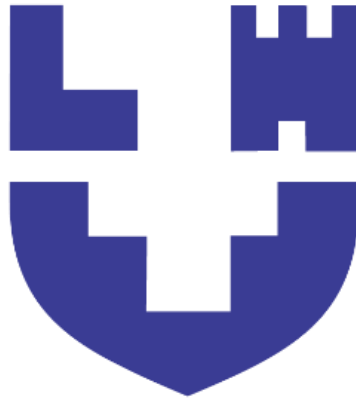


**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**



# **СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕХНОЛОГІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ**

Конспект лекцій

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
освітньої програми «Інформаційні системи та технології охорони і безпеки»  
галузі знань F/12 Інформаційні технології  
спеціальності F6/126 Інформаційні системи та технології  
денної та заочної форм навчання

**Луцьк 2026**

УДК 303.732.4:004.94(07)

С 40

Рекомендовано до видання вченою радою факультету КІТ ЛНТУ,  
протокол № \_\_\_\_\_ від « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 26 року.

Голова вченої ради факультету КІТ \_\_\_\_\_ Інна КОНДІУС

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ

Директор бібліотеки \_\_\_\_\_ Наталія ПОЛІЩУК

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри комп'ютерної інженерії та безпеки  
ЛНТУ, протокол № \_\_\_\_\_ від « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 26 року.

Завідувач кафедри КІБ \_\_\_\_\_ Тарас ТЕРЛЕЦЬКИЙ

Укладач: \_\_\_\_\_ Олена ЛЮБИМЕНКО, кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри комп'ютерної інженерії та безпеки ЛНТУ

Рецензент: \_\_\_\_\_ Світлана ЛАВРЕНЧУК, кандидат технічних наук,  
доцент кафедри комп'ютерної інженерії та безпеки ЛНТУ

Відповідальний за випуск: \_\_\_\_\_ Тарас ТЕРЛЕЦЬКИЙ, кандидат  
технічних наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та безпеки ЛНТУ

С 40

Системний аналіз та технології моделювання інформаційних систем»: Конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Інформаційні системи та технології охорони і безпеки» галузі знань F/12 Інформаційні технології спеціальності F/126 Інформаційні системи та технології денної та заочної форм навчання / уклад. О.М. Любименко. Луцьк: ЛНТУ, 2026. 112 с.

У методичному виданні висвітлено теоретичний матеріал з системного аналізу та технології моделювання інформаційних систем, який необхідний фахівцям спеціальності «Інформаційні системи та технології» для реалізації відповідних проектних рішень при моделюванні.

## ЗМІСТ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗ	5
ТЕМА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ	5
1.1 Історичні аспекти розвитку системних уявлень. Передумови виникнення системного підходу	5
1.2 Принципи системного підходу	8
1.3 Визначення системи та оточуючого середовища	10
1.4 Поняття та класифікація структур систем	13
1.5 Особливості структурно-топологічного аналізу	14
Контрольні питання	18
ТЕМА 2. КЛАСИФІКАЦІЯ І ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМ ТА МОДЕЛЮВАННЯ	19
2.1 Загальні підходи до класифікації систем	19
2.2 Класифікація систем за принципом функціонування	20
2.3 Поняття складності та масштабності систем	21
2.4 Властивості складних систем	22
2.5 Класифікація систем за способом керування	23
2.6 Моделювання як спосіб наукового пізнання та його призначення в системному аналізі	24
2.7 Зв'язок між системою та моделлю	26
2.8 Функції моделей системи	28
2.9 Поняття моделі та моделювання	29
2.10 Класифікація моделей систем	30
Контрольні питання	33
ТЕМА 3. АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ В СИСТЕМНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ	34
3.2 Моделі систем як основи декомпозиції	36
3.3 Система методів аналізу	37
3.4 Структура системного аналізу	40
3.5 Формування загального та детального подання системи	43
3.6 Формування детального подання системи	45
3.7 Показники та критерії оцінки систем	46
Контрольні питання	47
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ТЕХНОЛОГІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ	
ТЕМА 4. МЕТОДОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ МОДЕЛЮВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СИСТЕМНОГО ПІДХОДУ. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ У ВИГЛЯДІ «ЧОРНОГО ЯЩИКА»	48
4.1 Принципи і підходи до побудови математичних моделей	48
4.2 Етапи побудови математичної моделі	50
4.3 Технологія моделювання	52
4.4 Модель «Чорного ящика»	60
4.5 Динамічні системи	62
4.6 Модель у вигляді фільтра Калмана	64

4.7 Модель динамічної системи у вигляді подання Фур'є.....	66
Контрольні питання .....	68
ТЕМА 5. СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ .....	70
5.1 Загальні відомості про статистичне моделювання .....	70
5.2 Загальна схема методу Монте-Карло .....	70
5.3 Генератори випадкових чисел.....	72
5.4 Моделювання випадкової події й повної групи несумісних подій .....	76
5.5 Моделювання випадкової величини із заданим законом розподілу .....	78
5.6 Моделювання нормально розподілених випадкових величин .....	80
5.7 Моделювання системи випадкових величин.....	81
5.8 Розподіл Пуассона.....	83
5.9 Потоки випадкових подій.....	84
Контрольні питання .....	87
ТЕМА 6. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ .....	88
6.1 Загальні відомості про імітаційне моделювання .....	88
6.2 Сутність методу імітаційного моделювання та сфери його застосування....	89
6.3 Моделі систем масового обслуговування.....	90
6.4 Методологія побудови моделюючих алгоритмів систем масового обслуговування.....	92
6.5 Модифікації моделей систем масового обслуговування .....	93
6.6 Синтез систем масового обслуговування .....	94
Контрольні питання.....	95
ТЕМА 7. АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ .....	96
7.1 Аналітичні моделі .....	96
7.2 Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами .....	98
7.3 Модель одноканальної системи масового обслуговування з чергою.....	102
7.4 Багатоканальна система масового обслуговування з чергою.....	105
7.5 Системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування.....	108
Контрольні питання .....	110
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	111

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

## ТЕМА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

План лекції.

1.1 Історичні аспекти розвитку системних уявлень, передумови виникнення системного підходу.

1.2 Принципи системного підходу.

1.3 Визначення системи та оточуючого середовища.

1.4 Поняття, та класифікація структур систем.

1.5 особливості структурно-топологічного аналізу.

Література: [1 - 2, 5 - 8].

### **1.1 Історичні аспекти розвитку системних уявлень. Передумови виникнення системного підходу**

Історія розвитку методів системного аналізу стосується розвитку складових загальної теорії систем і пов'язана із розвитком двох понять: системності та керування, яке включає етапи прийняття рішень. Обидва поняття усвідомлено чи неусвідомлено застосовували ще з давніх-давен.

Розглянемо основні історичні віхи, які супроводжували наукове становлення цих понять.

I. Питання про науковий підхід до керування складними системами вперше в конкретному вигляді було поставлене М.А. Ампером в його роботі «Дослідження філософії наук, або аналітичний виклад класифікації всіх людських знань» (част. I – 1834 р., II – 1843 р.), в якій була виділена наука про керування державою, названа кібернетикою.

II. Польський вчений Броніслав Трентовський, професор Фрайбургського університету, видав в 1843 р. в Познані польською мовою книгу «Ставлення філософії до кібернетики як до мистецтва керування народом». Особливістю праці Броніслава Трентовського було відображення наукових основ практичної діяльності керівника – «гібернета». Сенс грецького слова *χορῆρνο* (гіберно) був добре зрозумілий ще в ХІХ-му сторіччі – адміністративна одиниця, населена людьми. В ширшому сенсі – об'єкт керування, до складу якого входять люди, а *χορῆρнет* (гібернет) – особа, що керує ресурсами та людьми, які населяють територію, який повинен вміти, виходячи з загального блага, примиряти деякі суперечності, інші – загострювати, скеровуючи розвиток до потрібної мети. За Трентовським дійсно ефективне керування повинно враховувати всі внутрішні та зовнішні фактори, що впливають на об'єкт керування, а головна складність його реалізації пов'язана зі складністю поведінки людей. Броніслав Трентовський далеко просунувся в розумінні та усвідомленні системності людських колективів, груп, розумінні складності керування людьми.

III. Наступний етап у вивченні системності як самодостатнього предмета пов'язаний з прізвищем О. О. Богданова (справжнє прізвище – Малиновський), який протягом 1911-1925 рр. видав 3 томи книги «Загальна організаційна наука (тектологія)».

За Богдановим в суспільстві (і в біологічних системах) існує функціональна сторона, його прагнення швидко адаптуватися, і консервативна – це архітектурна схема організації. Лише активне використання зовнішнього середовища забезпечує збереженість системи. Здійснюючи позитивну селекцію, система за рахунок зовнішнього середовища збільшує кількість внутрішніх зв'язків, підвищує свою складність, підвищуючи разом з цим ефективність свого функціонування. Негативна селекція видаляє всі вибухонебезпечні джерела, долаючи внутрішній антагонізм організації, підвищує її однорідність, порядок в ній, систематизацію, структурну стійкість. Але одночасно негативна селекція зменшує функціональну ефективність організації.

IV. Відчутний вплив на усвідомлення деяких аспектів поняття системності та особливо керування мають роботи Н. Вінера. Його праця «Кібернетика», що вийшла з друку в 1948 р. визначає кібернетику як «науку про управління та зв'язок в тваринах та машинах». Пізніше Вінер почав аналізувати процеси в людському суспільстві з точки зору кібернетики. З кібернетикою пов'язаний розвиток таких системних уявлень, як типізація моделей систем, виявлення особливого значення зворотних зв'язків у системі, підкреслення принципу оптимальності в управлінні та синтезі систем, усвідомлення значення інформації та можливостей її кількісного описання, розвиток методології моделювання, особливо проведення обчислювальних експериментів із застосуванням комп'ютера (що привело до розвитку важливого напрямку моделювання – імітаційного). Однак кібернетика найбільш сильно проявила свої можливості при дослідженні технічних систем.

V. Виникнення загальної теорії систем (ЗТС) пов'язують з іменем австрійського фізіолога Людвіга фон Берталанфі, який в 20 – 30-і роки займався питаннями системного підходу при вивченні живих організмів, розвиваючи загальну точку зору на необхідність цілісного підходу в біології та фізіології. У 1956 р. він організував наукове товариство з досліджень у області ЗТС, що видавало щорічні збірники наукових праць, в яких системний підхід розглядався як універсальна концепція, що об'єднує інтереси різноманітних наук. У 1962-1968 рр. Л. фон Берталанфі включав в ЗТС багато наук: кібернетику, теорію інформації, теорію рішень, топологію, факторний аналіз, теорію множин, теорію мереж, теорію автоматів, теорію масового обслуговування, теорію графів.

Зародження системного аналізу пов'язують з 2-ю світовою війною та діяльністю «Ренд Корпорейшн» в області планування розвитку озброєнь. Початкове в системному аналізі (СА) найповніше використовувались методи та математичні засоби теорії дослідження операцій, але в подальшому почали широко застосовуватися евристичні методи (Дельфі, Паттерн та інші).

Суттєвим в системному аналізі є наступне: аналіз систем є способом розгляду проблеми; математичний апарат та комп'ютери можуть бути тут необхідними, але інколи достатніми можуть бути серйозні роздуми над проблемою; в будь-якому аналізі, що пов'язаний з прийняттям рішення в умовах невизначеностей, метою якого є вплив на вибір способу дії, незалежно від його складності, наявні такі елементи, як ціль (цілі), альтернативи (засоби досягнення цілей), витрати чи ресурси (те, що необхідно витратити для реалізації кожної з альтернатив), модель, критерії, згідно з якими обирається альтернатива.

Система є тим ізоморфним принципом, який проникає через усі кордони, що склалися між окремими науками історично, незалежно від того, що ці науки вивчають якісно зовсім різні класи явищ: машини, організми, суспільство.

Системний підхід виник як реакція на бурхливий розвиток аналітичних підходів в науці, які все більш віддаляли творчу думку від проблеми «цілісного організму». Серед підходів, які суттєво вплинули на формування принципів системного підходу слід виділити: логічний позитивізм, аналітична дедукція, редукціонізм, казуальна (причинна) логіка, індуктивний підхід.

Логічний позитивізм стверджує, що існує «об'єктивна» реальність, яка є незалежною та неспотвореною нашими особистими перспективами чи суб'єктивними інтерпретаціями світу. Однак факти є багатовимірними і можуть інтерпретуватися по-різному. Крім того, кожна група вчених надаватиме особливе значення такому підходу до розв'язання складних проблем, який є найсуміснішим з її філософією та методологією.

Аналітична дедукція та редукціоністська логіка стверджують, що найкраще можна пояснити ціле шляхом пояснення його частин, тобто редукціоніст розв'язує складну проблему шляхом розбиття її на складові та окремого дослідження кожної з них, що приводить до розвитку спеціалізованих дисциплін з певними сферами дослідження та впливу. Отже, виникає множинність в підходах, вчені спілкуються в межах своїх дисциплін, не розуміють наукову мову (тезаурус предметної області) один одного і не є в стані оперувати з системними проблемами.

В більшості випадків наше мислення ґрунтується на концепції причинності, монолітної казуальної (причинної) логіки. Згідно детерміністської концепції, спостереження (колишні стани системи) разом із законами природи визначають її майбутній стан.

Редукціонізм є позитивним явищем у тому сенсі, що він забезпечує концептуальну основу, засоби і процедури для ідентифікації та вивчення важливих факторів, що входять у визначення проблеми. Однак дедуктивні методи не працюють або працюють погано, якщо наявно багато пов'язаних між собою факторів або вони неусвідомлені як фактори.

Індуктивний погляд ґрунтується на узагальненні окремих спостережень, тобто різні наукові дисципліни – це необхідні, але недостатні підґрунтя, використовуючи які ми формуємо теорії про досвід та знання.

Системний підхід синтезує індуктивний та дедуктивний спосіб мислення з залученням інтуїтивних підходів (натхнення, образні типи мислення та ін.).

Одним з призначень системного аналізу (СА) є правильний відбір системного інструментарію для розв'язання поставленої проблеми.

Декомпозиція мети – теж одне з призначень СА.

Ще одне призначення СА – це формування критеріїв відбору засобів для досягнення цілей. Обґрунтування вибору рішення – це теж одне з призначень СА.

Призначення системи, створеної людьми, спочатку визначається тими, хто її проектував, а пізніше користувачі пристосовують систему відповідно до своїх цілей.

Система може мати різні призначення в залежності від точки зору спостерігача.

Отже, поява та розвиток методів СА викликані новими рисами в тих проблемах, які людина повинна розв'язувати в сучасних умовах, а саме:

- масштаб проблем, які підлягають вирішенню;
- зростання взаємного впливу проблем одна на іншу;
- великий ризик неефективних витрат та втрат – а це приводить до вимоги старанно обґрунтовувати рішення;
- необхідність правильної постановки цілей, формування програми їх досягнення.

## 1.2 Принципи системного підходу

Складну систему слід розглядати і як єдине ціле, і як таку, що складається з частин, потрібно досліджувати проблему з різних точок зору, вивчати її внутрішню будову та організацію та ін. Формулювання цих вимог до системи досягається шляхом визначення основних положень, або принципів системного підходу, які є досить загальними твердженнями, що узагальнюють досвід роботи людини зі складними системами. Такими принципами є наступні:

- принцип остаточної (глобальної) мети: глобальна мета системи має абсолютний пріоритет;
- принцип єдності: сумісний розгляд системи і як цілого, і як сукупності компонентів (елементів, підсистем, системотворчих відношень);
- принцип зв'язності: довільна компонента системи розглядається сумісно з її зв'язками з оточенням;
- принцип модульності: в багатьох випадках в системі доцільно реалізувати декомпозицію на складові (модулі) різного ступеня загальності та розглядати її як сукупність модулів та зв'язків між ними;
- принцип ієрархії: в більшості випадків в системі доцільно реалізувати ієрархічну побудову та впорядкування її складових за важливістю;
- принцип функціональності: структура системи та її функції повинні розглядатися сумісно з пріоритетом функції над структурою;
- принцип розвитку: необхідно враховувати змінність системи, її здатність до розвитку, розширення, заміни складових, накопичення інформації;
- принцип децентралізації: в управлінні системою співвідношення між централізацією та децентралізацією визначається призначенням та метою системи;
- принцип невизначеності: невизначеності та випадковості повинні братися до уваги при визначенні стратегії та тактики розвитку системи.

Принцип остаточної (єдиної, генеральної, глобальної) мети означає, що в системі все повинно бути спрямоване на досягнення призначення, підпорядковане глобальній меті. Будь-які зміни, удосконалення та управління повинні оцінюватися виходячи з того, чи сприяють вони досягненню остаточної мети. В дещо модифікованому вигляді принцип остаточної мети застосовується до систем, що не є цілеспрямованими – для таких систем поняття остаточної мети замінюється поняттям основної функції, основної властивості системи.

Принципи єдності, зв'язності та модульності доволі тісно пов'язані між

собою, але якщо принцип єдності відображає «погляд ззовні» на систему, то принцип зв'язності орієнтує на «погляд з середини» системи. На різних етапах дослідження системи ці погляди можуть знаходитися у різному співвідношенні.

Принцип модульності вказує на можливість розгляду замість частини системи сукупності входів та виходів цієї частини, тобто дозволяє абстрагуватися від зайвої деталізації за умови збереження можливості адекватного описання системи.

Принцип ієрархії акцентує увагу на корисності відшукування або створення в системі ієрархічного характеру зв'язків між її елементами, цілями, модулями. Ієрархічні системи, зазвичай, створюються та досліджуються «згори», починаючи з аналізу модулів вищих рівнів ієрархії. У випадку відсутності ієрархії дослідник повинен вирішити, в якому порядку він буде розглядати складові системи та напрямок конкретизації своїх уявлень.

Принцип функціональності стверджує, що довільна структура тісно пов'язана з функціями системи та її складових, і створювати (досліджувати) структуру необхідно після зрозуміння функцій системи. З практичної точки зору це означає, що у випадку надання системі нових функцій доцільно переглядати її структуру, а не прагнути «втиснути» нову функцію в стару структуру.

Принцип розвитку повинен закладатися при побудові штучних систем як здатність до вдосконалення, розвитку системи за умови збереження якісних особливостей. Межі розширення функцій та модернізації повинні бути чітко усвідомленими творцями штучної системи, тому що існують доцільні межі універсальності системи. Можливості для розвитку закладаються шляхом надання системі властивостей до самонавчання, самоорганізації, штучного інтелекту.

Принцип децентралізації орієнтує на розумний компроміс між повною централізацією та наданням здатності реагувати на певні дії частинам системи. Система з повною централізацією буде негнучкою, нездатною до пристосування; ймовірно, що в такій системі інформаційні канали, що ведуть до керуючого елементу, виявляться перевантаженими, а сам керуючий елемент буде нездатним опрацювати таку велику кількість інформації. Однак чим децентралізованими будуть рішення в системі, тим складніше їх узгодити з точки зору досягнення глобальної мети. Досягнення спільної мети в сильно децентралізованій системі може забезпечуватися лише стійким механізмом регулювання, що не дозволяє сильно відхилитися від поведінки, яка веде до досягнення спільної мети. В усіх таких випадках діє сильний зворотний зв'язок.

В системах, що не мають стійких механізмів регулювання, наявність того чи іншого рівня централізації є необхідністю, і це пов'язане з оптимальним співвідношенням керуючих дій, які отримуються «згори» певним елементом з діями, що продукуються цим елементом самостійно. Загальне правило є наступне: ступінь централізації повинен бути мінімальним, що забезпечить досягнення остаточної мети.

Окрім того є ще один аспект централізації та децентралізації: «згори» надходять узагальнені керуючі дії, які конкретизуються на нижніх рівнях. Оскільки конкретизація можлива неєдиним способом, то нижні рівні отримують ще один «ступінь свободи». Хоча, з іншого боку, з точки зору верхнього рівня, деякі керуючі

дії загального характеру можуть бути неправильно проінтерпретовані нижнім рівнем.

Принцип невизначеності стверджує, що в багатьох (більшості, коли це стосується штучних систем за участю людини) випадках ми працюємо з системою, про яку ми не все знаємо, чи не все розуміємо у її поведінці. Це може бути система з невідомою структурою, непередбачуваним перебігом деяких процесів, зі значними відмовами, з невідомими зовнішніми втручанням. Частковим випадком невизначеності є випадковість – ситуація, коли вид події відомий, але вона може трапитися, або ж ні. На ґрунті такого означення можна ввести повне поле подій – множину подій, про яку відомо, що якась з подій, що належать до цієї множини, обов'язково трапиться. Врахування невизначеності в системі можливо як на ґрунті принципу гарантованого результату, так і спробою описання за допомогою методів теорії ймовірності та математичної статистики або ж лінгвістичних змінних, а підвищення рівня надійності досягається шляхом введення резервування.

Принципи системного підходу є загальними положеннями, що відображають абстраговані від конкретного змісту прикладних проблем відношення.

### 1.3 Визначення системи та оточуючого середовища

Поняття системи й до цього часу залишається багато в чому інтуїтивним, і різні люди вкладають в це слово далеко не однаковий сенс. Виділяються дві групи визначень системи.

Першу групу утворюють визначення, які не виділяють поняття цілісності системи, як наприклад, наступне: «Система – це множина об'єктів разом з відношеннями між об'єктами та між їх атрибутами (властивостями)». Історія визначень такого типу зрозуміла і походить від природничих наук, в яких дослідник йшов шляхом від простого до складного – поділяв систему на елементи, розглядав властивості окремих частин і способи їх взаємодії, отримуючи таким чином уявлення про систему як про сукупність взаємопов'язаних елементів.

Пізніше цей підхід використовувався в загальній теорії систем, дозволяючи здійснити чітку формалізацію. Система визначалася як множина, на якій визначене задане відношення з фіксованими властивостями. Месарович визначає систему  $S$  як підмножину декартового добутку за формулою (1.1):

$$S \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, \quad (1.1)$$

де  $X_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) – повна сукупність виявів деякого атрибуту системи, тобто  $S$  є повна сукупність виявів системи.

Отже, елементи існують лише у складі системи, а поза нею це в кращому випадку є об'єкти, що можуть мати системно значимі властивості. При входженні в систему елемент набуває системно визначену властивість замість системно значимої. Звідси інтерпретація поняття системи в термінах теорії множин не адекватна задачам опису специфічних системних утворень і може розглядатися лише як один з допоміжних аналітичних засобів їх вивчення. Справа в тому, що

при формуванні множин первинними будуть елементи. Для системи первісною є ознака цілісності, тобто вона розглядається як єдине ціле, що складається з частин, що взаємодіють, часто різноякісних, але одночасно сумісних.

Інша група визначень включає цілісність як важливу властивість системи. Дійсно, якщо в результаті детального вивчення системи знайдена властивість, яку не можна поставити у відповідність ні одному з її елементів, то визначення першої групи виявляється недійсним, і потрібно «довизначити» систему. В цьому сенсі система – це комплекс взаємопов'язаних елементів, що утворюють цілісність. Система утворює особливу єдність з середовищем та є елементом «над системи». У свою чергу й елементи системи можна розглядати як системи, якщо визначити інший критерій декомпозиції. Виходячи з визначень цієї групи систему  $S$  будемо розглядати у вигляді короткого запису (форм.1.2):

$$S = \langle M, X_s, X_{\bar{s}}, F \rangle, \quad (1.2)$$

де  $M$  – множина елементів системи,

$X_s$  – множина зв'язків між елементами системи,

$X_{\bar{s}}$  – множина зв'язків між елементами системи та зовнішнім середовищем,

$F$  – множина нових (системних) функцій, властивостей, призначень.

Отже, наявність істотних стійких зв'язків між елементами або їхніми властивостями, що перевершують по силі зв'язки цих елементів з елементами, що не входять у дану систему, є важливим атрибутом системи. У будь-якій системі встановлюються ті або інші зв'язки між елементами. Проте із системних позицій значення мають не будь-які, а лише істотні зв'язки, що із закономірною необхідністю визначають інтегративні властивості системи. Зазначена властивість відрізняє систему від простого конгломерату і виділяє її з навколишнього середовища у виді цілісного утворення.

Середовище – це сукупність всіх об'єктів, зміна яких впливає на систему, а також об'єктів, що змінюються під дією системи. Весь наш світ можна розглядати як гігантську систему, але ми не досліджуємо Всесвіт практично кожен раз, коли виникає проблема. Тому певна система є підсистемою Всесвіту, а Всесвіт лише в найбільш широкому сенсі можна називати середовищем цієї системи, а в абсолютній більшості середовище – це все те, що взаємодіє з системою, тобто теж певна підсистема Всесвіту.

Мета – це одна з найскладніших та разом з тим найдавніших категорій. Вона тією чи іншою мірою присутня у свідомості людини, яка здійснює довільний вид діяльності, і переноситься ним на багато природних та штучних систем. Пізнання мети допомагає зрозуміти сутність систем, що досліджуються, і власне тому інтерес до змісту цього поняття безперервно зростає.

Мета відображає призначення системи, яке не є детерміністично фіксованим, воно може розвиватися в часі і не обов'язково єдиним чином.

Призначення – це біхевіористичне поняття, і в соціальних системах поведінка людей є потужною силою, яка не завжди є достатньо зрозумілою, але яка

виявляється такою, що значною мірою формує наш світогляд. Існує певний різновид принципу невизначеності при спробі визначити систему, вивчаючи деякі прояви, що ототожнюються з системою. Тому ми вимушені модифікувати наші визначення в залежності від того, як дослідження стають все більш конкретними.

Мета конкретизується за допомогою цілей. Одним зі способів розкриття внутрішньої структури мети є побудова дерева цілей. Цілі в часовому аспекті поділяються на тактичні цілі (objectives), макроцілі (goals), та ідеали.

Тактичні цілі – це бажані результати, досягнення яких відбувається за визначений і порівняно короткий період часу. Макроцілі досягаються за довший час і вимагають для цього досягнення хоча б однієї тактичної цілі. Ідеали – це такі цілі, які ніколи не досягаються, але до яких система постійно наближається, реалізуючи деякі тактичні та макроцілі.

Категорія «мета» пройшла довгий шлях розвитку від найпростіших форм до складних структурно-функціональних представлень.

Мета відображає те, що може чи повинно виникнути, прообраз майбутнього, стан, який бажано досягнути.

Мета має декілька аспектів. Пізнавальний аспект мети відповідає прогнозу майбутнього, а конструктивний – можливим способам переходу до бажаного майбутнього чи плану дій. У тих випадках, коли мета відносно проста, усвідомлення мети включає і спосіб її досягнення, а у випадку складної мети – план набуває самостійного значення як елемент постановки мети. План встановлює послідовність етапів досягнення мети, визначаються засоби та методи, строки дій (рис.1.1).



Рисунок 1.1 – Аспекти мети

Отже, мета висловлює себе за допомогою множини аспектів. За наявністю інформації про способи досягнення цілей виділяються наступні класи цілей:

– функціональна ціль – це ціль, спосіб досягнення якої відомий системі, що вже досягала цю ціль. Функціональні цілі повторюються в часі та просторі. Прикладами такого типу цілей є результати виконання виробничих операцій, що періодично повторюються, стандартні функції управління та ін.;

– ціль-аналог – це образ, який отриманий в результаті дії іншої системи, але який ні разу не досягався системою, що розглядається, а якщо і досягався, то за

інших умов зовнішнього середовища.

Ціль розвитку, або нова ціль – це ціль, яка ніколи і ніким раніше не досягалася. Така ціль по суті пов'язана з утворенням нових систем.

Ці типи цілей пов'язані одна з іншою. Ціль розвитку за умови її успішного досягнення однією з систем перетворюється в ціль-аналог для всіх інших систем, а для даної системи стає функціональною ціллю за умови незмінних зовнішніх умов та ціллю-аналогом за умови змінених зовнішніх умов.

## 1.4 Поняття та класифікація структур систем

Поняття структури є одним з основних в системному аналізі. За ступенем зв'язку та розумінням будови чи сприйняття системи розрізняють форми, сукупності та структури.

Форма – це зовнішній вигляд об'єкта безвідносно до його суті (земна куля та більярдна куля мають форму кулі), геометричне поняття, що стосується з'єднання речей або ідей.

Сукупність – це з'єднання або набір в одну множину безвідносно до форми чи порядку.

Структура – це множина частин або форм (елементів), які знаходяться у взаємодії та специфічному порядку, необхідному для реалізації функцій. Отже, функція є первинною щодо структури.

Структура системи – це стійка упорядкованість у просторі і в часі її елементів і зв'язків. Властивістю структури є можливість існування протягом певного часу за допомогою зв'язуючого пристосування для збереження елементів (частин) та їх відношень приблизно в одному й тому ж порядку, реагуючи при цьому на дії середовища.

Структура  $T$  формально визначається у вигляді кортежного запису (форм.1.3):

$$T = \langle \hat{M}, \hat{X}_S \rangle, \quad (1.3)$$

де  $M$  – множина підмножин елементів системи  $\hat{M} = \{M_1, \dots, M_k\}$ ,  $M_i \cap M_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ;

$\hat{X}_S$  – множина системотворчих відношень між цими підмножинами елементів системи.

Структура системи зберігається та збагачується через її функціональні трансформації, в той же час структура полегшує ці перетворення. В організаціях та в більш широкій соціальній структурі наявні зв'язуючі сили, що підтримують форму структури. З точки зору практики представлення структури бажано спростити, щоб ідентифікувати її елементи та взаємні зв'язки між ними. Структура системи може бути охарактеризована за типами зв'язків, які в ній є або які в ній переважають. Найпростішими зв'язками є паралельне, послідовне з'єднання та обернений зв'язок. Обернений зв'язок виконує регулюючу роль у системі.

## 1.5 Особливості структурно-топологічного аналізу

У залежності від характеру організації в системі елементів і їхніх зв'язків можна виділити основні типи структур (рис.1.2): мережну (а), кістякову (б) ієрархічну (в), які відображають послідовне підвищення ступеня централізації системи.

Взагалі ж структури можуть бути найрізноманітніші і включати різні комбінації взаємозв'язків елементів (г).

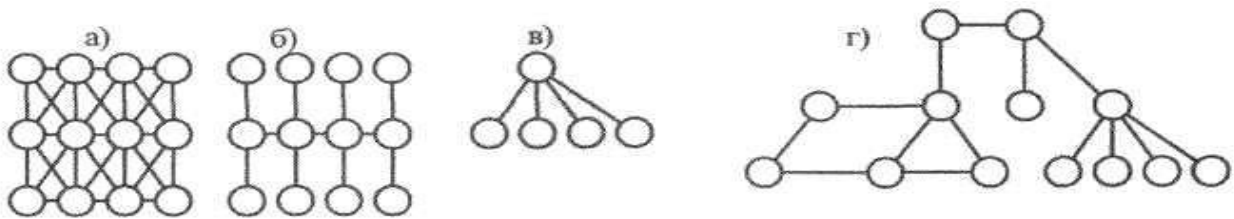


Рисунок 1.2 – Основні типи структур

Однією з найпростіших моделей структури є мережа. Мережна модель може використовуватися як для описання фактичних структурних зв'язків між елементами системи (транспортна мережа), або ж є абстрактним функціональним представленням взаємодій між підсистемами (ієрархічне представлення різних рівнів регулювання та управління в організації).

Організаційні структури змінюються:

- відповідно до цілей того, хто їх створює, менеджерів та підсистем;
- внаслідок сприймання нових потреб, усвідомлення нових функцій та побудови нових потоків, що відповідають цим функціям;
- внаслідок еволюції шляхом реагування на збурення зовнішнього середовища;
- модифікуючи старі та утворюючи нові структури, які роблять їх менш вразливими до можливих пошкоджень.

Часто оновлення структури є тимчасовою «тактичною» реакцією на дії зовнішнього середовища для того, щоб виграти час, необхідний для формування стратегічної реакції. Наприклад, фірми децентралізують з більшою ймовірністю свою структуру у випадку швидкозмінних зовнішніх умов як реакцію на них (сильна конкуренція, зміна економічних умов, поява на ринку нової продукції).

За відносно статичних умов оточення більш ймовірно, що утвориться більш жорстка централізована ієрархічна структура. Оновлення структури здійснюється завжди для спрощення руху нових потоків, які виконують функції, що орієнтуються на нові цілі та макроцілі. Тому організація є самоорганізованою системою.

При дослідженні складних систем в більшості випадків вони є або достатньо жорстко централізованими (ієрархії), або ж мають малий ступінь централізації (нечітка мережа малих систем). В залежності від призначення та властивостей зовнішнього середовища більш або менш ефективними можуть бути або ієрархії, або мережі.

У процесі створення системи та планування її діяльності врешті-решт розглядаються компроміси між роботою великої, добре об'єднаної ієрархічної системи з доволі простим призначенням та багатоелементною багатоцільовою мережею достатньо малих систем з розподіленими і нечіткими взаємними зв'язками. Ієрархії є не чим іншим, як різновидом мереж.

Незважаючи на те, що ієрархії мають певні недоліки, обумовлені простішою формою, ієрархічна побудова більш поширена в конфігурації організацій, ніж мережна. Окрім того ієрархії є прозорими структурами для ефективного відображення проблем.

Ієрархія – це структура з підпорядкованістю, тобто з нерівноправними зв'язками – дії в одному напрямку виявляють набагато більший вплив, аніж в оберненому. В більшості випадків прямий зв'язок – це керування і керуюча інформація, обернений – інформація про виконання та відхилення. На практиці розглядаються два основні типи ієрархічних структур – деревовидна та ієрархічна (рис.1.3).

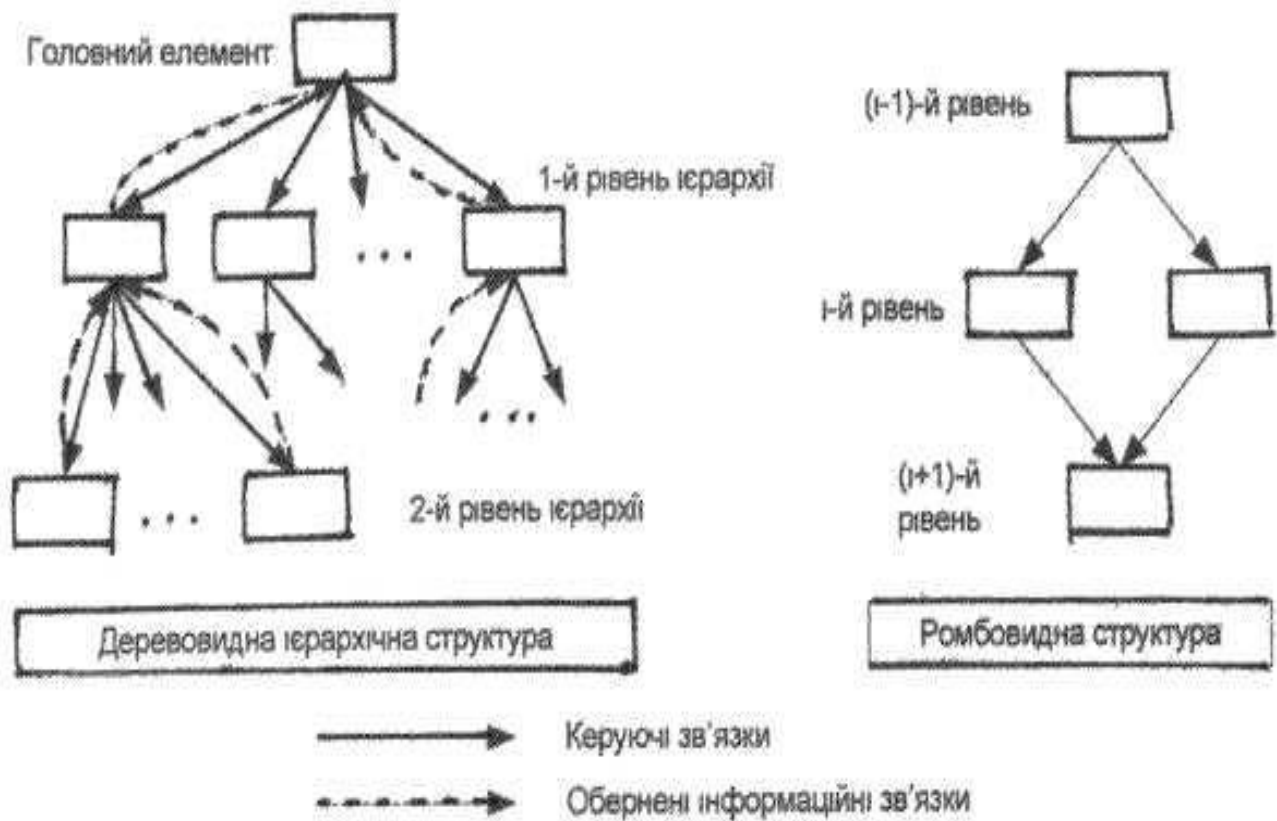


Рисунок 1.3 – Види ієрархічних структур

Деревовидна структура є найпростішою для аналізу та реалізації. В майже всіх випадках в ній виділяються ієрархічні рівні групи елементів, що знаходяться на однаковій віддалі (вимірюваної як кількість ребер) від головного елемента (кореня дерева). Структури цього типу є надзвичайно поширеними (ієрархія проектування складної програмної системи, ієрархія цілей у складній організаційній системі, ієрархія за ознакою керованості процесів в живому організмі, ієрархія в зграї тварин).

