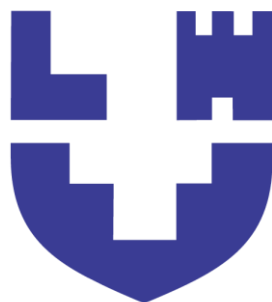


**Міністерство освіти і науки України**  
**Луцький національний технічний університет**



**АВТОМАТИЧНЕ КЕРУВАННЯ В АВТОМОБІЛЬНИХ СИСТЕМАХ**

Методичні вказівки до практичних занять  
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
освітньої програми «Автомобільна електроніка»  
галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації  
(G Інженерія, виробництво та будівництво),  
спеціальності 171 Електроніка  
(G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка),  
денної та заочної форм навчання

УДК 681.5:629.331(07)

A33

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ ім. професора Віктора Божидарніка

Директор бібліотеки \_\_\_\_\_ Наталія ПОЛЩУК

Рекомендовано до видання вченою радою факультету робототехніки та штучного інтелекту ЛНТУ, протокол № \_\_ від « \_\_ » \_\_\_\_\_ 2026 року.

Голова вченої ради ФРАІ \_\_\_\_\_ Анатолій ТКАЧУК

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри електроніки, фізики та СМАРТ-систем ЛНТУ, протокол № \_\_ від « \_\_ » \_\_\_\_\_ 2026 року.

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ Валентин ЗАБЛОЦЬКИЙ к.т.н., доц. кафедри ЕФСС електроніки, фізики та СМАРТ-систем ЛНТУ

Укладач: \_\_\_\_\_ Сергій МОРОЗ к.т.н., доц. кафедри електроніки, фізики та СМАРТ-систем ЛНТУ

Рецензент: \_\_\_\_\_ Юрій ЛАПЧЕНКО к.т.н., доц. кафедри автоматизації та безпілотних систем ЛНТУ

Відповідальний за \_\_\_\_\_ Валентин ЗАБЛОЦЬКИЙ к.т.н., доц., випуск: завідувач кафедри електроніки, фізики та СМАРТ-систем ЛНТУ

A33 Автоматичне керування в автомобільних системах. Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Автомобільна електроніка» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво), спеціальності 171 Електроніка (G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка), денної та заочної форм навчання / уклад. С. А. Мороз. Луцьк: ЛНТУ, 2026. 128 с.

Видання містить практичні роботи з дисципліни «Автоматичне керування в автомобільних системах». Призначене для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Електроніка» «Автомобільна електроніка».

## ЗМІСТ

Практичне заняття №1 Тема: Визначення функціональних елементів та побудова структурної схеми системи автоматичного керування .....	4
Практична робота №2 Тема: Класифікація систем автоматичного керування ...	10
Практичне заняття № 3 Тема: Основні принципи керування (регулювання) систем автоматичного керування .....	15
Практична робота 4 Тема: Математичний опис систем за допомогою диференційних рівнянь. ....	28
Практичне заняття № 5 Тема: Дослідження функціонування систем автоматичного керування .....	46
Практичне заняття 6 Тема: Аналіз різновидів динамічних ланок.....	53
Практичне заняття 7 Тема: Структурні перетворення систем автоматичного керування .....	63
Практичне заняття 8 Тема: Стійкість систем керування. Алгебраїчні критерії стійкості .....	75
Практичне заняття 9 Тема: Стійкість систем керування. Частотні критерії стійкості .....	91
Практичне заняття 10 Тема: Чутливість і показники якості систем керування .	102
Практичне заняття 11 Тема: Елементи синтезу систем керування .....	112
ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	128

## Практичне заняття №1

**Тема:** Визначення функціональних елементів та побудова структурної схеми системи автоматичного керування

**Мета:** Ознайомитися з поняттям системи автоматичного керування, її функціональними елементами, вивчити призначення основних ланок САК та навчитися аналізувати функціональні і структурні схеми систем автоматичного керування.

### Теоретичні відомості

Під системою автоматичного керування (САК) розуміють сукупність об'єкта керування (робочої машини, механізму) та з'єднаних певним чином елементів, взаємодією яких забезпечується розв'язання поставленого завдання керування об'єктом.

Якщо всі елементи САК позначити прямокутниками, розмістивши їх у послідовності, що відповідає їх взаємодії, а напрямок цієї взаємодії вказати стрілками, то дістанемо функціональну схему САК. Якщо на функціональній схемі відобразити характеристики (рівняння, криві залежності вихідних параметрів від часу або деякі інші), що визначають динамічні властивості елементів системи, то дістанемо так звану структурну схему САК. Елементи відповідних схем називають ланками. Треба мати на увазі, що іноді, для зручності математичного описання динамічних процесів, можна об'єднувати частини деяких фізичних елементів в окрему ланку структурної схеми.

Функціональні (структурні) схеми різних САК можуть відрізнятися одна від одної за багатьма ознаками, які детально розглядатимуться далі.

Як згадувалось вище, будь-яка САК являє собою сукупність об'єкта керування та керуючого пристрою. Останній, в свою чергу, складається з ряду елементів. На рис.1 наведена типова структурна схема САК з одною регульованою величиною  $u(t)$ .

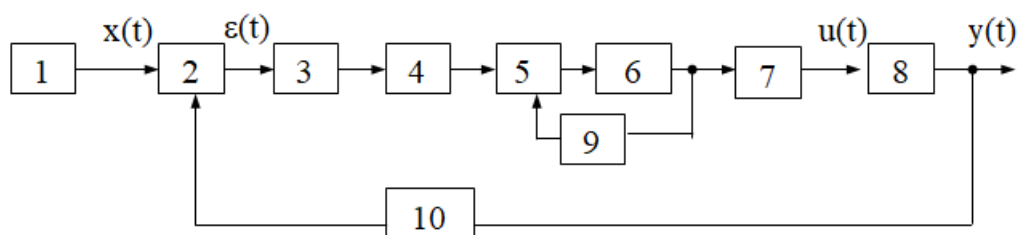


Рисунок 1 – Структурна схема САК

Розглянемо детальніше функціональне призначення окремих елементів САК:

1 – задавальний пристрій (ЗП), призначений для завдання необхідного значення вхідної координати. Це значення може задаватися вручну (у системах стабілізації), змінюватися за заданим законом (програмне керування), змінюватися за випадковим законом (слідкуючі системи);

2 – порівнюючий пристрій або блок порівняння (БП), який на основі порівняння дійсного значення вихідної координати  $y(t)$  з її бажаним значенням  $y_{\text{баж}}(t)$  виробляє сигнал розузгодження  $\varepsilon(t)$ ;

Керуючий елемент дістає інформацію від чутливого елемента і формує потрібний сигнал для виконуючого елемента. Часто він виконує і функції підсилювача. Основними видами підсилювачів є напівпровідникові, електромашинні, магнітні, електронні та йонні. Із неелектричних найпоширеніші гідравлічні та пневматичні підсилювачі.

Як приклад розглянемо формування потрібного сигналу за допомогою електромашинних або магнітних підсилювачів, у яких сигнал формується за допомогою обмоток керування. В цьому разі дійсна величина у вигляді напруги (струму) від чутливого елемента надходить до однієї з обмоток керування, яка формує відповідний магнітний потік, пропорційний дійсному значенню регульованої величини  $x_d$ . Друга обмотка (завдання) формує зустрічний магнітний потік, пропорційний заданому значенню регульованої величини  $X_z$ .

Як результат взаємодії зустрічно ввімкнених обмоток керування формується сигнал розузгодження який після відповідного підсилення надходить до виконуючого елемента системи.

3 – перетворюючий пристрій, який перетворює одну фізичну величину на іншу, більш зручну для використання в процесі керування;

6 – підсилюючий пристрій або підсилювально-перетворюючий пристрій, що підсилює сигнали за потужністю і за необхідності перетворює (наприклад, змінний струм у постійний). Використовують електронні, електромагнітні, гідравлічні, пневматичні підсилювачі;

7 – виконавчий пристрій, який безпосередньо впливає на об'єкт;

Залежно від технологічних особливостей об'єкта керування виконуючим елементом можуть бути різного роду серводвигуни обертального або поступального руху, що діють на відповідні технологічні регулюючі пристрої - засувки трубопроводів подачі стисненого повітря, пари, води, ручки керування, перемикачі швидкості та ін.

8 – об'єкт керування - машина чи установка, заданий режим роботи якої повинен підтримуватися керуючим пристроєм;

10 – чутливий елемент або вимірювальний пристрій, призначений для вимірювання дійсного значення вихідної величини і перетворення її на сигнали, зручні для подальшого використання. Це можуть бути різного роду датчики сигналів (потенціометри, тахогенератори, термометри, сельсини і т.д.). У багатьох системах вимірювальний, порівнюючий, задавальний пристрої об'єднані в один елемент, що утворює сигнал розузгодження  $\varepsilon(t)$ . Прикладом може слугувати сельсинний вимірювальний пристрій, в якому сельсин-датчик - це задавальний пристрій, сельсин-

трансформатор - вимірювальний пристрій, а разом вони утворюють порівнюючий пристрій.

Усі перераховані елементи називають *функціонально необхідними* (ФНЕ). Вони складають незмінювану частину системи. Проте найчастіше система, що складається тільки з ФНЕ, не є придатною до роботи. Тому для надання системі бажаних властивостей до її складу включають *коректувальні пристрої*, які змінюють характеристики САК у потрібному напрямі. Коректувальні пристрої можуть бути включені послідовно з ФНЕ, і тоді називаються *послідовними* коректувальними пристроями (4), або входять до складу місцевих зворотних зв'язків, що охоплюють ті чи інші ФНЕ. У цьому випадку їх називають *зустрічно-паралельними* коректувальними пристроями (9). За наявності місцевих зворотних зв'язків до складу САК входять допоміжні порівнюючі пристрої (5), які порівнюють сигнал у проміжній точці прямої ланки із сигналом місцевого зворотного зв'язку.

Конкретні схеми САК можуть відрізнятися від типової схеми, наведеної на рисунку 1. Частина пристроїв може бути відсутньою або ж конструктивно об'єднуватися в одному пристрої. САК можуть мати також інші елементи, не показані на схемі. Функції коректувальних пристроїв можуть виконувати цифрові або аналогові обчислювальні машини.

### Хід роботи

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями щодо систем автоматичного керування.
2. Розглянути типову структурну (функціональну) схему САК з однією регульованою величиною.
3. Проаналізувати призначення кожного елемента САК та його роль у процесі керування.
4. Визначити, які елементи належать до функціонально необхідних, а які – до коректувальних.
5. Зробити висновок про взаємодію елементів у замкненій системі керування.

### Варіанти завдань для аналізу

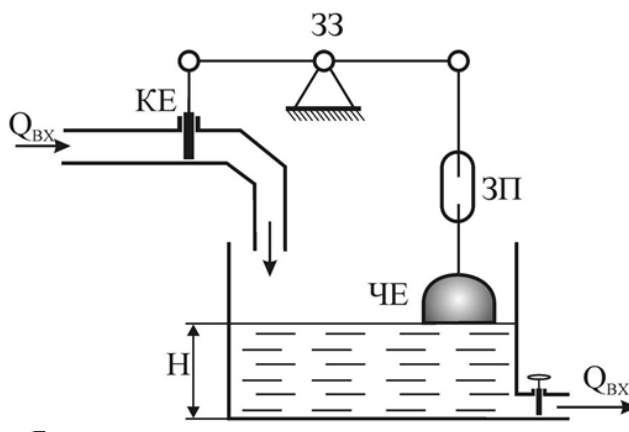


Рисунок 2 – САК рівня води в баку

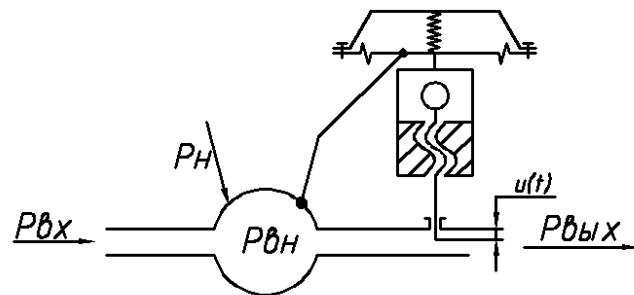


Рисунок 3 – САК регулювання тиску

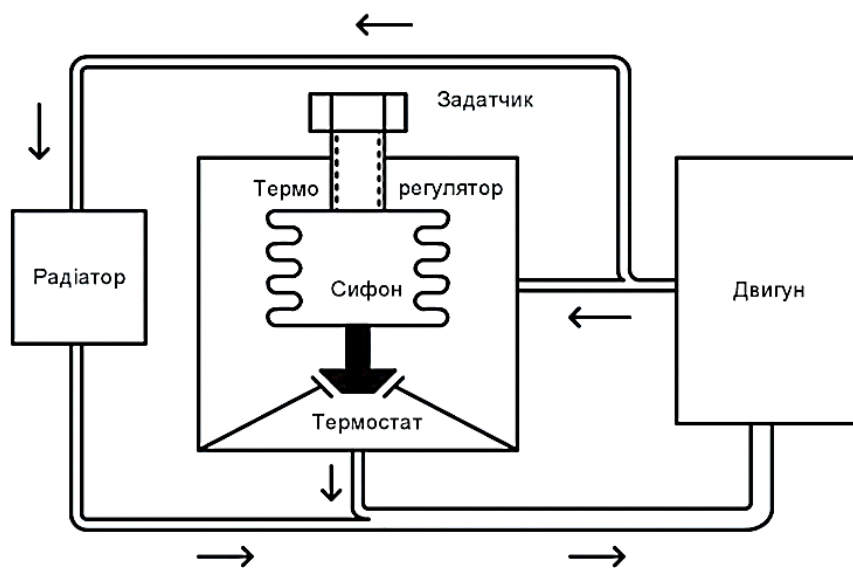


Рисунок 4 – САК регулювання температури

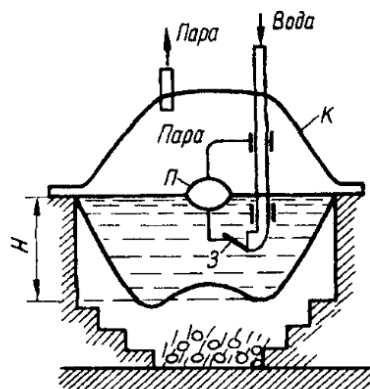


Рисунок 5 – САК рівня води в паровому котлі

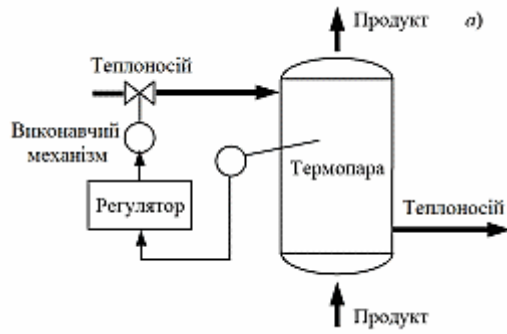


Рисунок 6 – САК температури продукту в теплообміннику.

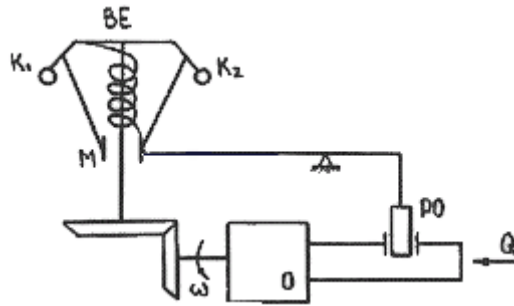


Рисунок 7 –САК прямої дії швидкості об'єкта.

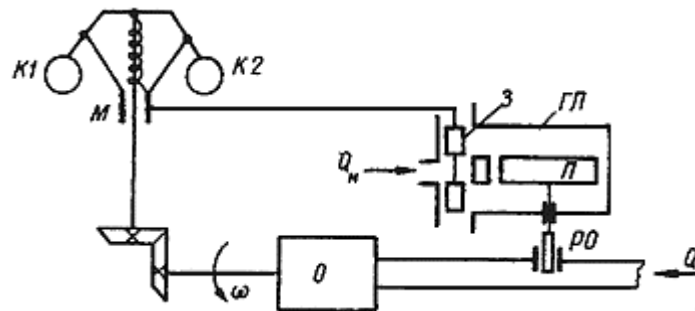


Рисунок 8 – САК непрямої дії швидкості об'єкта

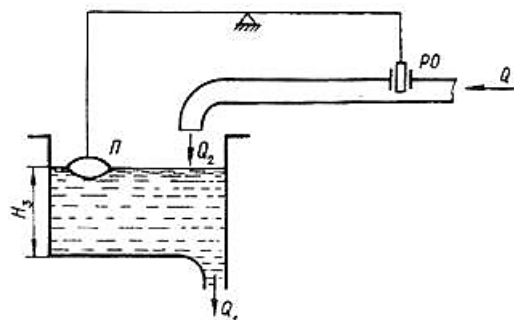


Рисунок 9 – САК рівня деякого середовища

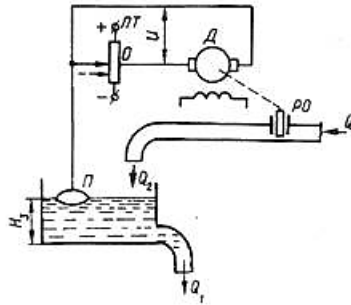


Рисунок 10 – САК рівня деякого середовища за допомогою електропривода

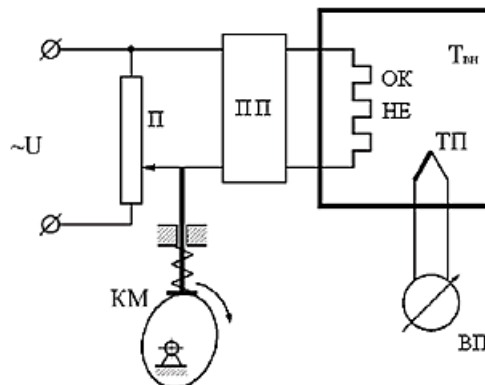


Рисунок 11 –САК температурою камери

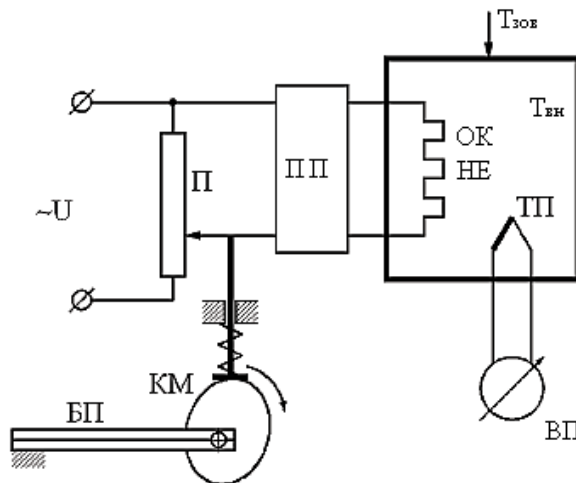


Рисунок 12 – САК температурою камери

### Контрольні питання

1. Дайте визначення системи автоматичного керування (САК). З яких основних складових вона складається?
2. У чому полягає відмінність між функціональною та структурною схемами САК?
3. Яке призначення задавального пристрою, порівнюючого пристрою та виконавчого елемента в системі автоматичного керування?
4. Які елементи САК належать до функціонально необхідних (ФНЕ), а які — до коректувальних? У чому їх відмінність?
5. Поясніть принцип роботи замкненої системи автоматичного керування та роль зворотного зв'язку в ній.

## Практична робота №2

Тема: Класифікація систем автоматичного керування

Мета: Ознайомитися з основними видами систем автоматичного керування, вивчити їх класифікацію за різними ознаками та набути навичок аналізу й віднесення конкретних систем до відповідних класів.

### Теоретичні відомості

Система автоматичного керування (САК) – це сукупність об'єкта керування та керуючого пристрою, взаємодія яких забезпечує підтримання або зміну вихідної величини за заданим законом без безпосередньої участі людини.

У зв'язку з великою різноманітністю технічних систем виникла необхідність їх класифікації за певними ознаками. Класифікація дозволяє:

- систематизувати знання про САК;
- спростити аналіз і проектування систем;
- визначити методи розрахунку та дослідження;
- обрати раціональну структуру системи.

Класифікація за принципом роботи. За принципом роботи САК поділяються на:

#### 1. Розімкнуті системи

У таких системах відсутній зворотний зв'язок. Керування здійснюється за збуренням, тобто вплив на об'єкт формується без контролю фактичного значення вихідної величини.

Особливість: простота конструкції, але низька точність.

Приклад: регулювання температури теплоносія залежно від температури зовнішнього середовища.

#### 2. Замкнуті системи

Мають зворотний зв'язок. Керування здійснюється за відхиленням – система порівнює задане та фактичне значення і формує сигнал розузгодження.

Особливість: вища точність і стійкість до збурень.

Приклад: регулятор швидкості двигуна.

#### 3. Комбіновані системи

Поєднують принципи керування за збуренням і за відхиленням.

Приклад: сучасні автомобільні системи керування.

Класифікація за характером зміни задаючої величини:

#### 1. Системи стабілізації

Підтримують вихідну величину сталою:

$$y(t) = const$$

Приклад: холодильник, стабілізатор напруги.

#### 2. Слідкуючі системи

Вихідна величина відтворює змінну задаючу дію:

$$y(t) = x(t)$$

Вхідна величина змінюється випадково.

Приклад: система наведення ракети.

#### 3. Системи програмного керування

Задаюча дія змінюється за наперед відомим законом.

$$y(t) = F[x(t)]$$

Приклад: верстати з ЧПК.

#### 4. Системи екстремального керування

Здійснюють пошук максимуму або мінімуму певної функції.

Приклад: автоматичне налаштування радіоприймача.

Класифікація за кількістю вихідних координат:

##### 1. Одномірні системи

Керування здійснюється за однією величиною. Приклад: регулятор температури.

##### 2. Багатовимірні системи

Керування здійснюється за декількома величинами.

Бувають:

- незв'язані САК – канали керування незалежні;
- зв'язані САК – зміна однієї координати впливає на іншу.

Класифікація за характером рівнянь

##### 1. Лінійні системи

Описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Для них виконується принцип суперпозиції: реакція на суму впливів дорівнює сумі реакцій.

##### 2. Нелінійні системи

Описуються нелінійними рівняннями.

Принцип суперпозиції не виконується.

Аналіз складніший, часто застосовується лінеаризація.

Класифікація за характером дії в часі:

##### 1. Безперервні системи

Сигнали змінюються безперервно. Описуються диференціальними рівняннями.

##### 2. Дискретні системи

Сигнали змінюються стрибкоподібно або через певні проміжки часу.

Різновиди:

- релейні;
- імпульсні;
- цифрові.

Класифікація за зміною параметрів у часі:

##### 1. Стаціонарні системи

Параметри не змінюються з часом.

##### 2. Нестационарні системи

Параметри є функціями часу.

Класифікація за точністю керування:

##### 1. Статичні системи

Після завершення перехідного процесу мають статичну похибку.

Регульовальна характеристика – похила пряма.

##### 2. Астатичні системи

Після завершення перехідного процесу похибка дорівнює нулю.

Регульовальна характеристика – горизонтальна пряма.

Класифікація за наявністю додаткового джерела енергії:

##### 1. Системи прямої дії

Не мають підсилювачів. Вимірювальний елемент безпосередньо впливає на регулюючий орган.

## 2. Системи непрямой дії

Містять підсилювачі потужності та використовують зовнішнє джерело енергії. Забезпечують вищу точність і кращі динамічні властивості.

Класифікація САК дозволяє:

- визначити особливості роботи системи;
- обрати адекватну математичну модель;
- оцінити точність, стійкість та динамічні властивості;
- обґрунтувати вибір структури системи при проектуванні.

### Хід роботи

1. Ознайомитися з теоретичними положеннями щодо класифікації САК.
2. Проаналізувати основні класифікаційні ознаки систем автоматичного керування.
3. Виконати поставлені завдання
4. Оформити звіт по практичному занятті.

Завдання 1. Визначення типу САК за принципом роботи

Розглянути наведені приклади та визначити тип системи (розімкнута, замкнута, комбінована):

Регулювання температури теплоносія залежно від температури зовнішнього повітря.

Регулятор швидкості двигуна з датчиком обертів.

Система автоматичного керування сучасного автомобіля (ABS + ESP + круїз-контроль).

Записати відповідь та обґрунтувати її.

Завдання 2. Класифікація за алгоритмом функціонування

Для кожної системи визначити її тип:

Холодильник підтримує температуру  $+4^{\circ}\text{C}$ .

Верстат з ЧПК виконує обробку деталі за заданою програмою.

Ракета супроводжує рухому ціль.

Радіоприймач автоматично налаштовується на максимальну гучність сигналу.

Вказати: стабілізуюча, слідкуюча, програмна або екстремальна система.

Завдання 3. Аналіз багатовимірності системи

Визначити, чи є система одномірною чи багатовимірною:

Регулятор рівня води в резервуарі.

Система керування польотом літака (висота, курс, швидкість).

Генератор електростанції (частота + напруга).

