розглянемо перший підхід. Для отримання параметрів еквівалентного (результуючого) чотириполіусника, складеного з простих

чотириполіусників, параметри яких відомі, зручно користуватися матричною формою запису:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Запис рівнянь чотириполіусника (2.54) називається А-формою запису. Інші форми рівнянь чотириполіусника можуть бути отримані з (2.55) виразом у лівій частині тих або інших пар струмів і напруги. Всього можливі шість форм запису – кількість поєднань з чотирьох по два. Можна виділити ще дві форми запису: це Y-форма (2.56) і Z-форма (2.57).

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{1,1} & \underline{Y}_{1,2} \\ \underline{Y}_{2,1} & \underline{Y}_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{Y} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{1,1} & \underline{Z}_{1,2} \\ \underline{Z}_{2,1} & \underline{Z}_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{Z} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

При каскадному з'єднанні чотириполіусників (рис. 2.17, а) параметри еквівалентного чотириполіусника виходять перемноженням матриць коефіцієнтів чотириполіусників у А-формі (2.55), а при паралельному з'єднанні (рис. 2.17, б) – складанням матриць коефіцієнтів чотириполіусників у Y-формі (2.56):

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \underline{A}_2, \quad (2.58)$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2. \quad (2.59)$$

## 2.10. Використання чотириполіусників для еквівалентування схем електричних мереж

У деяких випадках для еквівалентування схем електричних мереж зручно використовувати чотириполіусники.

Розглянемо прості приклади спрощення електричних мереж за допомогою чотириполіусників.

Спочатку розглянемо з'єднання двох елементів: ліній електропередач і трансформатора. На рис. 2.18 зображено дві схеми з двома елементами. На першій схемі є дві лінії, а на другій лінія і трансформатор. У обох випадках моделі мереж з чотириполіусниками мають їх каскадне з'єднання і еквівалентний чотириполіусник має матрицю коефіцієнтів, яка обчислюється за виразом:

$$\underline{A}_E = \underline{A}_I \underline{A}_{II}. \quad (2.60)$$

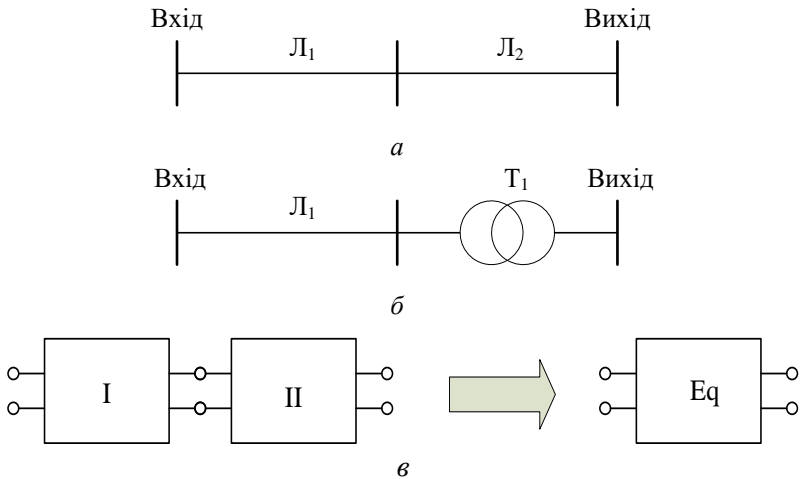


Рис. 2.18. Схема мережі з каскадним з'єднанням двох елементів: а – дві лінії; б – лінія і трансформатор; в – каскадне з'єднання і еквівалентування чотириполосників

Далі для простоти внаслідок того, що один полюс на вході і на виході чотириполосника в схемах електричних систем ототожнюють з нейтраллю трифазної системи, чотириполосники, які моделюють елементи електричних мереж, позначатимемо, як на рис. 2.19.

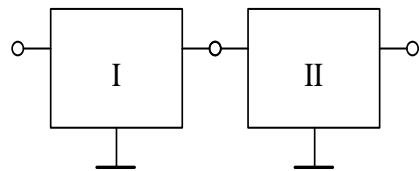


Рис. 2.19. Спрощене позначення схем з чотириполосників в електричних мережах

У схемі з паралельними з'єднаннями елементів будемо завжди допускати з'єднання однотипних елементів: дві чи більше паралельно включених лінії, два чи більше паралельно включених трансформатора і т. п. Коефіцієнти еквівалентного чотириполосника в цьому випадку визначається через матриці провідностей рівнянь чотириполосника, записаних в  $Y$ -формі (2.56).