Ромбовидна структура приводить до множинної (частковий випадок – подвійної) підпорядкованості, належності елементів нижнього рівня. Приклади – участь одного технічного елемента в роботі більш ніж: одного вузла, блока, використання одних і тих самих даних або результатів вимірювань в різних завданнях.

Будь-яка ієрархія звужує можливості та гнучкість системи. Елементи нижнього рівня обмежуються домінуванням верхнього рівня, вони здатні впливати на це домінування лише частково та, зазвичай, з певною затримкою. Однак введення ієрархії різко спрощує створення та функціонування системи. Недарма той чи інший ступінь ієрархії спостерігається практично у всіх складних природних системах. Негативні наслідки ієрархії багато в чому долаються шляхом зменшення жорсткості підпорядкування, можливістю самостійно реагувати на деякі дії без жорсткої регламентації згори.

Отже, структура є стійкими взаємними зв'язками між елементами системи, які забезпечують її цілісність. Структура є найконсервативнішою характеристикою системи: хоча стан системи змінюється, структура її зберігається незмінною іноді дуже тривалий час. Якщо розглядати поняття «структура» у взаємному зв'язку з поняттям «мета», то під структурою слід розуміти спосіб досягнення мети.

За топологією внутрішніх зв'язків розділяють такі структури: послідовні (рис. 1.4 а), паралельні (рис. 1.4 б), радіальні (рис. 1.4 в), кільцеподібні (рис. 1.4 г), типу повний граф (рис. 1.4 д), деревоподібні (рис. 1.4 е), незв'язані (рис. 1.4 є).

Інформаційні потоки у складних штучних системах мають особливе значення: по-перше, інформаційні потоки та інформаційні зв'язки в багатьох випадках є домінуючими, визначальними в системі; по-друге, вони, зазвичай, супроводжують і інші – матеріальні, енергетичні та людські – дії цих потоків фіксуються і у вигляді інформації.

Інформація в системі вивчається як з точки зору її отримання, зберігання, передачі, перетворення, фільтрації, так і з точки зору її вимірювання.

На практиці в складних інформаційних системах класична універсальна міра інформації – ентропія використовується не часто. Значно частіше використовуються вужчі чи інші способи її кількісного оцінювання та міри: число повідомлень, число операторів, число файлів, об'єм інформації в знаках або двійкових кодах та ін.

Інформаційним потокам ставлять у відповідність певного виду структурні схеми (наприклад, діаграми потоків даних та ін.), які мають певні спільні риси: вказані джерела та споживачі інформації, об'єм, форми представлення, напрямки передачі, місця і вид зберігання та ін. Ці структурні схеми (інформаційні моделі системи) використовуються для аналізу та мінімізації потоків даних та зменшення їх об'єму, виявлення як дублювання інформації, так і дублювання шляхів її передавання та ін. Поняття інформації має високий ступінь універсальності, і в загальному сенсі функціонування системи можна розглядати як перетворення вхідної інформації у вихідну шляхом прийняття певних рішень в системі.

Потужність речовинних і енергетичних зв'язків оцінюється порівняно просто за інтенсивністю потоку речовини або енергії. Для інформаційних зв'язків оцінкою потенційної потужності може служити її пропускна спроможність, а реальної

потужності – дійсна величина потоку інформації. Проте в загальному випадку при оцінці потужності інформаційних зв'язків необхідно враховувати якісні характеристики переданої інформації (цінність, корисність, вірність і т. п.).

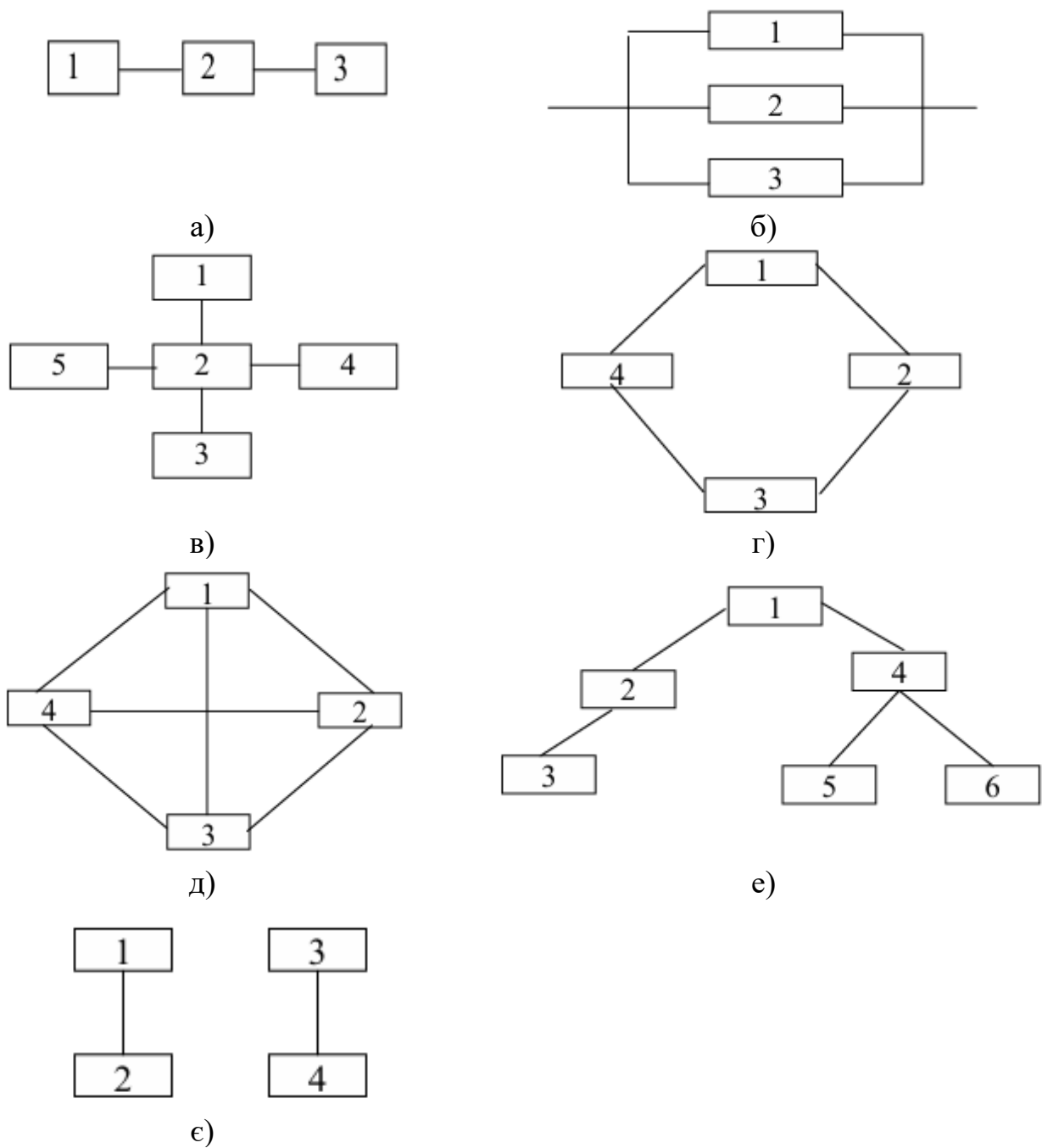


Рисунок 1.4 – Топологія внутрішніх зв'язків

Елемент системи може входити до її складу, може бути переміщений в системі з одного місця на інше, може бути виключений з неї. Ці всі ситуації стосуються зміни структури системи. Можливі й інші перетворення: елемент має певні властивості, характеристики, які теж можуть змінюватися у процесі розгляду системи.

Стан системи – це зафіксовані значення характеристик системи, важливі для

цілей дослідження. Зміна довільної з числа цих характеристик означатиме перехід системи до іншого стану. Отже, отримаємо набір станів, який ще не є процесом.

Процес – це набір станів системи, що відповідає впорядкованій неперервній або дискретній зміні деякого параметра, що визначає характеристики чи властивості системи. В більшості випадків таким параметром є час.

Процес зміни станів системи в часі відображає динаміку системи. Процеси в системі мають різноманітне значення. Так, процес проектування інформаційної системи як рух від системного аналізу через ряд проміжних етапів (технічне завдання, технічне та робоче проектування, впровадження, супровід) є основною функцією системи – розробницької фірми. У цьому випадку необхідно враховувати також цілий ряд внутрішніх процесів. Отже, процеси описуються як залежності виходів від входів в модулях різного ступеня узагальнення або різного рівня ієрархії. При цьому принципово не важливо, чи сприяє, а чи перешкоджає загалом той чи інший процес реалізації системою своїх функцій.

### Контрольні питання

1. Що відображають принципи системного підходу?
2. Яким повинен бути ступінь централізації для ефективного функціонування системи ?
3. Яким чином в системі враховуються невизначеності?
4. У чому полягає зміст принципу генеральної мети?
5. Поясніть, які особливості основних груп визначень поняття «система»?
6. Яким чином система може бути пов'язаною з середовищем?
7. Що відображає мета системи? Як поділяються цілі з точки зору часу?
8. Які основні аспекти входять до складу мети?
9. Що таке та як пов'язані між собою функціональна ціль, ціль-аналог, ціль розвитку?
10. Навіщо виконується декомпозиція системи?
11. Що виникає при взаємодії функцій системи ?
12. Які властивості має структура системи ?
13. Які типи структур Ви знаєте? Наведіть приклади структур з оточуючого середовища.
14. Під впливом яких факторів змінюються організаційні структури?
15. Які основні особливості ієрархії?
16. Яким чином відображається динаміка складної системи?

## ТЕМА 2. КЛАСИФІКАЦІЯ І ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

План лекції.

- 2.1 Загальні підходи до класифікації систем.
  - 2.2 Класифікація систем за принципом функціонування.
  - 2.3 Поняття складності та масштабності систем.
  - 2.4 Властивості систем.
  - 2.5 Класифікація систем за способом керування.
  - 2.6 Моделювання як спосіб наукового пізнання та його призначення в системному аналізі.
  - 2.7 Зв'язок між системою та моделлю.
  - 2.8 Функції моделей системи.
  - 2.9 Поняття моделі та моделювання.
  - 2.10 Класифікація видів моделювання систем.
- Література: [1, 2, 5 - 8].

### 2.1 Загальні підходи до класифікації систем

Складні системи мають ряд унікальних властивостей, як синергізм та емерджентність. Значення складних систем зростає, сучасні кіберкорпорації, що використовують комп'ютерні інформаційні технології, всі без винятків є складними системами. Питання оптимальності рішень, що приймаються в складній системі, є системним і погляд з точки зору класичної теорії інформації дозволяє зробити висновок про системний характер поняття «найкращого» рішення.

Моделювання як метод наукового пізнання виникло в зв'язку з необхідністю розв'язування завдань, які з тих чи інших причин не можуть бути розв'язані безпосередньо. При моделюванні між суб'єктом дослідником та об'єктом пізнання знаходиться проміжна ланка – модель.

Моделювання – це метод опосередкованого пізнання за допомогою штучних або природних систем, які зберігають деякі особливості об'єкта дослідження і таким чином заміщають його, що дає можливість отримати нове знання про об'єкт-оригінал.

Подібність моделі до оригіналу завжди неповна, тобто модель лише приблизно відображає деякі властивості оригіналу. Внаслідок цього реальна система може мати різноманітні моделі, які не будуть між собою ізоморфними.

Основна функція моделі – це засіб пізнання. У системному аналізі моделі є дуже важливим компонентом дослідження та проектування нової системи, і зазвичай використовується множина моделей для забезпечення якісного дослідження системи.

Цілеспрямоване втручання в перебіг процесів у системі називатимемо керуванням. Керування є одним з найважливіших понять для цілеспрямованих систем, що природним чином пов'язане з постановкою цілей: власне можливість втручання, вибору, наявність альтернативних варіантів забезпечує варіативний характер процесу керування, тобто можливість обрання варіанту дій, що провадить до мети.

В основу будь-якої класифікації мають бути покладені характерні ознаки об'єктів класифікації. Наявність чи відсутність відповідної ознаки в об'єкті дозволяє віднести його до певного класу. Класифікація – це перший крок при дослідженні системи.

Найчастіше системи класифікуються за такими ознаками:

- призначення;
- ступінь взаємодії з зовнішнім середовищем;
- походження;
- спосіб організації;
- тип та характер взаємодії між елементами;
- спосіб керування;
- принципи функціонування.

За призначенням системи поділяються на пасивні та цілеспрямовані (активні).

Пасивні – це пристрої, що використовуються для виконання вимог, усвідомлених їх творцями (автомобілі, літаки).

Цілеспрямовані – сприймають потреби, щоб сприйняти і формувати дії з множини альтернативних для задоволення власних потреб. Їх цілі можуть змінюватися в часі, адаптуватися до середовища та змінювати його.

За ступеню взаємодії із зовнішнім середовищем системи класифікуються на відкриті або замкнені (автономні). Відкрита система, яка досягає рівноваги стає замкненою. Цілеспрямовані системи є відкритими. Відкриті системи можуть зберігати високий рівень організованості і розвиватися у бік збільшення складності. Чисто замкнутих систем не існує. Вони розглядаються замкнутими виключно з точки зору якоїсь частини середовища.

За походженням системи класифікуються створені природою та людиною. Створені природою класифікуються на живі та неживі. З точки зору походження зручно скористатися такою класифікацією.

За елементами системи поділяються на абстрактні (символи, знаки, букви, цифри) та фізичні (предмети, явища, процеси).

За способом організації: структуровані і слабо структуровані. За типом та характером взаємодії між елементами системи класифікуються на прості та складні.

За способом керування на: керовані ззовні, самокеровані та з комбінованим керуванням.

## **2.2 Класифікація систем за принципом функціонування**

Одними із найбільш поширених класів систем є комп'ютеризовані (автоматизовані) системи управління. Їх особливість полягає в тому, що елементами такої системи є люди (персонал). Найчастіше за класифікаційну ознаку для таких систем вибирають принцип функціонування.

За принципом функціонування такі системи поділяються на транзакційні, системи підтримки прийняття рішень та геоінформаційні системи.

Системи транзакційного типу виконують прості операції перетворення зв'язків між елементами вхідної інформації з метою формування вихідної. Вони фіксують одиничні моменти функціонування системи. При цьому елементи вхідної та вихідної інформації співпадають.

Системи підтримки прийняття рішень призначені для розв'язування більш складніших задач пов'язаних із перетворенням структури вхідної інформації на основі певних правил у вихідну інформацію, яка відрізняється від вхідної не тільки зміненими зв'язками, але і самими елементами. Як правило такі системи мають елементи штучного інтелекту, відрізняються наявністю великої кількості взаємопов'язаних алгоритмів функціонування. Окремі з них мають властивості самоорганізації та розвитку алгоритмів функціонування.

Геоінформаційні системи – це системи у яких управління процесами опрацювання інформації здійснюється за допомогою графічного інтерфейсу, виконаного на основі географічних, топографічних карт, планів. Такі системи можуть включати як елементи чисто систем транзакційного типу (транзакція посилається вибором відповідного об'єкта на карті) так і елементи систем підтримки прийняття рішень.

### **2.3 Поняття складності та масштабності систем**

Одною із основних класифікаційних ознак є складність системи, яка визначається типом та характером взаємодії між елементами системи. Складність не може бути висловлена за допомогою одного показника і її визначення залежить від галузі наук та застосування системи. Складність зазвичай необхідно виразити кількісно, хоча вона означає дещо якісне. Необхідно розрізняти статичну та динамічну складність. Статична складність - це внутрішня складність системи, а динамічна – це складність керування системою.

Важкість і складність є різні поняття. Складна проблема є слабо структурованою і має велику кількість розв'язань, які своєю чергою мають багато призначень. Для складних систем властивими є різні системні моделі, які описують її різні сторони та різну глибину проникнення. Для вимірювання складності кількісно використовують різні концепції:

- алгоритмічна, яка визначає алгоритму відтворення системи;
- складність довжиною
- обчислювальна – пов'язує алгоритмічну складність та обчислювальні ресурси;
- інформаційна – розуміє складність з точки зору ентропії системи;
- статистична – характеризує складність через міру затрат на розпізнаваність розподілів ймовірностей;
- теоретико-множинна, інтервальні концепція складності – характеризує складність через міру затрат на забезпечення розпізнаваності множин значень;
- логічна – побудована на аналізі предикатів, які характеризують систему;
- множинна – визначає складність як кількість елементів системи.

Алгоритмічна складність базується на понятті функції, що може бути

обчислена за допомогою алгоритму при його реалізації машиною Тюрінга. Алгоритмічна складність задає складність описання алгоритму розв'язання задачі. Такий підхід дозволяє порівнювати складність тільки в межах визначеного класу задач.

Алгоритмічна складність доповнюється обчислювальною, яка характеризує витрати різних обчислювальних ресурсів на розв'язування заданого класу задач. Міру обчислювальної складності характеризують також: надійність обчислень; можливість розпаралелювання обчислювального процесу; частоту звертань до складових комп'ютера та розподіл даних та проміжних результатів між постійною і оперативною пам'яттю.

Інформаційна концепція розглядає складність розв'язання оптимізаційних задач. Поняття “найкраще рішення” є не математичною проблемою, а проблемою системного аналізу. Достатньо часто для оцінки складності оптимізації цих задач розглядають її розмірність та необхідну точність отриманого результату, тобто обсягом інформації для отримання розв'язку. Однак тут також потрібно враховувати реальні витрати обчислювальних ресурсів та складність алгоритму реалізації обраного методу оптимізації. Статистична концепція складності побудована на тому, що поведінка складних систем є не передбачуваною, але агреговані характеристики таких систем є статистично стійкими. Встановлення цих характеристик, перевірки апріорних гіпотез на яких вони базуються вимагає відповідних обсягів спостережень, вартісна оцінка збирання якої є характеристикою складності.

Отже за масштабністю і складністю системи розділяємо на великі і малі та на складні і прості.

Великі системи – це системи, які обов'язково розглядаються як сукупність підсистем. При цьому, для їх дослідження використовуємо два шляхи композицію та декомпозицію.

Композиція – це є дослідження від елементів, підсистем до системи.

Декомпозиція – коли нова інформація отримується зі знання системи загалом.

Складні системи – це цілеспрямовані для розв'язування багатоцільових задач і для їх опису використовують взаємопов'язаний комплекс моделей.

## **2.4 Властивості складних систем**

Наведено основні властивості складних систем:

- загальність та абстрактність, коли як система розглядаються предмети, явища природи, різні процеси;
- множинність – одна і та ж сукупність елементів може бути множиною різних систем. кожна сукупність відрізняється системоутворчими властивостями та конкретними відношеннями елементів у сукупності;
- цілісність – система поводить себе як єдине ціле;
- емерджентність – наявність властивостей у системі, які не можуть бути отримані із властивостей елементів. для отримання властивостей системи необхідно аналізувати відношення між її елементами. цілісність обумовлена

властивістю емерджентності;

– еквіпотенційність – система є підсистемою вищого рівня і в той же час вона є системою зі своїми елементами і зв'язками;

– синергізм – ефективність функціонування системи є вища ніж сумарна ефективність ізольованого функціонування її елементів;

Не всі складні системи є відкритими. відкриті можуть мати такі особливості, наприклад як адитивність– протилежність синергізму.

Кожна змінна розглядається незалежно від інших і відхилення характеристики системи є сумою відхилень окремих елементів. Для складних систем є характерними обмеження на реалізацію свого призначення. Тоді проблема досягнення бажаного стану, найкращого розв'язку перетворюється до проблеми знаходження прийняттого стану.

Ці обмеження поділяються на зовнішні та внутрішні.

Внутрішні: сприйняття потреб, цілей та засобів досягнення людиною. Унікальні проблеми у яких потреби слабо структуровані і не існує відомого впорядкованого набору процедур, щоб їх задовольнити. Конфлікт. Усвідомлені потреби (вимоги) можуть бути протилежними для осіб, що розв'язують проблему. Компроміс часто не забезпечує початкове призначення системи. Інерція. Важливі рішення приписуються неконтрольованим силам, а не окремим особам.

Зовнішні: динаміка, яка призводить до невизначеності зовнішнього середовища та необхідності прогнозування його поведінки. Турбулентність, яка може виникнути при динаміці складних відношень між елементами і знизити їх адаптивність. Запізнення, які виникають при оцінці відповідності системи її призначенню та реагуванні системи на дію. Технічні фінансові обмеження та обмеження людських ресурсів, які визначаються сучасними чи наявними можливостями технічних засобів, фінансових та людських ресурсів.

## 2.5 Класифікація систем за способом керування

Цілеспрямоване втручання в перебіг процесів називають керуванням. Керування забезпечує стійкість системи у її взаємодії з зовнішнім середовищем та взаємодії елементів. Класифікація систем за способом керуванням наведена на рисунку 2.1.



Рисунок 2.1 – Класифікація систем за способом керуванням

Для систем у яких є зовнішнє керування, процеси керування реалізуються зовні системою керування. Спосіб регулювання полягає в оцінюванні існуючого стану, порівнянні з бажаним і виробленні додаткового керування, яке повертає систему до бажаного стану.

Параметрична адаптація полягає у підлатуванні параметрів системи з метою досягнення бажаного стану системою. Якщо при адаптації параметрів системи бажаний стан не досягається, то необхідно здійснювати процедури структурної адаптації. Системи з самоорганізацією здатні змінювати свою структуру та оточуюче середовище.

## **2.6 Моделювання як спосіб наукового пізнання та його призначення в системному аналізі**

Моделювання є одним із способів пізнання. Моделювання слугує для розв'язування тих завдань, які не можуть бути розв'язані безпосередньо на об'єкті, наприклад коли він не існує. Метод моделювання полягає в заміні деякого об'єкта іншим об'єктом, який володіє подібними властивостями, але дослідження якого економічно вигідніше. Тобто методи моделювання є одним із способів опосередкованого пізнання. Моделювання це завжди є співставлення відомого з невідомим по аналогії. Аналогія це твердження про схожість в різних об'єктах. Ґрунтуючись на аналогії в дослідженнях висуваються гіпотези-передбачення, які перевіряються шляхом експерименту. Модель є провідною ланкою між дослідником та об'єктом, виконує функції замітника об'єкта та дозволяє отримати нові знання про цей об'єкт. При моделюванні можливі різні рівні аналогій. Найвищий рівень аналогії – коли модель тотожна самому об'єкту. Однак в цьому випадку втрачається зміст моделювання. З іншого боку надмірне спрощення моделі призводить до невідповідності із досліджуванним об'єктом. Основними функціями моделей систем є пізнавальні та прагматичні. Вони можуть використовуватися як засоби:

- осмислення дійсності;
- формального опису причинно-наслідкових зв'язків та структури системи;
- навчання, імітації та прогнозування поведінки системи;
- імітаційного експерименту;
- використання в задачах управління та оптимізації.

Системний аналіз використовує апарат моделювання для розв'язування задач дослідження об'єкта, проектування нової системи та організації управління. При цьому властивості системи переважно відображаються комплексом моделей.

Інший системний аспект моделювання полягає в тому, що діяльність дослідника є цілеспрямованою на досягнення певної мети, бажаного стану, який розглядається як деяка модель. Процес формування плану чи алгоритму діяльності базується на моделюванні з метою прогнозування наслідків діяльності. В цьому сенсі моделювання виступає як обов'язкова дія в цілеспрямованій діяльності.

Модель також виступає як цільове відображення властивостей об'єкта, тобто відображаються ті властивості, які відповідають основній цілі.

Прагматичний аспект моделювання полягає в тому, що його результатом є не тільки відображення властивостей, але і формування вимог до того що потрібно досягнути, тобто до бажаного стану системи. Наприклад моделі можуть використовуватись як засіб знаходження оптимальних рішень, оптимального управління, оптимальної організації, тощо.

Основними властивостями моделі є її скінченність (повнота), складність (спрощеність) та точність (наближеність) по відношенню до реальної системи.

У моделі відображається скінчена кількість відношень елементів системи. Хоча об'єкти моделювання можуть бути також скінченими. Наприклад, коли будується модель якоїсь моделі (на основі комп'ютерної моделі будується її відображення в аналітичному виразі).

Спрощеність моделі обґрунтовується необхідністю оперування нею, наприклад, із застосуванням обчислювальної техніки, ресурси якої є обмеженими.

Наближеність (точність) моделей має більш кількісне вираження ніж скінченність та складність. Для перевірки наближеності достатньо порівняти властивості отримані згідно моделі із властивостями оригіналу.

Адекватність є основною характеристикою побудованої моделі. Модель адекватна об'єкту, якщо результати моделювання слугують для прогнозування поведінки реального об'єкта.

Поняття адекватності слугує для оцінки рівня виконання вимог повноти та точності, необхідного для досягнення мети моделювання. Ступінь адекватності моделі перевіряється експериментальним шляхом на основі введення міри адекватності.

Процес моделювання пов'язаний із виконанням певних етапів.

На першому етапі отримується відображення об'єкта у свідомості дослідника у вигляді системи знань. Це відображення є гомоморфним. Гомоморфне відображення означає, що кожному елементу та зв'язку об'єкта, що моделюється, відповідає один елемент та зв'язок системи знань про об'єкт у свідомості дослідника, а протилежне відображення не існує.

На другому етапі отримується система уявлень про модель об'єкта, яка також є гомоморфним відображенням системи знань про об'єкт.

На третьому етапі система уявлень про модель об'єкта ізоморфно відображається у модель об'єкта чи явища, що моделюється. Ізоморфізм вказаного відображення полягає у тому, що кожному елементу та зв'язку системи уявлень про модель об'єкта відповідає один і тільки один елемент моделі об'єкта і існує протилежне відображення.

В цілому між системою (об'єктом, що моделюється) і її моделлю існує гомоморфне відображення, що підтверджує множинність моделей будь-якої системи, а процес моделювання є ітераційним.

У системному аналізі моделювання виконує функцію формалізації складних, багатокомпонентних та ієрархічних інформаційних систем. Воно забезпечує перехід від вербального опису проблемної ситуації до формалізованих моделей, що дозволяє виявляти структуру системи, визначати її елементи, входи та виходи, інформаційні потоки, обмеження і критерії ефективності.

Призначення моделювання в системному аналізі інформаційних систем

полягає в підтримці прийняття обґрунтованих управлінських і проєктних рішень. Застосування математичного, імітаційного та інформаційного моделювання дозволяє аналізувати динаміку систем, оцінювати їх надійність, продуктивність і стійкість, а також досліджувати різні сценарії розвитку.

## 2.7 Зв'язок між системою та моделлю

Система і модель перебувають у тісному взаємозв'язку, оскільки модель є формалізованим або концептуальним відображенням реальної чи уявної системи. Система виступає об'єктом дослідження, а модель є засобом її пізнання, аналізу та опису. Через модель дослідник отримує можливість вивчати властивості системи, не взаємодіючи з нею безпосередньо.

Модель відображає лише істотні для конкретної мети дослідження характеристики системи, абстрагуючись від другорядних деталей. Тому між системою та моделлю не існує повної тотожності: одна й та сама система може мати кілька різних моделей, кожна з яких описує її з певного боку □ структурного, функціонального, інформаційного, математичного або поведінкового. Вибір моделі визначається цілями аналізу, рівнем деталізації та доступною інформацією.

Зв'язок між системою та моделлю має двосторонній характер. З одного боку, властивості системи визначають структуру та параметри моделі. З іншого боку, результати моделювання дозволяють робити висновки про поведінку системи, оцінювати ефективність її функціонування, прогнозувати розвиток і обґрунтовувати управлінські рішення. Таким чином, модель виступає інструментом інтерпретації та узагальнення знань про систему.

У системному аналізі зв'язок між системою та моделлю реалізується через процеси абстрагування, формалізації та верифікації. Побудована модель має бути адекватною системі, тобто достатньо точно відображати її ключові властивості в межах поставлених цілей. Перевірка адекватності здійснюється шляхом порівняння результатів моделювання з реальними даними або експертними оцінками.

Отже, система та модель утворюють єдину пізнавальну пару: система є джерелом інформації та об'єктом дослідження, а модель - засобом її аналізу й пізнання, що забезпечує глибше розуміння структури, функціонування та розвитку складних об'єктів.

Модель є не просто образом – заміником оригіналу, і не якимось відображенням взагалі, а цільовим відображенням, що виявляється в множинності моделей одного й того ж об'єкта – для різних цілей будуються різні моделі, і модель відображає не об'єкт – оригінал сам собою, а те, що нас цікавить в ньому.

Пізнавальний аспект моделювання є надзвичайно важливим, але не менш важливим є й прагматичний аспект. Окрім джерела нових знань модель є прагматичним засобом, засобом керування, засобом організації практичних дій, способом представлення зразково правильних дій та їх результату, тобто робочим представленням цілей. Метою використання прагматичних моделей є наближення реальності до моделі при виявленні розходжень між ними, тобто прагматичні моделі є зразком, стандартом, до якого прагнуть у своїй діяльності.

Основна відмінність між пізнавальними та прагматичними моделями полягає

в тому, що пізнавальне моделювання відображає те, що існує, а прагматичне – неіснуюче, але таке, що бажано І (і можливо може бути) досягнути.

Для того, щоб модель відповідала своєму призначенню, недостатньо її створити чи застосувати готову – необхідно, щоб існували умови, що забезпечують її функціонування.

Якщо за допомогою моделі досягається попередньо визначена ціль, то вона є адекватною до об'єкта, що моделюється. Поняття адекватності (відповідності) не співпадає повністю з вимогами повноти, точності та істинності – адекватність означає, що ці вимоги виконані не взагалі чи у відповідності до певної абсолютної міри, а лише в тій мірі, яка достатня для досягнення мети моделювання. Якщо вдається ввести та обґрунтувати деяку міру адекватності моделі, то це суттєво сприяє покращенню моделі, і може бути сформульована задача знаходження «найадекватнішої» моделі, або ж найпростішої, що забезпечить заданий рівень адекватності. Існує 3 види подібності:

- пряма, що встановлюється шляхом фізичної взаємодії;
- непряма, що встановлюється через аналогію, тобто через спільну абстрактну модель;
- умовна, що встановлюється шляхом певних домовленостей.

Моделі прямої подібності – здебільшого це масштабовані або в оригінальний розмір виконані копії оригіналів.

Непряма подібність між моделлю та оригіналом встановлюється не в результаті їх фізичної взаємодії, а об'єктивно існує в природі і виявляється в співпадінні чи достатній близькості їх абстрактних моделей, і після цього використовується в практиці моделювання. Значення цих моделей є великим для практики моделювання.

Моделі умовної подібності зустрічаються на кожному кроці, оскільки вони є способом матеріального втілення абстрактних моделей, формою у вигляді речей, в якій абстрактні моделі можуть передаватися від однієї особи до іншої, зберігатися до певного моменту їх використання, і зберігати можливість повернення до абстрактної форми.

Кожна модель в чомусь правильно відображає оригінал, а ступінь істинності перевіряється шляхом безпосереднього співставлення моделі та оригіналу. Окрім безумовно істинного, в моделі є ще й те, що правильно за певних умов, а також те, що не стосується оригіналу.

Зв'язок між системою, що моделюється, і нашими знаннями про неї та моделлю ілюструється нижче (рис. 2.2). З цієї метою спочатку дамо визначення ізо- та гомоморфізму стосовно процесу моделювання.

Ізоморфізм – це співвідношення між системами тотожної структури. Між елементами та відношеннями ізоморфних систем існує взаємно однозначне відображення – кожному елементу та відношенню однієї системи відповідає один і тільки один елемент (та відношення) іншої та навпаки. Система  $S_a$  відображається гомоморфно в систему  $S_b$ , якщо кожному елементу та кожному відношенню (зв'язку) між елементами  $S_a$  відповідає один і лише один елемент та відношення (зв'язок) системи  $S_b$ , але обернене твердження неправильне. Отже,  $S_b$  є гомоморфним образом системи  $S_a$ , яка називається прообразом.

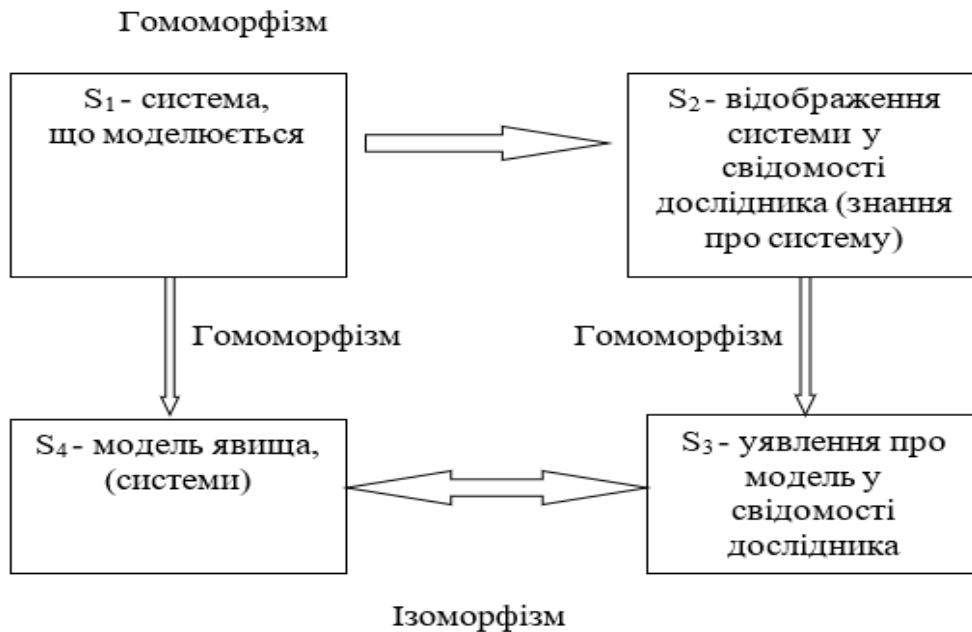


Рисунок 2.2 – Взаємозв’язок між: системою, моделлю та дослідником

Для опису взаємозв’язків між системою та моделлю використовуємо властивість відносності та конкретності стосовно системи. Система  $S_1$  – це первісна система, модель якої необхідно створити.

На ґрунті процесу пізнання системи  $S_1$  шляхом спостережень та (або) проведення обмежених експериментів над нею та попереднього досвіду в свідомості формується образ системи  $S_1$  система  $S_2$ , тобто сукупність знань про систему. Відображення системи  $S_2$  в систему  $S_2$  неповне і має характер гомоморфізму.