Для багатовимірних систем визначити: зв'язане чи незв'язане керування.

Завдання 4. Визначення типу за характером дії в часі

Проаналізувати приклади:

Механічний регулятор Уатта.

Електронний цифровий термостат.

Релейна система керування насосом (вкл/викл).

Визначити: безперервна чи дискретна система (вказати підтип).

Завдання 5. Порівняння статичної та астатичної систем

Пояснити різницю між статичною та астатичною САК.

Розв'язати задачу:

У статичній системі максимальне значення регульованої величини  $H_{max}$  = 100 см, відхилення  $\Delta H = 10$  см.

Визначити статизм  $\delta$  (%):

$$\delta = \frac{\Delta H}{H_{max}} \cdot 100\%$$

Зробити висновок щодо точності системи.

Завдання 6. Класифікація системи ABS

Проаналізувати антиблокувальну систему гальм (ABS) автомобіля та визначити її тип за такими ознаками:

- за принципом роботи;
- за характером зміни задаючої величини;
- за кількістю вихідних координат;
- за характером дії в часі;
- за наявністю додаткового джерела енергії.

Обґрунтувати відповідь.

Завдання 7. Аналіз електронної системи упорскування палива (EFI)

Розглянути систему електронного керування двигуном (ECU + датчики + форсунки).

Визначити:

1. Чи є система замкнутою? Який зворотний зв'язок використовується?
2. До якого класу вона належить за характером зміни задаючої величини?
3. Чи є система лінійною? Пояснити.
4. Чи є вона стаціонарною?

Завдання 8. Класифікація круїз-контролю

Розглянути систему круїз-контролю автомобіля.

Необхідно:

- визначити тип системи за принципом роботи;
- встановити, чи є вона системою стабілізації або слідкуючою;
- визначити, чи є вона статичною або астатичною;
- обґрунтувати відповідь з точки зору точності підтримання швидкості.

Завдання 9. Порівняння механічної та електронної системи керування

Порівняти:

- механічний регулятор швидкості (типу Уатта);
- електронну систему керування дросельною заслінкою (Drive-by-Wire).

Для кожної системи визначити:

- прямої чи непрямой дії;
- безперервна чи дискретна;
- лінійна чи нелінійна;
- переваги та недоліки.

Оформити результати у вигляді таблиці.

Завдання 10. Класифікація системи ESP (Electronic Stability Program)

Проаналізувати систему електронної стабілізації автомобіля (ESP).

Визначити:

1. Чи є система одномірною чи багатовимірною?
2. Чи є вона зв'язаною чи незв'язаною?
3. До якого типу належить за характером дії в часі?
4. Чи можна вважати її комбінованою системою?

Пояснити, які датчики формують зворотний зв'язок (датчик кута повороту керма, датчик прискорення, датчики швидкості коліс тощо).

#### Контрольні питання

1. За якими ознаками класифікують САК?
2. Чим відрізняється замкнута система від розімкнутої?
3. У чому різниця між слідкуючою та програмною системами?
4. Що таке принцип суперпозиції?
5. Чим відрізняються статичні та астатичні системи?

### Практичне заняття № 3

Тема: Основні принципи керування (регулювання) систем автоматичного керування

Мета: ознайомитися і засвоїти існуючі принципи керування, що використовуються в сучасних системах автоматичного керування

#### Теоретичні відомості

Система автоматичного керування складається з *керуючих пристроїв* (КП) і *об'єкта керування* (ОК). Величини, що характеризують стан ОК, мають назву *вихідних* або *керованих*. Впливи, що поступають на вхід КП, мають назву *задаючих*. Впливи, що виробляються КП і безпосередньо змінюють стан ОК, мають назву *керуючих*. Впливи, що викликають несанкціоноване відхилення керованої величини від заданого значення, мають назву *збурюючої дії*. Задаючі і збурюючі дії об'єднують в групу *вхідних впливів*.

У процесі роботи об'єкт керування піддається впливу різноманітних зовнішніх збурень, унаслідок чого керована величина відхиляється від необхідного значення. Тому пристрій керування забезпечує відповідність керованої величини заданому значенню шляхом передачі на об'єкт керування необхідної керуючої дії.

За способом визначення керуючої дії, необхідної для компенсації відхилення керованої величини від необхідного значення, розрізняють чотири принципи керування:

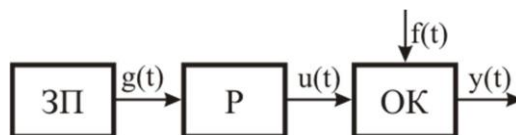
1. Керування за задаючою дією або за принципом розімкнутого керування;
2. Керування за збуренням, коли керуюча дія на об'єкт формується залежно від величини дії, що задається і однієї чи декількох зовнішніх дій на ОК;
3. Керування за відхиленням, коли керуюча дія на об'єкт формується залежно від відхилення дійсного значення керованої координати від заданого значення;
4. Комбіноване керування, коли керуюча дія на об'єкт формується залежно від відхилення дійсного значення керованої координати від заданого значення і величини однієї чи декількох зовнішніх дій на ОК.
5. Принцип адаптації.

Принцип розімкнутого керування (керування за задаючим впливом).

Суть принципу розімкненого керування полягає в тому, що процес керування будується тільки на базі заданого алгоритму функціонування і не контролюється по фактичному значенню керованої величини, тобто поточний стан ОК не враховується при виробленні дій, що керують. Процес роботи системи не залежить безпосередньо від результату її дії на об'єкт керування. Структурна схема керування має вигляд розімкненого кола (рис. 1), тобто керуючий пристрій чинить дію на об'єкт керування, але зворотна дія відсутня.

Задаючий пристрій (ЗП) подає задаючу дію  $g(t)$ , яка перетвориться керуючим пристроєм в керуючу дію  $u(t)$ . Під впливом керування стан об'єкта керування ОК, що характеризується керованою величиною  $y(t)$ , змінюється так, щоб значення  $y(t)$  було рівним необхідному значенню, величина якого

визначається задаючою дією  $g(t)$ . Наявність збурюючої дії  $f(t)$  призводить до того, що дійсне значення керованої величини  $y(t)$  відрізняється від заданого, тобто з'являється помилка керування. У випадку якщо дія збурень є постійною або періодичною, помилка керування накопичується, і може статися відмова системи. Тому принцип розімкненого керування не застосовують в умовах значних перешкод і збурень. У відсутності збурень відтворення заданої величини забезпечується жорсткістю характеристик пристроїв, що входять до складу схеми. Розімкнене керування в чистому вигляді застосовується рідко і тільки в простих системах.



ЗП – задаючий пристрій; Р – регулятор (керуючий пристрій); ОК – об'єкт керування;  $g(t)$  – задаючий вплив;  $u(t)$  – керуюча дія;  $f(t)$  - збурюючий вплив ;  $y(t)$  – вихідний сигнал

Рисунок 1 – Структурна схема керування з розімкненим колом

Розглянемо розімкнену систему керування температурою електронагрівального елемента (рис. 2). В якості керуючого пристрою, в схемі використовується змінний резистор, положення рухливого контакту якого визначає величину керуючої напруги  $U_{\text{КЕР}}$ , як долю вхідної напруги  $U_{\text{ВХ}}$ , що подається на електронагрівальний елемент. У побутових електрообігрівачах необхідна температура задається вручну з використанням регулятора або позиційного перемикача. У промислових електронагрівачах закон зміни температури нагріву може задаватися профілем кулачка (рис. 2).

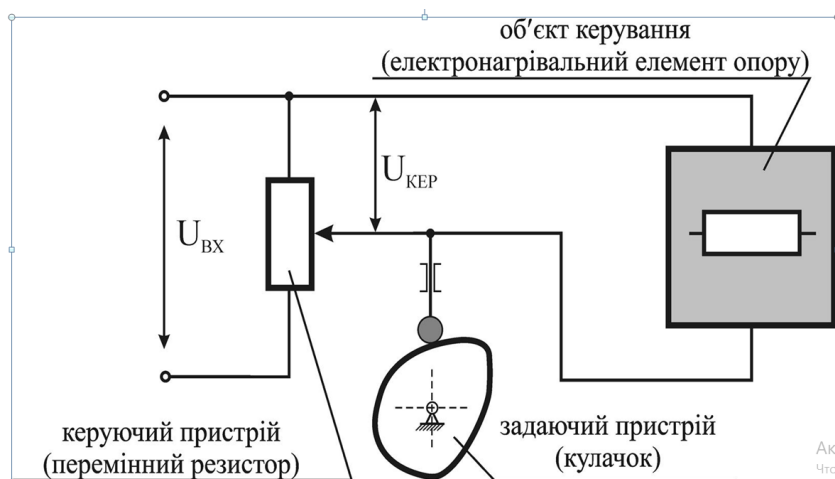


Рисунок 2 - Розімкнена система керування температурою електронагрівача

Розглянемо ситуацію, пов'язану з виникненням в розімкненій САК помилки керування в умовах дії збурення на прикладі діаграм роботи розімкненої САК температурою нагріву побутового електрообігрівача з двопозиційним

перемикачем (рис. 3).

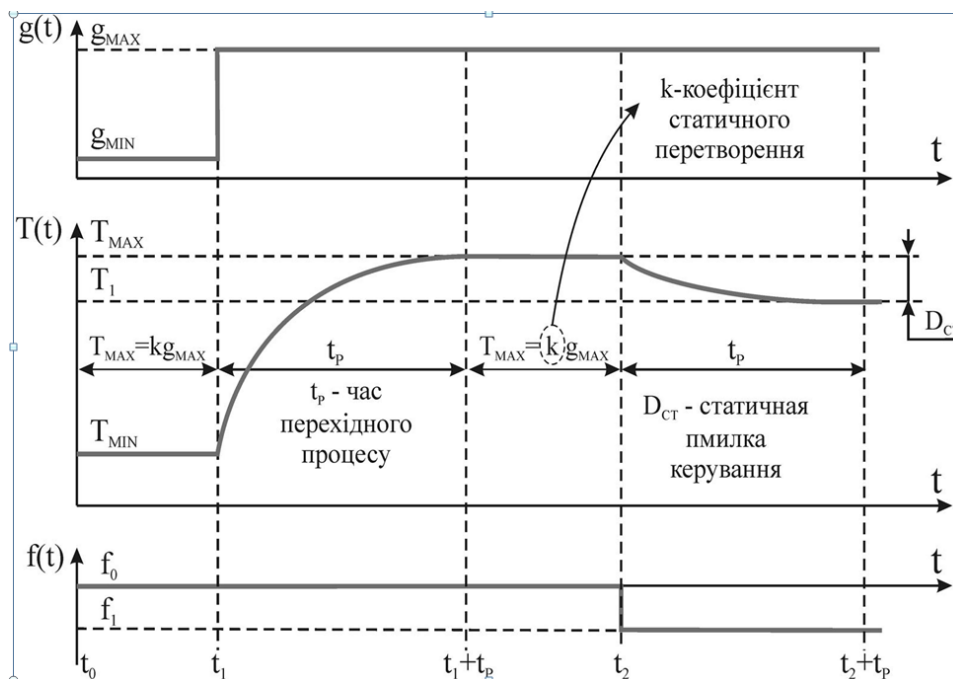


Рисунок 3 – Часова діаграма роботи розімкненої САК температурою нагріву електрообігрівача з двопозиційним перемикачем

Нехай перемикач, окрім положення «вимкнено» має два положення, що відповідають мінімальній і максимальній температурі нагріву. До моменту часу  $t_0$  електрообігрівач деякий час був включений на мінімальну температуру нагріву - положення перемикача відповідало  $g_{MIN}$ , і температура вже досягла значення  $T_{MIN}$ . Система знаходиться в сталому стані рівноваги, що описується залежністю:

$$T_{MIN} = k \cdot g_{MIN} \quad (1)$$

де  $k$  – коефіцієнт статичного перетворення САК.

Стан рівноваги зберігається в системі до моменту часу  $t_1$ . У момент часу  $t_1$  користувач електрообігрівача перемикає регулятор в положення "MAX". Оскільки зміна положення перемикача відбувається практично миттєво, зміну величини задаючої дії  $g(t)$  в момент часу  $t_1$  можна зображувати ідеальною сходинкою (рис. 3.3). При цьому процес перетворення електричної енергії в теплову є більш інерційним, у зв'язку з цим температура нового значення досягне не відразу, а за деякий час перехідного процесу  $t_p$ . Закон зміни температури під час перехідного процесу носить плавний характер.

Після завершення перехідного процесу рівновага в системі відновиться - з моменту часу  $t_1 + t_p$  виконується рівність:

$$T_{MAX} = k \cdot g_{MAX} \quad (2)$$

Встановлена рівновага зберігатиметься в системі до моменту часу  $t_2$ , в який в системі починає діяти деяке збурення. Припустимо, що це збурення полягає в спаді вхідної напруги (рис. 3). В результаті, при незмінному положенні регулятора  $g(t_2) = g_{\max}$  температура електрообігрівача почне знижуватися і після завершення перехідного процесу у момент часу  $t_2 + t_p$  досягне деякого нового значення  $T_1$ , відмінного від необхідного  $T_{\max}$ . Система прийде до стану рівноваги, але в цьому стані матиме місце статична помилка керування  $D_{ст}$ , рівна величині відхилення фактичного перехідного процесу значення керованої величини, що встановився після завершення, від заданого значення (рис. 3.3).

*Принцип зворотного зв'язку.* Для можливості контролю параметрів об'єкта керування і для покращення характеристик систем автоматики передбачають лінії зворотного зв'язку.

*Лінії зворотного зв'язку* – це лінії зв'язку, по яких інформація передається в зворотному напрямку в порівнянні з керуючим впливом.

В автоматичних системах використовуються такі види зворотного зв'язку:

- *додатний зворотний зв'язок* – знак сигналу зворотного зв'язку і задаючого впливу *співпадають*;
- *від'ємний зворотний зв'язок* – знак сигналу зворотного зв'язку і задаючого впливу *не співпадають*;
- *жорсткий зворотний зв'язок* – передаючий вплив залежить тільки від регульованого параметру і не залежить від часу (працює постійно);
- *гнучкий зворотний зв'язок* – діє тільки в перехідному процесі, тобто існує тільки тоді, коли керована величина змінюється в часі;
- *головний зворотний зв'язок* – з'єднує вихід системи автоматики з її входом, тобто зв'язує керовану величину із задаючою величиною від задаючого пристрою;
- *додатковий зворотний зв'язок* – передає сигнал впливу з виходу будь-якого елемента системи (наприклад, підсилювача) на вхід будь-якого попереднього елемента для покращення характеристики окремих елементів системи.

Найбільше розповсюдження в автоматичних системах керування отримав принцип *зворотного зв'язку* (рис. 4). Тут керуючий вплив корегується пристроєм КП в залежності від вихідної величини  $y(t)$ . І вже не важливо, які збурення діють на ОК.

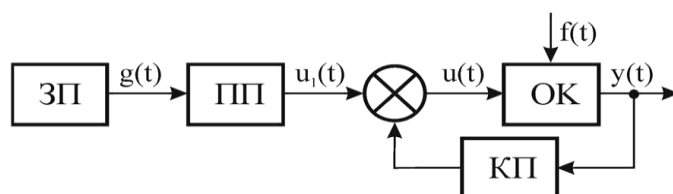


Рисунок 4 – САК із зворотним зв'язком

Якщо значення  $y(t)$  відхиляється від потрібного, то відбувається коригування сигналу  $u(t)$  з метою зменшення цього відхилення. Зв'язок виходу ОК з його входом має назву *головного зворотного зв'язку* (ЗЗ). В окремому випадку (рис. 5) задаючий пристрій (ЗП) формує необхідне значення вихідної величини

$g(t)$ , яке порівнюється з дійсним значенням на виході САК  $y(t)$ .

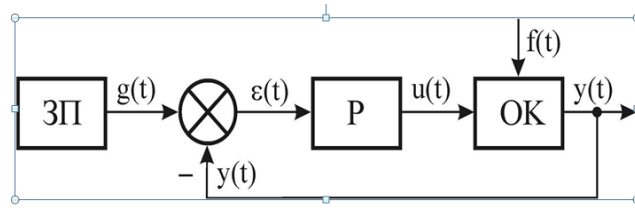


Рисунок 5 – САК із зворотним зв'язком по відхиленню від заданої величини

Відхилення  $\epsilon = g(t) - y(t)$  з виходу порівнюючого пристрою подається на вхід регулятора  $P$ , що поєднує в собі підсилювальний пристрій (ПП), керуючий орган (КО) і чутливий елемент (ЧЕ). Якщо  $\epsilon(t) \neq 0$ , то регулятор формує керуючий вплив  $u(t)$ , діючий доти, поки не буде забезпечена рівність  $\epsilon(t) = 0$  або  $y(t) = g(t)$ . На регулятор подається різниця сигналів, тому такий зворотний зв'язок називається *від'ємним* на відміну від *додатного* зворотного зв'язку, коли сигнали  $g(t)$  і  $y(t)$  складаються. Таке керування функції відхилення називається регулюванням, а подібну САК називають системою автоматичного регулювання (САР). Для прикладу на рис. 6 зображена спрощена схема САР хлібопекарської печі.

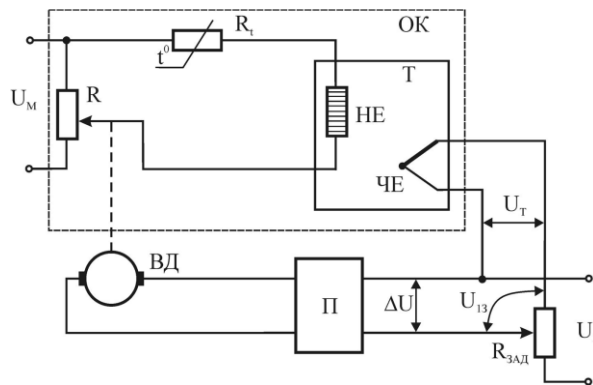


Рисунок 6 – Спрощена схема САР хлібопекарської печі з регулятором

Роль задаючого пристрою ЗП виконує потенціометр  $R_{\text{Зад}}$ , напруга на якому  $U_3$  порівнюється з напругою на термопарі  $U_T$ . Їх різниця  $\Delta U$  через підсилювач  $\Pi$  подається на виконавчий двигун постійного струму ВД, який регулює через редуктор положення повзунка реостату  $R$  в колі нагрівального елемента (НЕ). Наявність підсилювача говорить про те, що дана САР є системою непрямого регулювання, оскільки енергія для функцій керування береться від сторонніх джерел живлення на відміну від систем прямого регулювання, в яких енергія береться безпосередньо від об'єкта керування ОК, як наприклад, в САР рівня води в баку (рис. 7).

Для підтримки постійного рівня води в баку  $H$  використовується чутливий елемент (ЧЕ) у вигляді поплавця, який постійно знаходиться на її поверхні. При збільшенні витрати води  $Q_{\text{Вих}}$  її рівень  $H$  починає знижуватися.

Поплавок ЧЕ переміщується вниз і через тягу ЗП і важіль ЗЗ (негативний зворотний зв'язок) впливає на керуючий орган КО (засувка) - збільшується подача води  $Q_{\text{Вх}}$  в бак. Збільшення подачі  $Q_{\text{Вх}}$  приводить до підняття рівня води

в баку. В результаті чого поплавок ЧЕ піднімається і прикриває засувку КО. Подача води зменшується, і рівень води стабілізується навколо заданого рівня, змінюваного довжиною тяги ЗП. Недоліком принципу зворотного зв'язку є інерційність системи. Тому часто застосовують комбінацію даного принципу з принципом компенсації, що дозволяє об'єднати переваги обох принципів: швидкість реакції на збурення принципу компенсації і точність регулювання незалежно від природи збурень принципу зворотного зв'язку. Системи, що мають один або кілька місцевих зворотних зв'язків, називаються багатоконтурними. У цих системах вплив, що прикладений до того чи іншого елемента, може обійти всю систему і повернутися у вихідну точку декількома шляхами обходу.

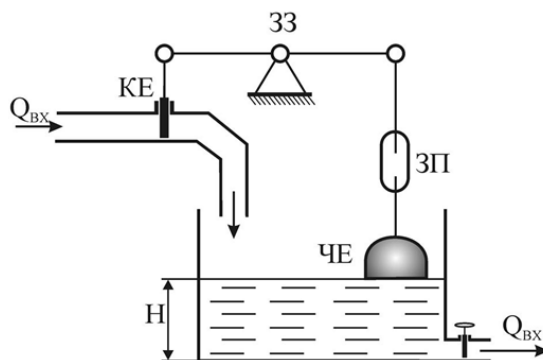


Рисунок 7 – САР рівня води в баку

**Принцип керування за збуренням** (принцип Понселе – Чиколева). Його було запропоновано французом Жаном-Віктором Понселе (01.07.1788 – 22.12.1867)- французьким математиком та інженером, що створив проективну геометрію, і є одним із засновників вивчення властивостей матеріалів у матеріалознавстві. Одночасно із заняттями чистою математикою він продовжив свою діяльність як військовий інженер і окрім робіт технічного характеру з будівельної механіки - займався зокрема паровою механікою, гідравлічними двигунами та спорудами. Принцип керування за збуренням вперше широко використано в регуляторах дугових ламп освітлення російським електротехніком В. М. Чиколевім (04.08.1845 – 05.03.1898) у другій половині XIX ст.

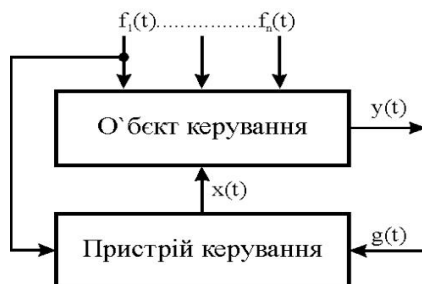
Керування за збуренням ґрунтується на принципі компенсації збурень. При такому принципі керований параметр не змінюється, а використовується лише інформація про зовнішню дію на об'єкт. При цьому визначають основну збурюючу дію і встановлюють, як необхідно змінювати керуючу дію на об'єкт керування, щоб значення керованих параметрів підтримувались незмінними. Функціональна схема такої САК представлена на рис. 8.

В САК з принципом керування за збуренням керуюча дія на об'єкт визначається так:

$$x(t) = F\{g(t), f(t)\} \quad (3)$$

Принцип керування за збуренням полягає в тому, що для усунення

відхилення вектору вихідних параметрів від необхідного значення, викликаного збурюючою дією, виміряна величина цього збурення перетворюється в керуючу дію, яка прикладається до об'єкта керування і викликає компенсоване відхилення керованої величини протилежного знаку в порівнянні з відхиленням, яке викликане цією дією.



$f_1(t), \dots, f_n(t)$  - збурюючі дії на ОК,  $x_{\text{ЗАД}}(t)$  - задаюча дія,  $y(t)$  - вихідна величина  
Рисунок 8 – Структура САК, що побудована на основі принципу керування за збуренням

Для визначення основних закономірностей, притаманних для САК, побудованих на основі цього принципу, розглянемо систему, функціональна схема якої представлена на рис. 9.

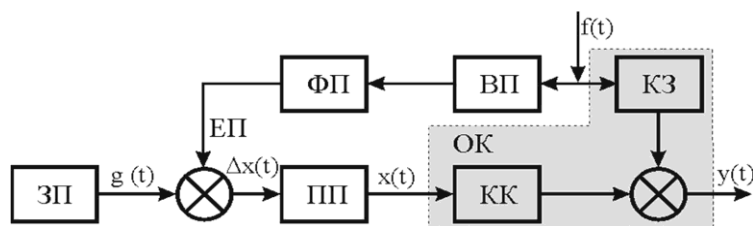


Рисунок 9 – Функціональна схема САК, побудованої на основі принципу керування за збуренням

В САК, які використовують принцип керування за збуренням, входять наступні елементи:

- задаючий пристрій (ЗП), необхідний для реалізації алгоритму роботи об'єкта керування, який формує керуючу дію  $g(t)$ ;
- елемент порівняння (ЕП), забезпечує необхідну точність системи  $\Delta x(t)$ ;
- вимірювальний перетворювач (ВП), забезпечує вимірювання вибраного збурення на об'єкт керування;
- функціональний перетворювач (ФП), формує необхідну за умовами роботи САК статичну характеристику;
- проміжний підсилювач (ПП), забезпечує формування необхідного закону керування ОК.
- об'єкт керування (ОК).

Використання принципу керування за збуренням забезпечує компенсацію дії лише вимірювальних зовнішніх збурень.

Переваги такого способу керування:

- можливість повної компенсації збурюючої дії на об'єкт керування;
- стійкість керування забезпечується відсутністю інформації про

істинний стан ОК.

Недоліки:

- усунення дії лише тих збурень, для яких створені компенсаційні канали обробки величин цих дій;

- наявність великої кількості неконтрольованих збурень збільшує похибку стабілізації вихідної величини;

- неможливість застосування керування лише до об'єктів, якісні і кількісні характеристики яких невідомі.