Розглянемо приклад схеми, яка містить електричне навантаження, задане потужністю (рис. 2.20).

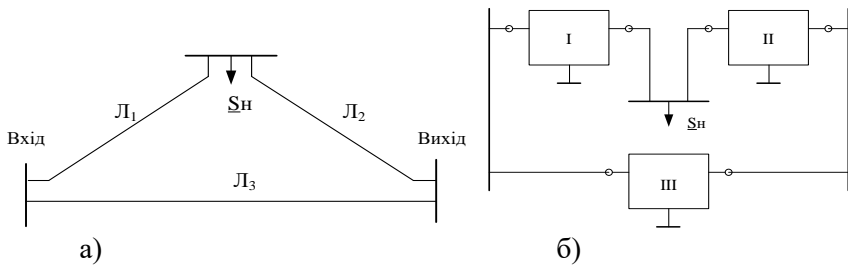


Рис. 2.20. Схема мережі з проміжним навантаженням:  
а) – схема електричної мережі; б) – модель мережі з чотириполусниками

Чотириполусники I і II не можна вважати сполученими касадно; є ще один елемент – навантаження. Розглянемо цей фрагмент мережі окремо (рис. 2.21).

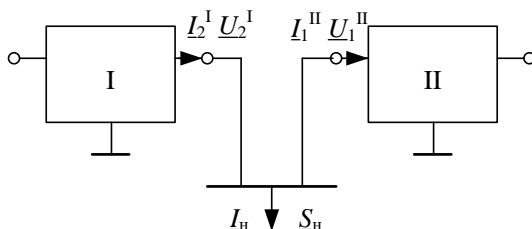


Рис. 3.21. Фрагмент моделі мережі з проміжним навантаженням

Запишемо відомі співвідношення для шин навантаження:

$$\underline{U}_1^{\text{II}} = \underline{U}_2^{\text{I}} = \underline{U}_{\text{H}}, \quad (2.61)$$

$$\underline{I}_1^{\text{II}} = \underline{I}_2^{\text{I}} - \underline{J}_{\text{H}}.$$

Струм навантаження  $\underline{J}_{\text{H}} = \frac{\underline{S}_{\text{H}}^*}{\sqrt{3} \cdot \underline{U}_{\text{H}}^*}$  при підстановці його в (2.61)

робить ці вирази нелінійними.

Перейдемо до моделі електричного навантаження у вигляді схеми заміщення (рис. 2.22):

$$\underline{Y}_{\text{H}} = \frac{\underline{S}_{\text{H}}^*}{U_{\text{H}}^2} \approx \frac{\underline{S}_{\text{H}}^*}{U_{\text{НОМ}}^2}. \quad (2.62)$$

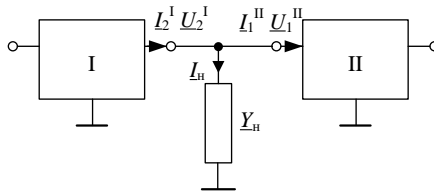


Рис. 2.22. Модель мережі з представленням проміжного навантаження схемою заміщення

і запишемо для неї рівняння чотириполосника:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2, \\ I_1 &= I_2 + I_Y = \underline{Y}_H \underline{U}_2 + I_2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

або

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_H & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ I_2 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

У результаті отримаємо каскадне з'єднання трьох чотириполосників (рис. 2.23).

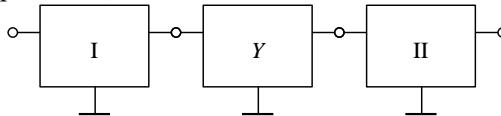


Рис. 2.23. Схема мережі з представленням проміжного навантаження чотириполосником

$$\underline{\mathbf{A}}_{Eq} = \underline{\mathbf{A}}_I \underline{\mathbf{A}}_Y \underline{\mathbf{A}}_{II} \quad (2.65)$$

У схемі мережі з двома проміжними навантаженнями аналогічно отримаємо (рис. 2.24).