Оскільки знання про досліджувану систему  $S_2$ , сформоване в результаті її пізнання, неповне, деякі аспекти функціонування  $S_1$  невідомі дослідникові, а тому й відображення її у свідомості (система  $S_2$ ) гомоморфне. У процесі дослідження системи нас цікавить не вся сума знань про систему, а лише деякі її аспекти, тому уявлення про модель системи в свідомості (система  $S_3$ ) – це результат гомоморфного відображення  $S_2$  в  $S_3$ . Внаслідок цієї ж причини відображення системи  $S_1$  в модель  $S_4$  також носить гомоморфний характер. Уявлення про модель  $S_3$  ізоморфно відображається в  $S_4$  – модель системи.

## 2.8 Функції моделей системи

Моделі системи виконують низку важливих функцій, що забезпечують можливість ефективного пізнання, аналізу та управління складними об’єктами. У системному аналізі функції моделей визначаються їх роллю на різних етапах дослідження та прийняття рішень.

Пізнавальна функція полягає у формуванні уявлення про систему, її структуру, елементи та взаємозв’язки. За допомогою моделей дослідник отримує змогу зрозуміти сутність системи, виявити закономірності її функціонування та узагальнити знання про об’єкт дослідження.

Описова функція забезпечує формалізований або концептуальний опис системи. Моделі дозволяють впорядкувати інформацію про систему, подати її у вигляді схем, графів, рівнянь, алгоритмів або інформаційних структур, що спрощує аналіз і комунікацію між фахівцями.

Пояснювальна функція полягає у розкритті причинно-наслідкових зв'язків між елементами системи. Моделі дають змогу пояснити, чому система поводить певним чином, та як зміна окремих параметрів впливає на загальні результати її функціонування.

Прогностична функція пов'язана з можливістю передбачення поведінки системи в майбутньому. На основі моделей здійснюється прогнозування розвитку системи, оцінювання наслідків різних сценаріїв та визначення можливих ризиків.

Евристична функція полягає у сприянні пошуку нових рішень і формуванню гіпотез. Моделювання стимулює творчий підхід до дослідження систем, дозволяє виявляти приховані властивості та нетривіальні взаємозв'язки.

Практична (управлінська) функція полягає у підтримці прийняття рішень. Моделі системи використовуються для аналізу ефективності управлінських впливів, оптимізації процесів, вибору найкращих альтернатив та підвищення результативності функціонування системи.

Таким чином, функції моделей системи охоплюють пізнавальні, аналітичні, прогностичні та прикладні аспекти, що робить моделювання універсальним інструментом системного аналізу та управління складними системами.

Основна функція моделі систем – це засіб пізнання. Відповідно до неї розрізняються наступні похідні функції моделей систем:

- засіб осмислення дійсності;
- засіб спілкування;
- засіб навчання та тренування;
- інструмент прогнозування;
- засіб постановки та проведення експериментів.

## **2.9 Поняття моделі та моделювання**

Модель і моделювання є базовими поняттями системного аналізу та теорії пізнання, що широко застосовуються для дослідження складних об'єктів, процесів і явищ.

Модель – це спрощене, абстрактне або формалізоване відображення реального чи уявного об'єкта (системи), процесу або явища, яке відтворює його істотні властивості, структуру, функціональні зв'язки та поведінку з метою їх дослідження, аналізу або прогнозування. Модель не є повною копією об'єкта-оригіналу, а відображає лише ті характеристики, які є суттєвими для досягнення конкретної мети дослідження.

Моделювання – це цілеспрямований процес створення, дослідження та використання моделей для отримання нових знань про систему, перевірки гіпотез, аналізу альтернативних рішень і прогнозування її розвитку. Моделювання включає етапи постановки задачі, побудови моделі, її аналізу, перевірки адекватності та інтерпретації отриманих результатів щодо реальної системи.

У системному аналізі модель виступає основним інструментом формалізації складних систем, що дозволяє перейти від неструктурованого опису проблемної ситуації до чітко визначеної системи змінних, параметрів, обмежень і критеріїв ефективності. Процес моделювання забезпечує можливість дослідження систем різної природи – технічних, інформаційних, економічних, соціальних – без безпосереднього впливу на них.

Залежно від форми подання та рівня абстракції розрізняють матеріальні та ідеальні моделі, а також вербальні, графічні, математичні, імітаційні та інформаційні моделі. Вибір типу моделі та методу моделювання визначається цілями дослідження, складністю системи та наявними даними.

## 2.10 Класифікація моделей систем

Класифікація моделей проводиться за різними класифікаційними ознаками:

- ступінь визначеності;
- область зміни параметрів та змінних моделі;
- фактор часу;
- засоби опису та оцінки;
- природа моделей.

Ступінь визначеності. За цією ознакою моделі класифікуються як детерміновані, стохастичні, та з невизначеністю.

Характерним для детермінованих моделей є те, що при певних конкретних значеннях вхідних змінних на виході моделі можна отримати лише один результат. Детермінована модель може відображати як детерміновану, так і стохастичну систему, в останньому випадку зі спрощеннями та абстрагуванням від випадкових факторів. Так, прогнозна модель зростання врожайності пшениці за роками планового періоду відображає тренд (тенденцію), є детермінованою і не відображає вплив багатьох випадкових факторів, як погодні умови, що діють в реальній системі.

В стохастичних моделях змінні, параметри, умови функціонування та характеристики стану системи представляються випадковими величинами та зв'язані стохастичними (випадковими) залежностями. Тому характеристики стану та реакції в моделі визначаються законами розподілу ймовірностей їх виникнення. У процесі побудови стохастичних моделей для отримання характеристик моделі та опрацювання результатів моделювання широко використовуються методи регресійного, кореляційного та факторного аналізу.

В моделях з невизначеністю розподіл ймовірностей певних параметрів може або взагалі не існувати, або ж бути невідомим.

Область зміни параметрів. Відповідно до цієї ознаки моделі можуть бути дискретні, неперервні та дискретно-неперервні.

Характерним для дискретної моделі є те, що множини припустимих значень змінних та параметрів у ній дискретні. Дискретна модель може відображати як дискретні, так і неперервні системи, які в цьому випадку представляються в дискретному вигляді шляхом введення різноманітного типу шкал, бальних оцінок

та ін.

В неперервних моделях всі змінні та параметри моделі є неперервними, типовий представник моделей такого типу – системи диференціальних рівнянь.

Фактор часу. За фактором часу розрізняються статичні та динамічні моделі.

У статичній моделі всі залежності співвіднесені до одного моменту часу. Прикладом статичної моделі може бути модель структури системи, як незмінної в часі характеристики. В статичних моделях в явному вигляді відсутні залежності від часу. Статична модель може описувати і динамічну систему в певний момент часу.

В динамічних моделях значення змінних явно залежать від часу. Динамічну модель в принципі можна звести до статичної, однак при цьому вона стає надзвичайно громіздкою і практично не піддається аналізу. Більш ефективним є розгляд динамічної моделі як послідовності статичних моделей з рекурентним типом зв'язків між ними.

Засоби описання та оцінювання.

За цією ознакою розрізняють дескриптивні та нормативні моделі.

Дескриптивні моделі не включають наочно сформульованого критерію (чи критеріїв) оцінки якості функціонування об'єкта, що моделюється, а тому з допомогою таких моделей можна лише описувати, аналізувати поведінку системи.

Нормативні моделі включають такі критерії, а тому й вказують норму функціонування системи, що моделюється. Нормативна модель, як правило, використовує й дескриптивну як свою складову частину. Так, система обмежень в оптимізаційній задачі є не чим іншим, як дескриптивною моделлю, а наявність критерію перетворює її в нормативну.

Якщо модель використовується для опису та кращого розуміння системи, то вона має дескриптивний характер. Якщо ж за допомогою моделі на основі прогнозування скеровується процес ухвали рішень (відпрацювання рекомендацій в конкретних умовах, знаходження оптимальних розв'язків), то модель належить до класу нормативних моделей. Нормативну модель звичайно можна використовувати в якості дескриптивної, обернене твердження не дійсне. Більшу цінність з точки зору практичних застосувань мають нормативні моделі, що спрямовані не лише на пояснення, але в основному служать допоміжними засобами при розробці нових більш якісних систем.

Природа моделей. Природа моделей визначає їх склад. За цією ознакою можна виділити 2 основні класи моделей – предметні та знакові.

Предметні моделі – це фізичні тіла або системи. Моделюючі функції предметна модель реалізує власною структурою (форма, матеріал), та (або) процесами, які відбуваються в ній. Деякі моделі з цього класу створені природою (природні), інші – людиною (штучні). Для повноти класифікації також: вводять проміжний клас між природними та штучними моделями – змішані (економічні, біотехнічні, організаційні, автоматизовані).

Природні моделі поділяються у свою чергу на живі, неживі, екологічні, соціальні – це тварини, рослини, віруси, мікроби, люди. Такі моделі широко використовуються медиками та біологами. Один з найбільш відомих прикладів моделі такого типу – муха-дрозофіла, за допомогою якої вивчалися та вивчаються механізми передачі спадковості. Численні явища спадковості, виявлені у дрозофіл,

дозволили пояснити аналогічні явища в значно більш складних організмах. Ще один приклад – використання ссавців (мишей, морських свинок, собак) як моделей організму людини при вивченні тих чи інших проблем фізіології.

Штучні предметні моделі – це натурні та аналогові моделі.

Моделі, які нагадують реальну систему – макети в натуральну величину (космічні системи, невеликі літаки) або зменшені в певному масштабі (глобус як модель земної кулі, макет жилого мікрорайону) – належать до натурних. Натурне моделювання може також реалізовуватися й на частинах реальної системи (відпрацювання моделі управління на окремих підприємствах фірми в вигляді експерименту) та на цілій системі. Характерним для цього випадку є обмежені властивості експериментування.

В аналогових моделях властивість реальної системи представляється деякою іншою властивістю аналогічної за поведінкою моделі. Так, вплив сили тертя в маятнику може бути змодельований опором в аналогічній електричній схемі.

В знакових (символічних, абстрактних) моделях для представлення моделі використовуються символи, а не фізичні пристрої. Знакові моделі можна підрозділити на мовні, в яких система описується за допомогою формалізованої або напівформалізованої мови, та математичні, в яких поведінка об'єкта, що моделюється, та зв'язки між його елементами описуються засобами математики. Досліджує знакові моделі спеціальна область знань – семіотика. Семіотика вивчає знаки не окремо, а як такі, що входять в знакові системи, в яких виділено 3 групи відношень:

- синтаксис (побудова, порядок) – це відношення між: різноманітними знаками, що дозволяє їх розрізнити та будувати з них складніші знакові конструкції;

- семантика (позначення) – це відношення між знаками та тим, що вони позначають, вкладений сенс знаків;

- прагматика (дія) – відношення між знаками і тими, хто їх використовує у своїй діяльності, або зрозумілий, сприйнятий сенс знаків.

Математичні моделі розглядаються двох основних типів – аналітичні та імітаційні.

Аналітичні моделі описують функціонування системи у вигляді певних функціональних залежностей та (або) логічних співвідношень. Приклади таких моделей – система алгебраїчних рівнянь, що описує міжгалузевий баланс народного господарства; система інтегро-диференціальних рівнянь, яка описує процеси перерозподілу енергії в електроенергетичних мережах. Отримати розв'язок на аналітичній моделі можна декількома шляхами – якісним, оцінюючи області стійкості системи; чисельним, розв'язуючи систему рівнянь для певних конкретних умов при визначених вхідних діях; аналітичним, якщо є можливість в явному вигляді отримати залежність «вихід – вхід» у вигляді аналітичної залежності.

Імітаційна модель відтворює процес функціонування системи в часі шляхом моделювання елементарних явищ в системі, обміну сигналами між елементами системи, формування вихідних сигналів та зміни станів елементів. Імітаційні моделі дозволяють врахувати такі різноманітні властивості елементів системи, як

неперервність та дискретність, детермінізм та стохастичність, лінійність та нелінійність. При дослідженні складних систем імітаційне моделювання в багатьох випадках є єдиним практичним методом отримання інформації про поведінку системи.

Крім того, в необхідних випадках можлива класифікація також за іншими додатковими ознаками, наприклад за масштабом часу в моделі: моделі реального масштабу часу, та такі, в яких час стиснутий або розтягнутий відносно реального; за кількістю та типом критеріїв; за кількістю учасників прийняття рішення та ін.

### Контрольні питання

1. Що таке керування?
2. Як поділяються системи за способом керування?
3. Які особливості має процес структурної адаптації порівняно з самоорганізацією?
4. Які типи систем існують відносно ступеня свободи при реалізації ними своїх функцій?
5. У чому полягає суть властивостей емерджентності та синергізму в складних системах?
6. Які особливості можуть мати відкриті системи?
7. Які обмеження на здійснення системами свого призначення належать до внутрішніх?
8. У чому суть зовнішніх обмежень на здійснення системами свого призначення?
9. У чому полягає пізнання за допомогою моделювання?
10. Що таке аналогія та яким чином вона використовується в моделюванні?
11. Дайте визначення поняття «модель».
12. Який сенс моделювання з точки зору пізнання?
13. У чому сенс моделі як прагматичного засобу?
14. Розкрийте основні відмінності між моделлю та дійсністю.
15. Чому модель є простішою за оригінал? Що означає адекватність моделі?
16. Які основні види подібності моделі до оригіналу існують?
17. Дайте визначення поняття «ізоморфізм» та приведіть приклад ізоморфних систем.
18. Опишіть структуру взаємозв'язків між системою, моделлю та дослідником.
19. У чому полягають основні функції моделей систем?
20. У чому полягає різниця між детермінованими та стохастичними моделями?
21. Як класифікуються моделі за областю зміни параметрів?
22. Які основні риси нормативних моделей?
23. У чому полягає різниця між предметними та знаковими моделями?
24. Яке значення для моделювання мають знакові системи?

## **ТЕМА 3. АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ В СИСТЕМНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ**

План лекції.

- 3.1 Загальні відомості про аналіз і синтез систем.
- 3.2 Моделі систем як основи декомпозиції.
- 3.3 Система методів аналізу.
- 3.4 Структура системного аналізу.
- 3.5 Формування загального та детального подання системи.
- 3.6 Показники та критерії оцінки систем.

Література: [1, 2, 5 - 9].

### **3.1 Загальні відомості про аналіз і синтез систем**

Системний підхід сприяє виробленню правильного способу мислення про сам процес керування, але будь-яка система є частиною більшої системи і постійно змінюється. У разі відсутності достатньої кількості інформації про суть проблемної ситуації для організації процесу прийняття рішень застосовується системний аналіз.

Основу системного аналізу становить загальна теорія систем, яка дозволяє здійснювати дослідження проблем, що не вирішуються аналітично. Як правило, подібного роду проблеми містять невизначеність ситуації, що ускладнює прийняття рішень. Системний підхід об'єднує формальні знання та інтуїцію фахівців і стимулює цілеспрямоване аналітичне мислення. Він передбачає розбиття процесу дослідження на під процеси, моделює процеси ціле утворення і дозволяє виробити алгоритм прийняття рішення, спрямований на усунення проблем, що накопичилися. У процесі системного аналізу здійснюється не тільки системне формулювання проблем, але й встановлення між ними причинно-наслідкових зв'язків і визначення найбільш значущих серед них, для того щоб потім сформулювати мету і визначити способи її досягнення. При цьому часто логічний аналіз супроводжується математичними, статистичними обчисленнями й вербальними оцінками як проблем, так і цілей та варіантів їх досягнення. Суть аналізу (декомпозиції) полягає в поділі цілого на частини, в поданні складного у вигляді простих складових. Особливість системного аналізу – використання формальних і неформальних процедур визначення цілей та функцій систем керування.

Цей аналіз та синтез інформаційних систем аналіз застосовується для вирішення проблем у ситуації невизначеності, коли слід використовувати експертні методи прийняття рішень.

Аналіз розуміється, як процес дослідження систем, оснований на їх декомпозиції з подальшим визначенням статичних і динамічних характеристик елементів, розглянутих у взаємозв'язку з іншими елементами систем і навколишнім середовищем.

Мета аналізу проявляється в прагненні підвищити ефективність функціонування системи, а також у визначенні найкращого варіанта серед усіх альтернативних.

Відносно систем керування задачі аналізу зводяться до таких процедур:

- визначення об'єкта аналізу;
- структурування системи;
- визначення функціональних особливостей системи керування;
- дослідження інформаційних характеристик системи;
- визначення кількісних і якісних показників системи керування;
- оцінка ефективності системи керування;
- узагальнення й оформлення результатів аналізу.

У цьому процесі дослідник може обрати один із двох напрямків аналізу: визначення стану системи, щоб позначити зони, які потребують поліпшення, і стимулювання змін або дослідження альтернативних варіантів знову створюваної системи з метою вибору кращого варіанта.

Синтез (агрегування) є центральною ланкою створення систем; його суть полягає в поєднанні (уявному або реальному) простих складових об'єкта в єдине ціле.

Розглянемо аналітичні й синтетичні методи дослідження систем. Свого часу Р. Декарт, французький філософ і математик, пропонував: розчленуйте досліджувану задачу на стільки частин, щоб легко й зручно було її вирішувати. Інший підхід відомий із міркувань прадавніх філософів: усі люди смертні; Каїн – людина, а значить Каїн смертний. У першому випадку використовувалися методи аналізу, у другому – синтетичний метод дослідження.

Основні етапи розглянутих методів наведені в таблиці 3.1. Складність системного аналізу полягає в тому, що при розчленовуванні цілого на частини не втрачаються властивості системи (властивості цілого).

Таблиця 3.1 – Основні етапи аналізу та синтезу

Аналіз	Синтез
Об'єкт розділяється на частини	Об'єкт розділяється на частини більшого цілого
Пояснюються частини	Пояснюється ціле, яке містить досліджувану частину
Знання про частини, агрегуються в знання про цілий об'єкт	Ціле декомпозується для пояснення частин

Аналіз і синтез систем є базовими методологічними складовими системного підходу та системного аналізу, що застосовуються для дослідження, проектування й удосконалення складних систем різної природи – технічних, інформаційних, економічних, соціальних тощо.

Аналіз систем – це процес розчленування системи на окремі елементи, підсистеми та зв'язки з метою виявлення її структури, функцій, властивостей і закономірностей функціонування. У ході аналізу визначаються межі системи, її цілі, вхідні та вихідні параметри, внутрішні процеси, обмеження та критерії ефективності. Аналіз дозволяє зрозуміти, як система функціонує, які фактори впливають на її поведінку та які проблеми або недоліки існують у її роботі.

Синтез систем – це процес об'єднання елементів і підсистем у єдину цілісну систему з урахуванням заданих цілей, вимог і обмежень. Синтез ґрунтується на результатах аналізу та спрямований на створення нової або вдосконалення існуючої системи. У процесі синтезу визначаються структура системи, способи взаємодії елементів, алгоритми функціонування, а також оптимальні параметри, що забезпечують досягнення поставлених цілей.

Аналіз і синтез перебувають у тісному взаємозв'язку та взаємодоповнюють один одного. Аналіз є переважно пізнавальним етапом, що забезпечує глибоке розуміння системи, тоді як синтез має конструктивний характер і спрямований на формування ефективного системного рішення. У практиці системного аналізу ці процеси часто реалізуються ітеративно: результати синтезу уточнюються на основі подальшого аналізу, а аналіз – з урахуванням нових синтетичних рішень.

### **3.2 Моделі систем як основи декомпозиції**

Основи декомпозиції у цьому випадку розуміють як сукупність елементів системи (частин), углиб яких не проникає опис, тобто вони є умовно неподільними.

Відомо, що якість побудованих структур залежить від застосовуваної методики декомпозиції. При цьому набір частин, з одного боку, має бути повним, а з іншого – не повинен бути надлишковим. Таким чином, основою будь-якої декомпозиції є модель складу розглянутої системи.

Питання про повноту декомпозиції – це питання завершеності моделі: частин має бути стільки, скільки елементів містить модель, узята як основа. Іноді корисно як основи декомпозиції не тільки перебирати різні моделі цільової системи, але й брати спочатку моделі надсистеми, потім – самої системи і, нарешті, модель підсистеми. Часто достатньо організувати простий перебір формальних типів моделей (фреймів): «чорного ящика», складу, структури, структурної схеми, моделі життєвого циклу, моделі масштабу і т.і.

Проблема повноти моделей полягає в тому, що змістовна модель будується за зразком формальної. Важливо відшукати компроміс між повнотою й простотою.

Набір повних моделей (фреймів), за великим рахунком, тільки відкриває перед дослідником поле можливих варіантів вивчення систем і спрямований на те, щоб викликати певні асоціації з приводу досліджуваної системи.

Алгоритм декомпозиції як спосіб спрощення складного полягає в такому:

- визначення об'єкта аналізу (будь-який вислів, розкриття змісту якого вимагає структурування);
- визначення цільової системи (визначити, навіщо потрібно те, що ми збираємося робити; як цільова виступає система, в інтересах якої здійснюється аналіз);
- вибір формальних моделей (набір фреймів і правил перебору);
- визначення моделі основи (будується за допомогою класифікаторів на основі вивчення цільової системи);
- аналіз чергового об'єкта декомпозиції;
- здійснення процедури декомпозиції;

- аналіз отриманих фрагментів;
- перевірка чергового фрагмента на елементарність;
- перевірка використання всіх фреймів;
- перевірка деталізованості всіх основ;
- звіт – остаточний результат у формі графа.

У реалізації наведеного алгоритму компроміс досягається за допомогою понять істотного (необхідного), елементарного (достатнього), а також поступовою наростаючою деталізацією базових моделей та ітеративності алгоритму декомпозиції.

### 3.3 Система методів аналізу

Системний аналіз застосовується для вирішення таких проблем, які не можуть бути сформульовані й вирішені за допомогою окремих формальних методів. У системному аналізі використовуються як формальні методи, так і методи якісного аналізу, спрямовані на активізацію творчого мислення експертів.

Системний аналіз можна розглядати не тільки одним із напрямів розвитку загальної теорії систем та ідей кібернетики: він досліджує загальні закономірності, що належать до складних систем, які вивчаються будь-якою наукою.

Системний аналіз сформувався в 60-х рр. ХХ ст., коли на основі теорії ефективності, теорії ігор, теорії масового обслуговування з'явилася синтетична дисципліна – «Дослідження операцій». Потім вона поступово переросла в системний аналіз, який став синтезом дослідження операцій і теорії керування. Він застосовується, насамперед, у дослідженні штучних соціотехнічних систем.

Виникаюча гостра проблема відповідно до системного підходу має бути розглянута як щось ціле, як система у взаємодії всіх її компонентів між собою й у взаємодії цілого із зовнішнім середовищем. Однак матеріальні системи настільки складні, що для цілей їх аналізу використовуються, як правило, моделі систем.

У цьому розумінні системний аналіз являє собою сукупність методів і засобів дослідження й конструювання складних об'єктів, методів обґрунтування рішень при створенні й керуванні технічними, економічними та соціальними системами.

Стосовно до соціальних систем системний аналіз використовується як один із найважливіших методів системного керування організацією. Побудова цих моделей починається зі збору інформації й аналізу розрізнених фактів, що дозволяють зробити узагальнення й виявити емпіричні закономірності. Далі переходять до визначення механізмів, які реалізують ці закономірності, оскільки, якщо існує якась підтверджена фактами закономірність, то існують і механізми, що забезпечують прояв цієї закономірності.

Суперечки про те, чи можна вважати системний аналіз наукою, тривають дотепер. Найбільші складності виникають із дослідженням систем, у яких задіяні люди. Подібні системи слабко формалізуються через багатofакторність зв'язків між елементами. Проте загальний алгоритм проведення системного аналізу полягає в такому: формулювання проблеми, виявлення цілей, формування критеріїв, генерування альтернатив і вибір варіанта розв'язку для наступної реалізації.

Можна зробити висновок про те, що системний аналіз – «це дисципліна, що займається проблемами прийняття рішень в умовах, коли вибір альтернативи потребує аналізу складної інформації різної фізичної природи». Звідси випливає висновок, що джерела системного аналізу і його методичні концепції є у дисциплінах, орієнтованих на проблеми прийняття рішень, у теорії дослідження операцій та загальної теорії керування.

Але, незважаючи на значну складову системного аналізу, орієнтовану на формальний інструментарій і точні методи, традиційні прийоми аналізу, основані на інтуїції людини і її схильності до асоціацій (і ще багато чого іншого, що знаходиться поза математикою й поки ще не властиве штучному інтелекту), продовжують активно використовуватися в системному аналізі.

Головне досягнення системного аналізу полягає в розробці методів переходу від неформальних задач до формальних, від моделей типу «чорного ящика» до моделей типу «білого ящика». Більша частина цих методів має неформальний характер, але вони досить конкретні й придатні для використання як технологія вирішення проблем.

У системному аналізі використовуються такі методи:

- строго формалізовані (експериментальні дослідження, побудови моделей);
- слабо формалізовані (експертні оцінки, колективний вибір);
- у принципі неформалізовані операції (формулювання проблем, виявлення цілей, визначення критеріїв, генерування альтернатив).

Якщо розглядати питання алгоритмізації системного аналізу, то необхідно зазначити, що будь-який процес дослідження за своєю природою є алгоритмічним. Алгоритм є планом цього процесу. Водночас очевидно, що для кожної проблеми може знадобитися особливий алгоритм аналізу.

Класифікація розділяє методи аналізу на чотири основні групи за принципом їх застосування в системних дослідженнях:

- неформальні;
- графічні;
- кількісні;
- моделювання.

Аналітичні методи дозволяють описати ряд властивостей багатовимірної й багатозв'язкової системи, відображеної у вигляді однієї-єдиної точки, що робить рух у  $m$ -вимірному просторі. Це відображення здійснюється за допомогою функції  $f(s)$  або точками оператора (функціонала)  $F(S)$ . Також можливо відобразити точками дві або більше системи (або їх частини) й розглядати їх взаємодію точок. Кожна з них робить рух і має свою поведінку в  $m$ -вимірному просторі. Ця поведінка точок у просторі і їх взаємодія описуються аналітичними закономірностями й можуть бути подані у вигляді величин, функцій, рівнянь або системи рівнянь. Аналітичні методи є основою класичної математики й математичного програмування. Вони застосовуються лише в тому випадку, коли властивості системи можуть бути показані в детермінованих параметрах або у вигляді залежностей між ними.

Статистичні методи відображають систему за допомогою випадкових (стохастичних) подій, процесів, які описуються відповідними ймовірнісними

(статистичними) характеристиками й статистичними закономірностями. У цьому випадку система подається у вигляді «розмитої» точки (області) у  $m$  - вимірному просторі, в яку переводиться система, з урахуванням її властивостей, за допомогою оператора  $\Phi[x]$ . Статистичні методи застосовуються для дослідження складних недетермінованих (таких, що саморозвиваються, самонавчаються) систем, а також у прикладній інформатиці для створення програм моделювання різних систем.

Теоретико-множинні методи подання систем є основою побудови загальної теорії систем. Ці методи дозволяють описувати систему в універсальних загальних поняттях: множина, елемент множини й відношення на множині. Множини можуть задаватися двома способами: перерахуванням елементів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  і назв характеристичної властивості (ім'я, що відображає цю властивість), наприклад: А, В. При використанні таких методів допускається введення будь-яких відношень між елементами на основі математичної логіки, яка є формальною мовою опису відношень між елементами, що належать до різних множин. Теоретико-множинні методи дозволяють описувати складні системи формальною мовою моделювання. Вони використовуються в тому випадку, коли більша й складна система не може бути подана лише методами однієї предметної області, а вимагає взаєморозуміння між фахівцями різних наук. Далі методи системного аналізу стають основою розвитку нових мов програмування й автоматизації проектування систем, які застосовуються в прикладній інформатиці.

Логічні методи є мовою опису систем у термінології алгебри логіки, яка лежить в основі функціонування мікроелементів будь-якого комп'ютера. Найбільшого поширення логічні методи набули за назвою булевої алгебри як бінарного уявлення про стан комп'ютерних схем. Кожний стан елемента розглядається як 1 або 0. Ці методи використовуються для створення моделей складних систем, адекватних законам математичної логіки побудови стійких структур.

Лінгвістичні, семіотичні методи призначені для створення спеціальних мов опису систем у вигляді понять тезауруса (множини смисловиражаючих елементів мови із заданими значеннєвими відношеннями і зв'язками). Лінгвістичні методи використовуються в прикладній інформатиці для формального подання правил (граматики) поєднання понять у зміст значеннєвих виразів. Семіотика базується на поняттях «символ» (знак), «знакова система», «знакова ситуація», тобто для символічного опису змісту в обчислювальній техніці.

Лінгвістичні й семіотичні методи стали широко застосовуватися в тих випадках, коли для першого етапу дослідження не можливо формалізувати прийняття рішень у погано формалізованих ситуаціях і не можна використати аналітичні й статистичні методи.

Графічні методи дозволяють наочно відобразити об'єкт у вигляді образу системи, її структури і зв'язків в узагальненому вигляді. Графічні методи можуть бути лінійно-площинними й об'ємними. Найбільш уживані методи зображення системи – у вигляді графіка Ганта, діаграм, гістограм, рисунків і структурних схем. Графічні зображення найбільш наочно описують ситуацію або процес для ухвалення рішення в динамічно мінливих умовах. Такі методи застосовуються для структурно-функціонального аналізу складних систем та процесів, що

відбуваються в них, особливо при моделюванні інформаційно-керуючих систем. У них необхідно враховувати взаємодію людини й структурних організацій, технічних обладнань. Графічні методи широко застосовуються на практиці для одержання керуючих рішень на основі мережевого планування.

У системному дослідженні, як правило, використовуються всі типи методів. На кожному етапі дослідження вибирають ті з них, які у разі найкращої комбінації дозволяють створити аргументовану й доказову платформу дослідження.

### 3.4 Структура системного аналізу

Загальний підхід до розв'язання задач може бути поданий як цикл (рис.3.1).



Рисунок 3.1 – Загальний підхід до вирішення проблем

При цьому в процесі функціонування реальної системи виявляється проблема практики як невідповідність існуючого стану справ необхідному. Для вирішення проблеми проводиться системне дослідження (декомпозиція, аналіз і синтез) системи, що знімає проблему. У процесі синтезу здійснюється оцінка аналізованої і синтезованої систем. Реалізація синтезованої системи у вигляді запропонованої фізичної системи дозволяє провести оцінку ступеня зняття проблеми практики і прийняти рішення на функціонування модернізованої (нової) реальної системи

При такому поданні стає очевидним ще один аспект визначення системи: система є засобом вирішення проблем.

Основні завдання системного аналізу можуть бути наведені у вигляді тривірневого дерева функцій (рис. 3.2).

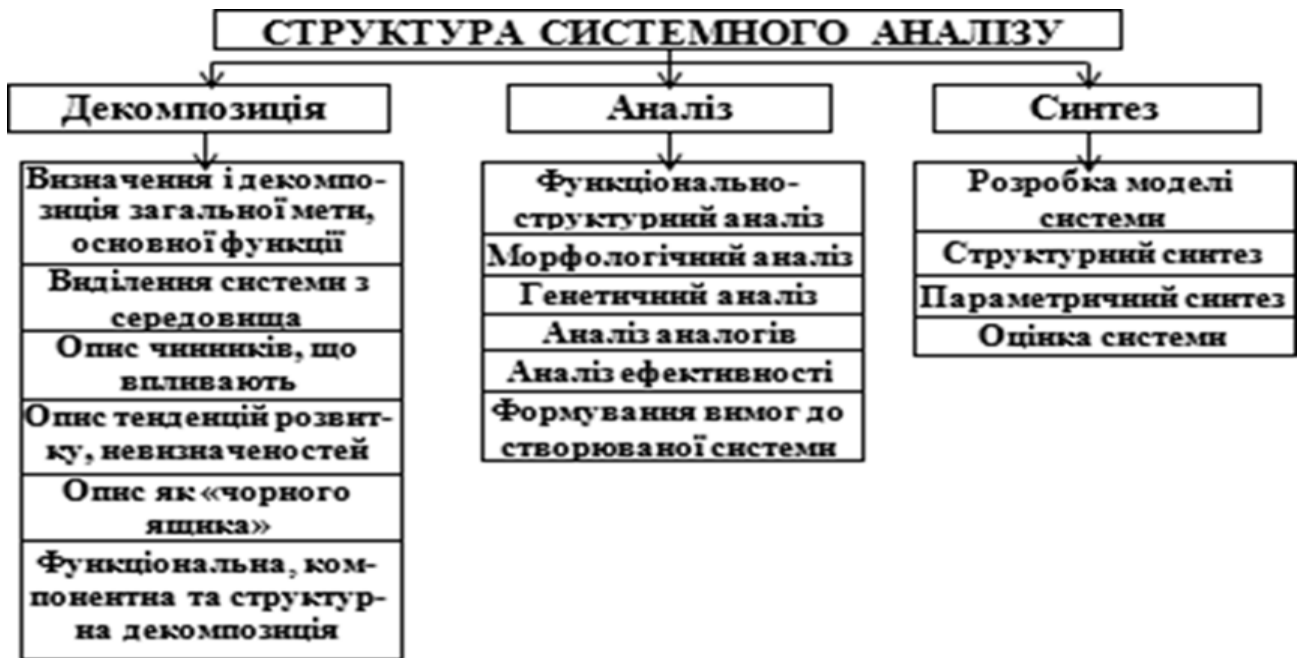


Рисунок 3.2 – Основні задачі системного аналізу

На етапі декомпозиції, що забезпечує загальне уявлення системи, процес здійснюється у послідовності наведеній нижче.

1. Визначення та декомпозиція загальної мети дослідження й основної функції системи як обмеження траєкторії в просторі станів системи або в області допустимих ситуацій. Найбільш часто декомпозиція проводиться шляхом побудови дерева цілей і дерева функцій.

2. Виділення системи з середовища (поділ на систему/«несистему») за критерієм участі кожного розглянутого елемента в процесі, що приводить до результату на основі розгляду системи як складової частини надсистеми.

3. Опис чинників, що впливають.

4. Опис тенденцій розвитку, невизначеностей різного роду.

5. Опис системи як «чорного ящика».

6. Функціональна (за функцією), компонентна (за видом елементів) і структурна (за видом відношень між елементами) декомпозиції системи.

Глибина декомпозиції обмежується. Декомпозиція повинна припинятися, якщо необхідно змінити рівень абстракції – подати елемент як підсистему. Якщо при декомпозиції з'ясується, що модель починає описувати внутрішній алгоритм функціонування елемента замість закону його функціонування у вигляді «чорного ящика», то в цьому випадку відбулася зміна рівня абстракції. Це означає вихід за межі мети дослідження системи і, отже, викликає припинення декомпозиції.

В автоматизованих методиках типовою є декомпозиція моделі на глибину 5–6 рівнів. На таку глибину декомпозується зазвичай одна з підсистем. Функції, які вимагають такого рівня деталізації, часто дуже важливі, та їх детальний опис дає ключ до секретів роботи всієї системи.

У загальній теорії систем доведено, що більшість систем можуть бути декомпозовані на базові уявлення підсистем. До них належать:

- послідовне (каскадне) з'єднання елементів;

- паралельне з'єднання елементів;
- з'єднання за допомогою зворотного зв'язку.

Проблема проведення декомпозиції полягає в тому, що в складних системах відсутня однозначна відповідність між законом функціонування підсистем і алгоритмом його реалізації. Тому здійснюється формування декількох варіантів (або одного варіанта, якщо система відображена у вигляді ієрархічної структури) декомпозиції системи.

Розглянемо деякі найбільш часто вживані стратегії декомпозиції.

**Функціональна декомпозиція.** Декомпозиція базується на аналізі функцій системи. При цьому ставиться запитання: що робить система, незалежно від того, як вона працює. Підставою розбиття на функціональні підсистеми служить спільність функцій, які виконуються групами елементів.

**Декомпозиція за життєвим циклом.** Ознака виділення підсистем – зміна закону функціонування підсистем на різних етапах циклу існування системи «від народження до загибелі». Рекомендується застосовувати цю стратегію, коли метою системи є оптимізація процесів і коли можна визначити послідовні стадії перетворення входів у виходи.