**Принцип керування за відхиленням** (дійсного значення вихідної величини об'єкта від його заданого значення) було запропоновано І. І. Ползуновим (14.03.1728 – 27.05.1766) і вперше реалізовано в 1765 р. в його паровій машині для підтримки сталого рівня води в котлі. Російський винахідник створив першу в Росії парову машину та перший в світі двоциліндровий паровий двигун. В 1784 р. шотландський інженер-механік Дж. Уатт (30.01.1737 – 19.08.1819 - його ім'ям названа одиниця потужності – Ватт) вдосконалив парову машину Ньюкомена. Він винайшов універсальну парову машину подвійної дії. Роботи Уатта поклали початок промисловій революції спочатку в Англії, а потім і у всьому світі. Вперше використав для стабілізації швидкості обертання парової машини відцентровий регулятор, який також діяв на принципі керування за відхиленням, тому цей принцип керування інколи називають компенсаційним принципом Ползунова-Уатта.

Більш високу якість керування дозволяють одержати замкнуті САК, в яких використовується інформація про керований параметр (рис. 10). У таких системах вимірюється значення керованого параметра. Пристрій керування проводить порівняння одержаного сигналу із заданим значенням, і при наявності різниці виробляється керуюча дія, яка направлена на зменшення одержаної величини відхилення заданого і виміряного значень параметрів. При цьому пристрій керування компенсує це відхилення незалежно від причин, які його викликали. Такий спосіб керування є основним для більшості сучасних САК.

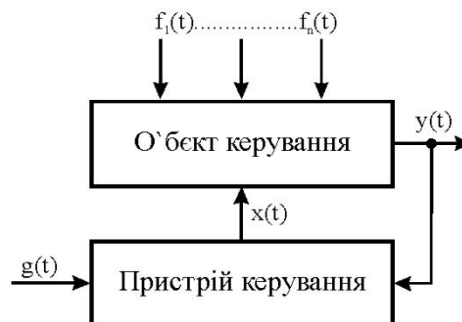


Рисунок 10 – Структура САК, побудованої на основі принципу керування за відхиленням

У САК, які використовують принцип керування за відхиленням, керуюча дія на об'єкт визначається так:

$$x(t) = F\{g(t), y(t)\} \quad (4)$$

Розглянемо систему автоматичного керування зі зворотним зв'язком, функціональна схема якої представлена на рисунку 11.

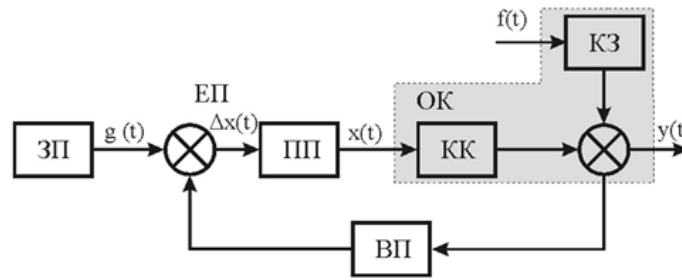


Рисунок 11 – Функціональна схема САК, побудована на основі принципу керування за відхиленням

В САК, які використовують цей принцип керування, входять наступні основні елементи:

- задаючий пристрій (ЗП), необхідний для реалізації алгоритму роботи об'єкта керування, який формує керуючу дію  $x(t)$ ;
- вимірювальний перетворювач (ВП), який забезпечує вимірювання керованої координати;
- елемент порівняння (ЕП), який виявляє відхилення  $\Delta x(t)$  керованої координати  $y(t)$  від її необхідного значення;
- проміжний підсилювач (ПП), який забезпечує формування необхідного закону керування ОК;
- об'єкт керування (ОК).

Принцип роботи САК полягає у вимірюванні керованої координати  $y(t)$  за допомогою ВП і порівнянні одержаного сигналу із задаючим  $g(t)$ .

Елемент порівняння визначає різницю цих сигналів, яка представляє собою похибку керування. Цей сигнал використовується для формування керуючої дії  $x(t)$  на ОК. Отже, вихідна координата  $y(t)$  є функцією як задаючого сигналу так і свого власного значення. Тобто

$$y(t) = F\{g(t), y(t)\}. \quad (5)$$

Перша складова вихідного сигналу формується по прямому каналу керування, а друга - по каналу зі зворотним зв'язком. Оскільки такий зв'язок забезпечується елементом порівняння, який визначає різницю задаючого і сигналу зворотного зв'язку, то такий зворотний зв'язок є від'ємним.

Тому такий принцип керування називають керуванням зі зворотним зв'язком. Оскільки в такій САК присутній замкнутий контур для проходження інформації, то такі системи називаються замкнутими САК.

Отже, замкнутою САК називають систему, в якій процес керування ОК залежить від результату керування.

Основними перевагами способу керування за відхиленням є:

- велика гнучкість і адаптивність до різних умов експлуатації САК;
- можливість зменшити вплив будь-яких зовнішніх збурень на об'єкт керування;

- мала чутливість до змін параметрів регулятора і об'єкта керування.

Недоліками таких САК є:

- неможливість повного усунення дії збурюючих впливів на вихідну величину об'єкта керування;
- виникнення проблем зі стійкістю при спробах збільшення коефіцієнта підсилення системи.

**Комбінований принцип керування.** Сумісне використання принципу керування за збуренням і за відхиленням називається принципом комбінованого керування. В таких САК принцип керування за відхиленням реалізується за допомогою зворотного зв'язку, а принцип керування за збуренням - за допомогою компенсуючих зв'язків. Структура такої системи показана на рис. 12.



Рисунок 12 - Структура САК, побудованої на основі комбінованого принципу керування

При використанні принципу комбінованого керування керуюча дія на ОК визначається так:

$$x(t) = F\{g(t), y(t), f(t)\} \quad (6)$$

Переваги такого способу керування:

- повна компенсація похибок керування, які викликані основними збурюючими факторами;
- зменшення похибок керування, які викликані не вимірюваними збурюючими факторами;
- менша чутливість до вимірювання параметрів у порівнянні з розімкнутими САК;
- менш жорсткі вимоги до величини коефіцієнта передачі замкнутої САК, що зменшує проблему забезпечення стійкості системи.

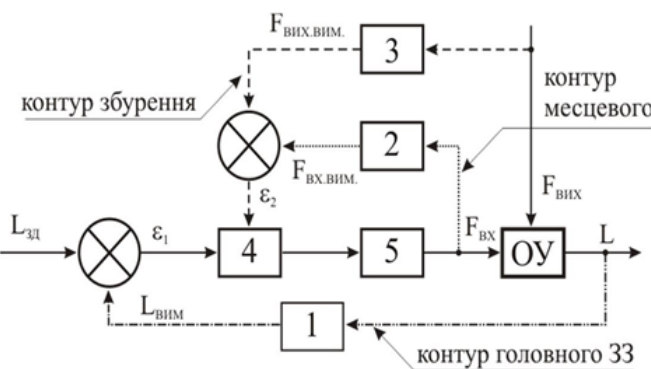
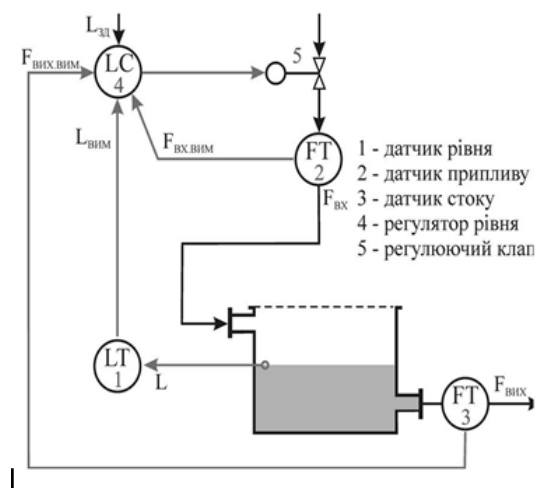
Недоліки:

- конструктивна складність САК, яка обумовлена наявністю великої кількості каналів керування;
- складність налаштування САК, яка обумовлена тими ж причинами.

Розглянемо як приклад комбіновану багатоконтурну систему керування рівнем води в проточному баку системи водопідготовки (рис. 13). Метою керування є забезпечення постійного заданого значення рівня води у баку. Рівень  $L(t)$  залежить від різниці керуючої дії - припливу  $F_{ВХ}(t)$  і збурюючої дії - стоку  $F_{ВИХ}(t)$ . Умовою досягнення мети керування є забезпечення рівності припливу і стоку :

$$F_{ВХ}(t) = F_{ВИХ}(t) \quad (7)$$

Поточна величина рівня вимірюється рівнеміром 1 і регулятором 4 порівнюється із заданим значенням. Регулятор, виходячи зі знаку розузгодження  $\epsilon_1$ , збільшує або зменшує приплив води  $F_{ВХ}(t)$ . Оскільки приплив залежить не лише від положення затвору регулюючого клапана, але і від інших параметрів, наприклад від перепаду тиску на клапані, для підвищення точності регулювання  $F_{ВХ}(t)$  вимірюється і використовується при формуванні керуючої дії в контурі місцевого зворотного зв'язку.



$x(t) = L_{зд}(t)$  – задане значення рівня води в баку;  $y(t) = L_{вим}(t)$  – поточне реальне значення рівня води в баку;  $z(t) = F_{ВХ}(t)$  – витрати води подачі в бак (приплив);  $f(t) = F_{ВИХ}(t)$  - витрати води на виході з баку (стік);  $\epsilon_1(t) = \Delta L = L_{зд}(t) - L_{вим}(t)$  – розузгодження в контурі загального зворотного зв'язку;  $\epsilon_2(t) = \Delta F = F_{ВХ.вим.}(t) - F_{ВИХ.вим.}(t)$  - розузгодження в контурі місцевого зворотного зв'язку

Рисунок 13 - Комбінована багатоконтурна система керування рівня води в проточному баку системи водопідготовки

Рисунок 14 – Структурна схема комбінованого керування рівня води в проточному баку системи водопідготовки

Зміна стоку  $F_{ВИХ}(t)$  порушує матеріальний баланс в системі, тобто є збурюючим впливом. Вимірне значення  $F_{ВИХ}(t)$  використовується регулятором для компенсації збурення.

Структурна схема САК, що розглядається приведена на рис. 14.

**Принцип адаптації. Самоналагоджувальні системи.** Розглянуті

принципи автоматичного керування довгий час були єдиними.

Проте успішний розвиток кібернетики дозволив застосувати в автоматичних системах новий принцип керування, званий принципом адаптації (приспосовування). Цей принцип керування закладений в роботу так званих самоналагоджувальних систем.

Автоматична система, що має властивість автоматично змінювати в процесі роботи характеристики або структуру регулятора з метою збереження заданих показників якості за довільно змінних зовнішніх умов, має назву *самоналагоджувальної*.

Самоналагоджувальна система складається з основної системи і додаткових пристроїв (рис. 15).



Рисунок 15 – Самоналагоджувальна автоматична система

Основна система побудована на основі принципу керування по відхиленню і включає об'єкт керування і автоматичний керуючий пристрій (АКП). На вхід системи разом з корисним сигналом  $g(t)$  поступає перешкода  $n(t)$ . Окрім координатного збурення  $f_k(t)$ , на ОК діє параметрична дія (збурення)  $f_n(t)$ , при цьому динамічні характеристики ОК змінюються в широких межах.

Для досягнення необхідних показників якості процесу керування до основної системи підключені наступні додаткові пристрої, які створюють контур самоналаштування:

- пристрій аналізу вхідного сигналу (ПАС) оцінює властивості вхідного сигналу (швидкість і прискорення зміни)  $g(t)$ ;

- пристрій аналізу об'єкту (ПАО) призначений для оцінки змін динамічних характеристик КО ;

- обчислювальний пристрій (ОП) визначає спосіб зміни характеристик основного керуючого пристрою (параметрів, структури або закону керування) на основі закладених в ньому критеріїв оптимальності системи і інформації, одержуваної від пристрою аналізу сигналу і об'єкту;

- виконавчий пристрій контуру самоналагоджування (ВП) виконує функцію налагодження керуючого пристрою відповідно до сигналів, одержуваних від ВП.

Дія самоналагоджування є функцією багатьох змінних:

$$V = f(g(t), y(t), n, U, t, \dots)$$

## Завдання до виконання

За описом системи автоматичного керування зобразіть структурну схему та визначте, який принцип керування використаний.

1. Система поливу рослин. Датчик вимірює вологість повітря чи температуру (зовнішнє збурення). Якщо температура зростає, система автоматично збільшує подачу води, щоб компенсувати випаровування, не вимірюючи вологість ґрунту (керованого параметра).

2. Круїз-контроль автомобіля. Система вимірює швидкість (керований параметр), і якщо вона знижується через підйом, двигун отримує команду збільшити потужність.

3. Промисловий котел. Температура води (відхилення) підтримується зворотним зв'язком, а датчик тиску палива чи температури навколишнього середовища (збурення) дозволяє заздалегідь скоригувати подачу палива.

4. Обігрівач із компенсацією вітру. Датчик фіксує силу вітру (збурення), і обігрівач відповідно підвищує потужність, щоб температура в приміщенні залишалася стабільною.

5. Система клімат-контролю в автомобілі. Датчик температури в салоні (відхилення) регулює обігрів чи кондиціонер, а зовнішній датчик температури чи сонячного світла (збурення) додатково коригує інтенсивність роботи системи для швидшої компенсації.

6. Термостат у кімнаті. Датчик вимірює температуру (керований параметр), порівнює її із заданим значенням (наприклад, 22°C). Якщо температура падає, термостат вмикає обігрів, щоб усунути відхилення.

## Контрольні питання

1. Які принципи керування САК існують?
2. З яких основних мінімальних блоків складається будь-яка САК?
3. Яку функцію виконує пристрій керування в САК?
4. Які САК мають назву "розімкнених", а які – "замкнених"?
5. В чому особливість структурних схем САК побудованих за відхиленням?
6. В чому особливість структурних схем САК побудованих за збуренням?
7. В чому особливість структурних схем САК побудованих за комбінованим принципом?
8. Що таке головний зворотний зв'язок?
9. Що таке місцевий зворотний зв'язок?
10. Для чого використовується коло зворотного зв'язку в САК?
11. В чому різниця між головним і місцевим зворотним зв'язком?
12. Проаналізувати основні переваги і недоліки систем керування за відхиленням?
13. Проаналізувати основні переваги і недоліки систем керування за збуренням?
14. Проаналізувати основні переваги і недоліки систем керування за комбінованим принципом?
15. Навести приклади побудови систем автоматичного керування за відхиленням (збуренням, комбінованим принципом)

## Практична робота 4

**Тема:** Математичний опис систем за допомогою диференційних рівнянь.

**Мета:** Отримання практичних навичок опису систем за допомогою диференційних рівнянь.

### 1. Теоретичні відомості

**Подібність опису систем різної природи.** Світ технічних систем різноманітний. Однак математика і фізика виявили прості паралелі в цьому складному світі. Можна виділити ряд енергетичних доменів, яким належать ті чи інші системи або їх модулі. Це електричний, магнітний, термальний, гідравлічний, акустичний, механічний і ротаційний домени. Так само існують два фундаментальних постулати. Перший постулат говорить, що матерія не може з'явитися ні звідки і не може зникнути в нікуди. Другий постулат стверджує те ж саме стосовно енергетичного потенціалу. Ці постулати мають окремі формулювання для кожного енергетичного домена. Наприклад, для електричного домену це перший і другий закони Кірхгофа. Кожен з енергетичних доменів характеризується двома фізичними величинами першого і другого роду. У випадку електричного домена - це електричні струм і напруга відповідно. Ці парні фізичні величини, в кожному енергетичному домені, пов'язані між собою законом Ома у відповідному формулюванні (існує: електричний, магнітний, термальний, гідравлічний, акустичний, механічний та ротаційний опір). Так само слід зазначити, що добуток фізичних величин першого і другого роду завжди є потужність.

Представлена система паралелей дозволяє зрозуміти, що математичний опис процесів руху координат систем, які належать різним енергетичним доменам подібний, і може бути предметом вивчення однієї науки, яка називається "Теорія автоматичного керування".

**Способи опису систем.** Сучасна теорія автоматичного керування оперує переважно з моделями динамічних систем. При цьому розглядаються в загальному випадку багатовимірні системи, тобто системи довільного порядку з багатьма входами і багатьма виходами, у зв'язку з чим широко використовуються векторно-матричні рівняння і апарат векторної алгебри. Для отримання моделі досліджувана динамічна система представляється у вигляді "чорного ящика" з деяким числом вхідних і вихідних каналів (рис. 1, а).

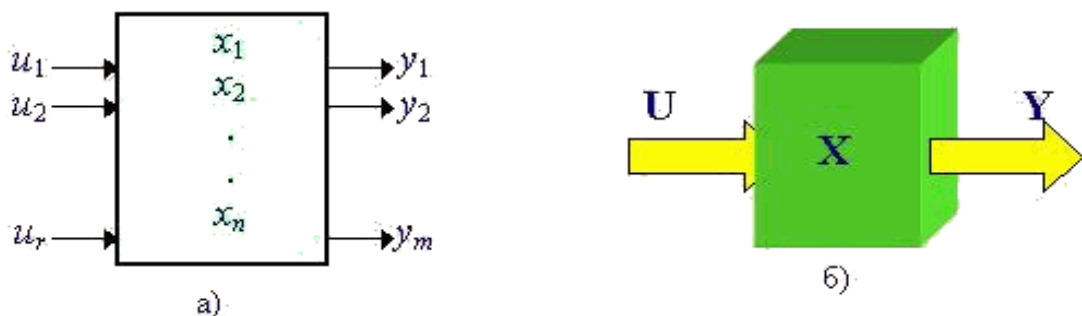


Рисунок 1 – Скалярне (а) і векторне (б) представлення динамічної системи у вигляді "чорного ящика"

Всі змінні, що характеризують систему, можна розділити на три групи.

1. *Вхідні змінні або вхідні дії*, що генеруються системами, зовнішніми стосовно досліджуваної системи. Вхідні змінні - це моделі зовнішніх сигналів, що поділяються зазвичай на дві групи:

- Вплив середовища, в якому знаходиться система;
- Керуючі сигнали.

Змінні першої групи - це збурення середовища, викликані зовнішніми по відношенню до системи керування причинами. Прикладами таких збурень можуть бути пориви вітру - для літака, який летить, потік води - для корабля, який пливе, зміна поля тяжіння поблизу великих мас небесних тіл - для космічного корабля, тощо. Якщо закон зміни такого збурення відомий (наприклад, зміна тиску повітря з висотою польоту літака), то це збурення можна врахувати у вигляді змінної другої групи.

Змінні другої групи - це так звані, контрольовані збурення. Їх можна розділити на враховані збурення зовнішнього середовища та керуючі. Останні з них є результатом порівняння вихідної інформації системи із завданням і вироблення керуючого сигналу на корекцію поведінки системи на основі результатів порівняння.

Сукупність входів можна розглядати як один узагальнений вхід, на який впливає вектор входу  $U$ , сукупність виходів як вектор  $Y$ , а сукупність проміжних координат, що характеризують стан системи, - як вектор стану  $X$  (див. рис. 1.26 , б).

Власне система, її входи і виходи - це три взаємопов'язаних об'єкта, які в кожній конкретній ситуації визначаються відповідно математичною моделлю системи, завданням множин вхідних і вихідних змінних.

В якості математичних засобів опису і дослідження систем керування використовуються :

- Диференціальні рівняння;
- Перетворення Лапласа;
- Перетворення Фур'є.

Опис багатовимірних систем звичайно досить складно і пов'язано з великим обсягом обчислень, тому при подальшому розгляді систем керування ми обмежимося елементами, а потім і системами з одним входом і одним виходом. При цьому в якості елементів систем будемо розглядати електричні схеми. Правомірність такого підходу визначається такими міркуваннями:

1. З усіх можливих видів систем вони для нас найбільш відомі.
2. Процеси, які протікають в них залежать від однієї, найбільш істотною для нас змінної - часу.
3. Рівняння процесів, які протікають у них можна лінеаризувати.

Оскільки завдання математичного опису системи полягає в визначення співвідношення «вхід - вихід», то ми і розглянемо її розв'язок для найпростіших електричних схем, які будемо розглядати як елементи для побудови систем.

Найпростіші елементи лінійних систем керування (з одним входом і одним виходом) можуть бути описані одним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами. Склавши і вирішивши диференціальне рівняння, що описує систему, можна визначити характер зміни вхідного сигналу і його значення в будь-який момент часу.

**Звичайне лінійне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку з постійними коефіцієнтами зазвичай записується так:**

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

Зазвичай воно доповнюється початковими умовами:  $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ .

Якщо  $f(x) = 0$ , то рівняння називається однорідним.

*Повним розв'язком* (1) називається сума загального розв'язку відповідного йому однорідного лінійного рівняння і будь-якого часткового розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння.

*Загальний розв'язок* однорідного лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку представляється функцією

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n),$$

яка залежить від  $n$  випадкових постійних  $C_1, \dots, C_n$  та перетворює рівняння (1) в тотожність при будь-яких значеннях цих постійних.

Отримання спільного розв'язку однорідного лінійного диференційного рівняння  $n$ -го порядку класичним методом проводиться таким чином.

При заміні  $y^{(i)} = \lambda^i$  з однорідного рівняння отримуємо характеристичне рівняння диференційного рівняння (1)

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (2)$$

Якщо  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - коріння характеристичного рівняння (2), то будь-яка функція  $y = e^{\lambda_i x}$  є розв'язком диференційного рівняння (1). Загальний розв'язок однорідного лінійного диференційного рівняння  $n$ -го порядку представляє собою суму наступних функцій:

- $C_i e^{\lambda_i x}$ , де  $\lambda_i$  - простий дійсний корінь рівняння (2);
- $(C_{m+1} + C_{m+2} x + \dots + C_{m+k} x^{k-1}) e^{\lambda_i x}$ , де  $\lambda_i - k$  - кратний дійсний корінь рівняння (2);
- $C_{l+1} e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{l+2} e^{\alpha x} \sin \beta x$  для кожної пари простих комплексно-спряжених коренів рівняння (2);
- $P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$  для кожної пари  $k$ -кратних комплексно-спряжених коренів рівняння (2);

*Частковим розв'язком* неоднорідного лінійного диференційного рівняння  $n$ -го порядку називається будь-яка конкретна функція, що є розв'язком цього рівняння.

Існують різні методи розв'язку неоднорідних лінійних диференційних рівнянь  $n$ -го порядку, що залежать від виду правої частини рівняння (1), тобто від  $f(x)$ . Найбільш загальним методом розв'язку є метод варіації постійних, що виражається в наступному.

Нехай

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

є спільний розв'язок однорідного рівняння, що представляє собою рівняння (1) з правою нульовою частиною. Тоді розв'язок неоднорідного рівняння (1) шукається у вигляді

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n,$$

де функції  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$  визначаються з системи

$$\begin{aligned}
C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n &= 0; \\
C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' &= 0; \\
\dots\dots\dots & \\
C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} &= 0; \\
C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} &= \frac{1}{a_0} f(x).
\end{aligned} \tag{3}$$

Операторний метод розв'язку диференційних рівнянь

Перетворення Лапласа. Множина функцій  $x(t)$ , що задовольняють умовам:

1. При  $t \leq 0$   $x(t) = 0$ ;
2.  $\exists(M, c) | x(t) \leq Me^{ct}$ ;
3. Має місце лише рахункове число точок розриву першого роду на інтервалі  $[0, \infty)$ , називається простором оригіналів і позначається  $O$ .

Введемо комплексну змінну  $p = \sigma + j\omega$  і визначимо інтеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \tag{1}$$

Функція  $F(p)$ , яка визначається залежністю (1), де  $f(t) \in O$ ,  $p = \sigma + j\omega$ , називається зображенням  $f(t)$  та позначається

$$f(t) \leftrightarrow F(p)$$

або

$$F(p) = L\{f(t)\}$$

Часто інтеграл (1) називають інтегралом Лапласа. Його властивості визначаються наступними теоремами:

1. Теорема лінійності: якщо  $L\{f_k(t)\} = F_k(p)$  то

$$L\left\{\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(p)$$

2. Теорема зміщення в комплексній області, якщо  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ , то

$$f(t)e^{\pm at} \leftrightarrow F(p \mp a).$$

3. Теорема зміщення в дійсній області, якщо  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ ,

то

$$f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p)$$

4. Теорема зображення від похідної:

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0),$$

.....

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p^0 f^{(n-1)}(0).$$

При  $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p)$$

5. Теорема зображення від інтеграла:

$$L\left\{\int_0^1 f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{p} F(p).$$

6. Теорема диференціювання зображення:

$$\frac{d^k F(p)}{dp^k} = (-1)^k L\{t^k f(t)\}$$

7. Теорема зміни масштабе у часовій області, якщо

$$f(t) \leftrightarrow F(p),$$

то

$$L\{f(\alpha t)\} = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

8. Теорема згуртування функції в дійсній області:

$$L\left\{\int_0^1 f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right\} = F_1(p) F_2(p).$$

9. Теорема згуртування в комплексній області:

$$L\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(g) F_2(p-g) dg.$$

Зображення по Лапласа найбільш часто використовуваних в теорії керування функцій наведено в таблиці 2.