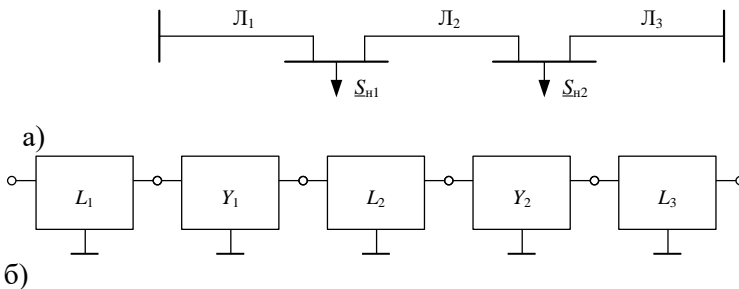


Рис. 2.24. Схема мережі з трьох ліній з проміжними навантаженнями:  
а – схема мережі; б – модель мережі з чотириполосниками

$$\underline{A}_{Eq} = \underline{A}_{L1} \underline{A}_{Y1} \underline{A}_{L2} \underline{A}_{Y2} \underline{A}_{L3} \quad (2.66)$$

Аналогічно навантаженню в схемі електричної мережі представляються і інші елементи, включені у вигляді шунта (поперечній вітці). До таких елементів відносяться компенсувальні пристрої та шунтуючі реактори.

Слід підкреслити, що шунтуючі елементи та навантаження, які можуть бути представлені схемою заміщення з лінійними елементами (опори та провідність не залежать від напруги або струму), не вносять похибки до еквівалентної моделі та є пасивними елементами мережі. Навантаження в електричних мережах, як правило, не можуть з достатньою точністю моделюватися схемами заміщення з постійними параметрами. За своєю суттю навантаження – це активний елемент мережі, хоча не є джерелом енергії, а є її споживачем. У більшості випадків навантаження задається постійною потужністю або статичними характеристиками, що вносить похибку при представленні їх у вигляді схем заміщення (опори та провідність залежать від напруги, прикладеної до них).

### **Питання для самоконтролю**

1. Як задається граф?
2. Який граф називається зв'язуючим?
3. Що називається деревом графа?
4. Як скласти першу матрицю інциденцій направленої графа?
5. Як скласти другу матрицю інциденцій направленої графа?
6. Як за допомогою графів моделюються елементи електричної мережі: лінія електропередачі, трансформатор?
7. Перерахуйте матриці параметрів схеми електричної мережі.
8. Як записується перший закон Кірхгофа в матричній формі?
9. Як записується система рівнянь вузлової напруги в матричній формі?
10. Як скласти матрицю вузлової провідності за схемою електричної мережі?
11. Який вузол схеми електричної мережі називається балансуєчим?
12. Який вузол схеми електричної мережі називається базисним?
13. Які існують форми запису лінійних рівнянь усталеного режиму?
14. Як отримати систему нелінійних рівнянь усталеного режиму електричної мережі?
15. Які вузли в схемі електричної мережі відносять до генераторних вузлів?

16. Які існують критерії еквівалентності початкової і еквівалентної схем електричних мереж?
17. Які форми запису рівнянь чотириполосників використовуються в розрахунках схем електричних мереж?

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Баженов В.А. Моделювання та оптимізація електроенергетичних та електромеханічних систем. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 69 с
2. Сегеда М. С., Олійник М. Й., Лисяк В. Г. Режими систем пересилання та споживання електричної енергії. Навчальний посібник / За заг. ред. проф. М. С. Сегеди. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2021. 304 с.
3. Математичне моделювання електроенергетичних систем в ринкових умовах: монографія / С. Є. Саух, А. В. Борисенко. К.: «Три К», 2020. 340 с.
4. Voropai Nikolai I., Stennikov Valery A. (eds.) Hierarchical Modeling of Energy Systems. Elsevier, 2023. 542 p.

## ГЛОСАРІЙ

### ***Автоматичне регулювання напруги і реактивної потужності***

– автоматична підтримка необхідних значень напруги і реактивної потужності шляхом дії на збудження синхронних електричних машин (синхронні і асинхронізовані генератори, синхронні компенсатори, синхронні двигуни) і інших джерел реактивної потужності (статичні компенсатори тиристорів, конденсаторні батареї), а також шляхом автоматичної зміни коефіцієнтів трансформації трансформаторів і автотрансформаторів.

***Багатополюсник*** – частина електричного кола, яка має більше двох виділених виводів.

***Вітка електричного кола*** – ділянка електричного кола, якою протікає один і той же електричний струм.

***Вузол базисний*** – вузол електричної мережі, вектор напруги якого береться за вісь відліку векторних величин параметрів режиму.