**Декомпозиція за фізичним процесом.** Ознака виділення підсистем – кроки виконання алгоритму функціонування підсистеми, стадії зміни станів. Хоча ця стратегія корисна при описі існуючих процесів, результатом її часто може стати занадто послідовний опис системи, який не буде повною мірою враховувати обмеження, продиктовані функціями один одному. При цьому може виявитися прихованою послідовність керування. Застосовувати цю стратегію слід, лише якщо метою моделі є опис фізичного процесу як такого.

**Декомпозиція за підсистемами (структурна декомпозиція).** Ознака виділення підсистем – сильний зв'язок між елементами за одним із типів відношень (зв'язків), що існують у системі (інформаційних, логічних, ієрархічних, енергетичних і т.п.).

Силу зв'язку, наприклад, за інформацією можна оцінити коефіцієнтом інформаційного взаємозв'язку підсистем за формулою (3.1):

$$k = N/N_0, \quad (3.1)$$

де  $N$  – кількість взаємовикористовуваних інформаційних масивів у підсистемах,  
 $N_0$  – загальна кількість інформаційних масивів.

Для опису всієї системи має бути побудована складова модель, яка об'єднує всі окремі моделі. Рекомендується використовувати розкладання на підсистеми, тільки коли такий поділ на основні частини системи не змінюється. Нестабільність меж підсистем швидко знецінить як окремі моделі, так і їх об'єднання.

На етапі аналізу, що забезпечує формування детального подання системи, здійснюються:

Функціонально-структурний аналіз існуючої системи, що дозволяє сформулювати вимоги до створюваної системи. Він включає уточнення складу і законів функціонування елементів, алгоритмів функціонування та взаємовпливів підсистем, поділ керованих і некерованих характеристик, задання простору станів

$Z$ , задання параметричного простору  $T$ , в якому задано поведінку системи, аналіз цілісності системи, формулювання вимог до створюваної системи. Включає наступні складові:

- морфологічний аналіз – аналіз взаємозв'язку компонентів;
- генетичний аналіз – аналіз передісторії, причин розвитку ситуації, наявних тенденцій, побудова прогнозів;
- аналіз аналогів;
- аналіз ефективності (за результативністю, ресурсомісткістю, оперативністю), який включає вибір шкали вимірювання, формування показників ефективності, обґрунтування і формування критеріїв ефективності, безпосередньо оцінювання та аналіз отриманих оцінок.
- формування вимог до створюваної системи, включаючи вибір критеріїв оцінки і обмежень.

Етап синтезу системи, що вирішує технічну задачу, наведений у вигляді спрощеної функціональної діаграми на рисунку 2.3.

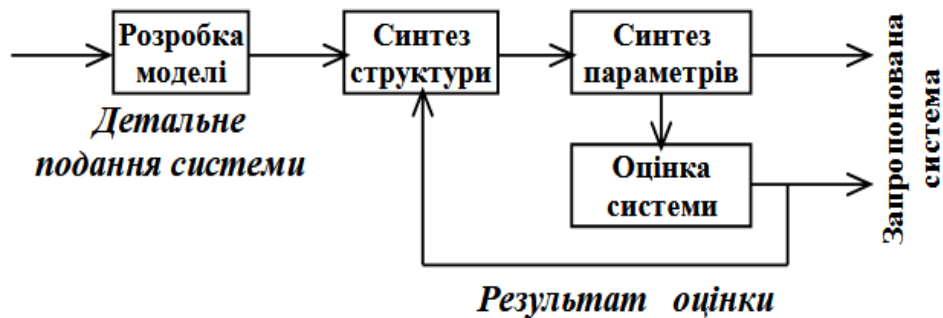


Рисунок 3.3 – Функціональна діаграма етапу синтезу системи

На цьому етапі здійснюються:

- розробка моделі необхідної системи (вибір математичного апарату; моделювання; оцінка моделі за критеріями адекватності, простоти, відповідності між точністю і складністю, балансу похибок, багатоваріантності реалізацій, блочності побудови);
- синтез альтернативних структур системи, що знімає проблему;
- синтез параметрів системи, що знімає проблему;
- оцінювання варіантів синтезованої системи (обґрунтування схеми оцінювання, реалізація моделі, проведення експерименту з оцінки, обробка результатів оцінювання, аналіз результатів, вибір найкращого варіанта).

Оцінка ступеня зняття проблеми проводиться при завершенні системного аналізу.

### 3.5 Формування загального та детального подання системи

Найбільш складними у виконанні є етапи декомпозиції та аналізу. Це пов'язано з високим ступенем невизначеності, який потрібно подолати під час дослідження. Розглянемо процес формування загального і детального подання системи, що включає дев'ять основних стадій.

Стадія 1. Виявлення головних функцій (властивостей, цілей, призначення) системи. Формування (вибір) основних предметних понять, що використовуються в системі. На цій стадії мова йде про з'ясування основних виходів у системі. Саме з цього найкраще починати її дослідження. Повинен бути визначений тип виходу: матеріальний, енергетичний, інформаційний, вони повинні бути віднесені до будь-яких фізичних або інших понять (вихід виробництва – продукція (яка?): Вихід системи керування – командна інформація (для чого? В якому вигляді?); вихід автоматизованої інформаційної системи – відомості (про що?) і т.і.).

Стадія 2. Виявлення основних функцій і частин (модулів) у системі. Розуміння єдності цих частин у рамках системи. На цій стадії відбувається перше ознайомлення з внутрішнім змістом системи, виявляється, з яких великих частин вона складається і яку роль кожна частина відіграє в системі. Це стадія отримання первинних відомостей про структуру і характер основних зв'язків. Такі відомості слід подавати і вивчати за допомогою структурних або об'єктно-орієнтованих методів аналізу систем, де, наприклад, з'ясовується наявність переважно послідовного або паралельного характеру з'єднання частин, взаємної або переважно односторонньої спрямованості впливів між частинами і т.п. Уже на цій стадії слід звернути увагу на так звані системоутворюючі чинники, тобто на ті зв'язки, взаємообумовленості, які і роблять систему системою.

Стадія 3. Виявлення основних процесів у системі, їх ролі, умов здійснення; виявлення стадійності, стрибків, змін станів у функціонуванні; в системах з керуванням – виділення основних керуючих факторів. Тут досліджується динаміка найважливіших змін у системі, перебіг подій, вводяться параметри стану, розглядаються фактори, що впливають на ці параметри, що забезпечують перебіг процесів, а також умови початку і кінця процесів. Визначається, чи керовані процеси і сприяють вони здійсненню системою своїх головних функцій. Для керованих систем з'ясовуються основні керуючі впливи, їх тип, джерело і ступінь впливу на систему.

Стадія 4. Виявлення основних елементів «несистеми», з якими пов'язана досліджувана система. Виявлення характеру цих зв'язків. На цій стадії вирішується ряд окремих проблем. Досліджуються основні зовнішні впливи на систему (входи). Визначаються їх тип (речові, енергетичні, інформаційні), ступінь впливу на систему, основні характеристики. Фіксуються межі того, що вважається системою, визначаються елементи «несистеми», на які спрямовані основні вихідні впливи. Тут же корисно простежити еволюцію системи, шлях її формування. Нерідко саме це веде до розуміння структури та особливостей функціонування системи. В цілому ця стадія дозволяє краще усвідомити головні функції системи, її залежність і вразливість або відносну незалежність у зовнішньому середовищі.

Стадія 5. Виявлення невизначеностей і випадковостей в ситуації їх визначального впливу на систему (для стохастичних систем).

Стадія 6. Виявлення розгалуженої структури, ієрархії, формування уявлень про систему як про сукупність модулів, пов'язаних входами-виходами.

Стадією 6 закінчується формування загальних уявлень про систему. Як правило, цього достатньо, якщо мова йде про об'єкт, з яким ми безпосередньо працювати не будемо. Якщо ж мова йде про систему, якою потрібно займатися для

її глибокого вивчення, поліпшення, керування, то нам доведеться піти далі спіралеподібним шляхом поглибленого дослідження системи.

### **3.6 Формування детального подання системи**

Стадія 7. Виявлення всіх елементів і зв'язків, важливих для цілей розгляду. Їх віднесення до структури ієрархії в системі. Ранжування елементів і зв'язків за їх значущістю.

Стадії 6 і 7 тісно пов'язані одна з одною, тому їх обговорення корисно провести разом. Стадія 6 – це межа пізнання «всередину» досить складної системи для особи, яка оперує нею цілком. Більш поглиблені знання про систему (стадія 7) матиме вже тільки фахівець, що відповідає за її окремі частини. Для не надто складного об'єкта рівень стадії 7 – знання системи цілком – досяжний і для однієї людини. Таким чином, хоча суть стадій 6 і 7 одна і та ж, але в першій з них ми обмежуємося тим розумним обсягом відомостей, що доступний одному досліднику.

При поглибленій деталізації важливо виділяти саме істотні для розгляду елементи (модулі) та зв'язки, відкидаючи все те, що не становить інтересу для цілей дослідження. Пізнання системи передбачає не завжди тільки відділення істотного від несуттєвого, але також акцентування уваги на більш істотному. Деталізація повинна торкнутися і вже розглянутий в стадії 4 зв'язок системи з «несистемою». На стадії 7 сукупність зовнішніх зв'язків вважається проясненою. Стадії 6 і 7 підбивають підсумок загального, цілісного вивчення системи. Подальші стадії вже розглядають тільки її окремі сторони. Тому важливо ще раз звернути увагу на системоутворюючі чинники, на роль кожного елемента і кожного зв'язку, на розуміння, чому вони саме такі або мають бути саме такими в аспекті єдності системи.

Стадія 8. Облік змін і невизначеностей у системі. Тут досліджуються повільна, зазвичай небажана зміна властивостей системи, яку прийнято називати «старінням», а також можливість заміни окремих частин (модулів) на нові, що дозволяють не тільки протистояти старінню, а й підвищити якість системи порівняно з початковим станом. Таке вдосконалення штучної системи прийнято називати розвитком. До нього також відносять поліпшення характеристик модулів, підключення нових модулів, накопичення інформації для кращого її використання, а іноді і перебудову структури, ієрархії зв'язків.

Основні невизначеності в стохастичній системі вважаються дослідженими на стадії 5. Однак недетермінованість завжди присутня і в системі, не призначеній працювати в умовах випадкового характеру входів і зв'язків. Додаємо, що облік невизначеностей в цьому випадку зазвичай перетворюється на дослідження чутливості найважливіших властивостей (виходів) системи. Чутливість розуміють як ступінь впливу зміни входів на зміну виходів.

Стадія 9. Дослідження функцій і процесів у системі з метою керування ними. Введення керування і процедур ухвалення рішення. Керуючі впливи як системи керування. Для цілеспрямованих та інших систем з керуванням ця стадія має велике значення. Основні керуючі фактори були з'ясовані при розгляді стадії 3, але

там це мало характер загальної інформації про систему. Для ефективного введення управлінь або вивчення їх впливів на функції системи і процеси в ній необхідне глибоке знання системи. Саме тому ми говоримо про аналіз управлінь тільки зараз, після всебічного розгляду системи. Нагадаємо, що керування може бути надзвичайно різноманітним за змістом – від команд спеціалізованої керуючої ЕОМ до міністерських наказів.

Однак можливість однакового розгляду всіх цілеспрямованих утручань в поведінку системи дозволяє говорити вже не про окремі управлінські акти, а про систему керування, яка тісно переплітається з основною системою, але чітко виділяється у функціональному відношенні.

На цій стадії з'ясовується, де, коли і як (у яких точках системи, в які моменти, в яких процесах, стрибках, виборі з сукупності, логічних переходах і т.д.) система керування впливає на основну систему, наскільки це ефективно, прийнятно і зручно реалізовується. При введенні управлінь в систему повинні бути досліджені варіанти переведення входів і постійних параметрів у керовані, визначені допустимі межі керування і способи їх реалізації.

Після завершення стадій 6–9 дослідження систем триває на якісно новому рівні – специфічна стадія моделювання. Про створення моделі можна говорити тільки після повного вивчення системи.

### **3.7 Показники та критерії оцінки систем**

Системи створюються для реалізації ряду операцій. Необхідний і реально досягнені результати можуть відрізнитися.

Це залежить від умов перебігу операцій, якості системи, що реалізують операції, і способів досягнення необхідних результатів. Тому при оцінюванні прийнято розрізняти якість систем і ефективність операцій, що реалізуються системою (табл.3.2).

Необхідна якість системи задається правилами, яким повинні задовольняти показники істотних властивостей, а перевірка їх виконання називається оцінюванням якості системи.

Таким чином, критерій якості – це показник істотних властивостей системи і правило його оцінювання.

Математичний вираз критерію ефективності називають цільовою функцією, оскільки її екстремізація є відображенням мети операції. Звідси випливає, що для формування критерію ефективності рішень в операції, насамперед, потрібно визначити поставлену мету. Потім потрібно знайти множини керованих і некерованих характеристик системи, що реалізує операцію. Наступний крок – визначення показників результатів операції.

Тільки після цього можливі вибір і формування критерію ефективності. Показники (функції показників) фіналів операції, на основі яких формується критерій ефективності, прийнято називати показниками ефективності.

В окремих операціях показник результату операції може прямо виступати критерієм ефективності.

Таблиця 3.2 – Співвідношення понять якості та ефективності

Поняття	Якість	Ефективність
Визначає	Властивості або сукупність властивостей системи, що обумовлюють її придатність для використання за призначенням	Властивість процесів функціонування системи, що характеризує пристосованість до досягнення мети системи.
Сфера застосування	Об'єкт будь-якої природи	Цілеспрямовані системи
Основна характеристика	Сукупність властивостей системи, істотних для її використання за призначенням	Ступінь відповідності результатів функціонування системи її цілі
Фактор структурного аналізу	Структура системи	Алгоритм функціонування
Розмірність	Вектор	Показники результативності, ресурсомісткості та оперативності
Спосіб оцінювання	Критерії придатності, оптимальності, зверхності	Критерії придатності, оптимальності

## Контрольні питання

1. У чому різниця між аналізом та синтезом систем?
2. Що є основами декомпозиції систем?
3. Поясніть алгоритм декомпозиції систем?
4. Дайте порівняльний аналіз методів аналізу систем.
5. Назвіть основні елементи структури системного аналізу.
6. Охарактеризуйте етап загального уявлення системи.
7. Охарактеризуйте етап детального подання системи.
8. Назвіть основні показники та критерії оцінення систем.
9. Яка різниця між поняттями якості систем та ефективністю операцій, що реалізуються системою?
10. Перерахуйте і роз'ясніть характеристики моделей систем.

## **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ТЕХНОЛОГІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ**

### **ТЕМА 4. МЕТОДОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ МОДЕЛЮВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СИСТЕМНОГО ПІДХОДУ. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ У ВИГЛЯДІ «ЧОРНОГО ЯЩИКА»**

План лекції.

- 4.1 Принципи і підходи до побудови математичних моделей.
- 4.2 Етапи побудови математичної моделі.
- 4.3 Технологія моделювання.
- 4.4 Модель «Чорного ящика».
- 4.5 Динамічні системи.
- 4.6 Модель у вигляді фільтра Калмана.
- 4.7 Модель динамічної системи у вигляді подання Фур'є.

Література: [ 3, 8, 10].

#### **4.1 Принципи і підходи до побудови математичних моделей**

Математичне моделювання багато хто вважає швидше мистецтвом, ніж злагодженою і закінченою теорією. Тут дуже велика роль досвіду, інтуїції та інших інтелектуальних якостей людини. Тому неможливо написати досить формалізовану інструкцію, що визначає, як повинна будуватися модель тієї чи іншої системи. Проте відсутність точних правил не заважає досвідченим фахівцям будувати вдалі моделі. До теперішнього часу вже накопичено значний досвід, що дає підставу сформулювати деякі принципи і підходи до побудови моделей. При розгляді порізно кожен з них може здатися досить очевидним. Але сукупність взятих разом принципів і підходів далеко не тривіальна. Багато помилок і невдач в практиці моделювання є прямим наслідком порушення цієї методології.

Принципи визначають ті загальні вимоги, яким повинна задовольняти правильно побудована модель. Розглянемо ці принципи.

**Адекватність.** Цей принцип передбачає відповідність моделі цілям дослідження за рівнем складності та організації, а також відповідність реальній системі щодо обраної множини властивостей. Доти, доки не вирішено питання, чи правильно відображає модель досліджувану систему, цінність моделі не значна.

**Відповідність моделі розв'язуваної задачі.** Модель повинна будуватися для розв'язання певного класу задач або конкретного завдання дослідження системи. Спроби створення універсальної моделі, націленої на рішення великої кількості різноманітних завдань, призводять до такого ускладнення, що вона виявляється практично непридатною. Досвід показує, що при розв'язанні кожної конкретної задачі потрібно мати свою модель, яка відобразить ті аспекти системи, які є найбільш важливими в даній задачі. Цей принцип пов'язаний із принципом адекватності.

**Спрощення при збереженні істотних властивостей системи.** Модель повинна бути дещо простішою від прототипу – в цьому сенс моделювання. Чим складніша розглянута система, тим по можливості більш спрощеним має бути її опис, навмисно

перебільшуючий типовий та ігноруючий менш істотні властивості. Цей принцип може бути названий принципом абстрагування від другорядних деталей.

Відповідність між необхідною точністю результатів моделювання і складністю моделі. Моделі за своєю природою завжди мають наближений характер. Виникає питання, яким має бути це наближення. З одного боку, щоб відобразити всі скільки-небудь істотні властивості, модель необхідно деталізувати. З іншого боку, будувати модель, близьку за складністю до реальної системи, очевидно, не має сенсу. Вона не повинна бути настільки складною, щоб існуюче рішення виявилось занадто складним. Компроміс між цими двома вимогами досягається нерідко шляхом проб і помилок. Практичними рекомендаціями щодо зменшення складності моделей є:

- зміна кількості змінних, що досягається або винятком несуттєвих змінних, або їх об'єднанням. Процес перетворення моделі в модель з меншою кількістю змінних і обмежень називають агрегуванням. Наприклад, всі типи ЕОМ у моделі гетерогенних мереж можна об'єднати в чотири типи – ПЕОМ, робочі станції, великі ЕОМ (мейнфрейми), кластерні ЕОМ;

- зміна природи змінних параметрів. Змінні параметри розглядаються як постійні, дискретні – як безперервні і т.д. Так, умови поширення радіохвиль у моделі радіоканалу для простоти можна прийняти постійними;

- зміна функціональної залежності між змінними. Нелінійна залежність замінюється зазвичай лінійною, дискретна функція розподілу ймовірностей – безперервною;

- зміна обмежень (додавання, виключення або модифікація). При знятті обмежень виходить оптимістичне рішення, при введенні – песимістичне. Варіюючи обмеженнями, можна знайти можливі граничні значення ефективності. Такий прийом часто використовується для знаходження попередніх оцінок ефективності рішень на етапі постановки завдань;

- обмеження точності моделі. Точність результатів моделі не може бути вищою від точності вихідних даних.

Баланс похибок різних видів. Відповідно до принципу балансу необхідно домагатися, наприклад, балансу систематичної похибки моделювання за рахунок відхилення моделі від оригіналу і похибки вихідних даних, точності окремих елементів моделі, систематичної похибки моделювання і випадкової похибки при інтерпретації та усереднення результатів.

Багатоваріантність реалізацій елементів моделі. Різноманітність реалізацій одного і того ж елемента, що відрізняються за точністю (а отже, і за складністю), забезпечує регулювання співвідношення «точність/складність».

Блочна будова. При дотриманні принципу блочної будови полегшується розробка складних моделей і з'являється можливість використання накопиченого досвіду і готових блоків з мінімальними зв'язками між ними. Виділення блоків проводиться з урахуванням поділу моделі за етапами і режимами функціонування системи. Наприклад, при побудові моделі для системи радіорозвідки можна виділити модель роботи випромінювачів, модель виявлення випромінювачів, модель пеленгування і т.і.

Залежно від конкретної ситуації можливі такі підходи до побудови моделей:

- безпосередній аналіз функціонування системи;
- проведення обмеженого експерименту на самій системі;
- використання аналога;
- аналіз вихідних даних.

Є цілий ряд систем, які допускають проведення безпосередніх досліджень з виявлення істотних параметрів і відносин між ними. Потім або застосовуються відомі математичні моделі, або вони модифікуються або пропонується нова модель. Таким чином, наприклад, можна вести розробку моделі для направлення зв'язку в умовах мирного часу.

При проведенні експерименту виявляється значна частина істотних параметрів та їх вплив на ефективність системи. Таку мету ставлять, наприклад, усі командно-штабні гри і більшість навчань.

Якщо метод побудови моделі системи не ясний, але її структура очевидна, то можна скористатися схожістю з більш простою системою, модель для якої існує.

Побудову моделі можна розпочати на основі аналізу вихідних даних, які вже відомі або можуть бути отримані. Аналіз дозволяє сформулювати гіпотезу про структуру системи, яка потім апробується. Так з'являються перші моделі нового зразка іноземної техніки при наявності попередніх даних про їх технічні параметри.

Розробники моделей перебувають під дією двох взаємно суперечливих тенденцій:

- прагнення до повноти опису;
- прагнення до отримання необхідних результатів можливо більш простими засобами.

Досягнення компромісу ведеться зазвичай шляхом побудови серії моделей, що починаються з гранично простих і висхідних до високої складності (існує відоме правило: починай з простих моделей, а далі ускладнюй). Прості моделі допомагають глибше зрозуміти досліджувану проблему. Ускладнені моделі використовуються для аналізу впливу різних чинників на результати моделювання. Такий аналіз дозволяє виключати деякі чинники з розгляду.

Складні системи потребують розробки цілої ієрархії моделей, що розрізняються рівнем відображуваних операцій. Виділяють такі рівні, як вся система, підсистеми, керуючі об'єкти тощо.

## **4.2 Етапи побудови математичної моделі**

Сутність побудови математичної моделі полягає в тому, що реальна система спрощується, схематизується і описується за допомогою того чи іншого математичного апарату. Можна виділити такі основні етапи побудови моделей.

1. Змістовний опис модельованого об'єкта. Об'єкти моделювання описуються з позицій системного підходу. Виходячи з мети дослідження, встановлюються сукупність елементів, взаємозв'язку між елементами, можливі стани кожного елемента, суттєві характеристики станів і відносини між ними. Наприклад, фіксується, що якщо значення одного параметра зростає, то значення іншого – убуває і т.п. Питання, пов'язані з повнотою та одиничністю вибору

характеристик, не розглядаються. Природно, в такому словесному описі можливі логічні протиріччя, невизначеності. Це вихідна природно-наукова концепція досліджуваного об'єкта. Таке попереднє, наближене уявлення системи називають концептуальною моделлю. Для того щоб змістовний опис служив хорошою основою для подальшої формалізації, потрібно докладно вивчити модельований об'єкт. Нерідко природне прагнення прискорити розробку моделі веде дослідника від цього етапу безпосередньо до вирішення формальних питань. У результаті побудована без достатнього змістовного базису модель виявляється непридатною до використання. На цьому етапі моделювання широко застосовуються якісні методи опису систем, знакові і мовні моделі.

2. Формалізація операцій. Формалізація зводиться в загальних рисах до такого. На основі змістовного опису визначається вихідна множина характеристик системи. Для виділення істотних характеристик необхідний хоча б наближений аналіз кожної з них. При проведенні аналізу спираються на постановку задачі і розуміння природи досліджуваної системи. Після виключення несуттєвих характеристик виділяють керовані та некеровані параметри і виробляють символізацію. Потім визначається система обмежень на значення керованих параметрів. Якщо обмеження не мають принциповий характер, то ними нехтують.

Подальші дії пов'язані з формуванням цільової функції моделі. Згідно з відомими положеннями вибираються показники результату операції і визначається приблизний вигляд функції корисності на результатах. Якщо функція корисності близька до порогової (або монотонної), то оцінка ефективності рішень можлива безпосередньо за показниками результату операції. У цьому випадку необхідно вибрати спосіб згортки показників (спосіб переходу від множини показників до одного узагальненого показника) і провести саму згортку. Як згортка показників формуються критерій ефективності і цільова функція.

Якщо при якісному аналізі виду функції корисності виявиться, що її не можна вважати пороговою (монотонною), пряма оцінка ефективності рішень через показники результату операції не правомочна. Необхідно визначити функцію корисності і вже на її основі вести формування критерію ефективності та цільової функції.

В цілому заміна змістовного опису формальним – це ітеративний процес.

3. Перевірка адекватності моделі. Вимога адекватності перебуває у суперечності з вимогою простоти, і це потрібно враховувати при перевірці моделі на адекватність. Початковий варіант моделі попередньо перевіряється за такими основними аспектами:

- чи всі суттєві параметри включені в модель;
- чи немає в моделі несуттєвих параметрів;
- чи правильно відображені функціональні зв'язки між параметрами;
- чи правильно визначено обмеження на значення параметрів.

Для перевірки рекомендується залучати фахівців, які не брали участі в розробці моделі. Вони можуть більш об'єктивно розглянути модель і помітити її слабкі сторони, ніж її розробники. Така попередня перевірка моделі дозволяє виявити грубі помилки. Після цього розпочинають реалізацію моделі та проведення досліджень. Отримані результати моделювання піддаються аналізу на відповідність

відомим властивостям досліджуваного об'єкта. Для встановлення відповідності створюваної моделі оригіналу використовуються такі шляхи:

- порівняння результатів моделювання з окремими експериментальними результатами, отриманими при однакових умовах;
- використання інших близьких моделей;
- зіставлення структури та функціонування моделі з прототипом.

Основним шляхом перевірки адекватності моделі досліджуваного об'єкта виступає практика. Однак вона потребує накопичення статистики, яка далеко не завжди буває достатньою для отримання надійних даних. Для багатьох моделей перші два прийнятні меншою мірою. У цьому випадку залишається один шлях: висновок про подібність моделі і прототипу робити на основі зіставлення їх структур і реалізованих функцій. Такі висновки не мають формального характеру, оскільки ґрунтуються на досвіді та інтуїції дослідника. За результатами перевірки моделі на адекватність приймається рішення про можливість її практичного використання або про проведення коригування.

4. Коригування моделі. При коригуванні моделі можуть уточнюватися суттєві параметри, обмеження на значення керованих параметрів, показники результату операції, зв'язку показників результату операції з істотними параметрами, критерій ефективності. Після внесення змін до моделі знову виконується оцінка адекватності.

5. Оптимізація моделі. Сутність оптимізації моделей полягає в їх спрощенні при заданому рівні адекватності. Основними показниками, за якими можлива оптимізація моделі, виступають час і витрати коштів для проведення досліджень на ній. В основі оптимізації лежить можливість перетворення моделей з однієї форми в іншу. Перетворення може виконуватися або з використанням математичних методів, або евристичним шляхом.

### **4.3 Технологія моделювання**

Розширенню сфер застосування моделювання сприяли, звичайно, розвиток і застосування обчислювальних машин та систем. Із упевненістю можна сказати, що не існує сфер людської діяльності, де б не використовувалося моделювання. Це і функціонування атомних реакторів, і дослідження макроекономічних процесів, і виробництво машин та агрегатів, і розвиток біологічних систем, і аналіз наслідків використання природних ресурсів та екологічних катастроф.

Самі обчислювальні комплекси стали не тільки інструментом дослідження, але й об'єктами моделювання. Обчислювальні машини, комплекси, системи та мережі завдяки своїй складності й дорожнечі, природно, є об'єктами моделювання. При цьому моделювання доцільне як на етапах проектування обчислювальних комплексів, так і під час аналізу функціонування діючих систем в екстремальних умовах або при зміні їх складу, структури, способів керування або робочого навантаження.

Застосування моделювання на етапі проектування дозволяє аналізувати варіанти проектних рішень, визначати працездатність і продуктивність, виявляти дефіцитні й малозавантажені ресурси, обчислювати очікувані часи реакції та

ухвалювати рішення щодо раціональної зміни складу й структури комплексу або за способом організації обчислювального процесу.

Доцільним є використання моделювання для діючих обчислювальних комплексів, оскільки можна дослідним шляхом перевірити адекватність моделі й оригіналу та більш точно визначити ті параметри системи й зовнішні впливи на неї, які служать вихідними даними для моделювання. Моделювання реальних обчислювальних комплексів дозволяє виявити його резерви та спрогнозувати якість функціонування за будь-яких змін, тому корисно мати моделі всіх систем, що розвиваються.

Здійснення моделювання передбачає конкретизацію його мети, створення моделі, проведення її дослідження й аналіз отриманих результатів. Навіть процес створення моделі складається з декількох етапів. Він починається з вивчення системи та зовнішніх впливів, а завершується розробкою або вибором математичної моделі і програмного забезпечення. Природно, що деякі класи математичних моделей можуть бути досліджені й без застосування комп'ютерної техніки.

Таким чином, моделювання припускає наявність таких укрупнених етапів:

- постановка мети моделювання;
- розробка концептуальної моделі;
- підготовка вихідних даних;
- розробка математичної моделі;
- вибір методу моделювання;
- вибір засобів моделювання;
- розробка програмного забезпечення;
- перевірка адекватності й коректування моделі;
- планування машинних експериментів;
- моделювання на обчислювальному комплексі;
- аналіз результатів моделювання.

Наведений перелік, звичайно, не є догмою. Різні дослідники відповідно до свого досвіду й уподобань змінюють зміст і кількість етапів, але логіка послідовності повинна зберігатися.

Постановка мети моделювання. Будь-яка система може являти собою певний набір моделей, що відрізняються одна від одної. Відмітності можуть міститися в ступені деталізації й обліку різних особливостей і режимів функціонування. Можуть також відображатися деякі грані сутності системи, можливе орієнтування на аналіз деяких наборів властивостей. Тому розробці моделі, природно, передує постановка (формулювання) мети моделювання.

Як підійти до розв'язання цієї задачі? Оскільки створення моделі зазвичай здійснюється при проектуванні або модернізації системи, то природно виникають задачі визначення її (системи) ефективності, що розв'язуються до моделювання. Цей етап закінчується ухваленням рішення про доцільність або навпаки – недоцільність проведення моделювання.

Необхідно пам'ятати, що подібність процесу, який протікає в моделі, до реального процесу не може бути метою. Це тільки умова правильного функціонування моделі, та й то не завжди.

Визначення мети моделювання – це розрахунок значень вибраного показника ефективності для різних варіантів реалізації проектованої або досліджуваної системи. Наприклад, при визначенні варіанта побудови комп'ютерної мережі, яка б мала мінімальну вартість при дотриманні вимог щодо продуктивності й надійності, метою моделювання може бути пошук параметрів мережі, що забезпечують мінімальне значення показника ефективності. Одним із цих параметрів може бути вартість.

Задача може формулюватися інакше. З декількох варіантів конфігурації комп'ютерної мережі необхідно вибрати найбільш надійний. У цьому випадку як показник ефективності можна взяти один із показників надійності (середнє напрацювання на відмову, імовірність безвідмовної роботи та ін.), а метою моделювання є порівняльна оцінка варіантів мережі за цим показником.

Уточнення мети моделювання. Таким чином, на основі аналізу взаємодії системи з навколишнім середовищем і попереднього вивчення внутрішніх структурних та функціональних особливостей визначається мета моделювання шляхом визначення виду критерію ефективності системи. Потім виключаються ті характеристики, які можна визначити без моделювання. Підсумкова множина зовнішніх впливів, які враховуються, повинна включати тільки сприятливі (корисні впливи) або перешкоджаючі (збурюючі впливи) функціонуванню системи. Але, природно, при моделюванні не вдається та й недоцільно включати все різноманіття збурюючих факторів. Тому це часто призводить до ідеалізації умов і, можливо, до викривлення результатів моделювання.

Якщо моделювання має на меті не тільки фіксації властивостей, але й оптимізації характеристик, то необхідно виявити ті параметри, які можна змінювати в процесі моделювання. Коли ставиться задача визначення залежності характеристик від деяких параметрів системи, то ці характеристики й параметри повинні бути точно зафіксовані.

Оцінка доцільності здійснення моделювання є завершальним моментом етапу визначення мети моделювання. Проведення моделювання потребує деяких витрат: чим складнішою є система, й чим вищими є вимоги до точності результатів, тим більші витрати. Якщо метою є обґрунтування працездатності системи, то економічний ефект від експлуатації цієї системи повинен перевищувати витрати на моделювання. При оптимізації системи витрати на моделювання мають окупатися за рахунок різниці між найкращим і найгіршим варіантами системи.

Якщо результат моделювання показує, що досліджуваний варіант системи є прийнятним (оптимальним), то не доцільно ухвалювати рішення щодо даремних витрат на моделювання. Важливо, що моделювання підтвердило правильність прийнятих проектних рішень.

Розробка концептуальної моделі. Концептуальна (змістовна) модель – це абстрактна модель, яка визначає склад і структуру системи, властивості її елементів і причинно-наслідкові зв'язки, властиві досліджуваній системі й істотні для досягнення мети моделювання.

Як бачимо, це всього-на-всього словесний опис природи, параметрів і умов взаємодії окремих компонентів системи. Це первинне представлення моделі,

можливо, в уяві дослідника. Водночас концептуальна модель – це в деякому сенсі субстрат системи, що забезпечує досягнення мети моделювання.

Необхідність обґрунтування включення в модель певних важливих елементів і властивостей, а також виключення з моделі несуттєвих властивостей, потребує глибоких знань про саму систему. Це протиріччя (включення одних елементів і виключення інших) призводить до певних труднощів, оскільки виявлення впливу виключення того або іншого фактора на ступінь викривлення результатів вимагає створення вже двох моделей: з урахуванням і без урахування цього фактора. А оскільки часто кількість елементів буває надзвичайно великою, то й кількість моделей може збільшуватися лавиноподібно, призводячи до значного зростання витрат.

Простота моделі та її адекватність досліджуваній системі – це той рідкий та з труднощами знайдений компроміс, який повинен бути досягнений при моделюванні.

Відповідальним за це є розробник. Саме він на основі своїх знань і досвіду приймає рішення про виключення з моделі деякого елемента або набору елементів без повної впевненості в тому, що ці дії не призведуть до одержання значної похибки при моделюванні. Тому часто говорять, що моделювання є не тільки наукою, а й мистецтвом.

Розробка статичної складової концептуальної моделі. Створення розробником концептуальної моделі можна формалізувати, тобто розбити на дві такі дії: розробку статичної й динамічної моделей. На етапі створення статичної моделі здійснюються стратифікація, деталізація, локалізація й структуризація.

Стратифікація. Обов'язковими властивостями системи (і обчислювальної в тому числі) є, з одного боку, її цілісність, а з іншого – здатність до розбивки системи на сукупність елементів. У свою чергу й модель – це сукупність частин, що забезпечують збереження цілісності системи.

Поділ системи на сукупність елементів (членованість системи та її елементів) може привести до побудови ієрархічної послідовності моделей. У підсумку система подається у вигляді набору моделей, що відображають її поведінку на різних рівнях декомпозиції (ці рівні називаються стратами). Кожний рівень урахує притаманні йому властивості, змінні й залежності, а процес виділення рівнів називається стратифікацією.

Побудова стратифікованої концептуальної моделі передбачає включення в неї параметрів, за допомогою яких можливе варіювання властивостей при моделюванні, які забезпечують визначення необхідних характеристик при конкретних зовнішніх впливах на заданому часовому інтервалі функціонування системи. Інші параметри без жалю виключаються з моделі.

Деталізація. Функціонування будь-якої системи – це реалізація певної кількості технологічних процесів перетворення речовини, енергії або інформації. Ці процеси складаються з послідовності елементарних операцій, а виконання кожної елементарної операції забезпечується певним ресурсом. Звідси випливає, що в моделі повинні бути наявними складові елементи, які реалізують виконання всіх технологічних процесів. Крім того, у модель можуть включатися елементи, що

служать управлінню ресурсами й процесами, а також елементи, призначені для зберігання інформації, необхідної для керування.

Глибина деталізації здійснюється до такого рівня, щоб були залежності параметрів вихідних впливів для кожного елемента. Ці параметри повинні бути істотними для функціонування системи й визначення її вихідних характеристик від параметрів вхідних впливів.