Таблиця 2 – Функції і відповідні їм зображення по Лапласа

№	Назва	Зображення $F(p)$	Оригінал $f(z)$
1	Дельта-функція	1	$\delta(t)$
2		$\frac{1}{p^2}$	$t$
3	Ступінчата одинична функція	$\frac{1}{p}$	$1(t)$
4	Степенева функція	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t^n 1(t)$
5	Експонента спадаюча	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
6	Експонента підвищуюча	$\frac{1}{p-a}$	$e^{at}$
7		$\frac{1}{(p-a)^2}$	$te^{at}$
8		$\frac{1}{(p-a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2 e^{at}$
9		$\frac{p}{(p-a)}$	

10		$\frac{p}{(p-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
11		$\frac{p}{(p-a)^3}$	$\left(t + \frac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
12		$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$
13		$\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\frac{e^{at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)} +$ $+\frac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
14		$\frac{1}{p(p-a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$
15		$\frac{1}{p^2(p-a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$
16		$\frac{1}{p^2 + ap + b}$ $\Delta = b - \frac{a^2}{4} > 0$ , $\Delta = b - \frac{a^2}{4} = 0$ $\Delta = b - \frac{a^2}{4} < 0$	$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{at}{2}} \sin \sqrt{\Delta} t$ $te^{-\frac{at}{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} e^{-\frac{at}{2}} \operatorname{sh} \sqrt{-\Delta} t$
17		$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
18		$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
19		$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
20		$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
21		$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \sin \omega t$
22		$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$

**Основи теорії відрахувань.** Визначення зображення будь-якої функції по її оригіналу зазвичай складнощів не викликає. Однак розв'язок зворотного завдання найчастіше непросто: інтегрування складного зображення  $F(p)$  в загальному випадку може представити певні труднощі.

Проте є види рівнянь, для яких ця задача вирішується порівняно просто. Так, для лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами вона вирішується поданням  $F(p)$  сумою найпростіших дробів, для яких існують табличні значення оригіналів. Додавання цих оригіналів з врахуванням теореми лінійності дає уявлення оригіналу  $f(t)$ . Для отримання такого розкладу користуються теорією вирахувань, основні положення якої розглянуті нижче.

Згідно з теоремою перетворення в будь-якій точці  $t$ , де оригінал функції  $f(t)$

безперервний, функція може бути представлена у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

де інтегрування ведеться по будь нескінченній прямій  $Re p=s$ , що лежить у напівплощині абсолютної збіжності інтеграла Лапласа від  $f(t)$ .

Якщо точка  $z=a$  є особливою (правильною, ізольованою) точкою функції  $f(z)$ , то завжди можна знайти простий контур  $C$ , який одноразово оминає точку  $a$  в позитивному напрямку, такий, що всередині цього контуру  $f(z)$  буде аналітичною.

Величина

$$Re(f(z); a) = \frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) dz$$

називається вирахуванням функції  $f(z)$  відносно точки  $a$ . Якщо таких точок декілька, то відрахування  $f(z)$  по замкнутому контуру, що охоплює всі ці точки, дорівнює сумі відрахувань  $f(z)$  щодо всіх особливих точок цієї функції, що знаходяться всередині контура. Нарешті, вирахуванням функції  $f(z)$  відносно нескінченно віддаленої точки природно вважати величину

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) dz$$

де  $C$  - коло нескінченного радіуса з центром на початку координат. Розглядаються кілька часткових випадків визначення відрахувань функцій залежно від виду цих функцій.

1. Якщо  $a$  - простий полюс функції  $f(z)$ , то в околиці цієї точки  $f(z)$  представлена у вигляді

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{c_{-1}}{z-a}$$

де  $\varphi(z)$  неперервна та аналітична в точці  $a$ , причому

$$\lim_{z \rightarrow a} ((z-a)\varphi(z)) = 0$$

Звідси, переходячи до границі, отримаємо

$$c_{-1} = Re(f(z); a) = \lim_{z \rightarrow a} ((z-a)f(z)) \quad (4)$$

### Приклади розв'язку завдань

Спади напруг  $U_R = R \cdot i; \quad U_L = L \frac{di}{dt}; \quad U_C = \frac{1}{C} \int i dt.$

Приклад 1. Скласти диференційне рівняння електричної системи, представленої на рис.2.

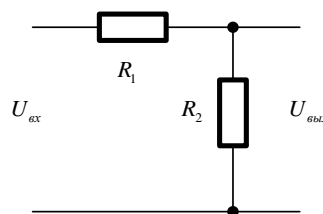


Рисунок 2 – Подільник напруги

Розв'язок. На підставі законів Ома і Кірхгофа маємо:

$$u_{ex} = i(R_1 + R_2);$$

$$u_{eux} = iR_2$$

Тоді, виразивши  $i$  та підставивши з одного рівняння в інше, отримаємо:

$$i = \frac{u_{eux}}{R_2}; \Rightarrow u_{ex} = \frac{u_{eux}(R_1 + R_2)}{R_2} \Rightarrow u_{eux} = u_{ex} \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

або остаточно

$$u_{eux} = ku_{ex},$$

де  $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$

Відповідь:  $u_{eux} = ku_{ex}$ , де  $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$

Приклад 2. Скласти диференційне рівняння електричної системи, представленої на рис. 3.

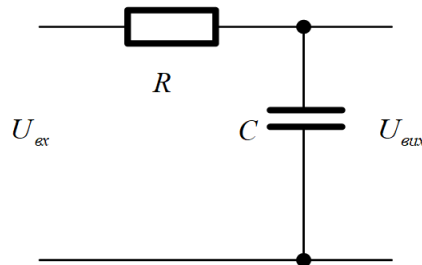


Рисунок 3 – RC-фільтр нижніх частот

Розв'язок. На підставі законів Ома і Кірхгофа маємо:

$$u_{ex} = iR + \frac{1}{C} \int idt;$$

$$u_{eux} = \frac{1}{C} \int idt;$$

Тоді маємо:

$$u_{ex} = CR \dot{u}_{eux} + u_{eux}$$

Позначимо  $T = RC$ , остаточно отримаємо:

$$T \dot{u}_y + u_y = u_x.$$

Відповідь:  $T \dot{u}_y + u_y = u_x$ , де  $T = RC$ .

Приклад 3. Скласти диференційне рівняння електричної системи, представленої на рис.3.

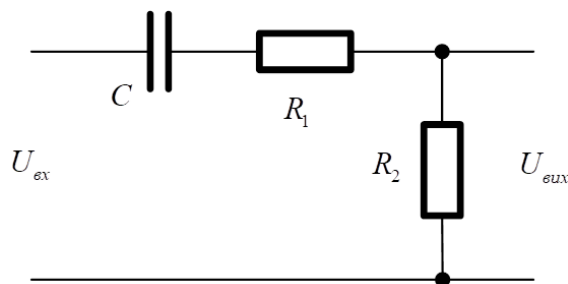


Рисунок 3 – Пасивний RC-фільтр високих частот

Розв'язок. На підставі законів Ома і Кірхгофа маємо:

$$u_{\text{ex}} = \frac{1}{C} \int idt + i(R_2 + R_1); \quad (1)$$

$$u_{\text{eux}} = iR_1; \quad (2)$$

Тоді, продиференціювавши друге рівняння, маємо:

$$\dot{i} = \frac{\dot{u}_{\text{eux}}}{R_1};$$

Продиференціювавши перше рівняння і підставивши, друге в перше отримаємо:

$$\dot{u}_{\text{ex}} = \frac{i}{C} + i(R_2 + R_1) \Rightarrow \dot{u}_{\text{ex}} = \frac{u_{\text{eux}}}{R_1 C} + \frac{\dot{u}_{\text{eux}}(R_2 + R_1)}{R_1}.$$

Остаточно, отримаємо:

$$T\dot{u}_{\text{eux}} + u_{\text{eux}} = k\dot{u}_{\text{ex}},$$

де  $k = RC$ ,  $T = C(R_2 + R_1)$ .

Відповідь:  $T\dot{u}_y + u_y = k\dot{u}_x$ , де  $k = RC$ ,  $T = C(R_2 + R_1)$ .

Приклад 4. Обчислити функцію  $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$  відносно точки  $z=2$ .

Розв'язок. Точка  $z=2$  є простим полюсом аналізованої функції, по-цьому відповідно до (3) отримаємо

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z^2}{z-2}; 2\right) = \lim_{z \rightarrow 2} \left( (z-2) \frac{z^2}{z-2} \right) = 4,$$

а функція  $f(z)$  представлена у вигляді

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{z-2} - \frac{4}{z-2}.$$

2. Якщо функція  $f(z)$  є дрібно-раціональною функцією, тобто представлена у вигляді

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

при цьому  $f_1(z)$  та  $f_2(z)$  - аналітичні в точці  $a$  та  $a$  - полюс першого порядку для  $f_2(z)$ , а  $f_1(z) \neq 0$ , то по визначенню

$$\operatorname{Re}(f(z); a) = \lim_{z \rightarrow a} \left( (z-a) \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right) = \frac{f_1(z)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z)}{z-a}} = \frac{f_1(a)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z) - f_2(a)}{z-a}} = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}. \quad (4)$$

Приклад 5. Обчислити

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z^2+4}; 2j\right).$$

Розв'язок.

Функція

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+4}$$

Має особливі точки  $z = \pm 2j$ , оскільки

$$z^2 + 4 = (z - 2j)(z + 2j).$$

У відповідності з (4) отримаємо

$$\operatorname{Re}(f(z); 2j) = \frac{z+1}{2z} \Big|_{z=2j} = \frac{1+2j}{4j} = 0.5 - 0.25j$$

3. Якщо точка  $z=a$  є полюсом порядку  $\nu$  функції  $f(z)$ , то в осередку цієї точки

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-\nu}}{(z-a)^\nu}$$

Помноживши обидві частини цього виразу на  $(z-a)^\nu$  та продиференціювавши обидві частини  $\nu-1$  раз, отримаємо

$$\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}((z-a)^\nu f(z)) = \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}((z-a)^\nu \varphi(z)) + (\nu-1)! c_{-1}$$

Точка  $z=a$  є нулем порядку не нижче  $\nu$  для функції  $(z-a)^\nu \varphi(z)$ , тобто в цій точці в нуль перетворюються всі її похідні до порядку  $m-1$  включно. Отже, при  $z=a$  перший доданок вираження дорівнює 0, і, переходячи до границі при  $z \rightarrow a$  одержимо

$$c_{-1} = \operatorname{Re}(f(z); a) = \frac{1}{(\nu-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}((z-a)^\nu f(z)) \quad (5)$$

Приклад 6. Визначити відрахування функції  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$  відносно точки  $z=j$ .

Розв'язок. Зазначена точка для розглянутої функції є полюсом третього порядку, так як

$$\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{(z-j)^3(z+j)^3}$$

У відповідності з (5) отримаємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(z^2+1)^3}; j\right) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow j} \frac{d^2}{dz^2} \left( (z-j)^3 \frac{1}{(z-j)^3(z+j)^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow j} \frac{d^2}{dz^2} ((z+j)^{-3}) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow j} ((-3)(-4)(z+j)^{-5}) = \frac{6}{(2j)^5} = -\frac{3}{16}j. \end{aligned}$$

Використовуючи теорему перетворення, операторне відображення диференційного рівняння можна представити сумою найпростіших дробів, знаменники яких мають вигляд  $p-p_i$  відповідної кратності, а чисельники є відрахування щодо коренів  $p_i$ . Використовуючи теорему лінійності, розв'язок диференціального рівняння тепер можна описати сумою оригіналів отриманих найпростіших дробів. Цей прийом використовується при вирішенні диференціальних рівнянь операторних методом.

Приклад 7. Вирішити операторним методом диференціальне рівняння  $y''(t) + 8y'(t) + 15y(t) = 15g(t) + 3g'(t)$ , при  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $g(t) = 2e^{-2t}$ ,  $g(0) = 2$ .

Розв'язок.

З урахуванням початкових умов перейдемо в операторну область:

- Для лівої частини маємо:

$$p^2 y(p) - p - 2 + 8 \cdot p y(p) - 8 + 15 \cdot y(p) = y(p)(p^2 + 8p + 15) - p - 10,$$

- для правої частини маємо:

$$15g(p) + 3pg(p) - 6$$

Скориставшись таблицями перетворення Лапласа, отримуємо:

$$g(t) \rightarrow \frac{2}{p+2},$$

тоді праву частину перепишемо у вигляді:

$$15g(p) + 3pg(p) - 6 = \frac{2}{p+2}(3p+15) - 6$$

Отже, наше диференціальне рівняння в операторній формі буде мати вигляд:

$$y(p)(p^2 + 8p + 15) = \frac{2}{p+2}(3p+15) - 6 + p + 10$$

Приведемо праву частину до спільного знаменника, маємо:

$$y(p)(p^2 + 8p + 15) = \frac{p^2 + 12p + 38}{p+2}$$

Виразимо із отриманого рівняння  $y(p)$ :

$$y(p) = \frac{p^2 + 12p + 38}{(p+2)(p^2 + 8p + 15)}$$

Далі необхідно розкласти дріб на суму простих дробів, для цього знайдемо корені квадратного рівняння знаменника:

$$p^2 + 8p + 15 = 0 \Rightarrow D = 64 - 60 = 4 \Rightarrow p_1 = \frac{-8+2}{2} = -3; p_2 = \frac{-8-2}{2} = -5.$$

Тоді зображення  $y(p)$  можна представити у вигляді суми простих дробів наступним чином:

$$y(p) = \frac{p^2 + 12p + 38}{(p+2)(p+5)(p+3)} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+5} + \frac{C}{p+2},$$

де  $A, B, C$  – невідомі коефіцієнти.

Знайдемо коефіцієнт  $A$ , для цього перемножимо дві частини рівності на  $p+3$ , та покладемо  $p=-3$ , маємо:

$$A = \left. \frac{p^2 + 12p + 38}{(p+2)(p+5)} \right|_{p=-3} = -5.5;$$

Знайдем коефіцієнт  $B$ , для цього перемножимо дві частини рівності на  $p+5$ , та покладемо  $p=-5$ , маємо:

$$B = \left. \frac{p^2 + 12p + 38}{(p+2)(p+3)} \right|_{p=-5} = 0.5;$$

Знайдемо коефіцієнт  $C$ , для цього перемножимо дві частини рівності на  $p+2$ , та покладемо  $p=-2$ , маємо:

$$C = \left. \frac{p^2 + 12p + 38}{(p+5)(p+3)} \right|_{p=-2} = 6.$$

З врахуванням знайдених коефіцієнтів маємо:

$$y(p) = \frac{-5.5}{p+3} + \frac{0.5}{p+5} + \frac{6}{p+2}.$$

Скориставшись таблицями перетворення Лапласа, отримаємо:

$$y(t) = 0.5e^{-5t} - 5.5e^{-3t} + 6e^{-2t}.$$

Відповідь:  $y(t) = 0.5e^{-5t} - 5.5e^{-3t} + 6e^{-2t}$ .

Приклад 8. Дано операторне представлення сигналу

$$X(p) = \frac{100}{p(p^2 + 7p + 12)} = \frac{A(p)}{pB(p)}.$$

Отримати його оригінал.

Розв'язок. Знайдемо коріння характеристичного рівняння:

$$p_1 = 0; p_2 = -3; p_3 = -4.$$

Формула для оригіналу, відповідно до (2.8), має вигляд:

$$x(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{i=2}^3 \frac{A(p_i)}{p_i B'(p_i)} e^{p_i t}.$$

Маємо:  $A(0)=100$ ;  $B(0)=12$ ;  $B'(-3)=1$ ;  $B'(-4)=-1$ .

Тоді можна записати:

$$x(t) = \frac{100}{12} + \frac{100}{1} e^{-3t} + \frac{100}{-1} e^{-4t}.$$

Приклад 9. Знайти розв'язок рівняння  $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t$  при  $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$ .

Розв'язок.

Операторне представлення рівняння з урахуванням нульових початкових умов має вигляд

$$p^4 X(p) + 2p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p^2 + 1},$$

Звідки отримаємо:

$$X(p) = \frac{2}{(p^2 + 1)^3}.$$

Для переходу до оригіналу використовуємо загальну формулу розкладання. Оскільки в останньому виразі коефіцієнти дійсні, то відрахування в полюсах є сполучені комплексні числа. Тому досить обчислити тільки одне вирахування (другий відрізняється тільки знаком) в точці  $p=i$ .

$$\operatorname{Re}(X(p)e^{pt}; i) = \frac{1}{2!} \left( \frac{e^{pt}}{(p+i)^3} \right)''_{p=i} = \frac{e^{it}}{16} (-3t + i(t^2 - 3))$$

Подвоївши дійсну частину останнього виразу, отримуємо

$$x(t) = -\frac{3}{8}t \cos t + \frac{3-t^2}{8} \sin t$$

Відповідь:  $x(t) = -\frac{3}{8}t \cos t + \frac{3-t^2}{8} \sin t$ .

Приклад 10. Знайти розв'язок рівняння  $x'' + x = e^t$  при ненульових початкових умовах  $x(1)=1$ ,  $x'(1)=0$ .

Розв'язок.

Отримаємо  $t = \tau + 1$  та  $x(t) = x(\tau + 1) = x_1(\tau)$ . Тоді рівняння на початкових умовах переписеться у вигляді

$$x_1'' + x_1 = e^{\tau+1},$$

де  $x_1' = \frac{dx_1}{d\tau}$ ,  $x_1'' = \frac{d^2 x_1}{d\tau^2}$ ,

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0.$$

Переходячи до операторного представлення з врахуванням того, що

$$x_1(\tau) \Rightarrow X(p), x_1'(\tau) \Rightarrow pX(p) - 1, x_1''(\tau) \Rightarrow p^2X(p) - p$$

$$i \quad p^2X(p) - p + X(p) = \frac{e}{p-1},$$

звідки

$$X(p) = \frac{e}{(p^2+1)(p-1)} + \frac{p}{p^2+1}.$$

Повертаючись до оригіналів, отримаємо

$$x_1(\tau) = \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos \tau - \frac{e}{2} \sin \tau + \frac{e}{2} e^\tau.$$

Для отримання остаточного Розв'язок проведемо зворотну заміну  $\tau$  на  $t-1$ :

$$x(t) = \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos(t-1) - \frac{e}{2} \sin(t-1) + \frac{e^t}{2}.$$

Відповідь: 
$$x(t) = \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos(t-1) - \frac{e}{2} \sin(t-1) + \frac{e^t}{2}$$

Приклад 11. Вирішити диференціальне рівняння

$$y'' - y = 2e^x - x^2. \quad (4)$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені.

$$\lambda^2 - 1 = 0; \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y'' - y = 0$$

має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

де  $C_1$  та  $C_2$  - деякі довільні постійні.

Повний розв'язок рівняння (3) будемо шукати у вигляді

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}. \quad (5)$$

Для цього необхідно вирішити систему алгебраїчних рівнянь виду (3)

$$C_1' e^x + C_2' e^{-x} = 0;$$

$$C_1' e^x + C_2' e^{-x} = 2e^x - x^2.$$

Вирішуючи її, отримаємо

$$C_1' = 1 - \frac{1}{2} x^2 e^{-x};$$

$$C_2' = \frac{1}{2} x^2 e^x - e^{2x}.$$

Тепер можна визначити функції  $C_1(x)$  та  $C_2(x)$ , інтегруючи отримані вирази

$$C_1(x) = \int \left(1 - \frac{1}{2} x^2 e^{-x}\right) dx = x + \frac{1}{2} x^2 e^{-x} + x e^{-x} + e^{-x} + C_1^0;$$

$$C_2(x) = \int \left(\frac{1}{2} x^2 e^x - e^{2x}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 e^x + x e^x + e^x - \frac{1}{2} e^{2x} + C_2^0,$$

де  $C_1^0$  та  $C_2^0$  - постійні інтегрування.

Підставляючи знайдені  $C_1(x)$  та  $C_2(x)$  в (5), отримаємо повний розв'язок рівняння (1) у формі (5)

$$y = \left( C_1^0 - \frac{1}{2} \right) e^x + C_2^0 e^{-x} + x e^x + x^2 + 2,$$

Позначимо  $C_1^0 - \frac{1}{2} = C_1$  та  $C_2^0 = C_2$ , остаточно отримаємо

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x + x^2 + 2.$$

Приклад 12. Вирішити задане диференційне рівняння

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 5e^{-4t}$$

при  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  класичним методом і побудувати графік його розв'язку.

Розв'язок.

1) Знайдемо спільний розв'язок однорідного диференційного рівняння.

Складаємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

Знайдемо коріння даного квадратного рівняння:

$$D = 2^2 + 4 \cdot 3 = 16,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1.$$

Таким чином, загальний розв'язок представимо у вигляді:

$$y_{\text{обц}} = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t,$$

де,  $C_1, C_2$  – невідомі константи, що визначаються на підставі початкових умов.

2) Знайдемо частковий Розв'язок диференціального рівняння.

Частковий розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y_{\text{ч}} = A e^{-4t}.$$

Візьмемо першу і другу похідні від часткового розв'язку:

$$\dot{y}_{\text{ч}} = -4A e^{-4t}, \quad \ddot{y}_{\text{ч}} = 16A e^{-4t}.$$

Підставимо похідні і саме вираження часткового розв'язку у вихідне диференційне рівняння, отримаємо:

$$16A e^{-4t} + 2 \cdot (-4) A e^{-4t} - 3 \cdot A e^{-4t} = 5e^{-4t}.$$

Наведемо подібні і проведемо необхідні скорочення:

$$e^{-4t} (16A - 8A - 3A) = 5e^{-4t}.$$

$$5A = 5, \text{ или } A = 1.$$

Таким чином, частковий розв'язок представимо у вигляді:

$$y_{\text{ч}} = e^{-4t}.$$

3). Знайдемо повний розв'язок диференційного рівняння.

$$y_{\text{полн}} = y_{\text{обц}} + y_{\text{ч}}.$$

$$y_{\text{полн}} = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t + e^{-4t}.$$

З урахуванням початкових умов отримаємо:

$$y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 0.$$

$$\dot{y}(0) = -3C_1 + C_2 - 4 = 0.$$

Знайдемо  $C_1, C_2$ :

$$C_1 = -C_2 - 1,$$

$$3C_2 + 3 + C_2 - 4 = 0.$$

Звідси отримаємо:

$$4C_2 = 1, \text{ тобто, } C_2 = \frac{1}{4} \text{ та, відповідно, } C_1 = -\frac{5}{4}$$

Таким чином, повний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y_{\text{полн}} = -\frac{5}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t + e^{-4t}.$$

4). Для побудови графіка знайдемо точки його початку і кінця.

$$y(0) = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 0.$$

$$y(\infty) = \infty.$$

Знайдемо кілька проміжних точок і вибудуємо графік:

$$y(1) = 0.635, \quad y(10) = 5506,$$

і т.д.

Графік розв'язку представлено на рис. 4.

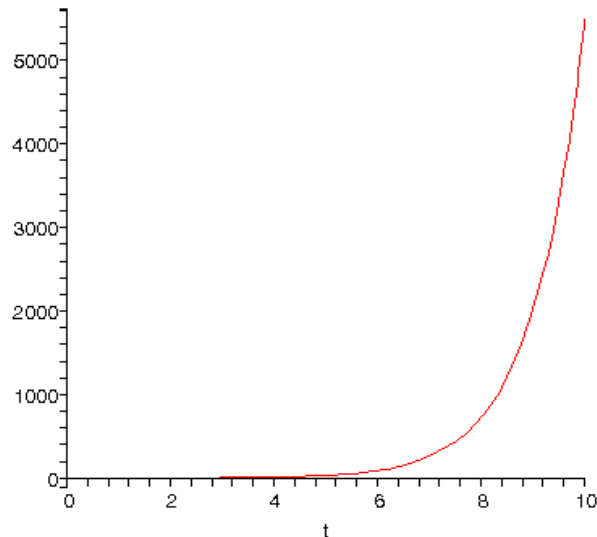


Рис. 4.

### Завдання для виконання

#### Завдання 1

Для електричних систем, представлених в табл. 1.

1. Скласти диференційні рівняння, що описують їх роботу.
2. Вирішити отримані диференційні рівняння і представити отриманий розв'язок графіком.