***Вузол балануючий*** – вузол електричної мережі, в якому вхідна потужність змінюється так, щоб зрівноважити суму потужностей решти всіх вузлів і втрат в мережі.

***Головний переріз електричного кола*** (графа електричного кола) – перетин електричного кола (графа електричного кола), який складається з віток зв'язку і лише однієї вітки дерева графа електричного кола.

***Граф електричного кола*** – графічне зображення електричного кола, в якому вітки електричного кола представлені відрізками, які називаються вітками графа, а вузли електричного кола – точками, які називаються вузлами графа.

***Граф направлений*** – граф електричного кола з вказівкою умовно-додатніх напрямів електричних струмів або напруги у вигляді відрізків із стрілками.

***Двигун асинхронний*** – асинхронна машина, яка працює в режимі двигуна.

***Електропередача*** – сукупність ліній електропередачі і підстанцій, призначена для передачі електричної енергії з одного району енергосистеми в іншій.

***Електроенергетична система*** – електрична частина енергосистеми і живлячі від неї приймачі електроенергії, об'єднані спільністю процесу виробництва, передачі, розподілу і споживання електроенергії.

***Зв'язок (в електричній мережі)*** – електричне з'єднання двох і більш за вузлів електричної мережі.

**Зв'язок ємнісний** – зв'язок електричних кіл за допомогою електричного поля в діелектрику.

**Зв'язок індуктивний** – зв'язок електричних кіл за допомогою магнітного поля.

**Контур графа електричного кола** – замкнений шлях, утворений вузлами і вітками графа електричного кола, в якому один з вузлів є одночасно початковим і кінцевим вузлом шляху графа електричного кола.

**Лінія електропередачі (ЛЕП)** – електроустановка, яка складається з проводів, кабелів, ізолюючих елементів і несучих конструкцій, яка призначена для передачі електричної енергії між двома пунктами енергосистеми з можливим проміжним відбором.

**Лінія електропередачі повітряна** – пристрій для передачі електроенергії проводами, які розташовані на відкритому повітрі і закріплені за допомогою ізоляторів і арматури до опор або кронштейнів і стійок на інженерних спорудах (мостах, шляхопроводах і т. п.).

**Магнітне поле трансформатора** – магнітне поле, створене в трансформаторі сукупністю магніторушійних сил всіх його обмоток і інших частин, в яких протікає електричний струм.

**Магнітний потік** – скалярна величина, яка дорівнює потоку магнітної індукції.

**Максимум навантаження енергосистеми** – найбільше значення активного навантаження енергосистеми за певний період часу.

**Матриця інцидентій** – матриця, яка відображає топологію електричної мережі, наприклад, матриця інцидентій вузлових віток, матриця інцидентій контурних віток.

**Матриця вузлової провідності** – матриця, яка описує залежність між вхідними струмами вузлів і вузловими потенціалами.

**Машина асинхронна** – електромеханічний перетворювач енергії, у якого частота обертання ротора не дорівнює частоті обертання магнітного поля статора.

**Машина синхронна** – безколекторна машина змінного струму, в якій в усталеному режимі відношення частоти обертання ротора до частоти струму в колі, підключеному до обмотки якоря, не залежить від навантаження в області допустимих навантажень.

**Навантаження електричне розрахункове** – значення потужності (струму), за яким проводиться вибір параметрів електрообладнання, виконуються розрахунки режимів розподілу потужності і напруги в електричній мережі.

**Навантаження споживачів** – сумарна електрична потужність споживачів системи (району, вузла і т. п.).

**Напруга лінійна** – напруга між фазними проводами електричної мережі.

**Напруга номінальна** – напруга, на яку спроектована мережа або обладнання і до якого відносять їх робочі характеристики.

**Напруга фазна** – напруга між фазним проводом і нейтраллю.

**Нейтраль (нейтральна точка)** – загальна точка сполучених в зірку обмоток (елементів) електрообладнання.

**Обертове магнітне поле** – результуюче поле, яке створюється багатофазною обмоткою електричної машини при протіканні нею багатофазного змінного струму.