Підвищення рівня деталізації опису системи приводить до одержання більш точної її моделі. Але це ускладнює процес моделювання й веде до зростання часових витрат на його здійснення.

З наведеного випливає правило: у модель повинні бути включені всі параметри, які забезпечують визначення характеристик, що цікавлять дослідника, системи на заданому часовому інтервалі її функціонування; інші параметри, за можливості, виключаються з моделі.

Локалізація. Це зображення зовнішнього середовища у вигляді генераторів зовнішніх впливів, що включаються до складу моделі як елементи (рис. 4.1). Їх можна підрозділити на:

- генератори робочого навантаження, що поставляють на вхід системи речовину, енергію або дані;
- генератори керуючих і збурюючих впливів.

Результати функціонування системи підрозділяють на:

- продукти перетворення;
- інформацію про стан системи;
- керуючі впливи на інші системи.
- 

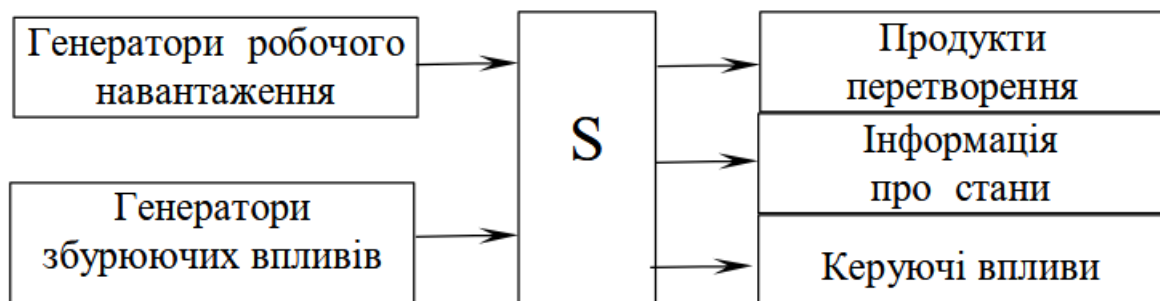


Рисунок 4.1 – Зображення зовнішнього середовища системи у вигляді генераторів зовнішніх впливів

Структуризація. Це перелік зв'язків між елементами моделі. Зв'язки бувають дійсні та інформаційні. Дійсні зв'язки показують шляхи можливого переміщення продуктів перетворення від елемента до елемента. За допомогою інформаційних зв'язків здійснюється передача між елементами керуючих впливів та інформації про стани. Ці зв'язки можуть і не бути в системі якимось матеріальним каналом.

У випадку, якщо система складається з однофункціональних елементів з одним вихідним дійсним зв'язком, інформаційні зв'язки, природно, відсутні, а керування функціонуванням проводиться самою структурою. Це є принципом структурного керування. Як приклад подібних систем зазвичай наводять логічні елементи обчислювальних комплексів.

Якщо система включає в себе елементи з декількома вихідними дійсними зв'язками і є керуючі засоби й інформаційні зв'язки, то вона функціонує відповідно до програмного або алгоритмічного керування. У цьому випадку керування потрібне для визначення самого елемента для того, яку операцію перетворення виконати й куди передати.

Концептуальна модель конкретно містить перелік і зміст усіх правил та алгоритмів керування робочим навантаженням, елементами й процесами.

Розробка динамічної складової концептуальної моделі. Усе перераховане вище спрямоване на розробку статичної моделі, тобто для відображення її складу і структури. А для опису динаміки функціонування системи необхідно враховувати алгоритми керування й параметри вхідних впливів та елементів.

Як уже згадувалося, у процесі функціонування системи реалізується технологічний процес перетворення речовини, енергії й інформації. В обчислювальних машинах реалізується мультипрограмний режим роботи, а технологічний процес у них реалізує деяку послідовність елементарних операцій, частина з яких виконується паралельно різними елементами (ресурсами).

У загальному випадку існує два підходи до реалізації процедур керування технологічним процесом. Це програмний і структурний підходи.

Технологічний процес, що задається програмою, реалізується деяким аналогом алгоритму керування. Алгоритм визначає, якими є ресурси системи, в якій послідовності вони знаходяться, які операції повинні виконуватися для досягнення мети функціонування.

Існує інтуїтивне уявлення про алгоритм як про формальну сукупність операцій і порядку їх виконання для розв'язання задач якого-небудь типу.

Алгоритм зазвичай розуміється як точне розпорядження, що визначає процес переробки вихідних даних у необхідний результат. Будь-який алгоритм характеризується масовістю, детермінованістю і результативністю.

У випадку використання структурного принципу керування для кожного елемента системи вибираються параметри, які змінюються в часі й, відповідно, відображають перебіг технологічного процесу. Множина цих параметрів відображає стан системи, а функціонування системи подається у вигляді послідовної зміни станів.

На завершальному етапі створення концептуальної моделі необхідна перевірка її адекватності вихідній системі. Але оскільки самої моделі у фізичному сенсі поки не існує, таку перевірку повинен здійснити експерт, але, у жодному разі, не розробник моделі.

Підготовка вихідних даних. Потрібно пам'ятати, що розробник у процесі створення моделі взаємодіє з багатьма фахівцями, знайомими із самою системою. А оскільки вимоги до моделі можуть змінюватися в процесі вивчення системи, то розробнику моделі може знадобитися постійна консультація з фахівцями з досліджуваних питань. Головне, що при створенні моделі розробник має використовувати всю доступну інформацію, яка може бути отримана різними методами. Ці методи є такими:

- консультації з багатьма фахівцями з досліджуваного питання;
- спостереження за системою (якщо система, подібна до досліджуваної, уже

існує, то зібрані дані будуть корисними при моделюванні).

Однак при використанні таких даних можуть виникнути деякі незручності:

- дані не являють собою те, що в дійсності необхідно моделювати;
- дані не мають підходящого типу або формату;
- у даних можуть бути помилки вимірювання, записи або округлення;
- дані можуть бути необ'єктивними для одержання певної вигоди;
- дані можуть бути подані в несумісних одиницях;
- результати, отримані під час моделювання подібних систем;
- досвід та інтуїція розробника – особливо, якщо система є подібною до тієї, що моделюється, що не існує на даний момент.

Таким чином, збір, підготовка, первинна обробка вихідних даних (якісних і кількісних) проводиться протягом декількох вихідних етапів процесу розробки моделі. Дані можуть постійно коректуватися й уточнюватися.

Кількісні параметри системи повинні мати конкретні значення, оскільки вони вирішально впливають на успіх моделювання. Точність і повнота вихідних даних багато в чому визначають вірогідність результатів моделювання.

Параметри моделі (вихідні дані) у загальному випадку можуть бути детермінованими або стохастичними. З іншого боку, вони часто виявляються нестационарними. І оскільки в більшості випадків ці дані повинні характеризувати (описувати) проєктовану (не існуючу) систему або систему, що модернізується, то процедура збору вихідних даних перетворюється в дуже складну й дуже важливу проблему.

Більшість параметрів, за своєю природою, будучи випадковими величинами, при моделюванні часто подається у вигляді детермінованих середніх значень. Це припустимо в тих випадках, коли випадкові величини мають малий розкид, або коли припустимо враховувати в моделі тільки середні значення. Але це завжди веде до появи певної похибки моделювання, оскільки вплив випадкових факторів може призвести не тільки до розсіювання, але й до зсуву середніх значень результатів.

Іноді можливий і зворотний підхід, коли детерміновані характеристики замінюються випадковими величинами. Зазвичай це спрямовано на скорочення обсягів вихідних даних. Нехай, наприклад, моделюється обробка даних обчислювальною системою. У цьому випадку для багаторазових процесів реалізації програм із різними обсягами вихідних даних можна задавати всю сукупність кількостей цих даних. Також можна їх замінити випадковою величиною із заданим законом розподілу (методика реалізації випадкових величин показана в другій частині навчального посібника).

Підбір закону розподілу. Для систематизації значень випадкових параметрів необхідний збір статистичних даних і їх обробка для визначення можливості подання параметрів, у вигляді якого-небудь теоретичного закону розподілу.

Процедура підбору виду закону розподілу полягає в такому. За сукупністю числових значень параметра будується гістограма відносних частот – емпірична щільність розподілу. Гістограма апроксимується плавною кривою. Отримана крива послідовно порівнюється з кривими щільності розподілу різних теоретичних законів розподілу. Вибирається один із законів за найкращим збігом виду порівнюваних

кривих. За емпіричним значенням обчислюють параметри цього розподілу. Потім виконують кількісну оцінку ступеня збігу емпіричного й теоретичного розподілу за тим або іншим критерієм згоди (наприклад, Пірсона (хі-квадрат), Колмогорова, Смирнова та ін.). Перелічені етапи досить детально розроблені й описані в математичній статистиці.

З іншого боку, вихідні дані можуть бути подані вже в обробленому вигляді. При цьому теж виникають проблеми: розподіл побудований за малою вибіркою, інформація подана в якісній формі, є тільки агреговані оцінки, дані застаріли або отримані в іншому місці та за інших умов, у вибірці відсутня частина даних.

Апроксимація функцій і висування гіпотез. Кожному елементу системи в будь-який момент часу можна поставити у відповідність функціональний зв'язок між параметрами вхідних впливів і його вихідними характеристиками. Ця функціональна залежність часто є очевидною, або іноді легко визначається в результаті аналізу природи функціонування системи.

Для деяких елементів вдається тільки одержати набір експериментальних даних про кількісні значення вихідних характеристик при різних значеннях параметрів. У цьому випадку висувається деяка гіпотеза про характер функціональної залежності, тобто здійснюється апроксимація цієї залежності певним математичним рівнянням. Для цього використовуються методи регресійного, кореляційного або дисперсійного аналізів.

Вид рівняння може задаватися розробником. Найбільш просто це здійснюється для двох змінних за результатами порівняння графіка з експериментальними точками й графіків розповсюджених апроксимуючих функцій (прямої, параболи, гіперболи, експоненти та ін.). Потім, для забезпечення найкращого наближення кривої до експериментальних даних, використовуючи регресійний аналіз, обчислюються значення констант вибраного рівняння. Зазвичай наближення оцінюються за критерієм найменших квадратів.

Якщо параметри відбивають нові елементи створюваної системи або нові умови її функціонування, то немає можливості зібрати фактичні дані. У цьому випадку залучаються фахівці, які добре уявляють обговорювану проблему і здатні висунути гіпотези про можливі значення таких параметрів. Ступінь суб'єктивності може бути зменшений, якщо скористатися методиками експертних оцінок.

Етап збору й обробки вихідних даних завершується класифікацією їх на зовнішні і внутрішні, постійні й змінні, безперервні та дискретні, лінійні й нелінійні, стаціонарні та нестаціонарні, детерміновані й стохастичні. Крім того, визначаються цілі зміни для змінних кількісних параметрів, а для дискретних величин – їх можливі значення.

Розробка математичної моделі. Математична модель – це сукупність математичних об'єктів і відношень, які відображають об'єкти й відношення деякої предметної області (області реального світу). Відомо, що тими самими математичними моделями можуть описуватися зовсім різні за природою процеси.

Основою для розробки математичної моделі служать концептуальна модель і кількісні вихідні дані. Переслідуються дві мети:

– одержати однозначний формалізований опис структури й процесу функціонування системи;

– представити процес функціонування з використанням однієї з можливих узагальнених формалізованих схем.

Цими найпоширенішими схемами є, наприклад, безперервні детерміновані системи, автомати, агрегативні системи, системи масового обслуговування та ін.

Безперервні детерміновані системи. Найпростішим видом моделей таких систем є лінійне співвідношення (пряма пропорційна залежність) між двома числовими змінними  $y = kx$ , де  $k$  – коефіцієнт (числовий параметр), що відображає властивості моделі. Використання такої залежності дозволяє описувати багато процесів у реальних системах (це і закон Ньютона в механіці, і закон Ома в електротехніці).

Автомати. Автоматні моделі використовуються для аналізу функціонування й проектування окремих вузлів обчислювальних систем, для розробки програмного забезпечення, а також можуть бути використані при створенні моделей в інших галузях техніки, біології, медицини та ін.

Автомат подають як деяке обладнання (чорний ящик), на яке надходять зовнішні впливи (вхідні сигнали), що змінюють внутрішній стан автомата, причому реакція автомата на кожний вплив (вихідний сигнал автомата) залежить як від конкретного значення впливу, так і від стану автомата.

Агрегативні системи. Це дуже поширений підхід, що дозволяє описувати функціонування безперервних і дискретних, детермінованих і стохастичних систем. Агрегат подається як основний елемент будь-якої системи (це агрегатне подання системи).

Системи масового обслуговування. В основу побудови моделей систем масового обслуговування (СМО) покладена формалізована схема, що передбачає наявність обслуговуючих приладів (каналів обслуговування), вхідного потоку заявок на обслуговування, можливі черги із заявок, що очікують початку обслуговування, і вихідного потоку обслужених заявок або заявок, які одержали відмову. Розроблена й широко використовується в повсякденній практиці для створення й дослідження математичних моделей відповідна теорія – теорія масового обслуговування. Це дозволяє в багатьох випадках широко використовувати СМО для побудови моделей.

Таким чином, для побудови математичної моделі може використовуватися одна з описаних вище формалізованих схем. Вибір тієї або іншої схеми здійснюється в результаті аналізу концептуальної моделі та вихідних даних

#### **4.4 Модель «Чорного ящика»**

У теорії досліджень систем і на практиці часто достатньо мати лише частину інформації об'єкта, що досліджується. Наприклад, коли ми не знаємо поточного числового значення точного часу (проблема – незнання точного часу, мета – не спізнитися будь-куди), потрібно просто подивитися на годинник і не треба думати про його внутрішню роботу і джерело енергії роботи.

У попередньому прикладі призначення годинників (метою їхнього існування) є показати точний час у будь-який момент і тим самим впливати на зовнішнє для нього середовище.

Якщо дотримуватися першого визначення системи, то вона є засобом і, таким чином, існують можливості впливати на це з зовнішнього середовища (уточнювати хід, забезпечити енергію, дивитися і т. д.).

Склад системи при цьому не відомий (або не є цікавим зовнішньому середовищу), але цього достатньо, щоб вирішити це завдання.

Іншими словами, важливо визначити, що необхідно на вході до системи та що має бути на виході з неї, і не важливо, що знаходиться всередині системи. Таким чином, наведену послідовність називають моделлю «Чорного ящика».

Поняття «Чорний ящик» було запропоновано У.Р. Ешбі. У кібернетиці воно дозволяє вивчати поведінку системи, тобто її реакції на різні подразники, абстрагуючись від їх внутрішньої структури. Таким чином, система вивчається не як набір взаємопов'язаних елементів, а як щось ціле взаємодіюче на своїх входах і виходах. Метод «Чорного ящика» можна застосовувати у різних ситуаціях.

Цей метод слід використовувати, якщо внутрішні процеси системи не доступні. Метод «Чорного ящика» використовується при дослідженні систем, всі елементи і зв'язки яких в принципі доступні, але вони або численні і складні, що призводить до величезних витрат часу і грошей при безпосередньому вивченні; або таке вивчення експертизи є не дійсним з будь-якої причини.

Дослідження за методом «чорного ящика» полягає у попередньому спостереженні взаємодії системи з зовнішнім середовищем та створенні списку впливу на вході та виході, серед яких виявляють суттєві впливи. Потім здійснюється вибір входів і виходів для вивчення, з урахуванням існуючих засобів впливу на систему та засобів спостереження за її поведінкою.

На наступному етапі виконується вплив на вході системи та реєстрації виходів. У процесі вивчення спостерігач і «Чорний ящик» формують систему зі зворотним зв'язком, а перші результати дослідження – множина пар станів входу та виходу, аналіз яких дає їм можливість встановити причинно-наслідковий зв'язок.

Існує два види «чорних ящиків».

До першого виду відносять будь-який «чорний квадрат», який можна розглядати як автомат, що називається скінченим або нескінченим. Поведінка цих «чорних ящиків» відома.

До другого виду належать такі «чорні ящики», поведінка яких може спостерігатися лише в експерименті. У цьому випадку явною або неявною формою виражається гіпотеза про передбачуваність поведінки «Чорного ящика» в імовірнісному сенсі. Без попередньої гіпотези не можливе будь-яке узагальнення або, як кажуть, неможливо зробити індуктивний висновок, що базується на експериментах з «чорним квадратом».

Таким чином, «Чорний ящик» – це система, в якій вхідні та вихідні дані, внутрішнє улаштування роботи та процесів, що відбуваються в ній, не відомі. Можна вивчати систему тільки на її входах і виходах, однак, це дослідження не забезпечує повне уявлення про внутрішню роботу системи, тому що таку саму поведінку можуть мати різні системи.

Потрібно зазначити, що основною причиною безлічі входів і виходів моделі

«Чорний ящик» є те, що будь-яка реальна система, як і будь-який об'єкт, взаємодіє з об'єктами зовнішнього середовища необмежену кількість разів і по-різному.

За ступенем інформованості дослідника про об'єкт є розподіл об'єктів на три типи «ящиків»:

– «білий ящик» – про об'єкт знає все;

– «сірий ящик» – відома структура об'єкта та не відомі кількісні значення параметрів;

– «чорний ящик» – про об'єкт нічого не відомо. Чорний ящик умовно зображують як на рисунку 4.2.

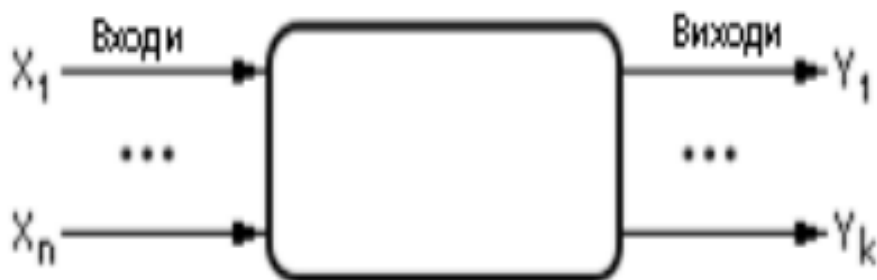


Рисунок 4.2 – Позначення чорного ящика на схемах

Значення на входах і виходах «чорного ящика» можна спостерігати і виміряти. Вміст ящика не відомий.

Завдання полягає в тому, щоб, знаючи багато значень на входах і виходах, побудувати модель, тобто визначити функцію ящика, згідно з якою вхід перетворюється на вихід. Це завдання має назву задача регресійного аналізу.

Залежно від входів, які доступні досліднику для керування або тільки моніторингу, можемо говорити про активний або пасивний експеримент з ящиком.

#### 4.5 Динамічні системи

Вище ми розглядали статичні моделі, тобто випадок, коли один експеримент не залежить від іншого. Можна сказати, що система не мала пам'ять. Тобто, в який би момент часу ми не вимірювали значення вихідної величини, при однаковому значенні вхідного сигналу результат був той самий. Якщо щоразу значення на виході, при тому самому вхідному значенні, різне, тобто залежить динамічною системою.

Динамічні системи, на відміну від статичних, пам'ятають свій минулий стан, тобто мають пам'ять. Тому в записі моделі динамічних систем присутня похідна, що зв'язує минулий стан системи із сьогоденням. Чим більшу пам'ять має система, тим більше станів з минулого впливають на сьогодення, тим більший ступінь старшої похідної використовується в записі моделі. Розглянемо моделювання динамічних систем.

Постановка завдання: на вході й виході чорного ящика є залежності параметрів  $X$  і  $Y$  від часу  $t$ . Завдання полягає в тому, щоб адекватно визначити

чорний ящик. Графіки залежностей  $X(t)$  і  $Y(t)$  можуть бути самими різними, наприклад, такими, як показано на рисунку 4.3 та рис. 4.4.

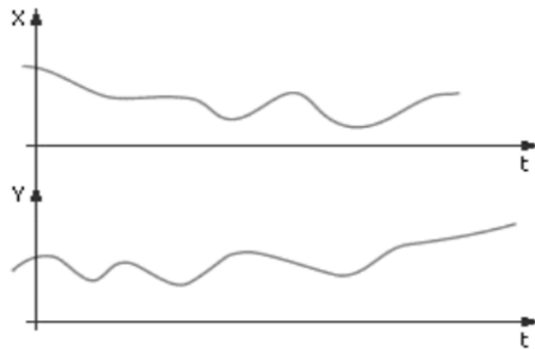


Рисунок 4.3 – Часова залежність – вхідний і вихідний сигнали

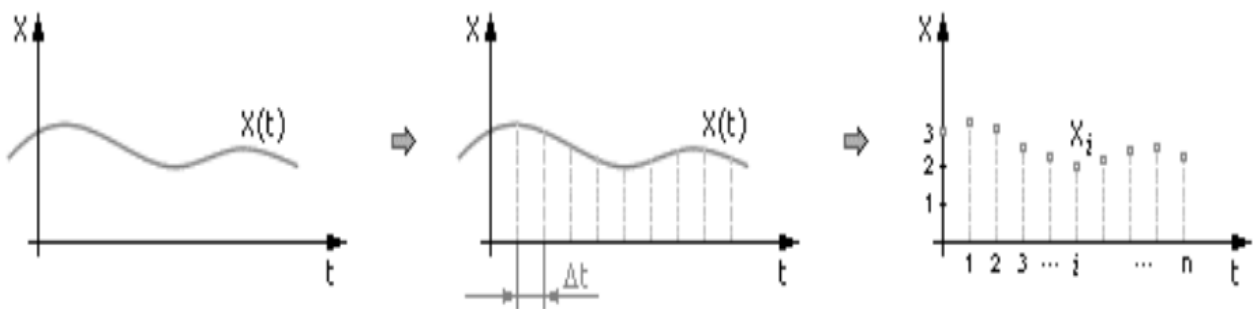


Рисунок 4.4 – Дискретизований часовий сигнал

Будь-яка динамічна система характеризується рядом параметрів. Зазвичай параметрами називають коефіцієнти при похідних (першої, другої і т.д.) у записі моделі. Чим більший ступінь старшої похідної, яка присутня в записі моделі, тим більший порядок динамічної системи, тим глибша її пам'ять, і тим більше коефіцієнтів (параметрів) необхідно визначити, щоб ідентифікувати систему.

Для того щоб визначити параметри динамічної системи, спочатку потрібно оцінити її порядок: він збігається зі ступенем найбільшої з похідних  $Y$  стосовно  $t$ . Пояснимо зміст графіка. При нульових початкових умовах, якщо вхідний сигнал відсутній, вихідний сигнал дорівнює нулю, і говорять, що система перебуває в спокої. Якщо подати на вхід одиничний (пробний) сигнал і втримувати його на вході досить довго, то система на виході спробує підпорядкуватися йому, почне відхилятися від нульового стану. Очікується, що система на виході повинна дійти до значення  $kx$ , тобто збільшувати сигнал  $x$  в  $k$  разів ( $k$  – коефіцієнт підсилення вхідного сигналу). Але, як видно, відбувається це не відразу, а з деякою затримкою, сигнал на виході наростає поступово, інерційно. Наскільки інерційно реагує система, залежить від параметра  $T$ . Система досягнення значення  $kx$  на виході й буде тримати цей сигнал, поки тримається на вході одиничний сигнал. Перехід від нуля до  $kx$  відбувається в часі. Перехід – процес динамічний, тобто в сигналі присутня зміна, що описується похідною, і вихід виявляється меншим від входу на деяку величину.

## 4.6 Модель у вигляді фільтра Калмана

Калманом було доведено теорему про те, що будь-який динамічний сигнал може бути поданий у вигляді формули (4.1):

$$Y_i = A_1 X_i + A_2 X_{i-1} + \dots + B_1 Y_{i-1} + B_2 Y_{i-2} + \dots + C, \quad (4.1)$$

де  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C$  – невідомі коефіцієнти моделі;

$X_i$  – експериментальні точки;

$Y_{i-1}, Y_{i-2}$  – у моделі динамічної системи відповідає наявності першої похідної, другої похідної.

Суть фільтра Калмана полягає в тому, що вихід системи в  $i$ -й момент часу визначається вхідним сигналом, його передісторією й передісторією самого стану системи.

Чим більше є членів ряду, тобто чим більше змінних  $Y$  ураховується в записі моделі, тим глибша пам'ять системи. Зазначимо, що наявність члена  $Y_{i-1}$  у моделі динамічної системи відповідає наявності першої похідної,  $Y_{i-2}$  – другої похідної і т.і.

Допустимо, відомі такі експериментальні дані: стану сигналів  $X_i$  і  $Y_i$  в  $n$  часових точках (табл. 4.1).

Оскільки для кожної експериментальної точки  $X_i$  потрібно вказати її сусідів, що задаються поруч, то зручно відлік подати в розширеній таблиці, яка використовується для розрахунків (табл. 4.2).

Таблиця 4.1 – Таблиця експериментальних даних

№	$X_i$	$Y_i$
1	$X_1$	$Y_1$
2	$X_2$	$Y_2$
...	...	...
$n-1$	$X_{n-1}$	$Y_{n-1}$
$n$	$X_n$	$Y_n$

Знаходимо помилку між значенням експериментально знятої точки та її теоретичним значенням (форм.4.2):

$$E_m = Y_m - A_1 X_m - A_2 X_{m-1} - \dots - B_1 Y_{m-1} - B_2 Y_{m-2} - \dots - C, \quad (4.2)$$

Сумарна помилка  $F$  (сума береться за всіма експериментальними точками) повинна бути мінімізована щодо обумовлених змінних

$$A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C: \\ F = \sum_{i=1}^m E_i^2 \Rightarrow \min_{A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C}, \quad (4.3)$$

Після взяття частинних похідних від  $F$  за  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C$ , прирівнювання їх до нуля й складання системи рівнянь впливає лінійна множинна регресійна модель, з якої визначаються невідомі коефіцієнти  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C$  моделі.

Таблиця 4.2 – Таблиця експериментальних даних і проміжних розрахунків

	$X_i$	$X_{i-1}$	$Y_i$	$Y_{i-1}$	$Y_{i-2}$
$m$	$X_m$	$X_{m-1}$	$Y_m$	$Y_{m-1}$	$Y_{m-2}$
$m + 1$	$X_{m+1}$	$X_m$	$Y_{m+1}$	$Y_m$	$Y_{m-1}$
$m + 2$	$X_{m+2}$	$X_{m+1}$	$Y_{m+2}$	$Y_{m+1}$	$Y_m$
...	...	...	...	...	...

Оскільки коефіцієнти моделі визначені, побудуємо реалізацію (рис. 4.5), що імітує поведінку системи, описаної фільтром Калмана.

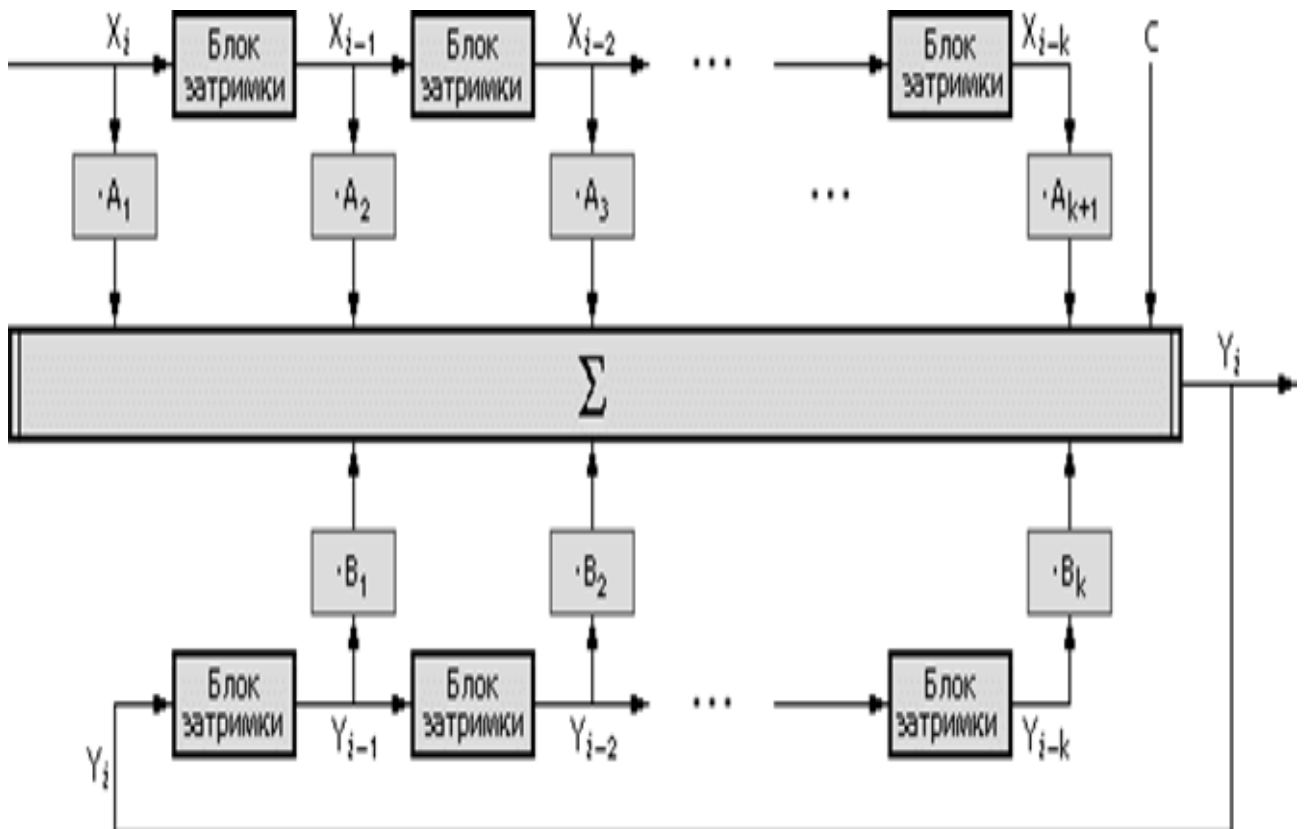


Рисунок 4.5 – Варіант технічної реалізації фільтра Калмана

«Блок затримки» у наведеній реалізації необхідний для того, щоб зрушити сигнал на такт і одержати сусідній відлік для наступної змінної ряду моделі. Залежно від середовища реалізації «блок затримки» можна організувати різними способами.

На рисунку 4.6 наведено схему налагодження (автоматичного знаходження коефіцієнтів).

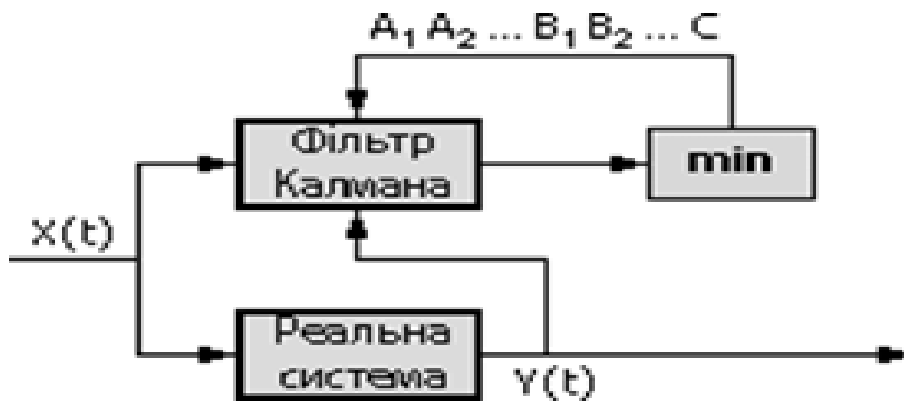


Рисунок 4.6 – Схема автоматичного налагодження коефіцієнтів моделі «на ходу»

На рисунку 4.7 наведено схему перевірки фільтра Калмана.

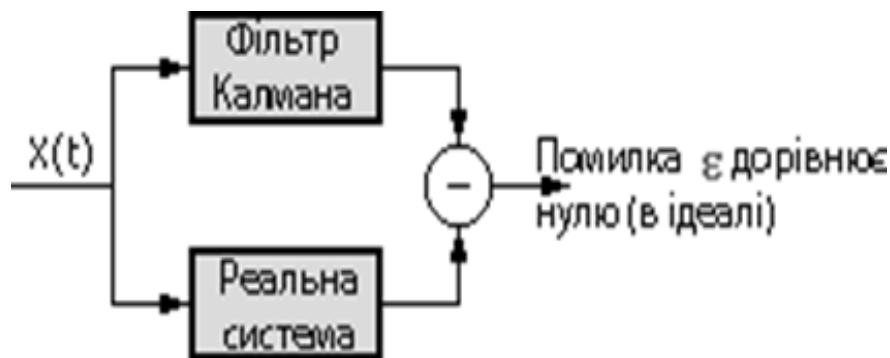


Рисунок 4.7 – Схема перевірки роботи моделі фільтра Калмана

#### 4.7 Модель динамічної системи у вигляді подання Фур'є

Цей спосіб моделювання динамічних систем ґрунтується на тому, що в будь-якому сигналі наявні гармонічні складові. Залежно від частоти складові називаються гармоніками (перша, друга і т. д.). Сума гармонік із відповідними вагами становить модель сигналу.

Нехай, наприклад, у деякому сигналі наявна сума трьох гармонік :  $3\cos(t) + 2\cos(3t) + 0,5\cos(5t)$ . Це значить, що в сигналі наявна перша гармоніка з амплітудою 3, третя гармоніка – з амплітудою 2, п'ята гармоніка – з амплітудою 0,5. Сам сумарний сигнал виглядає так, як показано на рисунку 4.8.

Спектр цього сигналу показаний на рисунку 4.9. Зрозуміло, що в нашому прикладі більшу вагу (амплітуду) у сигналі має (більше за інших наведена) перша гармоніка, а найменшу вагу – п'ята.

Будь-який сигнал, яким би складним він не був, може бути поданий сумою гармонік. Більш простий сигнал подається у вигляді меншої кількості гармонік, більш складний – більшого. Швидко змінний сигнал, що містить різкі піки, має у своєму

складі гармоніки високих порядків. Чим більше гармонік подано в моделі сигналу, тим точніше, у загальному випадку, модель відображає реальний сигнал.

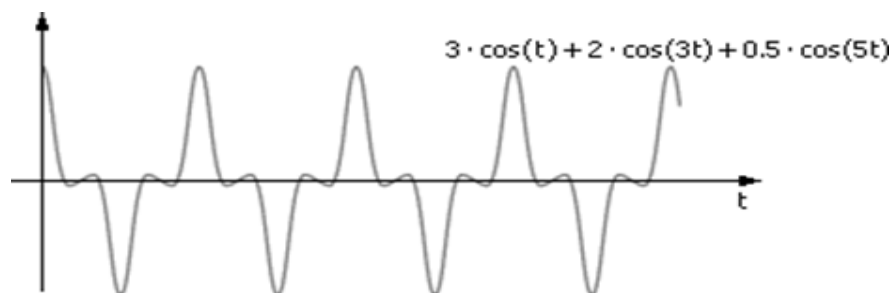


Рисунок 4.8 – Приклад гармонічного сигналу

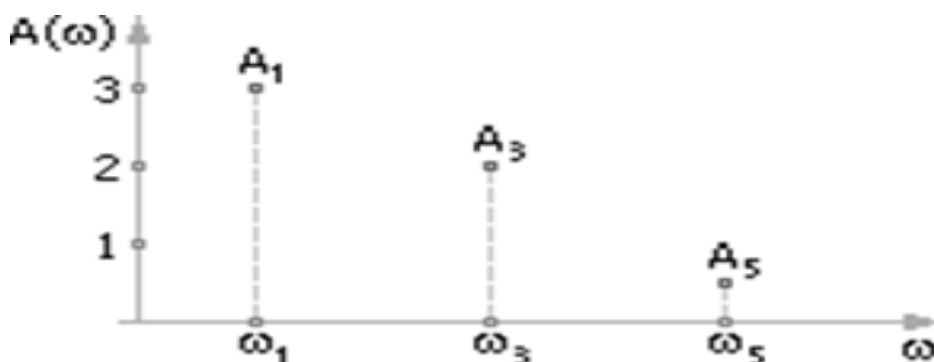


Рисунок 4.9 – Приклад спектра гармонічного сигналу

Нехай заданий якийсь сигнал  $X(t)$  (рис. 4.10).