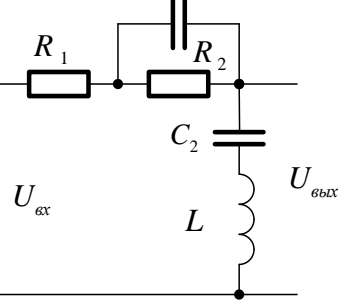
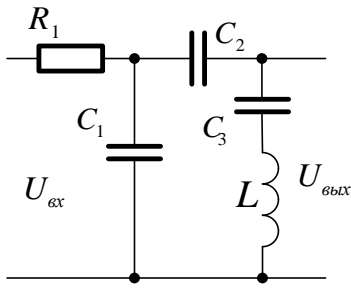
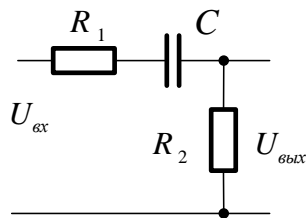
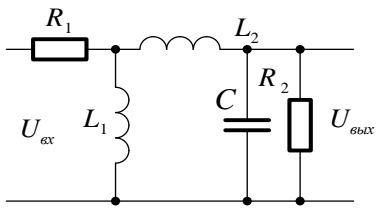
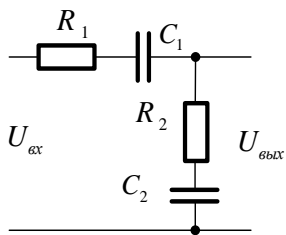
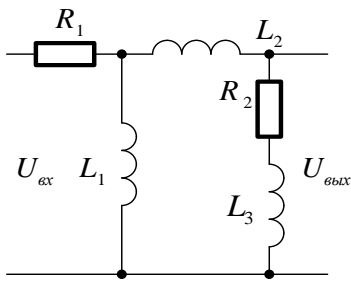
Таблиця 1

#### Варіанти завдань

№	Принципова схема	№	Принципова схема
---	------------------	---	------------------

1		19	
2		20	
3		21	
4		22	
5		23	
6		24	
7		25	

8		26	
9		27	
10		28	
11		29	
12		30	
13		31	

14		32	
15		33	
16		34	

### Контрольні питання

1. Що таке рівняння динаміки, рівняння статики?
2. Що таке статична характеристика? Наведіть основні статичні характеристики.
3. Що таке лінеаризація? Якими методами вона виконується?
4. Запишіть перетворення Лапласа. У чому його сутність?
5. Запишіть основні властивості перетворення Лапласа.
6. Для чого використовується теорема розкладу?
7. Які форми запису диференціальних рівнянь використовують у дослідження автоматичного керування?
8. Запишіть перетворення Фур'є. У чому його сутність?

## Практичне заняття № 5

Тема: Дослідження функціонування систем автоматичного керування

Мета: Отримання практичних навичок визначення передавальних функцій і тимчасових характеристик елементів систем керування.

### Теоретичні відомості

Одним з найважливіших застосувань операційного числення, пов'язаних з перетворенням Лапласа, є розв'язок диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Як ми вже знаємо саме такими рівняннями описуються лінійні системи керування. Тому операторний метод розв'язку диференціальних рівнянь є одним з основних методів теорії керування. Основні переваги його полягають у наступному:

- Він застосовується при будь-якому вигляді правої частини диференціального рівняння, в тому числі і за наявності в ній похідних;

- Отриманий розв'язок не залежить від виду коренів характеристичного рівняння та їх збігу або розбіжності з коефіцієнтами правій частині.

В основі операторного методу розв'язання диференціальних рівнянь лежить перехід з тимчасової області в операторну область по теоремі про диференціювання оригіналів .

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u \quad (1)$$

Зображення змінних цього рівняння по Лапласа виглядає наступним чином:

- Для лівої частини

$$x(t) \rightarrow x(p);$$

$$x'(t) \rightarrow px(p) - x(0);$$

$$x''(t) \rightarrow p^2 x(p) - px(0) - x'(0);$$

$$x'''(t) \rightarrow p^3 x(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0),$$

і т.д.

- для правої частини

$$u(t) \rightarrow u(p);$$

$$u'(t) \rightarrow pu(p) - u(0);$$

$$u''(t) \rightarrow p^2 u(p) - pu(0) - u'(0);$$

$$u'''(t) \rightarrow p^3 u(p) - p^2 u(0) - pu'(0) - u''(0),$$

і т.д.

Тоді вихідне диференціальне рівняння може бути представлене у вигляді

$$\begin{aligned} & a_n (p^n x(p) - p^{n-1} x(0) - p^{n-2} x'(0) - \dots - x^{(n-1)}) + \\ & + a_{n-1} (p^{n-1} x(p) - p^{n-2} x(0) - p^{n-3} x'(0) - \dots - x^{(n-2)}) + \dots \\ & \dots + a_1 px(p) + a_0 = b_m (p^m u(p) - p^{m-1} u(0) - p^{m-2} u'(0) - \dots - u^{(m-1)}) + \\ & + b_{m-1} (p^{m-1} u(p) - p^{m-2} u(0) - p^{m-3} u'(0) - \dots - u^{(m-2)}) + \dots + b_1 pu(p) + b_0, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned}
x(p) = & \frac{(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0)}{(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0)} u(p) + \frac{(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} x(0) + \\
& + \frac{(a_n p^{n-2} + a_{n-1} p^{n-3} + \dots + a_2)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} x'(0) + \dots + \frac{(a_n p^1 + a_{n-1})}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} x^{(n-2)}(0) + \\
& + \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} x^{(n-1)}(0) - \frac{(b_m p^{m-1} + b_{m-1} p^{m-2} + \dots + b_1)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} u(0) - \\
& - \frac{(b_m p^{m-2} + b_{m-1} p^{m-3} + \dots + b_2)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} u'(0) - \dots - \frac{u^{(m-1)}(0)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}.
\end{aligned}$$

Наприклад, для неоднорідного диференційного рівняння другого порядку

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t) \quad (2)$$

в часовій області для отримання вираження залежності виходу від входу немає іншого шляху, крім розв'язку (інтегрування) цього рівняння. Перетворивши ж його в комплексну площину за допомогою перетворення Лапласа при початкових умовах

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0',$$

отримаємо

$$(p^2 Y(p) - p y_0 - y_0') + a_1 (p Y(p) - y_0) + a_0 Y(p) = F(p). \quad (3)$$

В результаті виробленої заміни відбувається перехід від диференційної форми подання рівняння до алгебраїчної. Оскільки обидві частини рівняння відображені в одну і ту ж область зображень, то проблем з виконанням аналітичних перетворень більше немає, тому з (8) отримуємо

$$Y(p)(p^2 - a_1 p + a_0) = F(p) + p y_0 + y_0' + a_1 y_0,$$

звідки

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 - a_1 p + a_0} + \frac{p y_0 + y_0' + a_1 y_0}{p^2 - a_1 p + a_0}.$$

Далі залишається обчислити оригінал отриманої залежності, скориставшись теоремою звернення, або теорією вирахувань, тобто розклавши отриманий вираз на суму найпростіших дробів і визначивши відповідне табличне відповідність для кожного дроби.

Найбільш простий вид операторного розв'язку (7) має при нульових початкових умовах

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 - a_1 p + a_0}.$$

Відзначимо важливе з цієї точки зору зауваження: нульові початкові умови відповідають розгляду будь-якого описуваного диференційним рівнянням процесу, починаючи з деякого моменту, прийнятого за початок відліку, тобто за нуль (оригінал  $y(t)$  при  $t < 0$  приймається рівним нулю!). Саме такий підхід використовується при вивченні процесів керування, так що використання диференційних рівнянь з нульовими початковими умовами для опису систем керування є цілком виправданим.

## 1.2. Передаточні функції

**Визначення передавальної функції.** Нехай деяка система керування описується диференціальним рівнянням

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u \quad (4)$$

при нульових початкових умовах. Використовуючи властивості перетворення Лапласа перепишемо (9) в зображеннях

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) U(p)$$

і визначимо відношення вихідного сигналу системи до вхідного

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (5)$$

Це співвідношення називається передавальною функцією. Вона дозволяє визначити зображення вихідного сигналу системи керування з зображення вхідного сигналу, що керує

$$Y(p) = W(p) \cdot U(p)$$

Значення  $p$ , при яких передавальна функція перетворюється в нуль, називаються нулями передавальної функції. Нулі є коренями полінома чисельника, тобто рівняння:

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0 = 0$$

Значення, при яких передавальна функція перетворюється в нескінченність, називаються полюсами передавальної функції. Полюси є коренями полінома знаменника (характеристичного полінома), тобто рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Передавальна функція  $W(p)$  має, таким чином,  $m$  нулів і  $n$  полюсів. Як нулі, так і полюса можуть бути дійсними або комплексно-спряженими, тому їх можна зобразити на комплексній площині (рис.1). Нулі і полюси називаються лівими (правими), якщо вони розташовані в лівій (правій) щодо уявної осі частини комплексної площині, і нейтральними або нульовими, якщо вони лежать відповідно на уявній осі або на початку координат.

До показників передавальної функції відносяться:

- Порядок передавальної функції  $n$ , рівний ступеня знаменника передавальної функції;
- Ступінь  $r_c$ , який рівний різниці ступенів знаменника  $n$  і чисельника  $m$  передаточ-ної функції;

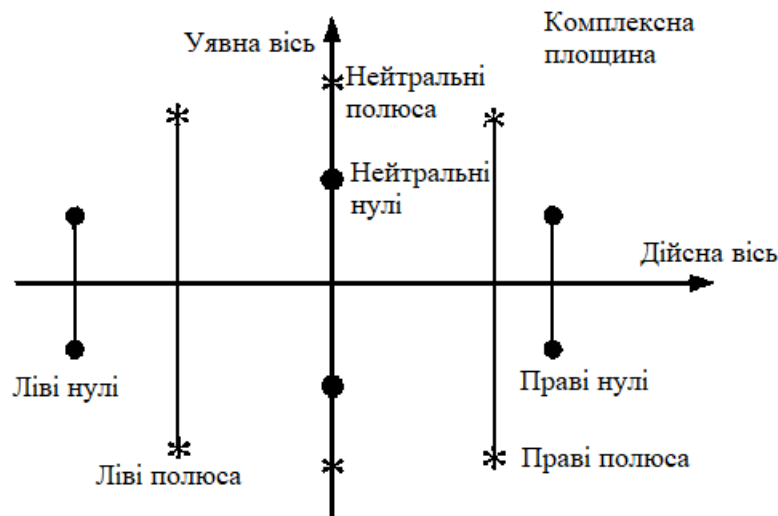


Рисунок 1 – Нулі та полюса на комплексній площині: \*-полюса, ●-нулі.

- Індекс аперіодичної нейтральності  $s_a$ , рівний числу нульових полюсів передавальної функції;

- Індекс коливальної нейтральності  $S_{\kappa}$ , рівний числу уявних полюсів передавальної функції;
- Індекс нестійкості  $s_H$ , рівний числу правих полюсів передавальної функції ;
- Індекс немінімально - фазовості  $s_{нф}$ , рівний числу правих нулів передавальної функції.

Розглянуті показники містять цінну інформацію про властивості досліджуваної системи керування .

Раніше зазначалось, що якщо відомі зображення входу  $Y ( p )$  і передавальна функція  $W ( p )$ , то можна знайти зображення виходу, а шляхом зворотного перетворення - і сам вихідний процес. Таким чином, передавальна функція повністю характеризує динамічні властивості системи (при нульових початкових умовах).

Якщо  $W ( p )$  є дробово - раціональна функція , причому  $m < n$  і коефіцієнти  $\{a_i\}$  і  $\{b_i\}$  дійсні та відомі коріння многочлена  $A ( p ) = 0$  , то вираз ( 10 ) можна переписати у вигляді:

$$W(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{(p-p_1)^{v_1} (p-p_2)^{v_2} \dots (p-p_r)^{v_r}} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

де  $v_i$  –кратність кореня  $p_i$ .

Відома формула

$$w(t) = L^{-1} \{W(p)\} = \sum_{\mu=1}^n \operatorname{Re}(W(p)e^{pt}) \Big|_{p=p_{\mu}}$$

яка дозволяє представити оригінал передавальної функції сумою зображень вираховань передавальної функції відносно коренів характеристичного многочлена. Нижче представлені три різних варіанти знаходження оригіналу передавальної функції залежно від виду коренів характеристичного многочлена.

1. Нехай

$$p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = (p-p_1)(p-p_2) \dots (p-p_n)$$

де  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – різні дійсні та комплексні корені. Тоді оригінал знаходять за формулою

$$w(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t}$$

2. Якщо зображення має вигляд

$$W(p) = \frac{B(p)}{pA(p)},$$

то оригінал визначається виразом

$$w(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{p_k A'(p_k)} e^{p_k t}$$

3. Випадок кратних коренів. Нехай

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)},$$

де  $A(p) = (p-p_1)^{v_1} \cdot (p-p_2)^{v_2} \dots (p-p_r)^{v_r}$  , причому  $v_1 + v_2 + \dots + v_r = n$  . Тоді оригінал знаходять по формулі

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{\mu_k} A_{jk} \frac{t^{\mu_k-j}}{(\mu_k-j)!} e^{p_k t} = \\
&= A_{11} \frac{t^{\mu_1-1}}{(\mu_1-1)!} e^{p_1 t} + A_{21} \frac{t^{\mu_1-2}}{(\mu_1-2)!} e^{p_1 t} + \dots + A_{\mu_1,1} e^{p_1 t} + \\
&+ A_{12} \frac{t^{\mu_2-1}}{(\mu_2-1)!} e^{p_2 t} + A_{22} \frac{t^{\mu_2-2}}{(\mu_2-2)!} e^{p_2 t} + \dots + A_{\mu_2,2} e^{p_2 t} + \dots + \\
&+ A_{1r} \frac{t^{\mu_r-1}}{(\mu_r-1)!} e^{p_r t} + A_{2r} \frac{t^{\mu_r-2}}{(\mu_r-2)!} e^{p_r t} + \dots + A_{\mu_r,r} e^{p_r t}.
\end{aligned}$$

Коефіцієнти  $A_{jk}$  визначається залежністю

$$A_{jk} = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \left\{ (p-p_k)^{\mu_k} X(p) \right\} \Big|_{p=p_k}.$$

Неважко бачити, що описані способи визначення оригіналів передаточних функцій залежно від виду коренів характеристичного рівняння повністю відповідають способам визначення відрахувань залежно від виду дробово-раціональної функції.

### Тимчасові характеристики

Динамічні властивості елементарних ланок можуть описуватися не тільки рівняннями і передавальними функціями, часто використовують також часові та частотні характеристики. Ці характеристики можуть бути отримані експериментально або побудовані за рівнянням ланки або за його передавальною функцією. Можливо й зворотне - по експериментально побудованим характеристикам можна скласти рівняння ланки або його передавальну функцію. Частотні характеристики будуть розглянуті в матеріалах до наступного практичного заняття. Тут же ми розглянемо тимчасові характеристики - реакції системи на стандартні (типові) вхідні дії, в якості яких найчастіше використовуються ступеневий одиничний вплив (одинична функція) і  $\delta$  - функція Дірака (одиничний імпульс). До числа цих характеристик відносяться перехідна і вагова функції.

Ступінчастий одиничний вплив (одинична функція) - це вплив, який миттєво зростає від нуля до одиниці і далі залишається незмінним:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Операторне представлення (зображення по Лапласу) ступеневої одиничної функції є (див. табл. 1)

$$\mathbf{1}(p) = \frac{1}{p}.$$

$\delta$ -функція Дірака (одиничний імпульс) – це імпульс, площа якого рівна одиниці при тривалості, рівній нулю, та висоті, яка рівна бескінечності:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Операторне представлення (зображення по Лапласу) одиничного імпульса є (див. табл. 1)

$$\delta(p) = 1.$$

Відповідно визначенню  $\delta$ -функції справедливо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Зв'язок  $\delta$ -функції з одиничною функцією досить проста (слід, звичайно, мати на увазі, що співвідношення символічне, так як похідна від  $\delta$ -функції, строго кажучи, не існує):

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \equiv \dot{\delta}(t)$$

Тепер знайдемо зображення виходу, якщо входом є  $\delta$ -функція.

$$Y(p) = U(p)W(p) = 1 \cdot W(p) = W(p)$$

Звідси випливає важливий факт: передавальна функція дорівнює зображенню по Лапласа реакції системи на  $\delta$ -функцію. Оригінал зображення передавальної функції

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}$$

називається *імпульсною перехідною* або *ваговою функцією системи*. Вона може мати вигляд, зокрема, представлений на рис. 3. Імпульсна перехідна функція, як і передавальна функція, є вичерпною характеристикою системи при нульових початкових умовах.

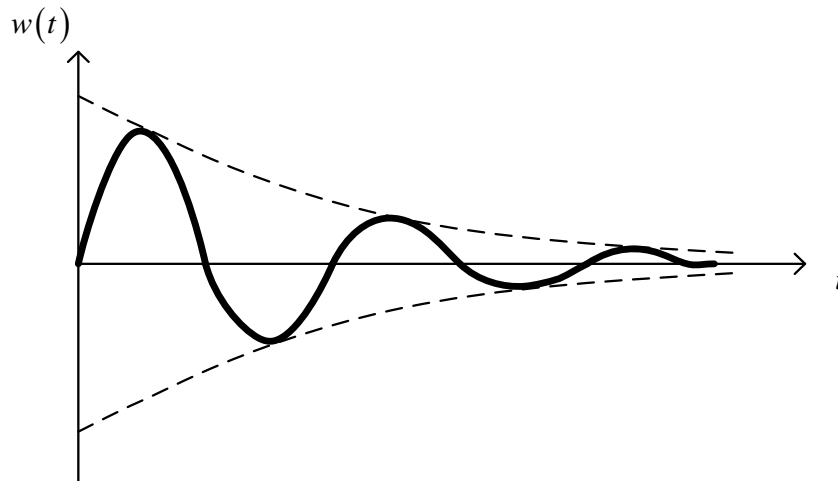


Рис. 3

Тепер знайдемо зображення виходу, якщо входом є ступінчаста одинична функція.

$$Y(p) = X(p)W(p) = \frac{1}{p} \cdot W(p) = \frac{W(p)}{p}$$

Оригінал зображення відношення  $\frac{W(p)}{p}$ , тобто.

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\{H(p)\}$$

називається *перехідною характеристикою* (перехідною функцією) системи.

Знайдемо зв'язок між імпульсною перехідною функцією і перехідною характеристикою. Оскільки

$$H(p) = W(p) \frac{1}{p},$$

то

$$pH(p) = W(p).$$

Так як при нульових початкових умовах множенню зображення на  $p$  відповідає диференціювання в області часу, то з останнього співвідношення випливає:

$$h'(t) = w(t)$$

або

$$h(t) = \int_0^t w(t) dt$$

Знаючи перехідну або вагову функцію, можна визначити реакцію ланки на довільний вхідний вплив при нульових початкових умовах:

$$y(t) = \int_0^t w(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

### Завдання для виконання

Для варіанту завдання з практичного заняття 4 визначити:

- Передавальну функцію системи;
- Перехідну характеристику системи та її графік;
- Імпульсну перехідну функцію системи та її графік.

### Контрольні питання

1. Які два основні режими роботи характерні для САК?
2. У чому полягає відмінність між статичним та динамічним усталеними режимами?
3. Що таке перехідний режим і які чинники його спричиняють?
4. Чому вивчення перехідних режимів є особливо важливим?
5. Як змінюється характер перехідного процесу при зміні параметрів системи?
6. Які режими роботи САК вам відомі?
7. Що таке статичний режим, перехідний режим, динамічний режим?
8. Які сигнали використовують під час аналізу САК?
9. Що таке перехідна функція системи?
10. Що таке імпульсна перехідна функція системи?
11. Як пов'язані між собою перехідна та імпульсна перехідна функції системи?

## Практичне заняття 6

Тема: Аналіз різновидів динамічних ланок.

Мета: Ознайомитися з основними різновидами динамічних ланок систем автоматичного керування, вивчити типові динамічні ланки першого та другого порядків, їх математичні моделі та характеристики.

### Теоретичні відомості

Аперіодична ланка

Аперіодична ланка відповідає елементам САК, які містять хоча б один накопичувач енергії (пружина, маса, що рухається, ємність, індуктивність і т.д.). Чим більша величина  $T$ , тим повільніше розсіюється енергія в аперіодичній ланці.

Приклади технологічних об'єктів

ГВМ з проточним золотником (рис. 1).

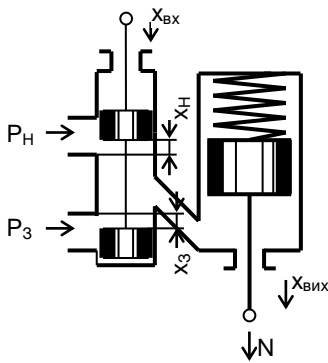


Рисунок 1

Постійна часу:

$$T = \frac{13,9 \rho^{1,5} S^2 x_H x_3}{K_{\Pi} \mu b (x_3^2 + x_H^2)} \sqrt{\frac{P_H - P_3}{x_3^2 + x_H^2}};$$

коефіцієнт передачі:

$$K = \frac{S}{k_{\Pi}} \cdot \frac{P_H - P_3}{\rho} \cdot \frac{x_3 x_H (x_3 + x_H)}{x_3^2 + x_H^2}.$$

В цих рівняннях  $S$  - площа поршня,  $m^2$ ;  $x_H$ ,  $x_3$  - величина відкриття вікна зі сторони нагнітання та зсуву масла,  $m$ .

Гідротурбіна (рис. 2). Представляє собою аперіодичну ланку у

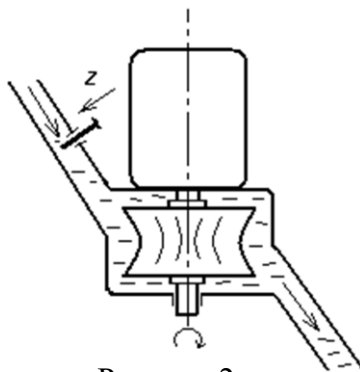


Рисунок 2

випадку, коли вхідна величина

$x = z$  - ступінь відкритості клапану,  $m$ ;

$y = \omega$  - кутова швидкість обертання вала,  $рад/с$ .

Коефіцієнт:

$$k = \frac{\omega_0}{z_0},$$

де  $\omega_0$  і  $z_0$  - номінальні кутова швидкість обертання вала турбіни,  $рад/с$  та ступінь відкритості клапану,  $m$ .

Постійна часу:

$$T = \frac{2J_{\Pi} \omega_0^2}{\chi z_0 v_0^3},$$

де  $J_{\Pi}$  - момент інерції всіх мас, що обертаються, приведений до вала гідротурбіни,  $кг \cdot m^2$ ;  $v_0$  - номінальна швидкість течії води в трубі,  $m/с$ ;  $\chi$  - коефіцієнт, який залежить від конструкції турбіни,  $кг \cdot с \cdot рад/м$ .

Дизельний двигун (рис. 3).

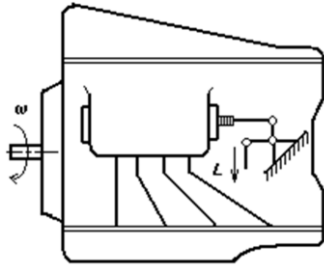


Рисунок 2

Вхід  $x = l$  – переміщення рейки бензонасоса, м,  
вихід  $y = \omega$  – кутова швидкість обертання валу, рад/с.

$$k = \frac{\frac{\partial M_{\delta}}{\partial l} \cdot l_0}{\frac{\partial M_c}{\partial \omega} - \frac{\partial M_{\delta}}{\partial \omega}},$$

де значення частинних похідних знаходяться графічно з експериментально знятих характеристик:  $M_{\delta}(\omega)$ ,  $M_c(\omega)$ ,  $M_{\delta}(l)$ .

Постійна часу:

$$T = \frac{J_{\Pi}}{\frac{\partial M_c}{\partial \omega} - \frac{\partial M_{\delta}}{\partial \omega}},$$

де  $J_{\Pi}$  – момент інерції всіх мас, що обертаються, приведений до валу, кг·м<sup>2</sup>.

Ресивер (рис. 3).

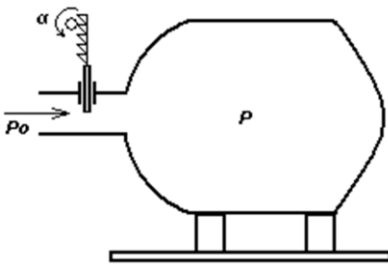


Рисунок 3

Вхід  $x = \alpha$  – кут повороту приводу заслонки, рад,  
вихід  $y = p$  – тиск в ресивері, Па.

Коефіцієнт:  $k = 1$ .

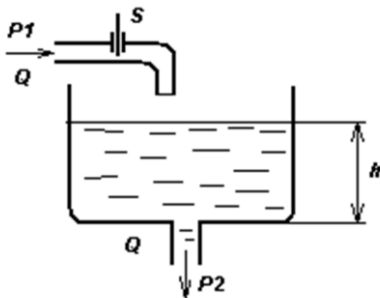
Постійна часу:

$$T = \frac{V p_H}{RT G_0},$$

$$G_0 = \mu \frac{k_1 k_k p_0 \alpha_H}{\sqrt{RT}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2gk \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}}}{k+1}},$$

де  $V$  – об'єм ресиверу, м<sup>3</sup>;  $p_H$  – робочий тиск (в усталеному режимі), Па;  $R = 8.34$  Дж/(кг·К);  $T$  – температура в ресивері, °К;  $\mu$  – коефіцієнт витрат через вхідний клапан;  $k_k$  – коефіцієнт залежності відкритості труби від куту повороту, м<sup>2</sup>/рад;  $p_0$  – вхідний тиск, Па;  $\alpha_H$  – робочий кут привідного механізму, рад;  $g = 9.81$  – прискорення вільного падіння, м/с<sup>2</sup>;  $k$  – показник адіабати газу.