**Об'єднана енергосистема** – сукупність декількох енергетичних систем, об'єднаних загальним режимом роботи.

**Обмотка трансформатора** – сукупність витків, які утворюють електричне коло, в якому сумуються електрорушійні сили, наведені у витках, з метою отримання вищої, середньої або низької напруги трансформатора або з іншою метою.

**Обмотка трансформатора вторинна** – обмотка трансформатора, від якої відводиться енергія перетвореного змінного струму.

**Обмотка трансформатора первинна** – обмотка трансформатора, до якої підводиться енергія перетворюваного змінного струму.

**Опір (електричний) комплексний** – комплексна величина, яка дорівнює відношенню комплексного діючого значення синусоїдальної електричної напруги на виводах пасивного електричного кола або її елементу до комплексного діючого значення синусоїдального електричного струму в цьому колі або в цьому елементі.

**Опір лінії електропередачі хвильовий** – відношення миттєвого значення напруги до миттєвого значення струму в будь-якій точці лінії електропередачі, чисельно рівний квадратному корню з відношення питомого комплексного повздовжнього опору проводів до питомої комплексної поперечної провідності.

**Параметр електричного кола (елемента електричного кола)** - величина, яка характеризує будь-яку властивість електричного кола (елемента електричного кола) в якісному та кількісному відношенні.

**Потужність комплексна (двополюсника)** – комплексна величина, яка дорівнює добутку комплексного значення синусоїдальної електричної напруги і співпряжного комплексного значення синусоїдального електричного струму діючого двополюсника.

**Потужність споживана** – загальна потужність, яка отримується пристроєм або сукупністю пристроїв.

**Провідність (електрична) комплексна** – комплексна величина, яка дорівнює відношенню комплексного значення синусоїдального електричного струму, що діє, в пасивному електричному колі або в її елементі до комплексного значення синусоїдальної електричної напруги, що діє, на виводах цього кола або на цьому елементі.

**Реактор шунтуючий** – реактор паралельного ввімкнення, призначений для компенсації ємнісного струму.

**Регулювальний ефект навантаження електроенергетичної системи за напругою (регулювальний ефект навантаження за напругою)** – степінь зміни навантаження електроенергетичної системи при зміні напруги.

**Регулювальний ефект навантаження електроенергетичної системи за частотою (регулювальний ефект навантаження за частотою)** – степінь зміни навантаження електроенергетичної системи при зміні частоти.

**Режим усталений (в електричному колі)** – режим електричного кола, при якому електрорушійні сили, електрична напруга і електричні струми в електричному колі є постійними або періодичними.

**Розрахунок електричної мережі** – визначення параметрів режиму електричної мережі за заданими її характеристиками і умовах роботи.

**Розрахунок потокорозподілу** – розрахунок параметрів електричної мережі при усталеному режимі при заданих потужностях у вузлах і напрузі в деяких з них.

**Схема електричної мережі** – топологічне зображення електричної мережі, яка містить необхідну інформацію відповідно до конкретних вимог.

**Хвильовий опір середовища** – відношення комплексної амплітуди напруженості електричного поля до комплексної амплітуди напруженості магнітного поля плоскої синусоїдальної біжучої електромагнітної хвилі, яка розповсюджується в даному середовищі.

**Хвиля електромагнітна** – електромагнітна хвиля, яка розповсюджується в однорідному середовищі (або в лінії передачі) з швидкістю, яка дорівнює фазовій швидкості в цьому середовищі (або в лінії).

**Хвиля пряма (спадаюча) електромагнітна** – електромагнітна хвиля, яка розповсюджується в просторі, в лінії або в хвилепроводі в напрямі, який прийнятий в системі відліку за додатній напрям.

**Чотириполюсник** – частина електричного кола, яка має дві пари виводів, які можуть бути входними або вихідними.

**Моделі елементів електропостачальних систем** [Текст]: конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 6 Інженерія, виробництво та будівництво спеціальності G3 Електрична інженерія денної та заочної форм навчання / уклад. В. І. Волинець. Луцьк : ВІП ЛНТУ, 2025. 76 с.

Комп'ютерний набір: В. І. Волинець

Редактор: В. І. Волинець

Підп. до друку \_\_\_ грудня 2025 р.  
Формат 60x84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.  
Ум. друк. арк. 4,75. Обл.-вид. арк. 4,25.  
Тираж 50 прим.

Відділ іміджу та промоції  
Луцького національного технічного університету  
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75  
Друк – ВІП Луцького НТУ