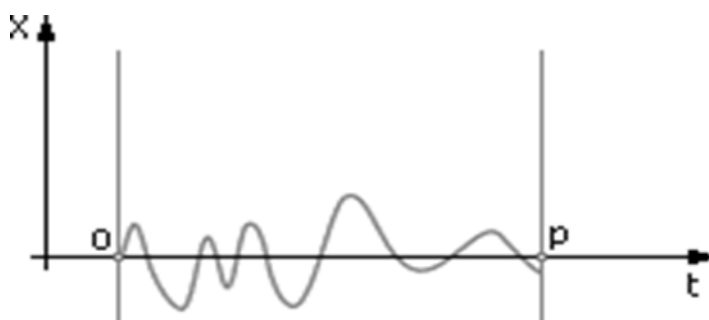


Рисунок 4.10 – Часовий сигнал на вході перетворення Фур'є

Визначимося з часом розгляду сигналу: якщо сигнал періодичний, то час розгляду дорівнює періоду  $p$  сигналу; якщо сигнал неперіодичний, то періодом сигналу вважається увесь час його розгляду.

Спосіб моделювання проходження сигналу через динамічний об'єкт зводиться до операції множення двох змінних, точніше, до операції поелементного множення вектора одних змінних на вектор інших.

Схема перетворення показана на рисунку 4.11.

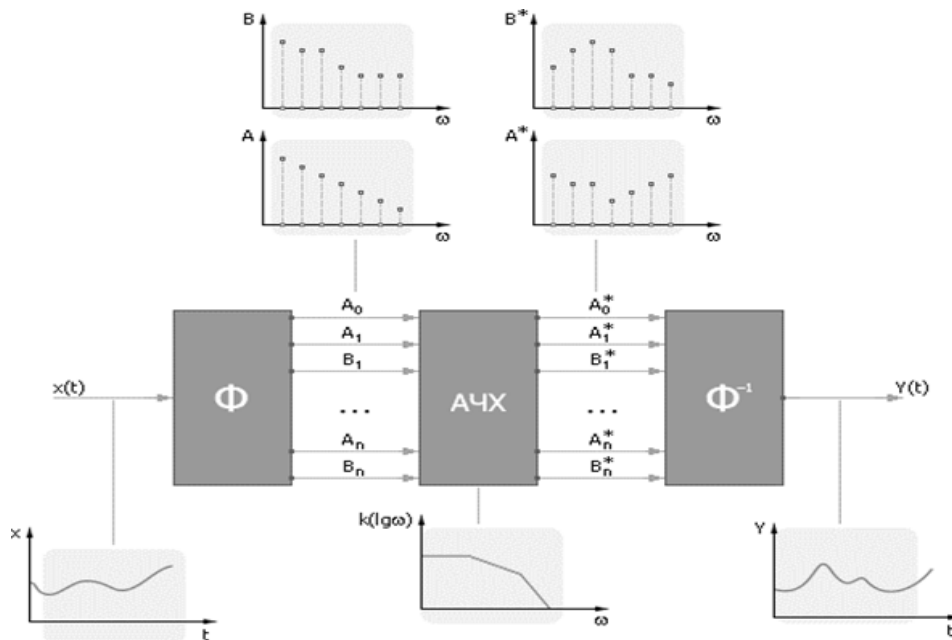


Рисунок 4.11 – Процедура перетворення сигналу при використанні методу Фур'є

Якби часовий сигнал проходив через ланку, яка в часовій області подана у вигляді диференціального рівняння, то довелося б його інтегрувати, що, звичайно, призводить до похибок результату. У частотній області достатньо перемножити значення коефіцієнтів ряду Фур'є сигналу й ланки при однакових частотах. Очевидно, що перевагою методу є заміна диференціальних рівнянь моделі на алгебраїчні. Зрозуміло, що цей підхід може бути використаний тільки для об'єктів, у яких відомий вид передавальної функції. Для невідомих випадків АЧХ може бути отримана числовим розкладанням у ряд.

У процесі моделювання набору об'єктів для перетворення сигналу (наприклад, протяжних трактів радіоелектронних обладнань) іноді доводиться застосовувати пряме й зворотне перетворення Фур'є неодноразово. На практиці послідовні блоки часто називають каскадами.

Метод, який ми розглянули, є одним із найбільш швидкодіючих. Це пов'язано із заміною операцій інтегрування й диференціювання, що зустрічаються в моделях динамічних ланок, на операції додавання й множення при переході в частотну область. Така процедура забезпечує точність і швидкодію моделі.

Для методу важливо, з якою частотою дискретизується сигнал при розкладанні в ряд Фур'є. Якщо частота дискретизації мала, тобто відліки в сигналі випливають рідко, з великими інтервалами, то частина сигналу залишається втраченою, оскільки між відліками може виявитися різко зростаючий і опадаючий пік, інформація про який зникне. Тобто говорять, що мала частота дискретизації зрізає високі частоти в сигналі. (Пік – це і є високочастотна складова, яка може бути втрачена).

#### Контрольні питання

1. Що є об'єктом моделювання?
2. Що таке модель системи?

3. Назвіть ознаки, за якими класифікують моделі.
4. Дайте визначення математичної моделі систем.
5. Що є моделюванням систем?
6. Що є предметом теорії моделювання?
7. Що є законом функціонування системи і в якому вигляді він може бути заданий?
8. Дайте визначення алгоритму функціонування системи.
9. Як визначають мету моделювання?
10. Дайте характеристику основних підходів до побудови математичних моделей.
11. Назвіть основні етапи побудови математичної моделі.
12. Дайте характеристику основним етапам моделювання систем.
13. Дайте визначення алгоритму функціонування системи.
14. Як визначають мету моделювання?
15. Назвіть основні етапи побудови математичної моделі.
16. Дайте характеристику основним етапам моделювання систем.
17. Дайте визначення «чорному ящику» та назвіть типи «ящиків» за ступенем інформованості дослідника про об'єкт, що розглядається?
18. Яке завдання вирішує задача регресійного аналізу?
19. Дайте загальну характеристику лінійним регресійним моделям.
20. Дайте загальну характеристику нелінійним регресійним моделям.
21. У чому різниця моделювання динамічних систем від статичних систем?
22. Дайте загальну характеристику моделей у вигляді фільтра Калмана.
23. В якому випадку можливо створити модель динамічної системи у вигляді подання Фур'є?

## ТЕМА 5. СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ

План лекції.

- 5.1 Загальні відомості про статистичне моделювання.
- 5.2 Загальна схема методу Монте-Карло.
- 5.3 Генератори випадкових чисел.
- 5.4 Моделювання випадкової події й повної групи несумісних подій.
- 5.5 Моделювання випадкової величини із заданим законом розподілу.
- 5.6 Моделювання нормально розподілених випадкових величин.
- 5.7 Моделювання системи випадкових величин.
- 5.8 Розподіл Пуассона.
- 5.9 Потоки випадкових подій.

Література: [ 5 - 8].

### 5.1 Загальні відомості про статистичне моделювання

Статистичне моделювання (СМ) – це вид комп'ютерного моделювання, що дозволяє одержувати статистичні дані про процеси в модельованій системі  $S$ . Статистичне моделювання – базовий метод моделювання, який полягає в тому, що модель випробовується множиною випадкових сигналів із заданою щільністю ймовірності. Метою такого моделювання є статистичне визначення вихідних результатів.

Статистична модель випадкового процесу – це алгоритм, за допомогою якого імітують роботу складної системи, що зазнала випадкового збурювання; імітують взаємодію елементів системи, що мають імовірнісний характер. Тоді статистичне моделювання можна визначити як спосіб вивчення складних процесів і систем, що зазнали випадкового збурювання, за допомогою імітаційних моделей.

Методика статистичного моделювання (метод Монте-Карло), складається з таких етапів:

- моделювання на ЕОМ псевдовипадкових послідовностей із заданою кореляцією й законом розподілу ймовірностей (метод Монте-Карло), що імітують на ЕОМ випадкові значення параметрів при кожному випробуванні;
- використання отриманих числових послідовностей в імітаційних математичних моделях;
- статистична обробка результатів моделювання.

### 5.2 Загальна схема методу Монте-Карло

Метод Монте-Карло – це числовий метод дослідження математичних моделей складних систем, оснований на моделюванні випадкових елементів і подальшому статистичному аналізі результатів моделювання.

Припустимо, що нам потрібно обчислити певну невідому величину  $m$ , і ми прагнемо зробити це, розглядаючи випадкову величину  $\xi$ , таку, в якій математичне сподівання  $E\{\xi\} = m$ . Нехай при цьому дисперсія даної випадкової величини  $D\{\xi\} = b$ . Розглянемо  $N$  випадкових незалежних величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , розподіли яких

збігаються з розподілом розглянутої випадкової величини  $\xi$ . Відповідно до центральної граничної теореми теорії ймовірностей розподіл суми  $\rho(n) = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  буде приблизно нормальним із середнім, таким, що дорівнює  $\mu = Nm$ , і дисперсією  $\sigma^2 = Nb^2$ . Згідно з «правилом трьох сигм», якими б не були  $m$  і  $\sigma$ ,

$$P\{\mu - 3\sigma < \rho_n < \mu + 3\sigma\} = 0,997,$$

тобто

$$P\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{\rho_n}{N} < m + \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0,997.$$

Останнє співвідношення можна переписати у вигляді

$$\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i - m < \frac{\rho_n}{N} < \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0,997.$$

Отримана формула дає метод розрахунку  $m$  і оцінку похибки цього методу. Суть застосування методу Монте-Карло полягає у визначенні результатів на основі статистики, одержуваної до моменту прийняття певного розв'язку. Тому імовірність результатів, одержуваних при використанні методу Монте-Карло, вирішальна визначається якістю генератора випадкових чисел.

Для одержання випадкових чисел на ЕОМ використовуються способи генерування, які зазвичай основані на багаторазовому повторенні певної операції. Отриманій у такий спосіб послідовності більше відповідає назва псевдовипадкових чисел, оскільки генерована послідовність є періодичною й, починаючи з певного моменту, числа почнуть повторюватися.

Основним недоліком методу Монте-Карло є імовірнісний характер результату, тобто відсутність строгих оцінок похибки, що прямують до нуля при  $n \rightarrow \infty$ .

Розглянемо використання методу Монте-Карло на прикладі обчислення інтеграла, значення якого аналітичним способом знайти не вдається.

Потрібно знайти значення інтеграла

$$y = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Обмежуємо криву зверху, праворуч і ліворуч. Випадковим чином розподіляємо точки в прямокутнику пошуку. Позначимо через  $N_1$  кількість точок, прийнятих для випробувань, тобто тих, що потрапили в прямокутник, та через  $N_2$  – кількість точок під кривою, тобто тих, які потрапили в зафарбовану площу під функцією. На рисунку 5.1 поданий графік функції  $f(x)$ . Обчислити значення інтеграла цієї функції – значить, знайти площу під цим графіком.

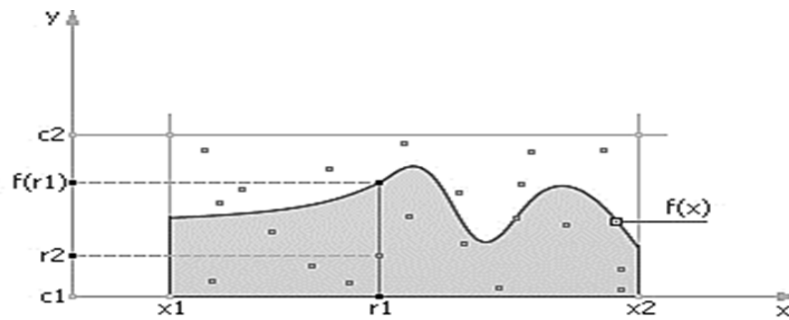


Рисунок 5.1 – Визначення значення інтеграла методом Монте-Карло

Тоді природно припустити, що кількість точок, які потрапили під криву відносно загальної кількості точок пропорційна площі під кривою (величині інтеграла) відносно площі випробуваного прямокутника. Математично це можна виразити так:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{y}{(x_2 - x_1)(c_2 - c_1)}.$$

Ці міркування, звичайно, статистичні і тим більш правильніші, чим більшу кількість випробуваних точок ми візьмемо.

Значення  $r_1$  і  $r_2$  на рисунку 5.1 є рівномірно розподіленими випадковими числами з інтервалів  $(x_1; x_2)$  та  $(c_1; c_2)$  відповідно.

Метод Монте-Карло є надзвичайно ефективним, простим, але необхідний «якісний» генератор випадкових чисел. Друга проблема застосування методу полягає у визначенні об'єму вибірки, тобто кількості точок, необхідних для забезпечення розв'язання із заданою точністю. Експерименти свідчать: щоб збільшити точність у 10 разів, об'єм вибірки потрібно збільшити в 100 разів; тобто точність приблизно пропорційна квадратному кореню з об'єму вибірки

### 5.3 Генератори випадкових чисел

Найбільше прикладів генерування випадкових чисел можна знайти в ігровому бізнесі. Це номери в спортивних лотереях, числа, які випадають на рулетці, варіанти розкладу карт тощо. Більшість комп'ютерних ігор теж базується на випадкових числах.

Типи генераторів. Без комп'ютера використання випадкових чисел, передбачене методом статистичних випробувань, не має сенсу, тому генератори випадкових чисел повинні бути безпосередньо з'єднані з комп'ютером. Це можна зробити за допомогою апаратних приставок до комп'ютера (апаратні методи) або спеціальних програм (програмні методи). Крім того, під час моделювання можна використати готові таблиці випадкових чисел, які слід розміщати в пам'яті комп'ютера або на зовнішньому накопичувачі.

Апаратні методи генерування випадкових чисел базуються на використанні деяких фізичних явищ (наприклад, шумів електронних приладів, радіоактивного випромінювання та ін.). Під час застосування апаратних генераторів випадковий електричний сигнал перетворюють у двійковий код, який вводиться в комп'ютер за

допомогою спеціальних аналого-цифрових перетворювачів. Один з найбільш поширених методів – це використання шумів електронних приладів. Якщо на підсилювач не подавати ніякого сигналу та увімкнути його на повну потужність, то буде чути шипіння (шум). Це і є шум електронних елементів підсилювача, який є випадковим процесом. Цей неперервний сигнал можна перетворити в дискретний. Існують різні схеми перетворення випадкового сигналу в послідовність двійкових цифр. У більшості випадків його підсилюють і встановлюють граничне значення напруги шумового сигналу, перевищення якого можна вважати значенням двійкової одиниці на деякому малому проміжку часу  $t$ . У протилежному випадку отримуємо двійковий нуль. Для отримання  $m$ -розрядного випадкового двійкового числа провадиться  $m$  вимірювань неперервного сигналу у фіксовані моменти часу  $t_1, t_2, \dots, t_m$ .

Вбудовані в комп'ютери апаратні генератори випадкових чисел останнім часом часто використовуються в системах захисту інформації. Прикладом застосування таких генераторів для забезпечення конфіденційності, цілісності та достовірності електронної інформації, яка зберігається в комп'ютері або передається по мережі, є пристрій для шифрування даних PadLock, інтегрований у деякі моделі процесорів, розроблених компанією Intel. Пристрій має інтерфейс прикладного рівня, що дає змогу розробникам програмного забезпечення отримувати випадкові числа без використання програмних драйверів. Такий спосіб отримання високоякісних випадкових послідовностей простіший та ефективніший, ніж використання апаратно-програмної RNG (Random Number Generator) архітектури і суто програмних генераторів, що особливо важливо під час побудови захищених програм.

Табличний метод. У 1955 році корпорація «Ренд» опублікувала таблиці випадкових чисел, які мали мільйон значень. Для заповнення цих таблиць застосовувались апаратні методи. Дані цих таблиць можна використовувати під час моделювання систем за допомогою методу статистичних випробувань. У сучасних комп'ютерах ці таблиці можна зберігати на зовнішніх носіях або навіть в основній пам'яті. Головним недоліком табличного методу є те, що під час його використання витрачаються значні об'єми основної пам'яті комп'ютера.

Найбільш розповсюдженими на практиці є програмні генератори, які дають змогу отримувати послідовності випадкових чисел за рекурентними формулами. Якщо бути абсолютно точним, то числа, які виробляють програмні генератори, насправді є псевдовипадковими («псевдо» у перекладі з грецької – нібито). Так їх називають тому, що алгоритми їх отримання завжди є детермінованими.

Загалом же програмні генератори повинні задовольняти таким вимогам:

- генерувати статистично незалежні випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі  $[0, 1]$ ;
- мати можливість відтворювати задані послідовності випадкових чисел;
- затрати ресурсів процесора на роботу генератора повинні бути мінімальними;
- легко створювати незалежні послідовності випадкових чисел (поток).

Слід звернути увагу на те, що більшість програмних генераторів виробляють випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі  $[0, 1]$ . Необхідність моделювання

таких чисел обумовлена тим, що на їх основі можна отримати випадкові числа практично будь-яких розподілів.

Якість роботи генераторів визначається статистичними властивостями послідовностей випадкових чисел, які він виробляє, незалежністю і випадковістю. Властивості послідовностей перевіряються за статистичними критеріями, детально описаними нижче.

Здатність відтворювання послідовності випадкових чисел полягає в тому, що за однакових початкових умов і параметрів генератор повинен відтворювати одні й ті ж послідовності псевдовипадкових чисел. Ідентичні послідовності випадкових чисел рекомендується використовувати у випадку, коли потрібно порівняти альтернативні варіанти систем, що моделюються, і налагодити програми. Однак можливість відтворення не завжди бажана під час моделювання систем і в комп'ютерних іграх (як це було в перших версіях відомої гри «Тетріс», коли кожна гра починалась з тієї ж послідовності). Для усунення недоліку – початкові значення величин брати з таймера комп'ютера.

Під час дослідження складних систем виникає необхідність у моделюванні послідовностей випадкових чисел великої довжини. Для їх створення потрібні швидкодіючі алгоритми генерування з мінімальними вимогами до ресурсів комп'ютера.

У більшості генераторів використовується рекурентна процедура  $x_{i+1} = f(x_i)$ . Найпростішим та найдавнішим серед таких генераторів є генератор фон Неймана та Метрополіса, робота якого базувалась на методі середини квадратів. Суть його.

Зобразимо довільне чотирирозрядне десяткове число як  $x x x x$ . Піднесемо його до квадрату і в отриманому результаті відкинемо по дві цифри зліва і справа.

```
x x x x
x x x x
x x |x x x x | x x
```

Чотири цифри, які залишилися і є новим числом. Якщо результат множення менше цифр ніж 8, то зліва дописують нулі.

Недоліки:

– якщо початкове число парне, то може відбутись виродження послідовності, тобто з деякого  $vs_i=0$ ;

– числа, які виробляє генератор, є сильно корельовані.

Лінійні конгруентні генератори. У більшості сучасних програмних генераторів використовується властивість конгруентності, яка полягає в тому, що два цілих числа  $A$  і  $B$  є конгруентними за модулем  $m$ , якщо їх різниця  $(A-B)$  є числом, яке ділиться на  $m$  без остачі ( тобто є кратним  $m$ ).

Записується це так:

$$A=B(\text{ mod } m).$$

Наприклад, щоб знайти число, конгруентне з числом 134 за модулем 10, необхідно знайти цілочислову остачу від ділення 134 на 10, яка = 4

Наведемо кілька прикладів обчислення конгруентних значень для різних  $t$ :

$$12 = 5 \pmod{7}; 35 = 5 \pmod{10}; 125 = 5 \pmod{10}.$$

Серед методів генерування випадкових чисел найбільш поширеним є лінійний мультиплікативний конгруентний метод, представлений формулою (5.1):

$$x_{i+1} = (Ax_i + c) \pmod{t}, \quad (5.1)$$

де  $i = 1, 2, \dots$ ;

$A, c$  і  $t$  - цілі константи.

Щоб отримати нове число, необхідно взяти псевдовипадкове число  $x$ , (або задати вихідне  $x_0$ ), помножити його на коефіцієнт  $a$ , додати константу  $c$  і взяти модуль отриманого числа за  $t$ , тобто розділити на  $t$ , і отримати остачу. Ця остача і буде наступним псевдовипадковим числом  $x_{i+1}$ . У разі правильного підбору параметрів цей генератор повертає випадкові числа від 0 до  $t-1$ .

Отримані значення  $x_{i+1}$  належать до діапазону  $0 < x_{i+1} < t - 1$  і мають рівномірний дискретний розподіл. Для того щоб отримати випадкове значення  $r_{i+1}$  з інтервалу  $[0, 1]$ , необхідно число  $x_{i+1}$  розділити на  $t$ . У цьому разі всі значення  $t, c, a, x_0$  повинні бути додатними й задовольняти умовам:  $0 < t; a < t; c < t; x_0 < t$ . Отримана за формулою (5.1) послідовність називається лінійною конгруентною послідовністю.

Однією із вад лінійних конгруентних генераторів є те, що отримані випадкові числа  $X_{i+1}$  суттєво залежать від значень  $t, c, a, x_0$  і обчислюються за однією й тією ж формулою, тобто не є абсолютно випадковими. Але незважаючи на те що алгоритм їх отримання є детермінованим, за умови відповідного вибору констант  $t, c, a$  послідовність чисел  $x_{i+1}$ , на основі яких отримують значення  $r_{i+1}$ , повністю задовольнятиме більшості статистичних критеріїв.

Ще одна вада цих генераторів стосується того, що випадкові числа  $r_{i+1}$ , отримані за допомогою генератора, можуть приймати тільки дробово-раціональні значення  $0; 1/t; 2/t; \dots; (t-1)/t$ . Більше того, числа  $r_{i+1}$  можуть приймати лише деякі з указаних значень залежно від вибраних параметрів  $t, c, a$  і  $x_0$ , а також від того, як реалізується операція ділення чисел з плаваючою комою на число от у комп'ютері, тобто залежно від типу комп'ютера і системи програмування.

Наприклад, якщо  $t = 10, x_0 = a = c = 7$ , то отримаємо послідовність  $7; 6; 9; 0; 7; 6; 9; 0, \dots$ , яка не є випадковою. Це свідчить про важливість правильного вибору значень констант  $t, c, a$  і  $x_0$ . Правильно підібрані значення іноді називають магічними числами.

Наведений приклад ілюструє й те, що конгруентна послідовність завжди є циклічною, тобто вона починає повторюватися через певну кількість випадкових чисел. Кількість значень, після яких випадкові числа починають повторюватися, називається повним періодом генератора і є основним його параметром. Значення повного періоду залежать від розрядності комп'ютера, а також від значень  $t, c, a$  і  $x_0$ . Існує теорема, яка визначає умови існування повного періоду генератора, а саме:

- числа  $c$  і  $t$  повинні бути взаємно простими, тобто мати взаємний дільник 1;

– значення  $b = a - 1$  має бути кратним  $q$  для кожного простого  $q$ , бути дільником  $t$ ;

– значення  $b$  має бути кратним 4, якщо  $t$  кратне 4.

Достатність цих умов уперше було доведено Халлом (Hull) і Добеллом (Dobell).

Якщо  $c > 0$ , то генератор називається мішаним, а якщо  $c = 0$  – мультиплікативним.

Розглянемо, як потрібно вибирати параметри лінійного конгруентного генератора, щоб отримати послідовність з повним періодом.

Для отримання такої послідовності необхідно вибирати значення  $t = 2^g - 1$ , де  $g$  – довжина розрядної сітки комп'ютера.

Для 32-розрядного комп'ютера  $t$  найбільше ціле число, яке може бути відтворене в ньому, дане число дорівнює  $2^{31} - 1 = 2147483647$  (один розряд відводиться під знак числа). У цьому разі ділення  $X_{i+1}/m$  виконувати не обов'язково.

Якщо в результаті роботи генератора буде отримане число  $x_{i+1}$ , яке більше ніж те, що може бути відтворене в комп'ютері, виникне переповнення розрядної сітки. Це призведе до втрати крайніх лівих двійкових знаків цілого числа, які перевищили допустимий розмір. Однак розряди, що залишились, саме і є значеннями  $x_{i+1} \pmod{2^g}$ . Таким чином, під час генерування замість операції ділення можна скористатись переповненням розрядної сітки.

Стосовно константи  $c$  теорема стверджує, що для отримання послідовності з повним періодом генератора значення  $c$  повинне бути непарним, і, крім того,  $a - 1$  має ділитися на 4. Для такого генератора початкове значення  $x_0$  може бути довільним і лежати в діапазоні від 0 до  $t - 1$ . Якщо  $c = 0$ , то отримуємо мультиплікативний конгруентний метод, який передбачає використання таких рекурентних виразів (форм.5.2):

$$x_i = ax_i \pmod{m}, \quad (5.2)$$

Цей метод більш швидкодіючий, ніж попередній, але він не дає послідовності з повним періодом. Дійсно, з цього виразу видно, що значення  $x_{i+1} = 0$  може з'явитись тільки в тому випадку, якщо послідовність вироджується в нуль. Взагалі, якщо  $d$  – будь-який дільник  $m$  і  $x_i$  кратне  $d$ , всі наступні елементи мультиплікативної послідовності  $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots$  будуть кратними  $d$ . Таким чином, якщо  $c = 0$ , потрібно, щоб  $x_i$  і  $t$  були взаємно простими числами з  $t$  і знаходились між 0 і  $t$ .

Що стосується вибору  $a$ , то у випадку, коли  $m = 2^g$ , де  $g \geq 4$  значення  $a =$ :

$$a = 3 \pmod{8} \quad \text{або} \quad a = 5 \pmod{8}.$$

У цьому випадку четверта частина всіх можливих значень множників дає довжину періоду, що дорівнює  $t/4$ , яка й буде максимальним періодом генератора.

#### 5.4 Моделювання випадкової події й повної групи несумісних подій

У разі дослідження складних систем методом статистичних випробувань необхідно мати можливість отримувати за допомогою комп'ютера вибіркові значення випадкових

величин, які мають різні закони розподілу. Випадкові величини зазвичай моделюють за допомогою перетворення одного або кількох незалежних значень випадкової величини  $R$ , рівномірно розподіленої в інтервалі  $[0, 1]$ , що позначаються як  $r_i, i = 1, 2, 3, \dots$  ( $r_i \in [0,1]$ ). Значення  $r_i$  генерують, як звичайно, за допомогою програмних генераторів випадкових чисел.

Незалежні випадкові події.

Припустимо, що ймовірність настання деякої елементарної випадкової події  $A$  в одному випробуванні дорівнює  $P(A) = p$ . Вважається, що умови проведення кожного випробування однакові і його можна повторити нескінченну кількість разів. Якщо  $r_i$  - це значення рівномірно розподіленої в інтервалі  $[0, 1]$  величини, то можна стверджувати, що за умови  $r_i < p$  (рис. 4.4) настане подія  $A$ , а якщо  $r_i > p$ , то відбудеться подія  $\bar{A}$ .

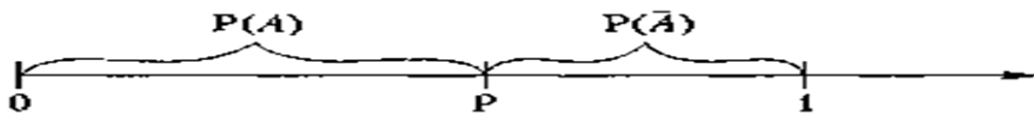


Рисунок 5.2 – Моделювання настання випадкових подій

Ця модель добре описує такі події, як обслуговування вимоги в пристрої СМО, що може бути вільним або зайнятим, успішну або ні спробу виконання деякого завдання, влучення або ні в ціль, розгалуження потоків інформації у двох і більше напрямках.

Група несумісних подій.

Нехай є група несумісних подій  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , настання яких необхідно дослідити. Відомі ймовірності настання цих подій  $p_1 = P(A_1), \dots, p_k = P(A_k)$ . Якщо події несумісні, то  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ . Припустимо, що  $p_0 = 0$ . На відрізку  $[0,1]$  числової осі відкладемо значення цих імовірностей.

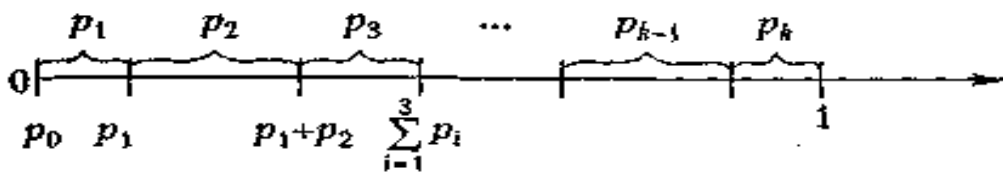


Рисунок 5.3 – Моделювання групи несумісних подій

Якщо отримане від генератора випадкових чисел значення  $r_i$  потрапляє в інтервал від  $\sum_{k=0}^{i-1} p_k$  до  $\sum_{k=0}^i p_k$  вважаємо, що відбулася подія  $A_i$ .

Таку процедуру називають визначенням результату випробування за жеребом. Вона ґрунтується на формулі (5.3):

$$P\left(\sum_{k=0}^{i-1} p_k < r_i \leq \sum_{k=0}^i p_k\right) = p_i = P(A_i), \quad (5.3)$$

де  $p_0 = 0$ .

Ця модель часто використовується в теорії прийняття рішень і добре відтворює процеси вибору однієї з багатьох альтернатив у комп'ютерних іграх, розгалуження потоків інформації у вузлах мережі в кількох напрямках, вибір одного з багатьох пристроїв для обслуговування в СМО і т.і.

Умовна подія  $A$  - це подія, яка відбувається з імовірністю  $P(A|B)$  тільки за умови, що настала подія  $B$  (рис. 5.4).

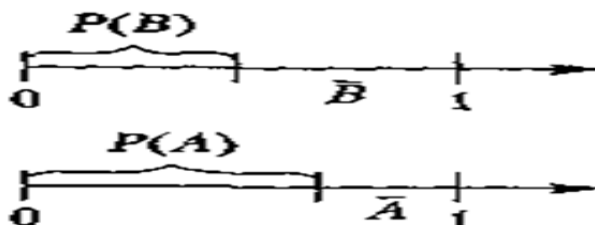


Рисунок 5.4 – Моделювання настання умовної події

У цьому разі має бути задана ймовірність  $P(B)$  настання події  $B$ . Моделювання настання умовної події  $A$  провадиться таким чином. Спочатку випадкове число  $r_1$  отримане від генератора випадкових чисел, використовується для моделювання настання події  $B$ . Подія  $B$  настає в тому випадку, якщо справджується нерівність  $r_1 < P(B)$ . Настання події  $A$  моделюється за допомогою числа  $r_2$ . Для цього перевіряється умова  $r_2 < P(A)$ , за виконання якої приймається рішення, що подія  $A$  відбулася. Якщо ж подія  $B$  не відбулася (тобто настає подія  $\bar{B}$ ), то настання події  $A$  моделювати не потрібно. Таким чином, можна скоротити загальну кількість випробувань

### 5.5 Моделювання випадкової величини із заданим законом розподілу

Розв'язування задач методом статистичного моделювання полягає в такому:

- опрацювання й побудова структурної схеми процесу, виявлення основних взаємозв'язків та формалізований опис процесу;
- моделювання випадкових явищ (випадкових подій, випадкових величин, випадкових функцій), що притаманні досліджуваній системі та моделювання процесу функціонування системи (на підставі використання даних, що отримані на попередньому етапі) відтворення процесу відповідно до розробленої структурної схеми і формалізованого опису (імітаційні прогони);
- накопичення результатів моделювання (імітаційних прогонів), статистичне опрацювання, аналіз та інтерпретація їх.

Зазначимо, що будь-які твердження стосовно до характеристик модельованої системи повинні ґрунтуватися на результатах відповідних перевірок за допомогою методів математичної статистики.

Оскільки випадкові події й випадкові функції можуть подаватися з використанням випадкових величин, то й моделювання випадкових подій і випадкових функцій проводиться за допомогою випадкових величин.

Для моделювання випадкової величини потрібно знати закон її розподілу. Найзагальнішим способом отримання послідовності випадкових чисел, що є

послідовністю реалізацій випадкової величини, котра розподілена за довільним законом, є спосіб, в основі якого процес формування їх з вихідної послідовності випадкових чисел. Ця послідовність є послідовністю реалізацій випадкової величини, що розподілена в інтервалі (0; 1) згідно з рівномірним законом розподілу.

Згадану послідовність випадкових чисел з рівномірним законом розподілу можна отримати трьома способами: використанням таблиць випадкових чисел; застосуванням генераторів випадкових чисел; методом псевдовипадкових чисел.

Нині використовують псевдовипадкові числа, що відповідають рівномірному закону розподілу. Псевдовипадкові (випадкові) числа це числа, отримані за деяким правилом (формулою), що імітує значення випадкової величини. Розроблено низку алгоритмів для отримання псевдовипадкових чисел. Датчики псевдовипадкових чисел є складовими більшості програмних комплексів.

Для перетворення послідовності випадкових чисел, що є реалізаціями випадкової величини з рівномірним законом розподілу в інтервалі (0; 1), у послідовність випадкових чисел, що є реалізаціями випадкової величини із заданою інтегральною функцією розподілу  $F(x)$ , треба із сукупності випадкових чисел з рівномірним законом розподілу в інтервалі (0; 1) вибрати випадкове число  $\xi$  і розв'язати рівняння:

$$F(x) = \xi, \text{ відносно } x,$$

У випадку, коли задана функція щільності ймовірності  $f(x)$ , це співвідношення набирає вигляду (форм.5.4):

$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = \xi, \quad (5.4)$$

Для низки законів розподілу отримано аналітичний розв'язок цього рівняння, результат якого наведено в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Формули для моделювання випадкових величин

Закони розподілу випадкової величини	Щільність розподілу	Формули для моделювання випадкових величин
Експоненційний	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi_i$
Вейбула	$f(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{a}\right)^{a-1} \exp \left[ -\left(\frac{x}{b}\right)^a \right]$	$x_i = -b(\ln \xi_i)^{1/a}$
Гама-розподіл ( $\eta$ – цілі числа)	$f(x) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} e^{-\lambda x} x^{\eta-1}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\eta} \ln(1 - \xi_{ij})$
Нормальний	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$x_i = m + \sigma \left( \sum_{j=1}^{12} \xi_{ij} - 6 \right)$

## 5.6 Моделювання нормально розподілених випадкових величин

Згідно з центральною граничною теоремою теорії ймовірностей унаслідок додавання досить великої кількості однаково розподілених незалежних випадкових величин отримуємо випадкову величину, яка має нормальний закон розподілу.

Як показали дослідження, вже внаслідок складання більш ніж десяти випадкових незалежних величин з рівномірним розподілом в інтервалі  $(0; 1)$  отримуємо випадкову величину, котру з точністю, достатньою для більшості практичних задач, можна вважати розподіленою згідно з нормальним законом.

Процедура розіграшу нормально розподіленої випадкової величини полягає у наступному.