Резервуар з рідиною. Аперіодична ланка з вхідною і вихідною величинами відповідно:



$x = S$  – ступінь відкритості клапану, м;

$y = h$  – висота рідини в резервуарі, м.

Коефіцієнт, в статичному режимі:

$$k = \frac{2(p_1 - \gamma h_0)(\gamma h_0 - p_2)}{\gamma(p_1 - p_2)};$$

де  $\gamma$  – густина рідини, кг/м<sup>3</sup>;  $h_0$  – максимальна висота підйому рідини, м;  $p_1$ ,  $p_2$  – вхідний та вихідний тиск відповідно, Па.

Постійна часу:

$$T = \frac{2(p_1 - p_0)(p_0 - p_2)}{\gamma(p_1 - p_2)} \cdot \frac{1}{Q},$$

де  $Q$  – кількість рідини, що протікає в одиницю часу,  $м^3/с$ .

Теплообмінник (рис. 5). Аперіодична ланка з вхідною і вихідною величинами відповідно:

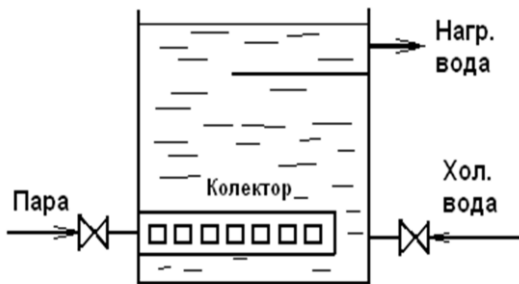


Рисунок 5

$x = S$  – ступінь відкритості парового клапану,  $м$ ;

$y = T$  – температура нагрітої води,  $^{\circ}C$ .

Коефіцієнт, в статичному режимі:

$$k = \frac{Q_s}{GC\vartheta_H};$$

де  $Q_s$  – кількість тепла, яку отримує теплообмінник з паром,  $ккал/мин$ ;  $G$  – масова кількість води, що протікає через теплообмінник,  $кг/мин$ ;  $C$  – питома теплоємність води,  $ккал/(кг^{\circ}C)$ ;  $\vartheta_H$  – номінальна робоча температура нагрітої води,  $^{\circ}C$ .

Постійна часу:

$$T = \frac{G_e}{G},$$

де  $G$  – масова кількість води, що протікає через теплообмінник,  $кг/мин$ ;  $G_e$  – маса води, що міститься в теплообміннику,  $кг$ .

### Приклади електромеханічних пристроїв

Електричний генератор постійного струму (рис. 6).

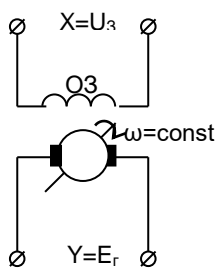


Рисунок 6

Дана аперіодична ланка має такі параметри передаточної функції:

$$k_r = \frac{c_e n k_H w_3}{r_3},$$

де  $c_e$  – константа, яка залежить від конструктивних особливостей генератора,  $B \cdot Bб^{-1} \cdot (об/с)^{-1}$ ;  $n$  – частота обертання якоря,  $об/с$ ;  $k_H$  – коефіцієнт нахилу лінеаризованої

характеристики намагнічування генератора,  $Bб/A$ ;  $w_3$  – кількість витків обмотки збудження, які приходяться на один полюс;  $r_3$  – опір обмотки збудження,  $Ом$ .

Постійна часу генератора:  $T_r = \frac{L_3}{r_3}$ , де  $L_3$  – індуктивність обмотки збудження,

$Гн$ .

Термопара (рис. 7). Даний прилад є аперіодичною ланкою, якщо вхідна і вихідна величини такі:

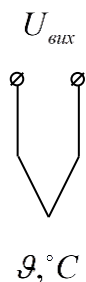


Рисунок 7

$x = \vartheta$  – температура,  $^{\circ}\text{C}$  ;

$y = U$  – напруга на контактах термопари,  $\text{В}$  .

$k$  залежить від матеріалу термопари, наприклад

Метали	$k$
платинородій-платина	$6,4 \cdot 10^{-3}$
хромель-алюмель	$41 \cdot 10^{-3}$
хромель-копель	$69,5 \cdot 10^{-3}$
залізо-константан	$57,5 \cdot 10^{-3}$
мідь-константан	$47,5 \cdot 10^{-3}$

Постійна часу визначається так:

$$T = \frac{C_T}{\beta \cdot S_k},$$

де  $C_T$  – теплоємність термометричного тіла,  $\text{Дж/К}$ ;  $\beta$  – коефіцієнт тепловіддачі,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$ ;  $S_k$  – поверхня корпусу термопари,  $\text{м}^2$  .

Реальна диференціююча ланка

Приклади електромеханічних пристроїв

Тахогенератор

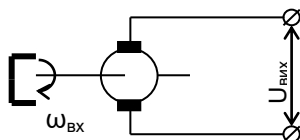


Рисунок 8

Представляє собою реальну диференціюючу ланку у випадку, коли вхідна і вихідна величини відповідно такі:

$x = \omega$  – кутова швидкість валу генератора,  $\text{рад/с}$ ;

$y = U$  – напруга на виході,  $\text{В}$ .

$$\text{Коефіцієнт: } k = \frac{U_{\text{я.ном}}}{\omega_{\text{ном}}}$$

Постійна часу генератора:  $T = \frac{L_{\text{я}} + L_{\text{н}}}{R_{\text{я}} + R_{\text{н}}}$ ,

де  $L_{\text{я}}$ ,  $L_{\text{н}}$  – індуктивності якоря та навантаження,  $\text{Гн}$ ;  $R_{\text{я}}$ ,  $R_{\text{н}}$  – опори якоря та навантаження,  $\text{Ом}$ .

Диференціюючий ланцюг з динамічною ємністю (рис. 2.14).

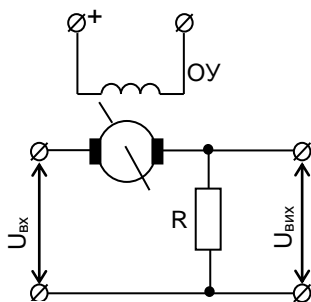


Рисунок 9

Представляє собою реальну диференціюючу ланку у випадку, коли вхідна і вихідна величини відповідно такі:

$x = U_{\text{вх}}$  – вхідна напруга,  $\text{В}$ ;

$y = U_{\text{вих}}$  – напруга на виході,  $\text{В}$ .

Коефіцієнт:

$$k = R_{\text{н}} C_{\text{D}}$$

Постійна часу генератора:

$$T = (R_H + R_J)C_D,$$

де  $C_D$  – динамічна ємність,  $\Phi$ ;  $C_D = \frac{j\omega_0^2}{U_{я.ном}^2}$ ;  $j$  – момент інерції якоря,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $\omega_0$  – кутова швидкість ідеального холостого ходу,  $\text{рад}/\text{с}$ ;  $U_{я.ном}$  – номінальна напруга на якорі,  $\text{В}$ .

Диференціальний трансформатор

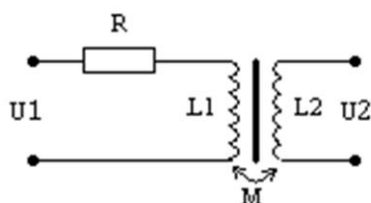


Рисунок 10

Вхідна і вихідна величини відповідно такі:

$x = U_1$  – напруга на вході,  $\text{В}$ ;

$y = U_2$  – напруга на виході,  $\text{В}$ .

Передаточна функція має вигляд:

$$\text{Коефіцієнт: } k = \frac{1}{R_{L2} + R}$$

$$\text{Постійна часу: } T = \frac{L_1}{R_{L1} + R},$$

де  $L_1$  – індуктивність первинної обмотки трансформатора,  $\text{Гн}$ ;  $L_2$  – індуктивність вторинної обмотки,  $\text{Гн}$ ;  $R_L = \omega L$  – індуктивний опір,  $\text{Ом}$ .

Інтегруючі ланки відповідають елементам, в яких при постійному вхідному впливі встановлюється постійна швидкість зміни вихідної координати: безінерційний двигун постійного струму з незалежним збудженням (ДПС НЗ), якщо вихідна величина – кут повороту; редуктор, у якого вхідна величина – кутова швидкість, а вихідна – кут повороту вала.

З принципу дії інтегруючої ланки витікає одна дуже важлива її властивість: інтегруюча ланка має "пам'ять по положенню". Якщо, наприклад, у момент часу  $t_0$  від безінерційного двигуна постійного струму відключити управляючу напругу  $u_{\text{вх}}=x$ , то двигун зупиниться і зафіксує деяке постійне значення кута повороту ротора  $y=\varphi_{\text{вих}}$  (запам'ятає положення вихідної координати на момент часу вимикання напруги).

Наведене вище стосується ідеальної інтегруючої ланки. Але підключивши до цієї ланки будь-яку апериодичну ланку 1-го порядку легко одержати різноманітні реальні інтегруючі ланки.

Реальні елементи систем керування є інерційними, тому передавальна функція реального інтегратора має вигляд:

$$W(s) = k/[s(Ts+1)],$$

де  $T$  – стала часу, що враховує інерційні властивості реальної інтегруючої ланки.

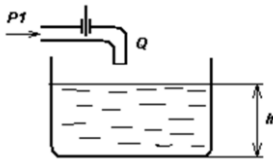
Реальна інтегруюча ланка

Передаточна функція має вигляд:  $W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}$

Диференціальне рівняння ланки:  $T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$

## Приклади технологічних об'єктів

### Резервуар з рідиною



Представляє собою ідеальну інтегруючу ланку у випадку, коли вхідна і вихідна величини відповідно такі:

$x = Q$  – кількість рідини, що затікає в одиницю часу,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $y = h$  – рівень води в резервуарі,  $\text{м}$ .

Коефіцієнт:

$$k = \frac{1}{S}, \text{ м}^{-2}$$

де  $S$  – площа поверхні води в резервуарі,  $\text{м}^2$ .

### Золотниковий гідравлічний підсилювач

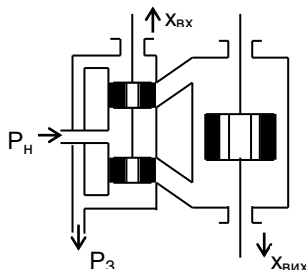


Рисунок 12

На рис. стрілками показаний напрямок рідини, що створює тиск нагнітання  $P_H$  та зливу  $P_3$ .

Коефіцієнт передачі та постійна часу мають наступні значення:

$$K = \frac{0,71G_{\text{макс}}\sqrt{P_{\text{вх}}}}{S_{\text{п}}\ell_{\text{макс}}}\left(1 - \frac{F_{\text{п}}}{2S_{\text{п}}P_{\text{вх}}}\right);$$

$$T = 0,17\frac{mG_{\text{макс}}}{S_{\text{п}}^2P_{\text{вх}}}\left(1 - \frac{F_{\text{п}}}{2S_{\text{п}}P_{\text{вх}}}\right),$$

де  $\ell_{\text{макс}}$  – максимальний зсув золотника відносно середнього положення,  $\text{м}$ ;  $S_{\text{п}}$  – площа поршня,  $\text{м}^2$ ;  $G_{\text{макс}}$  – максимально провідність щілини золотника,  $\text{кг}^{-0,5}\cdot\text{м}^{-3,5}$ ;  $F_{\text{п}}$  – навантаження на поршень,  $\text{Н}$ ;  $P_{\text{вх}}$  – тиск рідини на вході,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;  $m$  – приведена маса рухомих частин,  $\text{кг}$ .

### ГВМ мембранного типу (Рис. 13).

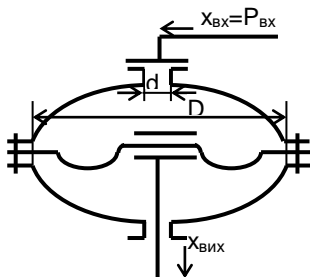


Рисунок 13

Коефіцієнт передачі та постійна часу мають такі значення:

$$K = \frac{d^4}{32 \cdot \eta L D^2};$$

$$T = \frac{m}{8\pi\eta L}\left(\frac{d}{D}\right)^4,$$

де  $d$  – внутрішній діаметр трубки гідропроводу,  $\text{м}$ ;  $L$  – повна довжина гідропроводу,  $\text{м}$ ;  $\eta$  – динамічна маса всіх рухомих елементів, включаючи масу рідини в ГВМ та масу навантаження,  $\text{кг}$ ;  $D$  – діаметр мембрани,  $\text{м}$ .

### Двофазний асинхронний двигун (Рис. 3.15).

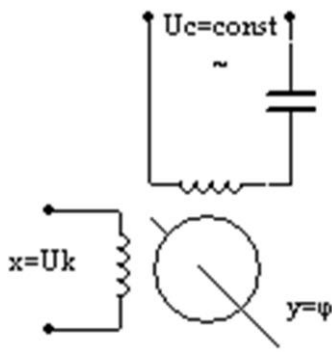


Рисунок 14

Постійна часу:

Представляє собою інтегруючу ланку у випадку, коли вхідна і вихідна величини відповідно такі:

$x = U_k$  – напруга керування,  $B$ ;

$y = \varphi$  – кут повороту вала двигуна,  $рад$ .

Коефіцієнт:

$$k = \frac{360n_H}{u_K}, \text{ } \circ/(B \cdot c)$$

де  $n_H$  – частота обертів номінальна,  $об/с$

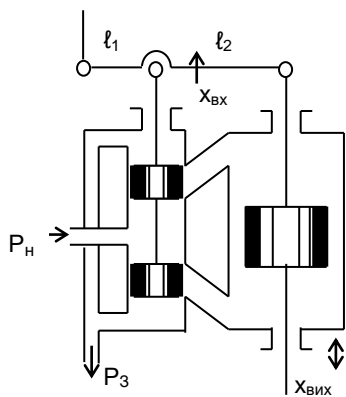
$$T = \frac{2\pi J n_H}{M_H}, \text{ } c$$

де  $J$  – динамічний момент інерції вала,  $кг \cdot м^2$ ;  $M_H$  – номінальне значення пускового моменту,  $Н \cdot м$ .

Коливальна ланка

### Приклади технологічних об'єктів

Золотниковий гідропосилувач з жорстким ричажним зворотним зв'язком



Динамічні параметри гідропідсилювача мають наступні значення: коефіцієнт передачі:

$$k = \frac{l_1}{l_2}.$$

Постійна часу:  $T = \sqrt{\frac{T_0 l_1}{k_0 l_2}}$ .

Коефіцієнт відносного затухання:

$$\xi = 0,5 \sqrt{\frac{l_1}{T_0 k_0 l_2}}.$$

При  $\xi < 1$  ( $\frac{l_1}{l_2} < 4T_0 k_0$ ) маємо коливальну ланку,

в зворотному випадку, коли  $\xi > 1$  маємо аперіодичну ланку 2-го порядку.

В цих формулах  $k_0$  і  $T_0$  – коефіцієнт передачі і постійна часу золотникового гідропідсилювача без зворотного зв'язку, обчислюються за формулами:

$$k_0 = \frac{0,71 G_{\max} \sqrt{P_{\text{ex}}}}{S_{\Pi} l_{\max}} \left( 1 - \frac{F_{\Pi}}{2S_{\Pi} P_{\text{ex}}} \right) \quad T_0 = 0,17 \frac{m G_{\max}}{S_{\Pi}^2 P_{\text{ex}}} \left( 1 - \frac{F_{\Pi}}{2S_{\Pi} P_{\text{ex}}} \right),$$

$l_1, l_2$  – довжини плеч важеля зворотного зв'язку,  $м$ ;  $l_{\max}$  – максимальний зсув золотника відносно середнього положення,  $м$ ;  $S_{\Pi}$  – площа поршня,  $м^2$ ;  $G_{\max}$  – максимально провідність щілини золотника,  $кг^{-0,5} \cdot м^{-3,5}$ ;  $F_{\Pi}$  – навантаження на поршень,  $Н$ ;  $P_{\text{ex}}$  – тиск рідини на вході,  $Н/м^2$ ;  $m$  – приведена маса рухомих частин,  $кг$ .

Відцентровий тахометр (рис. 15).

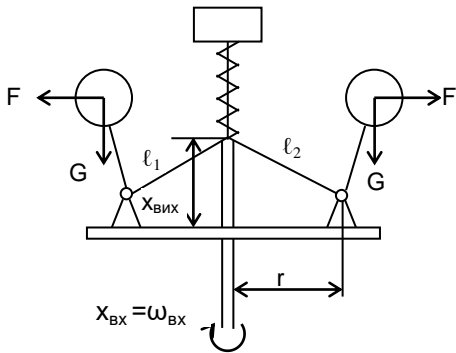


Рисунок 15

Параметри ланки такі:

$$k = \frac{x_{\max}}{\delta \cdot \omega_0}, \quad T_1^2 = \frac{m \cdot x_{\max}}{2E \cdot \delta}; \quad T_2 = \frac{\eta \cdot x_{\max}}{2E \cdot \delta}$$

$$E = \frac{\ell_1}{\ell_2} m_1 \cdot n \cdot \left( r_0 + x_0 \cdot \frac{\ell_1}{\ell_2} \right) \cdot \omega_0^2; \quad \delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2};$$

де  $\ell_1, \ell_2$  – довжини важелів, м;  $\omega_0$  – кутова швидкість в установленому режимі, рад/с;  $\omega_1, \omega_2$  – кутові швидкості, які відповідають нижньому та верхньому положенню муфти, рад/с;  $m$  – приведена маса рухомих частин, кг;  $m_1$  – маса одного шару, кг;  $n$  – число вантажів;  $x_0$  – зсув муфти в установленому режимі від нижнього положення, м;  $x_{\max}$  – максимальне переміщення муфти, м;  $r_0$  – відстань від вала до шарніра, м;  $\eta$  – коефіцієнт в'язкого тертя, Н·с/м<sup>2</sup>.

При  $\eta^2 x_{\max} < 8E\delta m$  відцентровий тахометр є коливальною ланкою, а в зворотному випадку – аперіодичною ланкою 2-го порядку.

Поплавковий вимірювач рівня рідини (сталого заглиблення) (рис. 16).

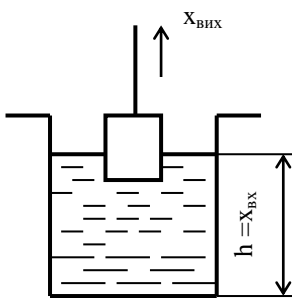


Рисунок 16

Постійні часу:

Передаточна функція має вигляд:

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

Вхідна величина і вихідна такі:

$x_{\text{вх}}$  – рівень води в резервуарі, м;

$x_{\text{вих}}$  – переміщення поплавка, м.

Коефіцієнт:

$$k = 1.$$

$$T_1 = \frac{\eta}{\rho S}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{m}{\rho S}},$$

де  $m$  – приведена маса поплавка, кг;  $\rho$  і  $\eta$  – густина рідини і тіла відповідно, кг/м<sup>3</sup>;  $S$  – площа поперечного перетину поплавка, м<sup>2</sup>.

При  $m\rho S < 2\eta^2$  маємо коливальну ланки, в зворотному випадку – аперіодичну 2-го порядку.

Поплавковий вимірювач рівня рідини (змінного заглиблення) (рис. 17).

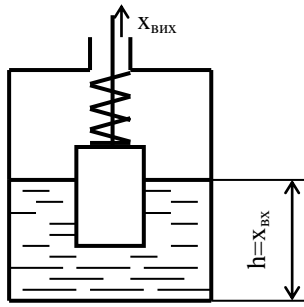


Рисунок 17

Вхідна величина і вихідна такі:

$x_{\text{вх}}$  – рівень води в резервуарі, м;

$x_{\text{вих}}$  – переміщення поплавка, м.

Коефіцієнт:

$$k = \frac{S\rho}{S\rho + k_{\text{п}}}$$

Постійні часу:

$$T_1 = \frac{\eta}{k_{\text{п}} + \rho S}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{m}{k_{\text{п}} + \rho S}},$$

де  $m$  – приведена маса поплавка, кг;  $\rho$  і  $\eta$  – густина рідини і тіла відповідно,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $S$  – площа поперечного перетину поплавка,  $\text{м}^2$ .

При виконанні умови  $m(k_{\text{п}} + \rho S) < 4\eta^2$  даний поплавок представляє собою коливальну ланку, в зворотному випадку – аперіодичну 2-го порядку.

Приклади електромеханічних пристроїв

Електричний двигун постійного струму з незалежним збудженням (рис. 18).

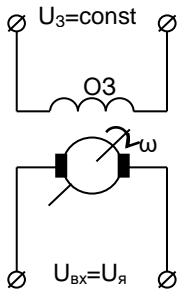


Рисунок 18

Вхідною величиною є напруга на якорі ( $U_{\text{вх}}=U_{\text{я}}$ ), а вихідною – кутова швидкість  $\omega$ . Напруга збудження  $U_3$  залишається постійною.

Передаточна функція електричного виконавчого механізму з незалежним збудженням описується рівнянням:

$$W(p) = \frac{K_1'}{T_e T_M p^2 + T_M p + 1}$$

Коефіцієнт передачі двигуна:

$$K_1 = \frac{\omega_{\text{я.ном}}}{E_{\text{я.ном}}} = \frac{\omega_{\text{я.ном}}}{U_{\text{я.ном}} - I_{\text{я.ном}} R_{\text{я}}}$$

де  $\omega_{\text{я.ном}}$  – номінальна кутова швидкість якоря,  $\text{рад}/\text{с}$ ;  $U_{\text{я.ном}}$  – номінальна напруга на якорі, В;  $I_{\text{я.ном}}$  – номінальний струм на якорі, А;  $R_{\text{я}}$  – опір якоря двигуна, Ом;  $E_{\text{я.ном}}$  – індуктивна в якорі ЕДС, В.

Електромагнітна постійна часу якорного ланцюга:

$$T_e = \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}$$

де  $L_{\text{я}} = \frac{U_{\text{я.ном}}}{I_{\text{я.ном}}} \cdot \frac{k_0}{\omega_{\text{ном}} n_{\text{п.п}}}$  – індуктивність якорного ланцюга, Гн;  $n_{\text{п.п}}$  – число пар полюсів;  $k_0$  – дослідницький коефіцієнт.

Опір якорного ланцюга двигуна:  $R_{\text{я}} = (0,5 \div 0,8) \left(1 - \eta_{\text{д.ном}}\right) \frac{U_{\text{я.ном}}}{I_{\text{я.ном}}}$

де  $\eta_{\text{д.ном}} = \frac{N_{\text{д.ном}} 10^3}{U_{\text{ном}} I_{\text{я.ном}}}$  – ККД двигуна при номінальному навантаженні;  $N_{\text{д.ном}}$  –

номінальна потужність двигуна, кВт.

Електромеханічна постійна часу:

$$T_M = \frac{J_{\text{я}} \omega_{\text{х.х}}}{M_{\text{п}}} = \frac{J_{\text{я}} R_{\text{я}}}{(k_e \Phi_{\text{д.ном}})^2} = \frac{J_{\text{я}} R_{\text{я}} \omega_{\text{я.ном}}^2}{(U_{\text{я.ном}} - I_{\text{я.ном}} R_{\text{я}})^2}$$

де  $J_{\text{я}}$  – момент інерції якоря, кг·м<sup>2</sup>;  $M_{\text{п}}$  – пусковий момент двигуна, Н·м;  $\omega_{\text{х.х}}$  – кутова швидкість ідеального холостого ходу, рад/с;  $\Phi_{\text{д.ном}}$  – номінальний магнітний потік двигуна, Вб.

При виконанні умови  $2L_{\text{я}} > R_{\text{я}}$  даний двигун представляє собою коливальну ланку, а в зворотному випадку – аперіодичну 2-го порядку.

#### Завдання для виконання

Завдання 1. Аналіз аперіодичної ланки

Записати передаточну функцію дизельного двигуна у вигляді:

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Пояснити фізичний зміст К та Т.

Побудувати якісно перехідну характеристику при збільшенні Т в 2 рази.

Зробити висновок щодо впливу моменту інерції на швидкодію.

Завдання 2. Аналіз інтегруючої ланки

Записати передаточну функцію резервуара:

$$W(s) = \frac{1}{Ss}$$

Пояснити, чому рівень води має “пам’ять”.

Визначити, що відбудеться при зменшенні площі S.

Порівняти ідеальний та реальний інтегратор.

Завдання 3. Аналіз диференціюючої ланки

Записати передаточну функцію тахогенератора.

Пояснити, чому вихідна напруга пропорційна швидкості.

Визначити вплив індуктивності на постійну часу.

Порівняти ідеальну та реальну диференціюючу ланку.

Завдання 4. Аналіз коливальної ланки

Записати передаточну функцію ДПС.

Пояснити фізичний зміст електромагнітної та електромеханічної постійних часу.

Визначити умову виникнення коливань.

Побудувати якісно перехідні характеристики при:

$\zeta < 1$

$\zeta = 1$

$\zeta > 1$

## Завдання 5. Порівняльний аналіз

Заповнити таблицю:

Тип ланки	Передаточна функція	Наявність пам'яті	Наявність коливань	Типові приклади
Аперіодична				
Інтегруюча				
Диференціююча				
Колівальна				

### Контрольні питання

1. Чим відрізняється аперіодична ланка від колівальної?
2. Чому інтегруюча ланка усуває статичну похибку?
3. Який фізичний зміст постійної часу?
4. Від чого залежить коефіцієнт затухання?
5. У яких випадках реальна ланка переходить у аперіодичну 2-го порядку?

## Практичне заняття 7

Тема: Структурні перетворення систем автоматичного керування

Мета: Отримання практичних навичок визначення передавальних характеристик і перетворення структурних схем систем керування.

### Теоретичні відомості

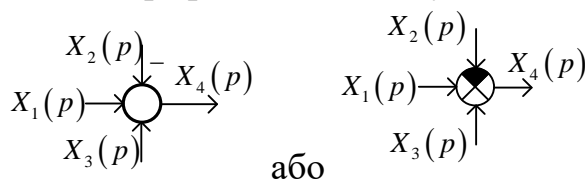
Структурні перетворення. Математичному опису ( математичної моделі ) системи керування відповідає структурна схема, що відображає ті чи інші процеси в системах. Ці процеси описуються як функції вектора координат стану системи  $x$  і впливів  $f$  і  $g$  . Таким чином , структурна схема може розглядатися як графічне представлення математичної моделі , що визначає проходження та перетворення сигналів керування . Залежно від використовуваної моделі можна розглядати тимчасове, операторний, частотне і інші уявлення структурної схеми .

Структурні схеми для реальних систем керування мають складний і заплутаний вигляд. З метою спрощення структурної схеми або приведення її до більш зручного для аналізу увазі проводиться розбиття системи керування на типові ланки спрямованої дії та отримання їх передавальних функцій . Потім за певними правилами складається структурна схема всієї системи. Тому для визначення передавальної функції , а потім і диференціального рівняння довільної системи керування необхідно знати :

- Правила визначення передавальної функції типових з'єднань ланок ;
- Правила визначення передавальної функції між довільними вузлами структурної схеми;
- Правила перенесення сигналів між ланками структурної схеми .

На основі поняття передавальних функцій в теорії автоматичного керування побудований апарат структурних перетворень , що дозволяє знаходити ПФ замкнених систем , заданих структурними схемами . Будь структурна схема включає послідовно і паралельно з'єднані елементи , а також елементи , з'єднані зворотним зв'язком .

Оскільки структурна схема є відображення математичної моделі системи керування , то перелічені правила повинні бути відображенням відповідних математичних операцій , з яких базовими є алгебраїчні операції множення і додавання . Операція множення є математичною моделлю послідовного з'єднання елементів і структурно ніяк не відображається. Операція алгебраїчного додавання є відображенням згідно - або зустрічно - паралельного з'єднання ланок і має структурний зображення у вигляді графічного символу



Обидва зображення є графічним представленням алгебраїчного додавання

$$X_4(p) = X_1(p) - X_2(p) + X_3(p)$$

Надалі ми будемо використовувати перший варіант відображення операції додавання.

Передавальні функції типових з'єднань ланок. В якості типових з'єднань розглядаються послідовне і паралельне з'єднання, а також з'єднання з зворотним зв'язком (зустрічно-паралельне).

Передавальна функція послідовного з'єднання ланок (рис.1)

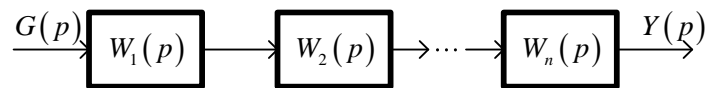


Рисунок 1 – Послідовне з'єднання ланок

дорівнює добутку передавальних функцій окремих ланок:

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W(p)_n$$

Передавальна функція паралельного з'єднання ланок (рис. 2)

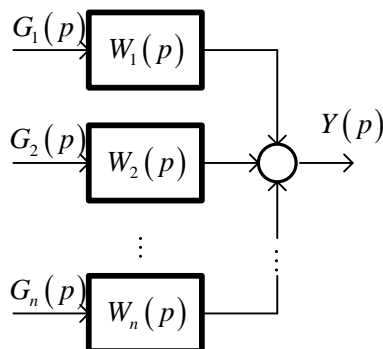


Рисунок 2 – Паралельне з'єднання ланок

дорівнює сумі передавальних функцій окремих ланок

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W(p)_n$$

Для з'єднання зі зворотним зв'язком (рис.3) передавальна функція визначається

як:

$$W(p) = \frac{W_n(p)}{1 \pm W_n(p)W_{oc}(p)},$$

де знак «+» відповідно від'ємного, а «-» – додатного зворотного зв'язку.

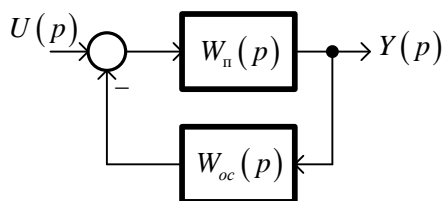


Рисунок 3 – З'єднання зі зворотним зв'язком

Слід зазначити, що всі лінійні одновимірні системи, тобто мають один вхід і один вихід, можуть бути зведені до вигляду, представленому на рис. 3.

Крім того, при аналізі систем автоматичного керування широко використовується передавальна функція розімкнутої системи, обумовлена для системи, представленої на рис. 3, як:

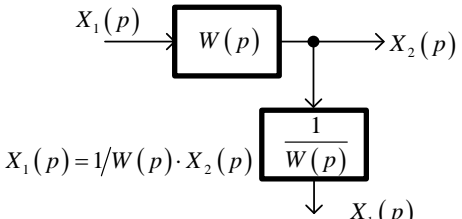
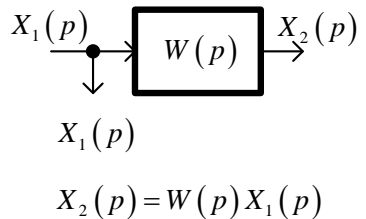
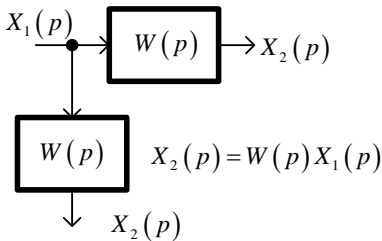
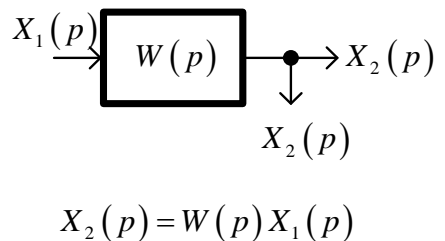
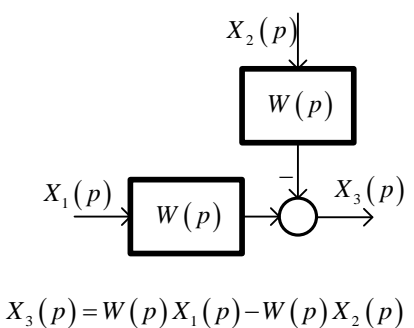
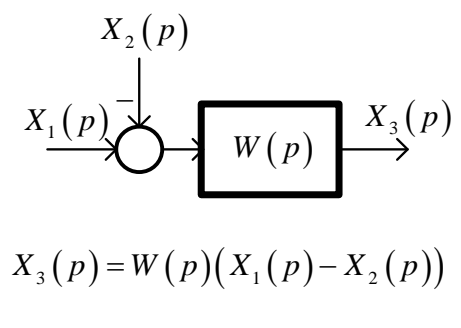
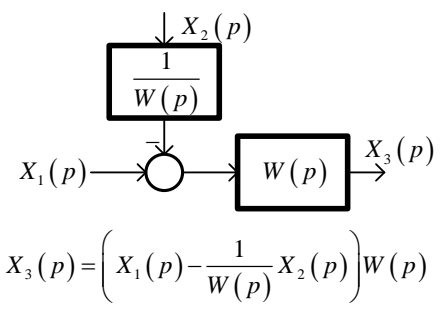
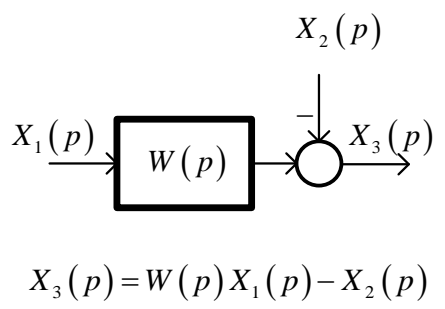
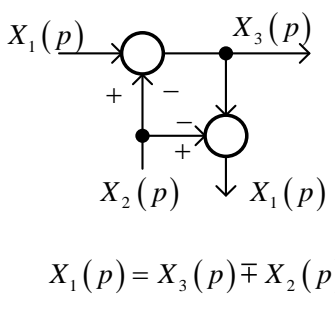
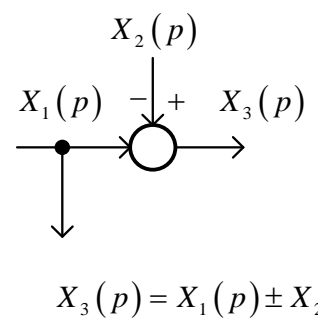
$$W_p(p) = W_n(p)W_{oc}(p)$$

При структурних перетвореннях систем часто використовуються різні правила угруповання елементів і перенесення сигналів. Якщо відома структурна схема і параметри системи, то можна, користуючись апаратом структурних перетворень, знайти передавальну функцію замкненої системи, а потім і її диференціальне рівняння.

Правила перенесення сигналів. У загальному випадку структурні схеми можуть мати різного роду перехрещуються зв'язку, тому для приведення структури до одноконтурної - зручною для дослідження, розроблені правила перенесення сигналів з однієї точки структури в іншу. Деякі з них наведені в таблиці 1:

Інші правила можна знайти в літературі.

Таблиця 1 – Правила переносу сигналів

Вид переноса	Еквівалент
 <p><math>X_1(p) = 1/W(p) \cdot X_2(p)</math></p>	 <p><math>X_2(p) = W(p)X_1(p)</math></p>
 <p><math>X_2(p) = W(p)X_1(p)</math></p>	 <p><math>X_2(p) = W(p)X_1(p)</math></p>
 <p><math>X_3(p) = W(p)X_1(p) - W(p)X_2(p)</math></p>	 <p><math>X_3(p) = W(p)(X_1(p) - X_2(p))</math></p>
 <p><math>X_3(p) = \left( X_1(p) - \frac{1}{W(p)} X_2(p) \right) W(p)</math></p>	 <p><math>X_3(p) = W(p)X_1(p) - X_2(p)</math></p>
 <p><math>X_1(p) = X_3(p) \mp X_2(p)</math></p>	 <p><math>X_3(p) = X_1(p) \pm X_2(p)</math></p>

Передавальна функція між довільними вузлами схеми. Правила перетворення структурних схем систем засновані на інтуїтивному уявленні розробника про процес отримання найпростішого представлення схеми. Перетворення складних

структурних схем часто проводиться методом проб і помилок, коли вибір послідовності перетворень проводиться довільно. Настільки ж довільним є і вибір внутрішнього набору ланок, для якого шукається спрощений еквівалент структури. Для отримання такого еквівалента необхідно вміти отримувати передавальну функцію між довільними точками структурної схеми. Отримання такої передавальної функції виробляється на основі правила Мейсона, визначального лінійну залежність між незалежною (вхідний) змінною  $g_i(t)$  і залежною (вихідний) змінною  $y_j(t)$  у вигляді

$$W_{ij} = \frac{\sum_k W_{ij(k)} \Delta_{ij(k)}}{\Delta},$$

де  $W_{ij(k)}$  – коефіцієнт передачі  $k$ -го шляху від змінної  $g_i(t)$  до змінної  $y_j(t)$  (безперервна послідовність гілок від  $g_i(t)$  до  $y_j(t)$ , причому жоден вузол в ній не зустрічається більше одного разу),  $\Delta$  – визначник графа,  $\Delta_{ij(k)}$  – додатковий множник для шляху з  $W_{ij(k)}$ , рівний визначнику, що стосуються  $g_i(t)$  и  $y_j(t)$  всіх контурів при видаленні  $k$ -го шляху.

Визначник  $\Delta$  знаходиться так

$$\Delta = 1 - \sum_{n=1}^N L_n + \sum_{m=1, q=1}^{M, Q} L_m L_q - \sum_{r=1, s=1, z=1}^{R, S, Z} L_r L_s L_z + \dots$$

де  $L_t$  є коефіцієнт передачі  $t$ -го контура. Інакше кажучи, правило обчислення  $\Delta$  через значення  $L_t$  формулюється так:

- $\Delta = 1 -$  (сума коефіцієнтів передачі всіх окремих контурів) +
- + (сума добутків всіх комбінацій з 2 - х непересічних контурів) –
- (сума добутків всіх комбінацій з 3 - х непересічних контурів)

В дещо спрощеному вигляді формула Мейсона часто використовується для визначення передавальної функції

$$W = \frac{\sum_k W_k \Delta_k}{\Delta}.$$

Проілюструємо застосування формули Мейсона деякими прикладами.

**Приклад 1.** Нехай система представлена сигнальним графом з двома паралельними шляхами.

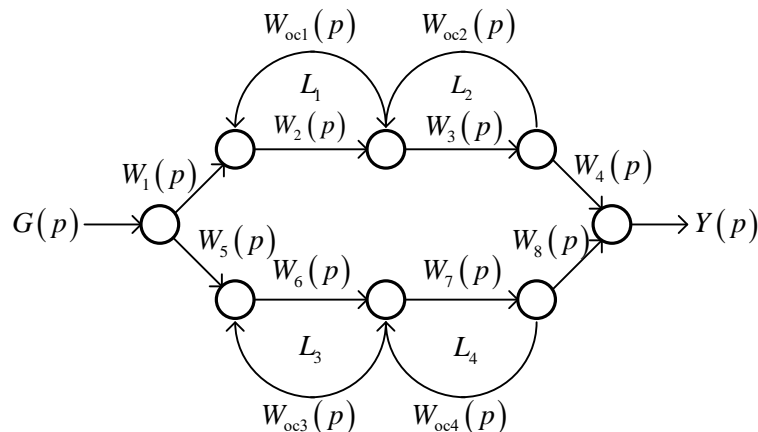


Рисунок 4 – Сигнальний граф системи

Визначити передатну функцію системи.

Розв'язок.

1. Від входу  $g_i(t)$  до виходу  $y_j(t)$  ведуть два шляхи:

–  $W_1W_2W_3W_4$ ;

–  $W_5W_6W_7W_8$ .

2. Граф містить чотири контури:

$$L_1 = W_2W_{oc1}, \quad L_2 = W_3W_{oc2}, \quad L_3 = W_6W_{oc3}, \quad L_4 = W_7W_{oc4}.$$

3. Контури  $L_1$  та  $L_2$  не дотикаються контурів  $L_3$  та  $L_4$ . Отже, визначник графа є  $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4)$ .

Додаткові множники визначника обчислюються так:

– для шляху 1 із  $\Delta$  видаляються контури, що стосуються шляху 1 ( $L_1 = L_2 = 0$  та  $\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4)$ );

– для шляху 2 із  $\Delta$  видаляються контури, що стосуються шляху 2 ( $L_3 = L_4 = 0$  та  $\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2)$ ).

4. У підсумку передавальна функція системи запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{P_1\Delta_1 - P_2\Delta_2}{\Delta} = \\ &= \frac{W_1W_2W_3W_4(1 - L_3 - L_4) + W_5W_6W_7W_8(1 - L_1 - L_2)1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) +}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4)} = \\ &= \frac{W_1W_2W_3W_4(1 - W_6W_{oc3} - W_7W_{oc4}) - W_5W_6W_7W_8(1 - W_2W_{oc1} - W_3W_{oc2})}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4)}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Для багатоконтурною системи керування, наведеній на рис. 5 побудувати передавальний функцію.

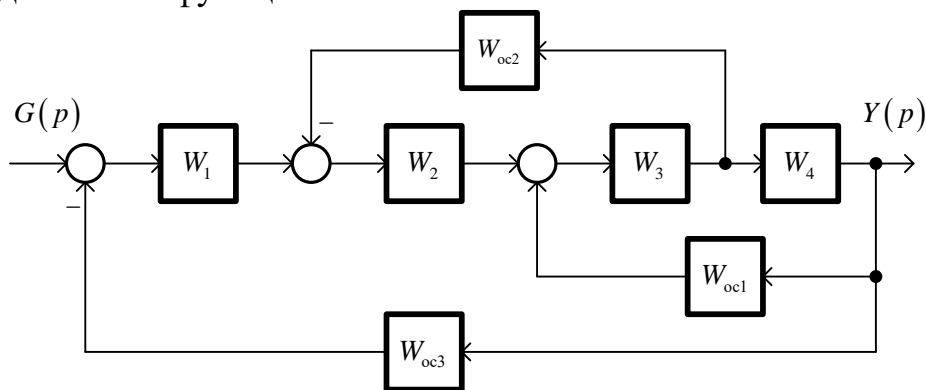


Рисунок 5 – Багатоконтурна система керування

Розв'язок.

1. Схема має один прямий шлях  $P_1 = W_1W_2W_3W_4$ .

2. Контурів в схемі три  $L_1 = -W_2W_3W_{oc2}$ ,  $L_2 = W_3W_4W_{oc1}$  и  $L_3 = -W_1W_2W_3W_4W_{oc3}$ .

3. Всі контури мають загальні вузли тому  $\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3$ . Крім того, шлях  $P_1$  стосується всіх контурів, тому  $\Delta_1 = 1$ .

4. Тоді передавальна функція системи запишеться у вигляді

$$W(p) = \frac{P_1\Delta_1}{1 - L_1 - L_2 - L_3}.$$

Приклад 3. Багатоконтурна система приведена на рис. 6.

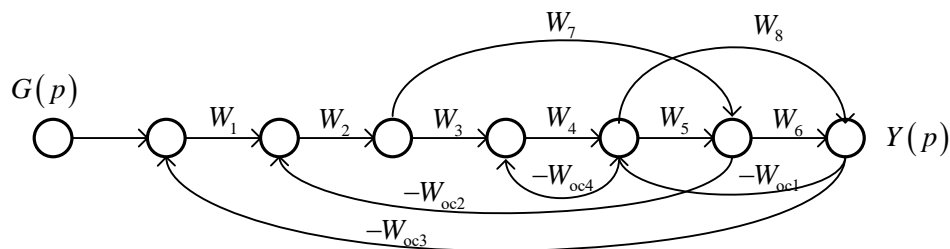


Рисунок 6 – Складна багатоконтурна система

Отримати для неї передавальну функцію.

Розв'язок. Система має три прямих шляхи:  $P_1 = W_1W_2W_3W_4W_5W_6$ ,  $P_2 = W_1W_2W_7W_6$  и  $P_3 = W_1W_2W_3W_4W_8$ .

Крім того, в системі є наступні контури:  $L_1 = -W_2W_3W_4W_5W_{oc2}$ ,  $L_2 = -W_3W_6W_{oc1}$ ,  $L_3 = -W_8W_{oc1}$ ,  $L_4 = -W_7W_{oc2}W_2$ ,  $L_5 = -W_4W_{oc4}$ ,  $L_6 = -W_1W_2W_3W_4W_5W_6W_{oc3}$ ,  $L_7 = -W_1W_2W_7W_6W_{oc3}$ ,  $L_8 = -W_1W_2W_3W_4W_8W_{oc3}$ .

Контур  $L_5$  не дотикається контурів  $L_4$  і  $L_7$ , контур  $L_3$  не дотикається контура  $L_4$ , всі інші контури є дотичними. Тому визначник графа дорівнює

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) - (L_5L_7 + L_5L_4 + L_3L_4).$$

додаткові множники:  $\Delta_1 = \Delta_3 = 1$ ,  $\Delta_2 = 1 - L_5 = 1 + W_4W_{oc4}$ .

Отже, передатна функція системи має вигляд:

$$W(p) = \frac{P_1 + P_2\Delta_2 + P_3}{\Delta}.$$

Зауваження :

1 ) Структурні перетворення можна робити тільки в тому випадку , якщо аналіз динамічної системи виробляється при нульових початкових умовах. В іншому випадку структурні перетворення призводять до втрати початкових умов і похибок при подальшому аналізі .

2 ) Структурні перетворення позбавлені фізичного сенсу (вони відображають одну і ту ж систему).

3 ) Еквівалентні перетворення не завжди приводять структурну схему до простого вигляду, тобто при перетворенні складної схеми може вийти варіант, коли подальше її перетворення за допомогою еквівалентних перетворень не можливо, а отримана схема ще є досить складною. Тому необхідно повернутися до початкового варіанту схеми і почати перетворення з іншої ділянки.

## 2. Робота в аудиторії

### 2.1. Аналіз прикладів

Завдання 1. Знайти передавальну функцію  $W_{gy}(p)$  з використанням правил перетворення структурних схем (без застосування формули Мейсона) для системи, структурна схема якої наведена на рис. 7.

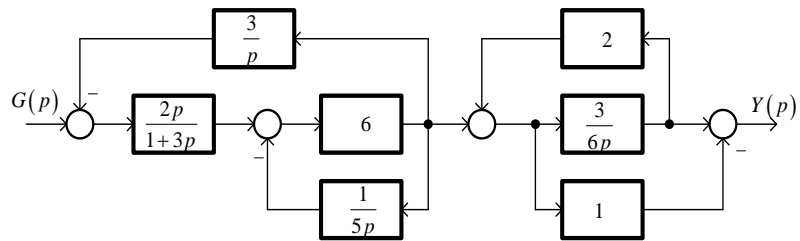
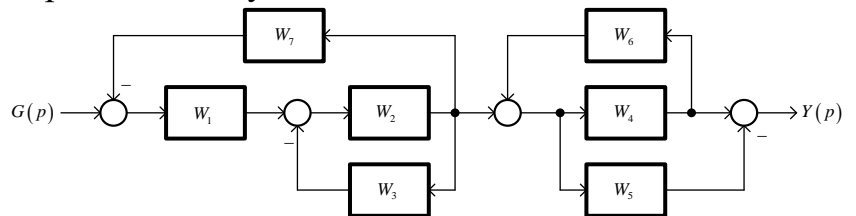
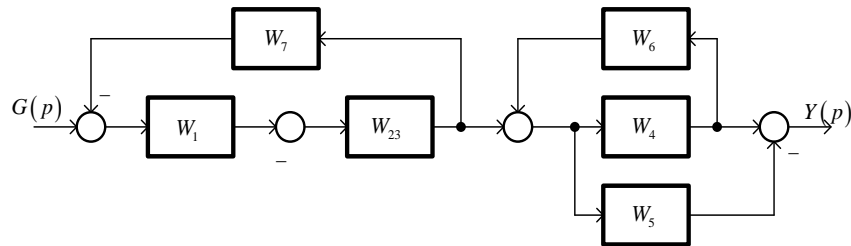


Рисунок 7 – Структурна схема системи

Розв'язок. Для спрощення перетворень заміномо передавальні функції ланок на  $W_i$ , тоді структурну схему можна перемалювати у вигляді:



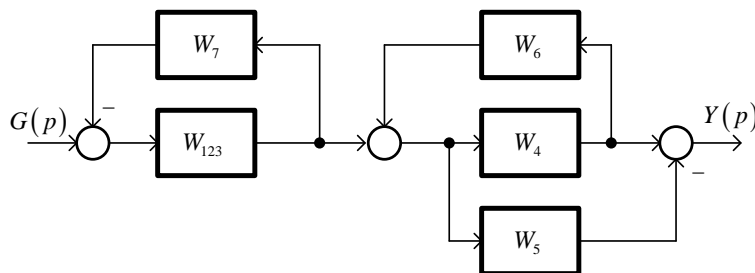
1). Ланка  $W_2$  охоплено негативним зворотним зв'язком з ланкою  $W_3$  в ланцюзі зворотного зв'язку. Проводячи перетворення підструктури, що включає ці ланки, отримаємо:



Еквівалентна передатна функція цього з'єднання дорівнює:

$$W_{23} = \frac{W_2}{1 + W_2 \cdot W_3}$$

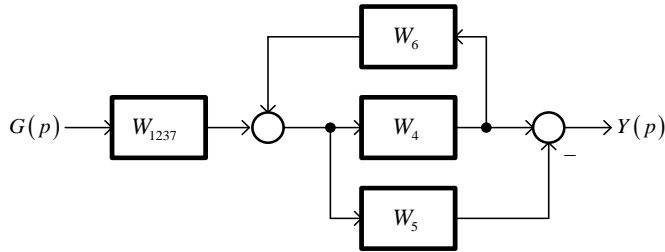
2) Ланки  $W_1$  і  $W_{23}$  з'єднані послідовно, отже, маємо:



Еквівалентна передатна функція цього з'єднання дорівнює:

$$W_{123} = W_1 \cdot W_{23} = \frac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_2 \cdot W_3}$$