Наприклад, 12 незалежних випадкових величин, які мають рівномірний закон розподілу та які набувають значення в інтервалі  $(0; 1)$ , тобто:

$$v = \sum_{i=1}^{12} \xi_i.$$

Використовуючи відомі теореми про математичне сподівання суми незалежних випадкових величин з однаковим законом розподілу та дисперсію цієї суми, легко обчислити для випадкової величини  $v$  математичне сподівання  $m(v)$  та дисперсію  $D(v)$ :

$$m(v) = \sum_{i=1}^{12} m(\xi_i) = 12 \left( \frac{1}{2} \right) = 6 ;$$

$$D(v) = \sum_{i=1}^{12} D(\xi_i) = 12 \left( \frac{1}{12} \right) = 1 ;$$

$$\sigma(v) = \sqrt{D(v)} = 1 .$$

Нормуємо та центруємо випадкову величину  $v$ , тобто перейдемо до випадкової величини  $\eta$ , яка має нульове математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення  $\sigma(\eta) = 1$ :

$$\eta = \frac{[v - m(v)]}{\sigma(v)} = v - 6 .$$

Від нормованої та центрованої випадкової величини  $\eta$  можна перейти до випадкової величини  $y$  із заданими параметрами  $m(y)$  і  $\sigma(y)$  згідно з таким виразом (форм.5.5):

$$y = m(y) + \eta \sigma(y), \quad (5.5)$$

## 5.7 Моделювання системи випадкових величин

Існує кілька методів моделювання значень неперервних випадкових величин з довільним законом розподілу на основі випадкових чисел, рівномірно розподілених у інтервалі  $[0, 1]$ : метод оберненої функції, метод відсіювання, наближені методи тощо.

### 1. Метод оберненої функції.

Розглянемо метод моделювання випадкової величини, яка має функцію щільності ймовірностей  $f(x)$  і монотонно зростаючу функцію розподілу  $F(x)$ . Суть методу така. За допомогою генератора випадкових чисел генеруємо значення випадкової величини  $r_i$ , якому відповідає точка на осі ординат. Значення випадкової величини  $x_i$  з функцією розподілу  $F(x)$  можемо одержати з рівняння  $F(x_i) = r_i$ .

Дійсно, якщо на осі ординат відкласти значення  $r_i$  випадкової величини, розподіленої рівномірно в інтервалі  $[0, 1]$ , і на осі абсцис знайти значення  $x_i$  випадкової величини (рис. 5.5), при якому  $F(x_i) = r_i$ , то випадкова величина  $X = F^{-1}(r)$  буде мати функцію розподілу  $F(x)$ .

Таким чином, послідовність випадкових чисел  $r_1, r_2, r_3, \dots$  перетворюється на послідовність  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , яка має задану функцію щільності розподілу  $f(x)$ .

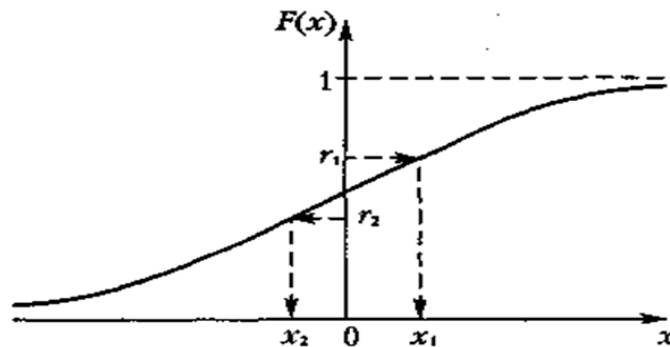


Рисунок 5.5 – Використання методу оберненої функції для генерування неперервної випадкової величини

Звідси випливає загальний алгоритм моделювання випадкових неперервних величин, що мають задану функцію розподілу ймовірностей:

- генерується випадкове число  $r_i \in [0, 1]$ ;
- обчислюється випадкове число  $x_i$  яке є розв'язком рівняння (форм.5.6):

$$r_i = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx, \quad (5.6)$$

Приклади застосування методу наведені нижче.

### 2. Рівномірний розподіл.

У загальному випадку випадкова величина  $X$  є рівномірно розподіленою на відрізьку  $[a, b]$ , якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд (форм.5.7):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (5.7)$$

Функцію розподілу ймовірностей можна знайти як (форм.5.8 та форм.5.9):

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}, \quad (5.8)$$

тобто

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (5.9)$$

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини  $X$  визначаються за формулою (5.10) та формулою (5.11):

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad (5.10)$$

$$D(X) = \frac{b-a}{12}, \quad (5.11)$$

Для моделювання випадкової рівномірно розподіленої на відрізку  $[a, b]$  величини можна скористатись методом оберненої функції. Обчислимо функцію розподілу випадкової величини та прирівняємо її до значення  $r_i$  (форм.5.11):

$$r_i = \int_a^{x_i} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_i - a}{b-a}, \quad (5.11)$$

Звідси знаходимо значення випадкової величини з функцією розподілу  $f(x)$  (форм.5.12):

$$x_i = (b-a) r_i + a, \quad (5.12)$$

Цю формулу також можна отримати, якщо виконати лінійне перетворення інтервалу  $[0,1]$  у відрізок  $[a, b]$ . Для цього потрібно змінити масштаб функції рівномірного розподілу, помноживши її на  $(b-a)$ , а потім змістити її на величину  $a$ .

Функція рівномірного розподілу широко застосовується для моделювання випадкових величин, для яких функція розподілу невідома, а відоме лише її середнє значення. У такому випадку припускають, що відомими є середнє значення випадкової величини та деяке розсіювання ( $+ \Delta$ ) її значень відносно середнього. Це дає змогу стверджувати, що дана випадкова величина має рівномірний розподіл.

Прикладами реальних задач, в яких виникає необхідність моделювання рівномірно розподілених випадкових величин, можуть бути аналіз помилок округлення під час проведення числових розрахунків (точність задається як кількість десяткових знаків), час переміщення головок у магнітних накопичувачів (мінімальний та максимальний час), відхилення від розкладу руху транспортних засобів (наприклад, метро).

3 Експоненціальний розподіл.

Експоненціальний закон розподілу набув широкого використання в теорії надійності складних систем. Функція щільності експоненціального розподілу випадкової величини має вигляд (форм.5.13):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (5.13)$$

Для її моделювання скористаємося методом оберненої функції. Маємо

$$r_i = \int_0^{x_i} f(x) dx = \int_0^{x_i} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

З виразу знаходимо значення  $x_i$ .

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i)$$

Можна показати, що випадкові величини  $(1 - r_i)$  мають такий самий розподіл, що і величини  $r_i$ . Тоді, замінивши  $1 - r_i$  на  $r_i$  отримаємо формулу (5.14)

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \ln(r_i), \quad (5.14)$$

Випадкові величини з експоненціальним розподілом широко застосовуються в задачах моделювання та аналізу СМО, наприклад під час моделювання процесів виходу з ладу та ремонту обладнання, які виникають у складних системах, у разі визначення інтервалів часу між послідовними викликами абонентів у телефонній мережі або замовлень від незалежних клієнтів у будь-якій мережі обслуговування (швидка допомога, служби ремонту, виклик таксі і т.і.)

## 5.8 Розподіл Пуассона

Число  $n-1$  і є випадковою величиною, що належить сукупності, розподіленій за законом Пуассона з математичним сподіванням  $\lambda$ . Якщо перше із чисел  $r_i$ , відповідає умові, то значення випадкової величини  $s=0$ .

Розглянемо моделювання пуассонівського потоку з інтенсивністю  $\lambda$ , основна властивість якого полягає в тому, що ймовірність надходження  $k$  вимог протягом інтервалу довжиною  $t$  становить:

$$p_k(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для пуассонівського потоку інтервали часу між надходженням двох сусідніх вимог мають експоненціальний закон розподілу. Тому для його моделювання достатньо отримати ряд чисел з таким розподілом. Це можна реалізувати за допомогою методу оберненої функції, якщо ряд випадкових чисел  $r_i$  рівномірно розподілених у інтервалі  $[0, 1]$ , перетворити згідно з функцією, оберненою до експоненціальної функції розподілу за формулою (5.15):

$$t_j = F^{-1}(x) = -\bar{T} \ln(r_j), \quad (5.15)$$

де  $t_j$  –  $j$ -й проміжок часу між надходженнями двох сусідніх вимог;

$\bar{T} = 1/\lambda$  – середнє значення проміжку часу між надходженнями двох сусідніх вимог;

$r_j$  –  $j$ -е число в послідовності випадкових чисел з рівномірним розподілом у інтервалі  $[0, 1]$ .

## 5.9 Потоки випадкових подій

Найпростіший потік і його властивості. При розгляді систем з дискретними станами й безперервним часом часто доводиться мати справу з так званими потоками подій. Поток подій називається послідовність однорідних подій, що впливають одна за одною у якісь випадкові моменти часу. У загальному випадку переходи системи зі стану в стан відбуваються через послідовність подій, тобто потоку подій. Тому має сенс розглянути також потоки й з'ясувати їхні властивості.

Зобразимо потік подій як послідовність точок на осі часу (рис.5.6).

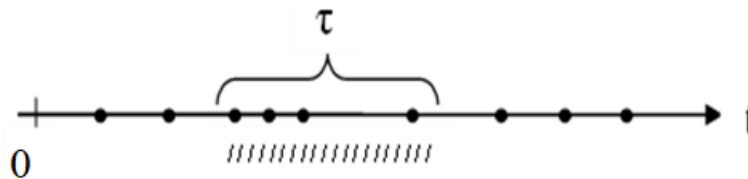


Рисунок 5.6 – Потік подій як послідовність точок на осі часу

Положення кожної точки на осі є випадковим.

Потік подій називається регулярним, якщо події впливають одна за одною через строго визначенні проміжки часу.

Такий потік досить рідко зустрічається на практиці, що й побачимо надалі, та становить інтерес як деякий граничний випадок.

Частіше моменти настання подій і проміжки часу між ними - випадкові величини. Наведемо визначення, що характеризують особливі властивості таких потоків.

1. Потік подій називають стаціонарним, якщо ймовірність влучення того або іншого типу подій на ділянку часу довжиною  $\tau$  залежить тільки від довжини ділянки й не залежить від того, де саме на осі  $t$  розташована ця ділянка.

2. Потік подій називають потоком без післядії, якщо для будь-яких непересічних ділянок часу число подій, що попадають на один з них, не залежить від того, скільки подій потрапило не на іншій.

3. Потік подій називається ординарним, якщо ймовірність влучення на елементарну ділянку двох або більше подій неважливо мала в порівнянні з ймовірністю влучення однієї події.

Розглянемо більш докладно ці властивості.

Стаціонарність означає однорідність за часом. Ймовірнісні характеристики такого потоку не повинні змінюватися залежно від часу. Інтенсивність (або щільність) потоку подій (середнє число подій в одиницю часу) для стаціонарного потоку повинна залишатися постійною для всього розглянутого періоду. Наприклад, потік викликів на телеграфній станції між 12 і 13 годинами.

Відсутність післядії означає, що події, що утворять потік, з'являються в послідовні моменти часу незалежно одна від одної. Наприклад, потік автомобілів на бензозаправку.

Ординарність – означає, що події відбуваються поодиночі, а не парами, трійками й т.і.

Якщо в неординарному потоці події відбуваються лише парами або трійками. Це можна розглянути як ординарний потік пар, трійок і т.і. Справа буде складнішою якщо число подій, що утворять такий «пакет» - випадково. Тоді доводиться розглядати не тільки потік пакетів, але й випадкову величину числа подій у пакеті.

Із усього різноманіття потоків виділимо потік, що називається простішим. Такий потік має всі три зазначені властивості одночасно.

Наприклад, доведено, що при суперпозиції досить великої кількості потоків, що володіють післядією (аби тільки вони були стаціонарними і ординарними), утвориться сумарний потік, який можна розглядати як найпростіший.

Якщо потік подій не має післядії, ординарний, але не є стаціонарним він називається нестаціонарним пуассонівським потоком.

У такому потоці інтенсивність залежить від часу, тобто  $\lambda = \lambda(t)$ . Для найпростішого потоку  $\lambda = \text{const}$ .

Пуассонівський потік подій (як стаціонарний, так і нестаціонарний) тісно пов'язані з відомим розподілом Пуассона.

Відповідно до цього розподілу ймовірність влучення дорівнює  $m$  подій за інтервал часу тривалістю  $\tau$  дорівнює (форм.5.16):

$$P_m = \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha}, \quad (5.16)$$

де  $\alpha = \lambda\tau$ , тобто не залежить від того, де на осі  $t$  обрана ця ділянка.

Для нестаціонарного пуассонівського потоку (форм. 5.17)

$$\alpha = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt, \quad (5.17)$$

а значить залежить від того, у якій точці  $t_0$  починається ділянка  $\tau$ .

Напишемо наступні важливі співвідношення для найпростішого потоку:

Нас цікавить інтервал часу  $T$  між сусідніми подіями в такому потоці. Очевидно  $T$  – випадкова величина.

Функція розподілу величини  $T$  буде (форм.5.18):

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (5.18)$$

а щільність розподілу  $f(t)$  випадкової величини  $T$  буде дорівнювати (форм.5.19):

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (5.19)$$

Такий закон розподілу називається показовим або експонентним, а величина  $\lambda$  – називається параметром послідовного закону.

Характеристики випадкової величини  $T$  – математичне очікування  $m_t$  (форм.5.20) і дисперсія  $D_t$  (форм.5.21) має вигляд:

$$m_t = 1/\lambda, \quad (5.20)$$

$$D_t = 1/\lambda^2, \quad (5.21)$$

Середньоквадратичне відхилення (форм.5.21):

$$\sigma_t = \sqrt{D_t} = 1/\lambda, \quad (5.21)$$

Для показового закону розподілу математичне очікування й середньоквадратичне відхилення рівні один одному й зворотні параметру  $\lambda$ .

Графік закону розподілу має вигляд на рисунку 5.7.

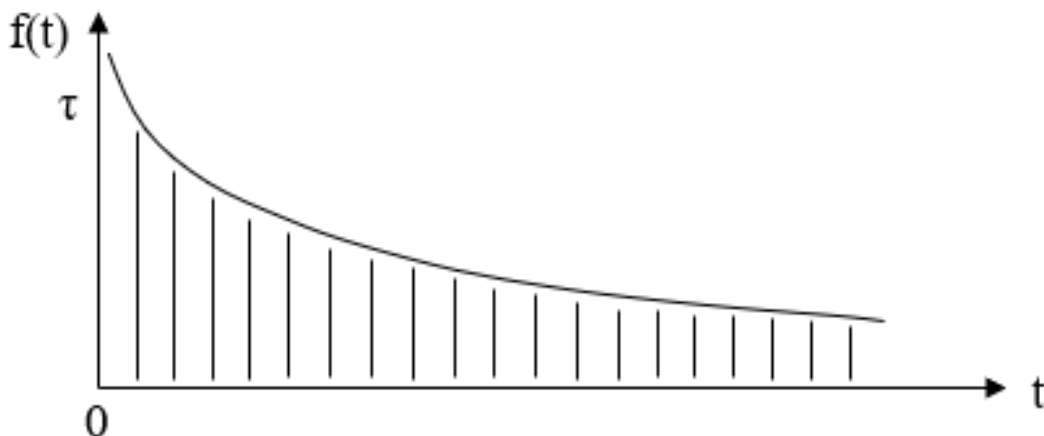


Рисунок 5.7 – Графік закону розподілу

Проміжок часу  $T$  між сусідніми подіями в найпростішому потоці розподілений за показовим законом, його середнє значення й середньоквадратичне відхилення дорівнює  $1/\lambda$ , де  $\lambda$  – інтенсивність потоку.

Імовірність того, що на ділянці тривалістю  $\Delta t$  з'явиться якась одна подія потоку дорівнює (форм. 5.22):

$$P_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t, \quad (5.22)$$

де  $\lambda$  – інтенсивність потоку;

$\Delta t$  – проміжок часу, для якого виконується розподіл.

### Контрольні питання

1. Що таке статистичне моделювання та яка його мета?
2. У чому полягає суть методу Монте-Карло?
3. Основні етапи реалізації методу Монте-Карло.
4. Переваги та недоліки статистичного моделювання.
5. Призначення генераторів випадкових чисел у моделюванні.
6. Вимоги до якості генераторів випадкових чисел.
7. Поняття псевдовипадкових чисел.
8. Моделювання випадкової події з заданою ймовірністю.
9. Повна група несумісних подій та її моделювання.
10. Поняття випадкової величини та закону її розподілу.
11. Основні методи моделювання випадкових величин.
12. Метод зворотної функції розподілу.
13. Моделювання дискретних та неперервних випадкових величин.
14. Нормальний розподіл та його основні характеристики.
15. Методи моделювання нормально розподілених випадкових величин.
16. Метод Бокса—Мюллера.
17. Система випадкових величин та її характеристики.
18. Незалежні та залежні випадкові величини.
19. Кореляція випадкових величин і її роль у моделюванні.
20. Моделювання багатовимірних розподілів.
21. Розподіл Пуассона та його властивості.
22. Застосування розподілу Пуассона в статистичному моделюванні.
23. Поняття потоку випадкових подій.
24. Найпростіший (пуассонівський) потік подій.
25. Інтенсивність потоку випадкових подій та її зміст.
26. Застосування потоків випадкових подій у моделюванні систем.

## ТЕМА 6. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ

План лекції.

6.1 Загальні відомості про імітаційне моделювання.

6.2 Сутність методу імітаційного моделювання та сфери його застосування.

6.3 Моделі систем масового обслуговування.

6.4 Методологія побудови моделюючих алгоритмів систем масового обслуговування.

6.5 Модифікації моделей систем масового обслуговування.

6.6 Синтез систем масового обслуговування.

Література: [3 - 8].

### 6.1 Загальні відомості про імітаційне моделювання

Імітаційне моделювання є методом дослідження поведінки систем. Цей метод полягає в тому, що за допомогою ЕОМ відтворюється поведінка досліджуваної системи, а дослідник, управляючи ходом процесу імітації й переглядаючи одержувані результати, робить висновок про її властивості та якість поведінки. Тому імітацію слід розуміти як числовий метод проведення на ЕОМ експериментів із математичними моделями, які описують поведінку системи для визначення функціональних характеристик, що цікавлять нас. Поява імітаційного моделювання й перетворення його в ефективний засіб аналізу складних систем були, з одного боку, зумовлені потребами практики, а з іншого – забезпечені розвитком методу статистичних випробувань, що відкрив можливість моделювання випадкових факторів, яких багато в реальних системах, а також розвитком електронної обчислювальної техніки, що є базою для проведення статистичних експериментів.

Досить широке застосування методу імітації при дослідженні поведінки системи зумовлено такими причинами: складністю моделі поведінки системи, наявністю великої кількості випадкових факторів, які обмежують ефективність застосування традиційних аналітичних методів дослідження, а в ряді випадків взагалі виключають можливість їх застосування, у результаті чого імітаційне моделювання виявляється єдиним способом дослідження та новими можливостями, що дозволяють здійснювати:

- спостереження за поведінкою системи в таких умовах, у яких натурний експеримент просто неможливий (або з суто фізичних причини, або через обмеженість часових і вартісних ресурсів);

- проведення імітаційних експериментів у широкому діапазоні зміни параметрів системи й зовнішнього середовища, що дозволяє одержати корисну інформацію в умовах інформаційної невизначеності, яка завжди супроводжує початкові етапи розв'язання системотехнічних задач;

- прогнозування поведінки системи дозволяє одержувати до того ж відповідь у стислому масштабі часу;

- детальне спостереження за поведінкою імітованої системи дозволяє зрозуміти зміст системи й розробити пропозиції щодо її поліпшення з імітацією;

- імітаційне моделювання дозволяє створити уявлення про те, які з

параметрів системи є найбільш істотними;

– імітаційне моделювання може бути використане як педагогічний прийом для навчання студентів та інженерів основним навичкам теоретичного аналізу, статистичного аналізу й теорії прийняття рішень.

Але, як і в будь-якого інструмента дослідження, у методу імітації є переваги й недоліки. До недоліків можна віднести таке:

– у ряді випадків імітаційні моделі виявляються досить складними, що вимагає більших часових і вартісних витрат на програмування, налагодження моделей та проведення експериментів;

– «імітаційний світ», як і реальна дійсність, виявляється важко збагненим, оскільки складна імітаційна модель призводить до такої кількості різноманітних наслідків, що в результаті одержувану інформацію не так вже й легко інтерпретувати;

– аналіз результатів імітації оснований тільки на використанні математичної статистики, а як відомо, для одержання статистичної достовірності результатів, достатньої для обґрунтування вибору варіанта керування, варіанта побудови системи й інших, потрібне багаторазове повторення імітаційних експериментів, що в ряді випадків потребує більших часових витрат. Однак незважаючи на це флуктуації результатів, що все одно залишаються, змушують проявляти обережність при підбитті підсумків машинних імітаційних експериментів;

– імітаційне моделювання поки не володіє добре методично обґрунтованими принципами побудови моделей для широкого класу систем керування, а тому кожний конкретний випадок потребує значного спеціального опрацювання.

– При імітаційному моделюванні можна виділити такі основні етапи дослідження:

– формулювання задачі;

– побудова математичної моделі функціонування системи;

– складання й налагодження програми для ЕОМ, включаючи й розробку процедур моделювання різних випадкових факторів;

– планування імітаційних експериментів;

– проведення експериментів і обробка результатів дослідження. Розглянемо більш докладно зміст кожного з етапів.

## **6.2 Сутність методу імітаційного моделювання та сфери його застосування**

Основний принцип методу імітаційного моделювання полягає в побудові штучного імовірнісного процесу, параметри якого давали б розв'язок поставленої задачі, причому сама задача може й не бути імовірнісною. При цьому можна сформулювати дві задачі: пряму й зворотну.

Пряма задача. Необхідно реалізувати операцію, результат якої визначається випадковими факторами. Тому ця операція являє собою випадковий процес. Шляхом проведення серії експериментів із подальшою статистичною обробкою результатів окремих спостережень можна знайти наближене значення імовірнісних характеристик цього процесу. Для цього здійснюється багаторазове проведення цієї операції за фіксованих умов. Кожне спостереження являє

Зворотна задача. Відомі імовірнісні характеристики процесу й необхідно відтворити одну з його реалізацій. Процес цього відтворення називають статистичним випробуванням. При багаторазовому випробуванні й подальшій обробці можна знайти статистичні оцінки вихідних імовірнісних характеристик.

Суть методу імітаційного моделювання проста й полягає в такому. Замість опису випадкового явища аналітичними залежностями проводиться моделювання (розіграш) цього випадкового явища за допомогою певної процедури, що дає випадковий результат. Таким чином виходить одна реалізація випадкового явища. Після проведення великої кількості таких реалізацій цього явища проводиться обробка результатів моделювання методами математичної статистики. Цими розіграшами можна вирішувати будь-які імовірнісні задачі, але виправданими (вигідними) вони стають тоді, коли процедура моделювання простіша за застосування аналітичних, обчислювальних методів.

Імітаційне моделювання базується на використанні генераторів випадкових величин у комбінації з інтегральною функцією розподілу ймовірностей для досліджуваного процесу. Розподіл ймовірностей, що розігрується, оснований на емпіричних даних або є відомим теоретичним законом. В основі загальної схеми методу імітаційного моделювання є центральна гранична теорема теорії ймовірностей.

### **6.3 Моделі систем масового обслуговування**

Формальний опис процесів у вигляді системи масового обслуговування широко застосовується в різних галузях науки й практики. Теоретичною базою побудови й дослідження СМО є теорія масового обслуговування (ТМО).

Теорія масового обслуговування – це область прикладної математики, що займається аналізом процесів у СМО, у яких події повторюються багаторазово. За допомогою цієї теорії розробляються методи розв’язання типових задач масового обслуговування, будуються моделі СМО й визначаються їх кількісні характеристики. Методами ТМО аналізують функціонування об’єкта, а потім вирішують питання щодо синтезу обслуговуючих обладнань і вибору оптимальних параметрів системи

Можна використовувати велику різноманітність моделей СМО й підходів до їхньої класифікації. Спочатку моделі розділяють на марківські й немарківські. Цей напрямок пов’язаний із класом певно марківських випадкових процесів. Моделі СМО, у яких протікають саме марківські випадкові процеси, описуються системою диференціальних рівнянь, або, у граничному випадку, системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язання цих рівнянь дає можливість легко одержати набір «гарних» виразів, що легко запам’ятовуються, які визначають показники ефективності функціонування СМО. За наявності немарківських процесів у СМО аналітичного дослідження зазнають лише деякі окремі випадки.

Як правило, використовуються такі класифікаційні ознаки (рис. 6.1):

- організація потоку заявок;
- характер утворення черги;
- обмеження черги;

- кількість обслуговуючих каналів;
- дисципліна черги.



Рисунок 6.1 – Класифікація систем масового обслуговування

За кількістю каналів СМО поділяються на одноканальні й багатоканальні системи. Багатоканальні СМО, у свою чергу, поділяються на системи з однаковими параметрами каналів обслуговування (рівноцінними каналами) і системи з різними параметрами каналів обслуговування (нерівноцінними каналами).

Залежно від взаємного розташування каналів СМО підрозділяються на системи з послідовними й паралельними каналами. У СМО з паралельними каналами вхідний потік є загальним, і заявка може обслуговуватися будь-яким вільним каналом. У СМО з послідовним розташуванням каналів кожний канал можна розглядати як одноканальну СМО, і тоді вихідний потік одного з них одночасно є вхідним для подальшого каналу.

Такі системи називаються відповідно багатофазними й однофазними. У загальному випадку з деякими допущеннями багатофазна СМО є декількома послідовно з'єднаними однофазними системами. Надалі будуть розглядатися тільки однофазні СМО й, якщо вони багатоканальні, то – з рівноцінними каналами.

Залежно від характеру утворення черги СМО можна розділити на два типи:

- системи з відмовами в обслуговуванні;
- системи з очікуванням обслуговування, тобто із чергою.

У першому випадку заявка, що надійшла в СМО, і застала канал (для одно каналної системи) зайнятим або – канали (для багатоканальної системи) зайнятими, одержує відмову та йде зі СМО необслуженою.

Особливістю СМО з очікуванням є характеристика самої черги (обмеження на чергу). Такі системи підрозділяються на СМО з необмеженим очікуванням (необмеженою кількістю місць у черзі) і СМО з обмеженим очікуванням (обмеженою кількістю місць у черзі).

Перший варіант обмеження полягає в тому, що заявка завжди ставиться в чергу й коли-небудь буде обслужена. За дисципліною черги (тобто за критерієм вибору із черги чергової заявки) СМО підрозділяються на системи із пріоритетом і без пріоритету.

При реалізації дисципліни черги без пріоритету можливі різні правила відбору заявок на обслуговування: перший прийшов – перший обслужений, останній прийшов – перший обслужений або у випадковому порядку (наприклад, із заданими ймовірностями вибірки із черги).

Системи із пріоритетом, у свою чергу, можуть підрозділятися на СМО з перериванням і без переривання. У системах з перериванням заявка з вищим пріоритетом перериває обслуговування заявки з більш низьким пріоритетом. Перервана заявка може бути поставлена в чергу й, можливо, коли-небудь буде обслужена відповідно до свого пріоритету.

#### **6.4 Методологія побудови моделюючих алгоритмів систем масового обслуговування**

Методологія побудови моделюючих алгоритмів СМО (Систем Масового Обслуговування) включає визначення компонентів СМО (потік вимог, канали обслуговування, черги, правила), вибір типу моделі (аналітична чи імітаційна), розробку логіки алгоритму з врахуванням подій (прибуття, обслуговування, відхід), імітацію процесів за допомогою генераторів випадкових чисел та збір статистики для оцінки показників ефективності (час очікування, довжина черги).

Ключові етапи побудови моделюючих алгоритмів СМО:

- формалізація задачі: визначення об'єкта моделювання (один канал, багато каналів, з різними чергами);
- встановлення параметрів: інтенсивність потоку вимог ( $\lambda$ ), інтенсивність обслуговування ( $\mu$ ), кількість каналів, місткість черги; визначення мети моделювання: оцінка часу очікування, завантаження каналів, імовірності втрат;
- вибір методу моделювання: аналітичне моделювання: для простих СМО (наприклад, пуассонівський потік, експоненціальні часи обслуговування);
- імітаційне моделювання (симуляційне): для складних систем, де аналітичні методи не працюють; використовує програмну імітацію подій у часі;
- розробка алгоритму (для імітаційного моделювання): моделювання потоку вимог: використання генераторів випадкових чисел для імітації інтервалів між вимогами (часто експоненціальний розподіл);
- моделювання каналів обслуговування: визначення часу обслуговування (також випадкового) та їх стану (вільний/зайнятий);

- управління чергою: правила (fifo, lifo, пріоритети), їх розміщення (обмежена/необмежена); імітація подій: цикл моделювання, що просуває час від однієї події (прибуття, кінець обслуговування) до іншої;
- реалізація та експериментування;
- програмна реалізація: написання коду (python, c++, спеціалізовані пакети); проведення експериментів: запуск моделі на тривалий час для накопичення статистики;
- аналіз результатів: збір статистики: середній час у черзі, максимальна довжина черги, завантаженість каналів;
- валідація та верифікація: перевірка коректності моделі.

## 6.5 Модифікації моделей систем масового обслуговування

Різновиди СМО, що зустрічаються на практиці, не вичерпуються розглянутими вище найпростішими моделями. Можна виділити особливості моделювання деяких інших класів СМО.

Системи з обмеженням за довжиною черги. У модельованій СМО може встановлюватися обмеження за довжиною черги. При цьому в момент надходження заявки необхідно перевіряти умову (форм. (6.1)):

$$l' < l, \quad (6.1)$$

де  $l$  – кількість місць у черзі,

$l'$  – кількість зайнятих місць у черзі в момент  $t_j$ .

Якщо умова, що перевіряється, виконується, то заявка ставиться в чергу й чекає звільнення каналу, а якщо не виконується, то одержує відмову.

Така перевірка здійснюється тільки в тому випадку, якщо всі канали зайняті. Якщо хоча б один канал вільний, це свідчить про те, що черги немає й перевірка не потрібна, а заявка йде відразу на обслуговування.

Системи з обмеженнями за тривалістю обслуговування й тривалістю перебування. Для забезпечення моделювання цих обмежень у модель вводяться й реалізуються відповідні перевірки. Так, при обмеженні за тривалістю обслуговування перевіряється умова (форм. (6.2)):

$$\tau^* < \tau_1, \quad (6.2)$$

де  $\tau^*$  – розрахункова тривалість обслуговування  $j$ -тої заявки;

$\tau_1$  – гранична тривалість обслуговування заявок.

При виконанні цієї умови обслуговування такої заявки триває, а при невиконанні обслуговування – переривається і заявка одержує відмову. Для реалізації обмеження за тривалістю перебування заявки в СМО необхідно перевіряти умову (форм. (6.3)):

$$\tau_{jsist} \leq \tau_2, \quad (6.3)$$

де  $\tau_{jsist} = t^* - t_j$  – тривалість перебування заявки в системі;  
 $\tau_2$  – гранична тривалість перебування заявок у СМО.

При виконанні цієї умови обслуговування  $j$ -тої заявки триває, а при невиконанні заявка одержує відмову.

Модель СМО із переважаючим обслуговуванням заявок, що раніше за інших залишають систему. У розглянутих прикладах одно- і багатоканальної СМО заявки обслуговуються за надходженням. Дуже часто заявки, що мають право (по черзі) на негайне обслуговування, можуть перебувати в системі досить довго й обслуговуватися після заявок з малим  $\tau$  і тими, що швидко йдуть із системи.

Модель СМО з випадковим порядком обслуговування.

Модель СМО із заданим порядком вибору обслуговуючих каналів.

Модель СМО з виходом із ладу каналів. Особливістю цього класу СМО є можливість перебою в роботі каналу. Канал може бути відновлений за час  $\tau^p$  і стати до ладу в момент (форм. (6.4)):

$$t = t^{sb} + \tau^p, \quad (6.4)$$

де  $t^{sb}$  – момент перебою.

Надійність каналу задається функцією розподілу інтервалу безвідмовної роботи  $P(t)$ , а  $\tau^p$  визначається як випадкова величина з певним законом розподілу.

Перебій і ремонт каналу можна інтерпретувати як обслуговування фіктивної заявки з моментом початку обслуговування  $t^{sb}$ , тривалістю обслуговування  $\tau^p$  і першим пріоритетом. Якщо заявка приходить у момент перебою, то вона одержує відмову або може бути обслужена після ремонту каналу.

## 6.7 Синтез систем масового обслуговування

Ми проробили аналіз існуючої системи. Це дало можливість побачити її недоліки й визначити напрями поліпшення її якості. Але залишаються незрозумілими відповіді на конкретні запитання, що саме треба робити – збільшувати кількість каналів або збільшувати їх пропускну здатність, або збільшувати кількість місць у черзі, і, якщо збільшувати, то наскільки?

Щоб оцінити чутливість кожного показника до зміни значення певного параметра, роблять так. Фіксують усі параметри крім одного, обраного. Потім знімають значення всіх показників при декількох значеннях цього обраного параметра. Звичайно, доводиться повторювати знову й знову процедуру імітації й усереднювати показники при кожному значенні параметра, оцінювати точність. Але в результаті виходять надійні статистичні залежності характеристик (показників) від параметра.

Синтез систем масового обслуговування (СМО) – це процес проектування, створення та оптимізації цих систем для досягнення певних цілей (наприклад, мінімізація витрат, максимізація пропускної здатності) шляхом вибору конфігурацій (кількість каналів, дисципліна обслуговування, стратегії черг), розрахунку їх параметрів і моделювання поведінки для оцінки ефективності, особливо в умовах невизначеності та ймовірнісних процесів, що є ключовим у телекомунікаціях, комп'ютерних мережах та сервісних службах.

Основні етапи синтезу СМО:

1. Формулювання вимог: визначення цілей (рівень обслуговування, час очікування, навантаження), характеристик потоків заявок (інтенсивність) та каналів обслуговування (інтенсивність обслуговування).

2. Вибір моделі: визначення типу СМО (з втратами, з чергою, з пріоритетами, експоненціальна, багатоканальна тощо) та її математичного апарату (пуассонівський потік, марківські процеси).

3. Розрахунок параметрів: використання формул теорії масового обслуговування для визначення ключових показників (ймовірність зайнятості, середня довжина черги, ймовірність відмови).

4. Оптимізація: зміна параметрів системи (кількість каналів, розмір черги) для покращення характеристик або зниження вартості, часто з використанням імітаційного моделювання.

5. Проектування мереж: розробка розподілених СМО, що складаються з взаємодіючих вузлів, з урахуванням трафіку та розподілу навантаження. СМО – це процес переходу від реальної потреби до функціональної моделі системи, що забезпечує оптимальне обслуговування.

Контрольні питання

1. В чому полягає суть імітаційного моделювання?
2. Назвіть основні етапи дослідження систем при імітаційному моделюванні.
3. Сутність методу імітаційного моделювання та сфери його застосування.
4. Що є теорією масового обслуговування?
5. Перерахуйте компоненти структурної схеми СМО.
6. Назвіть класифікаційні ознаки та моделі СМО.

## ТЕМА 7. АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ

План лекції.

7.1 Аналітичні моделі.

7.2 Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами.

7.3 Модель одноканальної системи масового обслуговування з чергою.

7.4 Багатоканальна система масового обслуговування з чергою.

7.5 Системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування.

Література: [ 5 – 8].

### 7.1. Аналітичні моделі

Аналітична модель – це математичний опис структури та процесу функціонування системи, а також методика визначення показників її ефективності. Така модель дозволяє швидко і з високою точністю характеризувати поведінку системи.

Найбільш ефективними і наочними є аналітичні моделі при описі функціонування СМО. СМО зазвичай розуміють як динамічну систему, призначену для ефективного обслуговування випадкового потоку заявок (вимог на обслуговування) при обмеженнях на ресурси системи. Іншими словами, можна сказати, що особливістю масового обслуговування є наявність потоку однорідних (ідентичних) подій (вимог, заявок), що зазнають обслуговування. Крім того, для повного опису СМО і постановки завдання дослідження необхідно визначити структуру системи та дисципліну (правила) обслуговування, а також показники якості обслуговування, тобто певні числові показники, за значенням яких можна було б судити про якість функціонування досліджуваної СМО. Розв'язанням перерахованих задач займається теорія масового обслуговування, що є розділом теорії ймовірностей. Наведено декілька задач і прикладів, які належать до проблематики теорії масового обслуговування.

1. У комп'ютер, що використовується для керування технологічним процесом, час від часу надходять сигнали від датчиків, пов'язаних із керованим об'єктом. Кожен сигнал потребує обробки протягом певного випадкового часу (залежить від змісту сигналу). Таким чином, роботу комп'ютера можна розглядати як операцію масового обслуговування, що складається з елементарних складових – обробки окремих сигналів. Потрібно розв'язати задачу: чи здатний комп'ютер із цим обсягом пам'яті і швидкодією впоратися з обробкою всіх сигналів, що надходять?

У вантажний морський порт, який має декілька причалів, прибувають судна на розвантаження – навантаження у випадкові моменти часу. Час розвантаження – навантаження (обслуговування) суден коливається в певному інтервалі залежно від типу судна і вантажу. Якщо всі причали зайняті, то прибуле судно стає на рейді та чекає своєї черги. Кожен корабель має розклад прибуття, але через непередбачені обставини він, як правило, порушується. Тому вважається, що прибуття судна є випадковою подією з якимось математичним очікуванням, дисперсією.

Запитання: чому дорівнює середня тривалість розвантаження-навантаження?

2. У складальному цеху здійснюється складання виробів різних видів. У випадку нестачі хоча б одного виду деталей виробництво зупиняється. Надлишкові

деталі надходять у бункери певної місткості. На процес надходження деталей, як і на час складання виробу, впливають випадкові чинники. Яка ймовірність простою виробничої лінії? Чому дорівнює ймовірність переповнення бункерів? Елементарною операцією в цьому випадку є складання одного виробу з готового комплекту деталей.

Шуканими характеристиками СМО вважаються показники ефективності, які розуміють як кількісні показники, що частково або повністю характеризують рівень виконання системою масового обслуговування покладених на неї функцій. Наприклад, це такі характеристики: ймовірність обслуговування заявки (це ймовірність того, що заявка, яка надійшла в СМО, буде обслужена), ймовірність відмови в обслуговуванні, середній час очікування заявки початку обслуговування, середній час перебування заявки в СМО, середня довжина черги тощо.

На перший погляд перераховані характеристики свідчать тільки про факт їх обчислення. Але насправді це далеко не так.

Нехай обчислена величина ймовірності обслуговування заявки дорівнює 0,65. Це свідчить про те, що зі 100 заявок, які надійшли на обслуговування, тільки 65 з них буде обслужено. А це, у свою чергу, означає, що 35 заявок отримає відмову, тобто третина з тих, які надійшли. Кожна третя заявка (кожен третій клієнт) отримає відмову в обслуговуванні. А це втрачений прибуток, втрачений клієнт, втрачена можливість розширення сфери послуг.

Або інша характеристика: середня кількість зайнятих каналів. Нехай при кількості обслуговуючих каналів, яка дорівнює трьом, середня кількість зайнятих дорівнює 1,75. Це свідчить про те, що принаймні один канал постійно простоює і, можливо, потрібно задуматися про доцільність його існування. Або протилежний випадок: при трьох каналах середня кількість зайнятих дорівнює 2,98. Це може свідчити про те, що ймовірність відмови в обслуговуванні велика (знову втрати потенційних клієнтів) і, можливо, необхідно задуматися про збільшення кількості обслуговуючих каналів або про збільшення інтенсивності обслуговування заявок каналами (наприклад, купівлю нового обладнання).

Основне завдання, що стоїть перед теорією масового обслуговування, полягає у встановленні залежності між характером потоку заявок, кількістю каналів, їх продуктивністю, правилами роботи СМО й ефективністю обслуговування. Розв'язання задач аналізу СМО пов'язане із залученням різних методів оптимізації: лінійного або нелінійного програмування, динамічного програмування, теорії ігор, методу імітаційного моделювання і т. і.

Математичний аналіз роботи СМО значно спрощується, якщо випадковий процес, що протікає в системі, є марківським. У цьому випадку роботу СМО досить просто вдається описати за допомогою диференціальних рівнянь, а в граничному випадку – лінійних алгебраїчних, і відобразити в явному вигляді основні характеристики ефективності обслуговування через параметри СМО та потоку заявок.

Як характеристики ефективності обслуговування можуть застосовуватися різні величини і функції, наприклад:

- середня кількість заявок, що обслуговуються за одиницю часу;
- середній відсоток заявок, які отримують відмову і залишають систему не

обслуженими;

- імовірність того, що заявка, що надійшла, негайно буде прийнята до обслуговування;
- середній час очікування в черзі;
- закон розподілу часу очікування;
- середня кількість заявок, що знаходяться в черзі, і т. і.

## 7.2 Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами

Перш ніж розглянути Багатоканальну СМО з відмовами, треба дослідити одно канальну СМО з відмовами

Нехай СМО складається тільки з одного каналу й на неї надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю  $\lambda$ , що залежить у загальному випадку від часу.  $\lambda = \lambda(t)$ .

Заявка, що застала канал зайнятим, одержує відмову й залишає систему.

Обслуговування заявки триває протягом випадкового проміжку часу  $(t)$ , розподіленого за показовим законом з параметром  $\mu$  (форм. (7.1)):

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t > 0, \quad (7.1)$$

Таким чином потік обслуговувань найпростіший з інтенсивністю  $\mu$ .

Знайдемо: абсолютну пропускну здатність СМО ( $A$ ) та відносну пропускну здатність СМО ( $q$ ).

Дану систему СМО можна уявити собі як випадкову систему  $S$  з двома станами:  $S_0$  – канал вільний;  $S_1$  – канал зайнятий (рис.7.1).

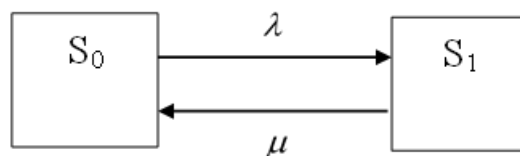


Рисунок 7.1 – Випадкова систему  $S$  з двома станам

Рівняння Колмогорова для такої системи:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\mu p_1 + \lambda p_0$$

$$P_0(t) + P_1(t) = 1.$$

Відкинемо друге рівняння й підставимо замість  $P_1 = 1 - P_0$ , одержимо:

$$\frac{dP_0}{dt} = -(\mu + \lambda)P_0 + \mu.$$

У початковий момент канал вільний, тобто  $P_0(0) = 1$ ;  $P_1(0) = 0$ .

Для випадку  $\lambda = const$ .

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Величини  $P_0(t)$  і  $P_1(t)$  змінюються, як це показано на рисунку 7.2.

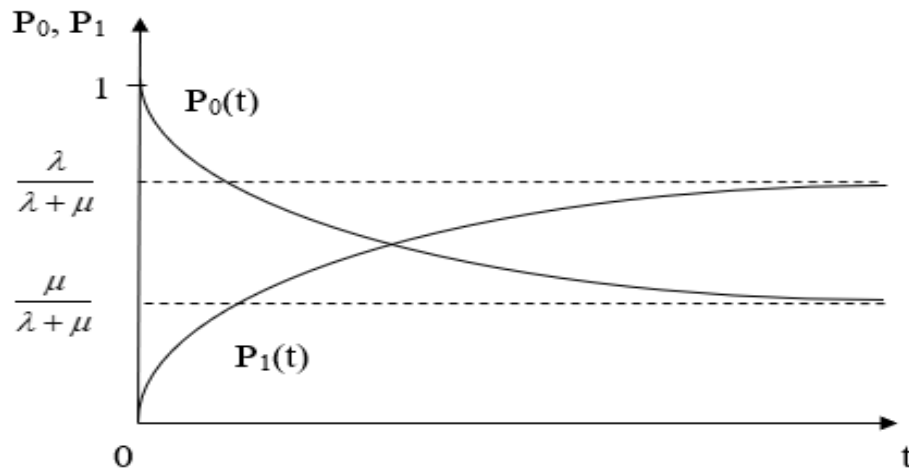


Рисунок 7.2 – Класифікація систем масового обслуговування

При  $t_0=0$  канал вільний і  $P_1(t)=1$ . При  $t \rightarrow \infty$ ,

$$P_1 \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Ймовірність  $P_0$  – це ймовірність того, що в момент  $t$  канал вільний і виходить, що заявка яка прийшла в цей момент буде обслужена, тобто вона дорівнює відносній пропускній здатності каналу, оскільки середнє число обслужених заявок до числа заявок, що надійшли буде дорівнювати  $P_0$ .

Коли  $q = P_0$ , тобто у встановленому режимі

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Знаючи відносну пропускну здатність, легко знайти абсолютну:

$$A = \lambda q,$$

тобто в сталому режимі:

$$A = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}.$$

Імовірність відмови від обслуговування  $P_{\text{відк}} = 1 - q$ .  
 Це середня частка не обслужених заявок серед поданих.

$$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Приклад.

Маємо телефонну лінію. Заявка – виклик. Лінія зайнята – заявка одержує відмову. Інтенсивність заявок 0,8 викликів у хвилину, тобто  $\lambda = 0,8$ . Середня тривалість розмови 1,5 хв. Всі потоки найпростіші:

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсч}}} = \frac{1}{1,5} = 0,667.$$

$$q = \frac{0,667}{0,8 + 0,667} = 0,455,$$

тобто буде змога обслужити в середньому 45,5% заявок.

$$A = 0,8 \cdot 0,455 \approx 0,364.$$

Лінія здатна здійснити 0,364 розмови в хвилину.  $P_{\text{відк}} = 1 - q = 0,545$ .

Значить 54,5% заявок (дзвінків одержать відмову).

Багатоканальна СМО з відмовами (рис.7.3). Стани системи пронумеруємо по числу зайнятих каналів (всього  $n$  каналів):

$S_0$  – всі канали вільні;

$S_1$  – зайнятий один канал, інші вільні;

$S_k$  – зайнято  $k$  каналів;

$S_n$  – зайнято  $n$  каналів (тобто всі).

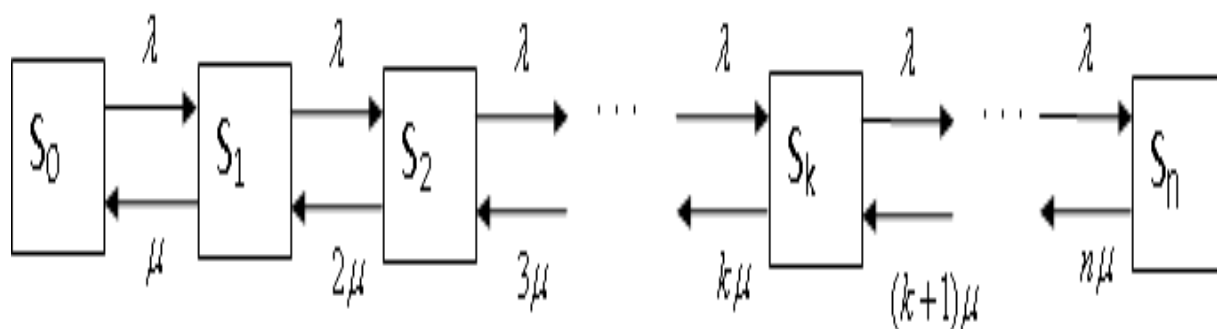


Рисунок 7.3 – Багатоканальна СМО з відмовами

Процес, що протікає в СМО, являє собою окремий випадок загибелі й розмноження. Для знаходження граничних імовірностей стану можемо скористатися рішенням, отриманому в загальному виді для загибелі й розмноження. Після відповідних підстановок отримуємо (форм. (7.2) та (форм. (7.3)):

$$P_k = \frac{\lambda^k}{\mu \cdot 2\mu \cdots k\mu} P_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} P_0, \quad (7.2)$$

Одержимо

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!} + \cdots + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}}, \quad (7.3)$$

Звичайно в теорії СМО відношення  $\frac{\lambda}{\mu}$  позначають  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  і називають «наведеною інтенсивністю». Її фізичний зміст визначає середнє число заявок, що приходять у СМО за середній час обслуговування однієї заявки.

З урахуванням  $\rho$  формули для  $P_0$  і  $P_k$  можна переписати (форм. (7.4) та (форм. (7.5))):

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, (k = \overline{1, n}), \quad (7.5)$$

та

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!}} = \left[ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1}, \quad (7.6)$$

Формули (7.5–7.6) називаються формулами Ерланга. Вони визначають граничні ймовірності стану системи залежно від величини  $\rho$ .

Визначимо характеристики ефективності СМО:

- відносну пропускну здатність  $q$ ;
- абсолютну пропускну здатність  $A$ ;
- імовірність відмови  $P_{\text{від}}$ .

Заявка одержить відмову, якщо всі канали зайняті, тобто:

$$\begin{aligned} P_{\text{від}} &= P_n \frac{\rho^n}{n!} P_0; \\ q &= 1 - P_{\text{від}} = 1 - P_n; \\ A &= \lambda q = \lambda(1 - P_n). \end{aligned}$$

Цікавою характеристикою є середнє число зайнятих каналів ( $k$ ) (форм. (7.7)):

$$k = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \cdots + n \cdot P_n, \quad (7.7)$$

Дійсно,  $A$  – середнє число заявок, що обслуговуються за одиницю часу, а один зайнятий канал в одиницю часу в обслуговує в середньому  $\mu$  заявок. Звідси середнє число заявок каналів можна визначити як (форм. (7.8)):

$$k = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda(1 - P_n)}{\mu} = \rho(1 - P_n) = \rho q, \quad (7.8)$$

Приклад.

Повторимо розгляд попереднього прикладу, де  $\lambda = 0,8$ ,  $\mu = 0,667$ , але замість одного каналу візьмемо три.

Одержимо:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,8}{0,667} = 1,2;$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0 = 1,2 P_0;$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 = 0,72 P_0;$$

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 = 0,288 P_0;$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 1,2 + 0,72 + 0,288} \approx 0,312;$$

$$P_3 = 0,288 \cdot 0,312 = 0,090.$$

$$P_{\text{в}} = P_3 = 0,090$$

$$q = 1 - P_3 = 0,910$$

$$A = \lambda q = 0,8 \cdot 0,910 = 0,728$$

$$k = 0,8 \cdot 0,910 = 1,09$$

Цікавий результат: у сталому режимі в середньому в СМО буде зайнятий лише один, як і раніше, канал, але ціною двох що простоюють ми досягнемо високого рівня ефективності обслуговування 0,91 замість 0,455, тобто майже кожний з видів буде обслужений.

### 7.3 Модель одноканальної системи масового обслуговування з чергою

Одно канална СМО з очікуванням (рис.7.4). Потік заявок з інтенсивністю  $\lambda$ , один канал (обслуговуючий прилад).

Черги немає

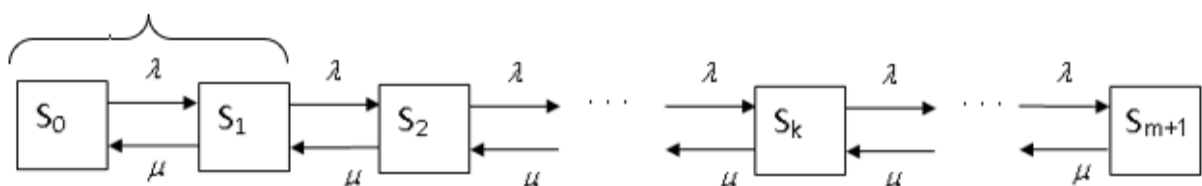


Рисунок 7.4 – Одноканальна СМО з очікуванням

Інтенсивність обслуговування –  $\mu$ , тобто в середньому безупинно зайнятий канал буде видавати  $\mu$  обслужених заявок в одиницю часу.

Якщо заявка надходить у момент, коли канал зайнятий, вона стає в чергу й очікує обслуговування. Припустимо, що число місць очікування в черзі -  $m_n$ , якщо заявка прийшла в момент, коли всі місця в черзі зайняті, вона залишає систему.

Пронумеруємо стан системи за числом заявок, які перебувають у системі (очікують у черзі й обслуговуються).

Граф станів системи наведений вище. Стан  $S_0$  і  $S_1$  характерні тим, що черги немає. У стані  $S_{m+1}$   $m$  заявок чекають у черзі, одна обслуговується. Інтенсивності потоків, що переводять систему за стрілкою зліва направо  $\lambda$ , а справа наліво –  $\mu$ .

Приклад.

Визначимо характеристики СМО:  $P_{від}$  – імовірність відмови;  $q$  – відносна пропускна здатність;  $A$  – абсолютна пропускна здатність;  $r$  – середня довжина передачі;  $Z$  – середнє число заявок пов'язаних із системою.

Розв'язання.

Використовуючи загальне рішення (форм.7.6), можна записати:

$$P_1 = (\lambda / \mu) P_0;$$

$$P_2 = (\lambda / \mu)^2 P_0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_k = (\lambda / \mu)^k P_0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_{m+1} = (\lambda / \mu)^{m+1} P_0;$$

$$P_0 = 1 / (1 + (\lambda / \mu) + (\lambda / \mu)^2 + \dots + (\lambda / \mu)^{m+1}).$$

Або з обліком, що  $\lambda / \mu = \rho$

$$P_1 = \rho P_0$$

$$P_2 = \rho^2 P_0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_k = \rho^k P_0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_{m+1} = \rho^{m+1} P_0$$

$$P_0 = [1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1}]^{-1}$$

Використовуючи вираз для суми членів, одержимо наступні вирази для граничних імовірностей стану:

$$P_0 = 1 / ((1 - \rho^{m+2}) / (1 - \rho)) = (1 - \rho) / (1 - \rho^{m+1}).$$

$$P_1 = \rho P_0$$

$$P_2 = \rho^2 P_0$$

$$P_k = \rho^k P_0$$

$$P_{m+1} = \rho^{m+1} P_0$$

Звернемо увагу на те, що вираз для  $P_0$  буде справедливим тільки для  $\rho$  не рівне 1. При  $\rho = 1$  виникає невизначеність  $0/0$ .

Відносна пропускна здатність

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 1 - (\rho^{m+1} (1 - \rho)) / (1 - \rho^{m+2})$$

Абсолютна пропускна здатність

$$A = \lambda q.$$

Середня кількість заявок, що знаходяться у черзі визначиться як

$$r = 1P_2 + 2P_3 + \dots + (k-1)P_k + \dots + m P_{m+1} = 1 \rho^2 P_0 + \rho^3 P_0 + \dots + (k-1) \rho^k P_0 + \dots + m \rho^{m+1} P_0,$$

якщо винести  $\rho^2 P_0$  за дужки, одержимо

$$r = \rho^2 P_0 (1 + 2\rho + \dots + (k-1)\rho^{k-2} + \dots + m\rho^{m-1}).$$

У розрахунках можна користуватися й цим виразом. Але можна задатися метою його спростити, та для  $r$  одержимо :

$$r = \rho^2 P_0 \frac{1 - \rho^m (m+1 - m\rho)}{(1 - \rho)^2} = \frac{[1 - \rho^m (m+1 - m\rho)]}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)}.$$

Середнє число заявок, пов'язаних із системою, визначиться по теоремі додавання математичних очікувань як:

$$Z = M(R) + M(\Omega) = r + \omega,$$

де  $r$  - середня довжина передачі;

$\omega$  - середнє число заявок під обслуговуванням.

Випадкова величина  $\Omega$  може приймати тільки 2 значення 0 і 1.0 - якщо канал вільний і 1 у протилежному випадку.

Канал вільний з імовірністю  $P_0$  і зайнятий з імовірністю  $1 - P_0$ . З відси отримуємо характеристику, таку як середній час очікування заявки в черзі:

$$\text{якщо } \Omega=0, \text{ то } P_0 + 1(1 - P_0) = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1 - \rho^{m+2}}.$$

Заявка приходить у систему в деякий момент часу. З імовірністю  $P_0$  канал обслуговування не зайнятий і вона не буде ставати в чергу. Час очікування дорівнює нулю. З імовірністю  $P_1$  вона прийде в систему, коли обслуговується канал – то заявка, але перед нею немає черги й вона буде чекати початку свого обслуговування на протязі часу  $1/\mu$ , (тобто на протязі часу обслуговування однієї заявки). З імовірністю  $P_2$  перед нею в черзі буде стояти ще одна заявка й час очікування в середньому буде  $2/\mu$  і т.д. З імовірністю  $P_k$  заявка, що прийшла, застане в системі  $K$  заявок і буде в середньому чекати до  $k/\mu$ .

Приклад.

Нехай потік заявок має інтенсивність  $\lambda = 1$  (один у хвилину). Тривалість розмови 1,25 хв. у середньому. Визначимо:

- імовірність відмови;
- відносну й абсолютну пропускну здатності;
- середній час очікування в черзі;
- середній час перебування заявки в СМО.

Наведена інтенсивність:

$$\mu = 1/1,25 = 0,8;$$

$$\rho = \lambda/\mu = 1/0,8 = 1,25.$$

$$P_0 = (1 - 1,25)/(1 - 3,05) = 0,122;$$

$$P_1 = 1,25 * 0,122 = 0,152;$$

$$P_2 = 1,25^2 * 0,122 = 0,191;$$

$$P_3 = 1,25^3 * 0,022;$$

$$P_4 = 1,25^4 * 0,122 = 0,297.$$

$$P_{\text{від}} = 0,297$$

$$q = 1 - P_{\text{від}} = 0,703$$

$$A = \lambda q = 0,703 \text{ разм./хв.}$$

$$R = \frac{1,25^2 (1 - 1,25^3)(3 + 1 - 3,75)}{(1 - 1,25^5)(1 - 1,25)} = 1,56$$

Середній час очікування в черзі

$$t_{\text{оч}} = 1/\mu = \rho / (1 - \rho) = r/\lambda = 1,56 \text{ хв.}$$

Середній час перебування заявки в СМО дорівнює середньому часу очікування плюс середній час обслуговування -  $1/\mu$

$$t_{\text{сист}} = 1/\mu * \rho / (1 - \rho) + 1/\mu = 1 / (1 - \rho) \mu.$$

#### 7.4 Багатоканальна система масового обслуговування з чергою

Багатоканальна СМО з очікуванням. Розглянемо  $n$ -канальну СМО з очікуванням, на яку надходить потік заявок з інтенсивністю  $\lambda$ ; інтенсивністю обслуговування (для одного каналу) –  $\mu$ ; число місць очікування в черзі  $m$ .

Стан випадкового процесу можна пронумерувати по числу заявок, пов'язаних із системою:

$S_0 - S_n$  - черги немає.  
 $S_0$  – всі канали вільні;  
 $S_1$  – зайнятий один канал, інші вільні;  
 .....  
 $S_k$  – зайнято  $k$  каналів, інші вільні;  
 $S_n$  – зайняті всі канали;  
 $S_{n+1}$  –  $n$  каналів зайняті, одна заявка в черзі;  
 $S_{n+2}$  –  $n$  каналів зайняті, 2 заявки в черзі;  
 .....  
 $S_{n+m}$  –  $n$  каналів зайняті,  $m$  заявок у черзі.

Граф СМО має такий вигляд (рис.7.5):

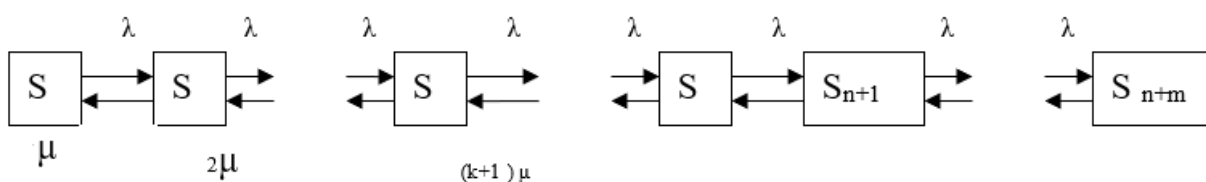


Рисунок 7.5 – Граф СМО

Випадковий процес із графом такого виду ставиться до процесу «загибелі й розмноження». Тому позначимо  $\rho = \lambda / \mu$ , та напишемо відразу вираз для граничних імовірностей стану:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \rho / 1! * P_0 \\
 P_2 &= \rho^{2/2!} * P_0 \\
 &\dots \\
 P_n &= \rho^n / n! * P_0 \\
 P_{n+1} &= \rho^{n+1} / n! * P_0 \\
 P_{n+2} &= \rho^{n+2} / n^2 n! * P_0 \\
 &\dots \\
 P_{n+m} &= \rho^{n+m} / n^m n! * P_0
 \end{aligned}$$

$$P_0 = \left[ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \rho n} \right]^{-1} \frac{P_1, P_{n+m}}{P_1, P_{n+m}}$$

Визначимо характеристики системи:

$$P_{\text{від}} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0;$$

Заявка одержує відмову, якщо зайняті всі канали й вільних місць в черзі немає. Відносна пропускна здатність (форм. (7.9)):

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0, \quad (7.9)$$

Абсолютна пропускна здатність (форм. (7.10)):

$$A = \lambda q = \lambda \left( 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0 \right), \quad (7.10)$$

Середнє число зайнятих каналів позначимо  $Z$ . Кожний зайнятий канал обслуговує в середньому  $\mu$  заявок в одиницю часу. Всі СМО обслуговує  $A$  заявок в одиницю часу (форм. (7.11)):

$$Z = A/\mu = \lambda/\mu \left( 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0 \right) = \rho \left( 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0 \right), \quad (7.11)$$

Середнє число заявок у черзі можна обчислити як математичне очікування дискретної випадкової величини (форм. (7.12)):

$$r = \frac{\rho^{n+1}}{n n!} P_0 * \frac{1 - (m+1) \frac{\rho}{n} + m \frac{\rho}{n}}{\left( 1 - \frac{\rho}{n} \right)^2}, \quad (7.12)$$

Якщо скласти середнє число заявок у черзі  $r$  і число заявок, які обслуговуються каналами, одержимо кількість заявок, пов'язаних із системою (форм. (7.13)):

$$\theta = Z + r, \quad (7.13)$$

Середній час очікування заявки в черзі  $t_{\text{оч}}$ . Якщо заявка застане не всі канали заповненими, їй не доведеться чекати. Якщо вона прийде в момент, коли зайняті всі  $n$  каналів, а черги немає, їй доведеться чекати час у середньому  $1/\mu$ . Якщо застане зайнятими всі канали й одну заявку перед собою в черзі, їй доведеться в середньому чекати  $2/\mu$ . Якщо ж у черзі  $k$  заявок, їй доведеться чекати  $k/\mu$ . А якщо всі місця в черзі заповнені, то заявка не чекає - вона залишає систему.

Враховуючи вищесказане вираз для  $t_{\text{оч}}$  отримаємо (форм. (7.14)):

$$t_{\text{оч}} = \frac{\rho^n P_0}{n \mu n!} \frac{1 + (m+1) \left( \frac{\rho}{n} \right)^m + m \left( \frac{\rho}{n} \right)^{m+1}}{\left( 1 - \frac{\rho}{n} \right)^2}, \quad (7.14)$$

## 7.5 Системи масового обслуговування з обмеженням часом очікування

Змістовна постановка задачі. Дотепер ми розглядали СМО з очікуванням, обмеженим тільки довжиною черги. У цих СМО заявка, що стала в чергу, стоїть там доти, доки не буде обслужена. На практиці часто зустрічається ситуація, коли заявка, не дочекавшись обслуговування за якийсь час залишає й чергу й систему (нетерплячі заявки).

Припустимо, що є  $n$ -канальна СМО з очікуванням, у якій число місць для очікування не обмежено, але час перебування заявки в черзі обмежено деяким випадковим строком  $T_{об}$  із середнім значенням  $t_{об}$ .

Таку ситуацію можна інтерпретувати так, що на заявку додатково діє деякий потік відходів з інтенсивністю  $\nu=1/t_{об}$ .

Якщо припустити, що цей потік пуассонівський, то процес, що протікає в системі марківський.

Вирішення задачі.

Пронумеруємо стан процесу по числу заявок пов'язаних із системою, як тих що обслуговуються так і тих що стоять у черзі:

$S_0 - S_n$  - черги немає.

$S_0$  - всі канали вільні;

$S_{1-1}$  - зайнятий обслуговуванням один канал;

$S_2$  - зайняті обслуговуванням два канали;

.....

$S_{n+1}$  -  $n$  каналів зайнята, одна заявка в черзі;

.....

$S_{n+m}$  - всі канали зайняті,  $m$  каналів у черзі.

Граф станів випадкового процесу прийме вид (рис.7.6):

Граф випадкового процесу також відповідає процесу «загибелі й розмноження».

Відповідно до загального рішення, підставляючи конкретні значення інтенсивності переходів, одержимо враховуючи позначення  $\rho = \lambda/\mu$ ;  $\beta = \nu/\mu$  рівняння (форм. (7.15)):

$$P_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \left[ \frac{\rho}{n+\beta} + \frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} + \dots + \frac{\rho^m}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+m\beta)} + \dots \right] \right\}^{-1}, \quad (7.15)$$

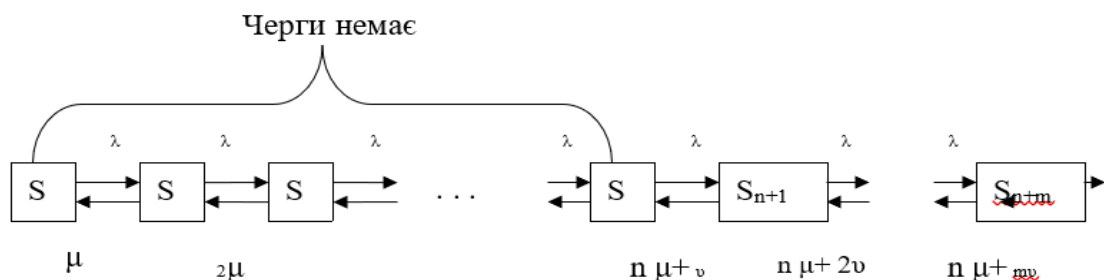


Рисунок 7.6 – Граф СМО

$$P_1 = \rho/1! * P_0$$

$$P_2 = \rho^2/2! * P_0$$

.....

$$P_n = \rho^n/n! * P_0$$

$$P_{n+1} = \rho^n/n! * \rho/(n + \beta) * P_0$$

$$P_{n+2} = \rho^n/n! * \rho^2/(n + \beta)(n + 2\beta) * P_0$$

.....

$$P_{n+m} = \rho^n/n! * \rho^m/((n + \beta)(n + 2\beta)...(n + m\beta)) * P_0$$

Якщо довжина черги не обмежена, то, як ми вже бачили, стаціонарний режим існує у випадку  $\rho < n$ . Але, якщо є нетерплячі заявки, які рано або пізно покинуть систему, то сталий режим при  $t \rightarrow \infty$  існує.

Для цього виду СМО поняття ймовірності відмови не має змісту. Кожна заявка стає в чергу й буде або обслужена, або покине систему, якщо її «терпіння» чекаючи обслуговування скінчилося.

Відносну пропускну здатність СМО  $q$  можна обчислити в такий спосіб:

У системі будуть обслужені всі заявки крім тих, які достроково покинуть систему.

Можна підрахувати, яка кількість заявок покине в середньому чергу достроково.

Для цього спочатку визначимо кількість заявок, що перебувають у черзі (форм. (7.16)):

$$r = 1 P_{n+1} + 2 P_{n+2} + \dots + m P_{n+m} + \dots, \quad (7.16)$$

На кожну заявку, що стоїть в черзі, діє потік відходів з інтенсивністю  $\nu$ . Значить із середнього числа заявок  $r$ , що чекають у черзі, не дочекавшись обслуговування,  $\nu_2$  заявок будуть іти із черги в одиницю часу. І всього в одиницю часу буде обслужено заявок (форм. (7.17)):

$$A = \lambda - \nu_2, \quad (7.17)$$

Відносна пропускну здатність (форм. (7.18)):

$$q = A/\lambda = (\lambda - \nu_2)/\lambda, \quad (7.18)$$

Середнє число зайнятих каналів  $Z$  (форм. (7.19)):

$$Z = A/\mu = (\lambda - \nu_2)/\mu = \rho - \beta r, \quad (7.19)$$

З останньої формули можна одержати просту формулу для середнього числа заявок у черзі (форм. (7.20)):

$$r = \rho/\beta - Z/\beta, \quad (7.20)$$

А вхідне у формулу середнє число зайнятих каналів  $Z$  можна знайти як математичне очікування випадкової величини  $Z$ , які приймають значення  $0, 1, 2, \dots, n$  с імовірностями  $P_0, P_1, \dots [1 - (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1})]$ , відповідно (форм. (7.21)):

$$\begin{aligned} Z &= 0 P_0 + 1 P_1 + 2 P_2 + \dots + n [1 - (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1})] = \\ &= P_1 + 2 P_2 + \dots + n [1 - (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1})], \end{aligned} \quad (7.21)$$

На останок помітимо, що при  $\nu \rightarrow 0$  або  $\beta \rightarrow 0$  формули для граничних імовірностей стану СМО при  $\rho < n$  будуть аналогічні формулам для багатоканальної СМО з очікуванням. Тобто нетерплячі заявки стають терплячими.

#### Контрольні питання

1. Що визначає термін «нетерплячі заявки».
2. Яким чином при описі графу багатоканальної СМО з очікуванням можна врахувати наявність нетерплячих заявок.
3. Який граф станів випадкового процесу відповідає одноканальній СМО з очікуванням.
4. Які основні характеристики одноканальної СМО з очікуванням визначаються при аналізі системи.
5. Яка умова граничного сталого режиму одноканальної СМО з очікуванням при зростанні кількості місць для очікування до безкінечності.
6. Який граф станів випадкового процесу відповідає багатоканальній СМО з очікуванням.
7. Які основні характеристики багатоканальної СМО з очікуванням визначаються при аналізі системи.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Цибко Г. Ю., Горошко Ю. В. Основи системного аналізу : конспект лекцій : метод. рек. з дисципліни «Системний аналіз». Чернігів : НУЧК, 2025. 117 с.
2. Горбань О. М., Бахрушин В. Є. Основи теорії систем і системного аналізу. Запоріжжя : ГУ «ЗІДМУ», 2020. 204 с.
3. Клен К. С. Методи моделювання інформаційних систем : конспект лекцій : навч. посіб. Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2023. 193 с.
4. Олевський В. І., Олевська Ю. Б., Соколова Н. О. Моделювання інформаційних систем : конспект лекцій для здобувачів ступеня бакалавра спец. 126 «Інформаційні системи та технології» / М-во освіти і науки України ; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Електрон. дані. Дніпро : НТУ «ДП», 2024. 499 с.
5. Чорней Н. Б., Чорней Р. К. Теорія систем і системний аналіз : навч. посіб. Київ : МАУП, 2021. 256 с.
6. Катренко А. В. Системний аналіз : підручник. Львів : Новий світ–2000, 2021. 396 с.
7. Шарапов О. Д., Дербенцев В. Д., Семьонов Д. Є. Системний аналіз : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисципліни. Київ : КНЕУ, 2020. 154 с.
8. Кисіль Т. М. Моделювання систем : навч. посіб. Хмельницький : ПП Мельник А. А., 2021. 256 с.
9. Muller G. System Modeling and Analysis: A Practical Approach. University of South-Eastern Norway, NISE, 2021. 128 p. URL: [www.gaudisite.nl/SystemModelingAndAnalysisBook.pdf](http://www.gaudisite.nl/SystemModelingAndAnalysisBook.pdf). (дата звернення: 20.12.2025).
10. Дубовой В. М., Никитенко О. Д., Юхимчук М. С., Галушак А. В. Моделювання об'єктів і систем : лабораторний практикум. Вінниця : ВНТУ, 2021. 157 с.

Системний аналіз та технології моделювання інформаційних систем:  
Конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
освітньої програми «Інформаційні системи та технології охорони і безпеки»  
галузі знань F/12 Інформаційні технології спеціальності F/126 Інформаційні  
системи та технології денної та заочної форм навчання / уклад.  
О.М. Любименко. Луцьк: ЛНТУ, 2026. 112 с.

Комп'ютерний набір та верстка: О.М. Любименко

Редактор: О.М. Любименко

Підп. до друку «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2026р.  
Формат 60x84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.  
Ум. друк. арк. \_\_\_\_\_. Тираж 10 прим. Зам. \_\_\_\_\_

Відділ іміджу та промоцій  
Луцького національного технічного університету  
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75