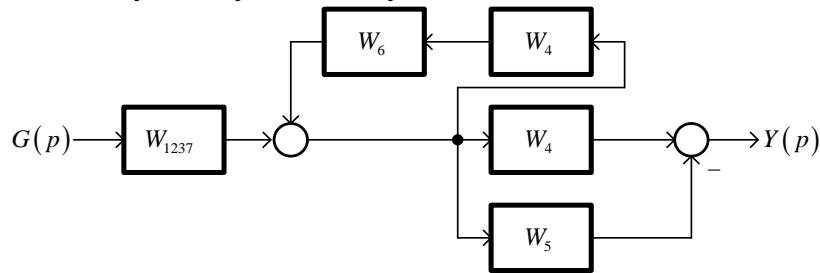
3). Ланка  $W_{123}$  охоплено негативним зворотним зв'язком з ланкою  $W_7$  в ланцюзі зворотного зв'язку, тоді маємо:



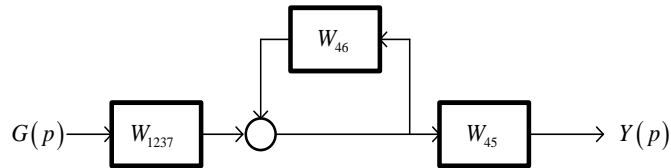
Еквівалентна передатна функція цього з'єднання дорівнює:

$$W_{1237} = \frac{W_{123}}{1 + W_{123} \cdot W_7} = \frac{\frac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_2 \cdot W_3}}{1 + \frac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_2 \cdot W_3} \cdot W_7} = \frac{W_1 \cdot W_2}{(1 + W_2 \cdot W_3 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_7)}$$

4). Виконаємо перенесення точки розгалуження через ланку  $W_4$  назад за схемою, як показано на наступному малюнку:



5) Тепер в прямому шляху ланка  $W_4$  включено паралельно з ланкою  $W_5$  через сууючий елемент, а в зворотному шляху - послідовно з ланкою  $W_6$ :



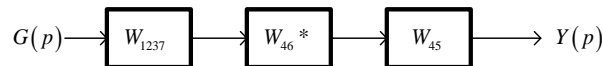
Еквівалентна передатна функція першого з'єднання дорівнює:

$$W_{45} = W_4 - W_5,$$

а другого

$$W_{46} = W_4 \cdot W_6.$$

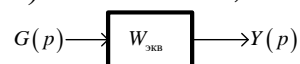
6) Ланка  $W_{46}$  стоїть в ланцюзі позитивного зворотного зв'язку для ланки з одиничною функцією передачі, тоді маємо:



Еквівалентна передатна функція цього з'єднання дорівнює:

$$W_{46}^* = \frac{1}{1 - 1 \cdot W_{46}} = \frac{1}{1 - 1 \cdot W_4 \cdot W_6}$$

8). Ланки  $W_{1237}$ ,  $W_{46}^*$  и  $W_{45}$  включені послідовно, отже, маємо:



Еквівалентна передатна функція цього з'єднання дорівнює:

$$W_{\text{экв}} = W_{1237} \cdot W_{46}^* \cdot W_{45} = \frac{W_1 \cdot W_2}{(1 + W_2 \cdot W_3 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_7)} \cdot \frac{(W_4 - W_5)}{(1 - 1 \cdot W_4 \cdot W_6)} = \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot W_4 - W_1 \cdot W_2 \cdot W_5}{1 + W_2 \cdot W_3 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_7 - W_4 \cdot W_6 - W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 \cdot W_6 - W_1 \cdot W_2 \cdot W_4 \cdot W_7 \cdot W_6}$$

Підставивши вихідні дані, отримаємо:

$$W_{gy}(p) = \frac{-60p^4 - 150p^3 + 90p^2}{5p^4 + 211p^3 + 405p^2 - 567p - 54}$$

$$W_{gy}(p) = \frac{-60p^4 - 150p^3 + 90p^2}{5p^4 + 211p^3 + 405p^2 - 567p - 54}$$

Відповідь:

**Завдання 2.** Система задана структурною схемою (рис.8). Потрібно визначити її передавальні функції.

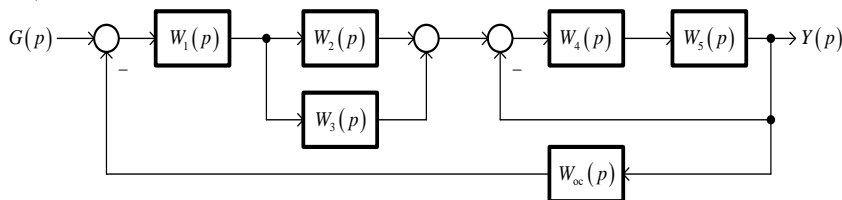


Рисунок 8 – Структурна схема системи

**Розв'язок.** Отримання передавальних функцій системи, заданої своєї структурною схемою, так зване "згортання схеми", завжди починається з самого внутрішнього контуру. У заданій структурній схемі два внутрішніх контура. Визначимо, відповідно до правил про з'єднаннях динамічних ланок, їх передавальні функції. Ланки  $W_2(p)$  та  $W_3(p)$  з'єднані паралельно і передавальна функція з'єднання

$$W_{23}(p) = W_2(p) + W_3(p).$$

Ланки  $W_1(p)$  та  $W_{23}(p)$  з'єднані послідовно і тому

$$W_{123}(p) = W_1(p)W_{23}(p).$$

Ланки  $W_4(p)$  та  $W_5(p)$  з'єднані послідовно і охоплені негативним одиничної зворотним зв'язком.

$$W_{45}(p) = \frac{W_4(p)W_5(p)}{1 + W_4(p)W_5(p)}$$

Для передавальної функції прямої ланцюга отримаємо

$$W_n(p) = W_{123}(p)W_{45}(p).$$

У результаті перетворень структурна схема системи прийме вид, показаний на рис. 9.

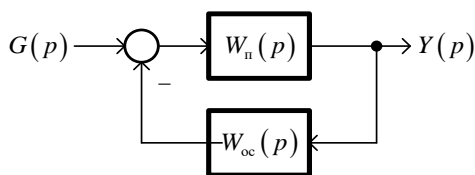


Рисунок 9 – Перетворена структурна схема

Для передавальних функцій замкнутої системи отримаємо

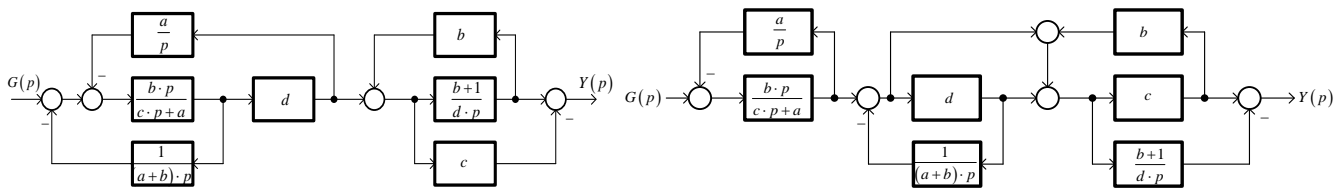
$$\Phi(p) = \frac{H(p)}{G(p)} = \frac{W_n(p)}{1 + W(p)},$$

$$\Phi_s(p) = \frac{\Delta(p)}{G(p)} = \frac{1}{1 + W(p)},$$

$$W(p) = W_n(p)W_{oc}(p).$$

### 3. Завдання для виконання

Знайти передавальну функцію  $W_{gy}(p)$  з використанням правил перетворення структурних схем і з застосуванням формули Мейсона і порівняти результати.



А. Для парних варіантів

Б. Для непарних варіантів

№ варіанта	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>
1	2	5	-4	-2
2	-5	6	2	4
3	1	1	6	5
4	4	4	8	1
5	6	7	9	6
6	-7	3	-3	9
7	2	8	4	-8
8	3	4	5	7
9	7	2	6	4
10	5	6	2	3
11	1	5	-4	6
12	3	4	7	1
13	8	2	2	2
14	4	-8	8	5
15	3	2	4	7
16	5	3	5	3
17	2	4	3	4
18	-6	6	2	8
19	1	-7	-5	5
20	6	5	1	6
21	7	3	4	2
22	3	4	5	4
23	2	5	8	5
24	4	2	3	8
25	5	-6	4	1
26	3	4	-3	3
27	4	-3	-5	5
28	5	-5	-8	9
29	6	-8	7	4
30	7	2	-3	5

### Контрольні питання

1. Які ланки називаються немінимально-фазовими? Наведіть їх передавальні функції.
2. Що таке структурна схема? Як позначаються її основні елементи?

3. Як визначається передавальна функція послідовно з'єднаних ланок? Паралельно з'єднаних ланок? Як визначається передавальна функція ланки, охопленої зворотним зв'язком?

4. Як обчислюється передавальна функція замкнутої одноконтурної системи?

5. Як обчислюється передавальна функція багатоконтурної системи?

## Практичне заняття 8

**Тема:** Стійкість систем керування. Алгебраїчні критерії стійкості

**Мета:** Отримання практичних навичок оцінки стійкості систем керування з використанням алгебраїчних критеріїв

### Теоретичні відомості

#### Математичні аспекти поняття стійкості

**Загальні положення.** У практичних завданнях, що зводяться до інтегрування диференціальних рівнянь, важливим є дослідження впливу на Розв'язок рівняння:

- Початкових умов;
- Зовнішніх (керуючих і збурюючих) впливів.

Вихідні поняття, що відносяться до цих завдань, зводяться до наступного.

*Початкові умови* є зазвичай результатом вимірювань і тому містять деяку похибку. Тому виникає питання про вплив малих змін початкових умов на шукане Розв'язок диференціального рівняння. Якщо малі зміни початкових умов здатні сильно змінити розв'язок, то диференціальне рівняння при неточно виміряних початкових значеннях не буде навіть наближено описувати досліджуване явище, тобто не матиме практичного значення. Отже, практично важливим є питання про знаходження умов, при яких мала зміна початкових умов викличе настільки ж мала зміна Розв'язок диференціального рівняння, тобто розв'язок диференціального рівняння мало залежить від значень початкових умов.

Нехай для диференціального рівняння першого порядку

$$x'(t) = f(t, x) \quad (1)$$

існує Розв'язок

$$x = \varphi(t),$$

яке визначається початковою умовою  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ , і розв'язок  $x = \psi(t)$ , відповідне зміненим початковій умові  $\psi(t_0) = x_0$ . Передбачається також, що розв'язок  $\varphi(t)$  та  $\psi(t)$  визначені для всіх  $t \geq t_0$ .

Розв'язок  $\varphi(t)$  стійке в розумінні Ляпунова, якщо з того, що для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta(\varepsilon) > 0$  таке, що з нерівності

$$|\psi(t) - \varphi(t)| < \delta(\varepsilon),$$

впливає, що

$$|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Якщо розв'язок  $\varphi(t)$  стійке і існує  $\delta$  таке, що з нерівності  $|\psi(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$  впливає, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\psi(t) - \varphi(t)) = 0,$$

то Розв'язок називається *асимптотично стійким*.

Аналогічно визначаються поняття стійкості і асимптотичної стійкості для систем диференціальних рівнянь першого порядку.

Практичне значення другого завдання полягає в тому, щоб при спрощення правій частині диференціального рівняння, тобто  $f(t, x)$ , Вибрати дійсно найбільш істотні фактори, що найбільший вплив на досліджуване явище. Тоді простота розв'язок буде збігатися з його адекватністю природі досліджуваного явища.

Дослідження на стійкість довільного розв'язок  $x = \varphi(t)$  диференційного рівняння (1) шляхом заміни змінних виду  $y = x - \varphi(t)$  може бути зведене до дослідження на стійкість нульового ( тривіального ) Розв'язок  $y \equiv 0$ . Надалі завдання дослідження на стійкість вирішується саме для цього Розв'язок.

**Стійкість рішень диференціальних рівнянь.** Загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку з безперервними коефіцієнтами

$$x^{(n)} + \varphi_1(t)x^{(n-1)} + \dots + \varphi_n(t)x = 0$$

має вигляд

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t),$$

де  $c_i$  – довільні постійні, а  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  – лінійно незалежні приватні Розв'язок.

Ознакою лінійної незалежності часткових рішень є нерівність нулю *визначника Вронського*:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Знаходження часткових рішень однорідних і неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь є зазвичай складним завданням. Проте, існують види диференціальних рівнянь, для яких вона вирішується порівняно легко. До їх числа відносяться рівняння з постійними коефіцієнтами, тобто рівняння виду

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x = 0, \quad (2)$$

для яких приватні розв'язок можна шукати у вигляді  $x = e^{kt}$ . Диференціюючи це розв'язок, підставляючи в (2) і скорочуючи все на  $e^{kt}$ , отримаємо так зване характеристичне рівняння

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 = 0.$$

Якщо всі корені  $k_1, k_2, \dots, k_n$  різні, то всі приватні розв'язок  $e^{k_1 t}, e^{k_2 t}, \dots, e^{k_n t}$  лінійно незалежні, і, отже, загальним розв'язком є

$$x = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + \dots + c_n e^{k_n t}.$$

**Приклад 1.** Знайти розв'язок рівняння

$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

Розв'язок. Корінням характеристичного рівняння

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

є  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 2$ . Отже, спільний розв'язок має вид

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Якщо серед коренів є кратні, то корені кратності  $r$  відповідає  $r$  рішень виду  $e^{k_i t}, t e^{k_i t}, \dots, t^{r-1} e^{k_i t}$ . При цьому загальний розв'язок набуває вигляду

$$x(t) = \sum_{i=1}^m P_i(t) e^{k_i t}, \quad (3)$$

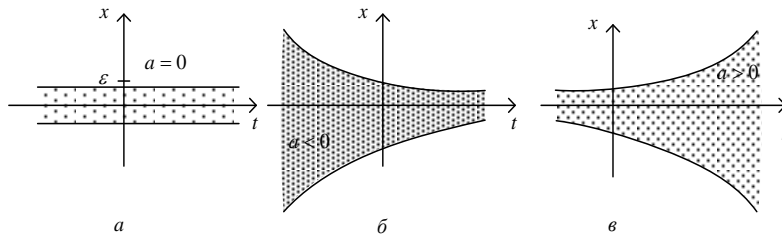
де  $m$  - число різних коренів характеристичного рівняння, а  $P_i(t)$  - многочлен з довільними коефіцієнтами ступеня на одиницю менше кратності кореня  $k_i$  (для простого кореня кратність  $r=1$  та  $P_i(t) = c_i$ ).

**Приклад 2.** Знайти розв'язок рівняння









**Рис. 1. Сімейства інтегральних кривих-рішень системи диференціальних рівнянь (9)**

Розв'язок можна розглядати як *закон руху* в  $n+1$  вимірному просторі координат  $t, x_1, \dots, x_n$ . Набір конкретних законів зміни змінних визначає траєкторію руху, а набір конкретних значень цих змінних - точку спокою системи.

Замість використання в якості вихідного розв'язку тривіального розв'язку  $\varphi_i(t) \equiv 0$  і відповідного йому визначення стійкості часто використовують таке еквівалентне визначення: точка спокою  $x_i \equiv 0$  називається стійкою, якщо для кожного  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta(\varepsilon) > 0$ , що з нерівності  $\sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta^2(\varepsilon)$  випливає нерівність  $\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2$  (тобто якщо початкова точка знаходиться всередині  $n$ -мірного кулі радіуса  $\delta$  з центром на початку координат, то при  $t \geq t_0$  траєкторія не вийде за межі кулі радіуса  $\varepsilon$  з тим же центром).

**Стійкість лінійних систем з постійними коефіцієнтами.** Умовою стійкості рішень лінійного диференціального рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами відповідно до (10) є умова  $a < 0$  або, що те ж саме, негативність кореня характеристичного рівняння  $k - a = 0$ .

Для оцінки стійкості системи двох рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (11)$$

з розв'язком

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \quad y = \alpha_2 e^{kt}$$

поступають таким чином. Підставляючи шуканий розв'язок у вихідну систему і скорочуючи на  $e^{kt}$ , отримуємо для визначення  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  систему рівнянь

$$(a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0,$$

$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 = 0,$$

для нетривіальності розв'язок для якого її визначник має дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$$

Звідси визначаються значення  $k$ , тобто  $k_1$  та  $k_2$ .

Якщо  $k_1 \neq k_2$ , то визначаються відповідні їм дві пари значень  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ , тобто  $(\alpha_{11}, \alpha_{21})$  и  $(\alpha_{12}, \alpha_{22})$  і отримуємо загальне розв'язок системи (11) у вигляді

$$x = c_1 \alpha_{11} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_{12} e^{k_2 t}, \quad (11, a)$$

$$y = c_1 \alpha_{21} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_{22} e^{k_2 t}. \quad (11, б)$$

Це ж розв'язок можна записати і в дійсній формі

$$x = e^{pt} (c_1 \cos qt + c_2 \sin qt),$$

$$x = e^{pt} (\tilde{c}_1 \cos qt + \tilde{c}_2 \sin qt),$$

де  $\tilde{c}_1$  та  $\tilde{c}_2$  - деякі лінійні комбінації довільних постійних  $c_1$  та  $c_2$ .

Розглянемо можливі види рішень системи залежно від поєднання значень коренів характеристичного рівняння. Можливі такі випадки:

1.  $k_1 < 0, k_2 < 0, k_1 \neq k_2$ ,
2.  $k_1 > 0, k_2 > 0, k_1 \neq k_2$ ,
3.  $k_1 > 0, k_2 < 0$ ,
4.  $k_{1,2} = \pm jq$ .

У *першому* випадку точка спокою  $x \equiv 0, y \equiv 0$  асимптотично стійка в цілому, так як при будь-яких значеннях  $c_1$  та  $c_2$  всі Розв'язок при  $t \rightarrow \infty$  прагнуть до нуля.

Розглянемо поведінку траєкторій з цією зміною  $t$ . З ростом  $t$  точки будь-якої траєкторії наближаються до точки спокою. Дві траєкторії, що відповідають значенням довільних постійних  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  та  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$  - прямі лінії (які не залежать від параметра  $t$ )

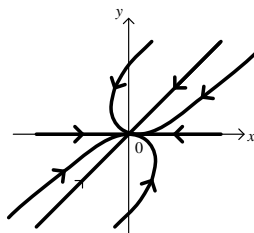
$$\alpha_{22}x - \alpha_{12}y = 0$$

та

$$\alpha_{21}x - \alpha_{11}y = 0,$$

при цьому із зростанням  $t$  точка  $(x, y)$  прагне до початку координат.

Схематичне розташування траєкторій в околі точки спокою, відповідно до цієї нагоди, показано на рис.2.



**Рис. 2. Розташування траєкторій рішень системи диференціальних рівнянь (11)**

Точка спокою в цьому випадку називається *стійким вузлом*.

У *другому* випадку траєкторії не змінюються в порівнянні з попереднім випадком (він зводиться до попереднього заміною  $t$  на  $-t$ ), змінюється тільки напрямок руху. Точка спокою стає *нестійким вузлом*.

У *третьому* випадку з (11, а) і (11, б) випливає, що при  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  та  $t \rightarrow \pm\infty$  точка, що рухається по будь-якій траєкторії, віддаляється від початку координат, а при  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$  - наближається до початку координат, не досягаючи його (початку координат). Точка спокою такого типу називається *сідловою*, вона є нестійкою.

Якщо ж  $k_1 = k_2$ , то одне з рівнянь є наслідком іншого і тоді  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  визначаються лише з точністю до постійного множника.

У *четвертому* випадку всі розв'язок є періодичними функціями, а їх траєкторії - замкнутими кривими (у загальному випадку - еліпсами) і асимптотичного наближення до початку координат при  $t \rightarrow \infty$  немає.

## 1.2 . Алгебраїчні критерії стійкості

Стійкість являє собою здатність системи автоматичного регулювання

повертатися до вихідного стану після короткочасного зовнішнього впливу. Системи автоматичного керування, як правило, повинні бути стійкими.

Так само, як і у випадку лінійних ланок, необхідною і достатньою умовою стійкості лінійної системи автоматичного регулювання є відємність дійсних частин всіх коренів її характеристичного рівняння. Останнє може бути отримано з передавальної функції замкнутої системи, що зв'язує будь-які її вхід і вихід, шляхом прирівнювання нулю знаменника передавальної функції.

Спроби аналізу стійкості лінійних систем автоматичного регулювання шляхом прямого відшукування коренів характеристичного рівняння нашоухуються на практичні труднощі, пов'язані з відсутністю аналітичних виразів для коренів рівнянь ступеня вище четвертого; для рівнянь третього і четвертого порядків наявні вирази мало зручні. Однак немає необхідності знаходити значення коренів, оскільки для судження про стійкість системи потрібно знати лише, що всі вони розташовані лівіше уявної осі на площині комплексної змінної  $p$ . У теорії автоматичного керування користуються умовами, які дозволяють судити про розташування коренів в лівій півплощині без знаходження їх значень; ці умови називаються критеріями стійкості.

Існує кілька критеріїв стійкості. Всі вони математично еквівалентному, так як вирішують питання - чи лежать всі корені характеристичного рівняння в лівій півплощині чи ні. Практичне застосування того чи іншого критерію визначається характером завдання і засобами, якими володіє дослідник.

Існуючі критерії стійкості діляться на дві групи: алгебраїчні і частотні критерії.

**Критерій Рауса.** Цей критерій був розроблений англійським математиком Е. Раусом в 1877 р. Припустимо, що за допомогою використання правил перетворення структурних схем, знайдена передавальна функція замкнутої автоматичної системи у вигляді

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (12)$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (13)$$

Складемо таблицю, яка називається таблицею Рауса (табл. 1).

Таблиця 1

Таблиця Рауса

Коефіцієнт и $r_i$	Рядок $i$	Стовпчик			
		1	2	$i$	$n$
—	1	$C_{11} = a_n$	$C_{21} = a_{n-2}$	$C_{i1} = a_{n-i}$	$C_{n1} = a_1$
—	2	$C_{12} = a_{n-1}$	$C_{22} = a_{n-3}$	$C_{i2} = a_{n-i-1}$	$C_{n2} = a_0$
$r_3 = \frac{C_{11}}{C_{12}}$	3	$C_{13} =$ $= C_{21} - r_3 C_{22}$	$C_{23} =$ $= C_{31} - r_3 C_{32}$	$C_{i3} =$ $= C_{(i+1)1} - r_3 C_{(i+1)2}$	$C_{(n-1)3} =$ $= C_{n1} - r_3 C_{n2}$
$r_4 = \frac{C_{12}}{C_{13}}$	4	$C_{14} =$ $= C_{22} - r_4 C_{23}$	$C_{24} =$ $= C_{32} - r_4 C_{33}$	$C_{i4} =$ $= C_{(i+1)2} - r_4 C_{(i+1)3}$	$C_{(n-2)4} =$ $= C_{(n-1)2} - r_4 C_{(n-1)3}$
	⋮				

$r_i = \frac{C_{1(i-2)}}{C_{1(i-1)}}$	$i$	$C_{1i} =$ $= C_{2(i-2)} - r_i C_{2(i-1)}$	$C_{2i} =$ $= C_{3(i-2)} - r_i C_{3(i-1)}$	$C_{ii} =$ $= C_{(i+1)(i-2)} - r_i C_{(i+1)(i-1)}$	$C_{(n-i)i} =$ $= C_{(n-i)(n-2)} - r_i C_{(n-i)(n-1)}$
	$\vdots$				
$r_n = \frac{C_{1(n-2)}}{C_{1(n-1)}}$	$n$	$C_{1n} =$ $= C_{2(n-2)} - r_n C_{2(n-1)}$	$C_{2n} =$ $= C_{3(n-2)} - r_n C_{3(n-1)}$	$C_{(n-1)i} =$ $= C_{n(i-2)} - r_i C_{n(i-1)}$	$C_{(n-i)i} =$ $= C_{(n-i)(n-2)} - r_i C_{(n-i)(n-1)}$

Алгоритм складання таблиці Рауса очевидний. Сформулюємо критерій стійкості.

Для того щоб автоматична система була стійка, необхідно і достатньо, щоб для всіх коефіцієнтів  $r_i$  була виконана умова

$$r_i > 0, i = 3, 4, \dots, \quad (14)$$

або, що еквівалентно,

$$c_{1i} > 0, i = \overline{1, n+1}, (a_0 > 0). \quad (15)$$

Якщо хоча б один з коефіцієнтів ( 15 ) від'ємний, то система нестійка.

Звернення в нуль одного з цих коефіцієнтів свідчить про нестійкість системи або про те, що вона знаходиться на межі стійкості. Число негативних коефіцієнтів сіл дорівнює числу правих полюсів. Звернення проміжного коефіцієнта в нуль свідчить про появу пари чисто уявних коренів.

Для спрощення розрахунків елементи рядків можна ділити або множити на позитивну величину.

Якщо в процесі обчислень з'являється негативний коефіцієнт у таблиці Рауса, то це свідчить про нестійкість системи і подальші розрахунки проводити не слід.

Число змін знака коефіцієнтів  $r_i, i = 3, 4, \dots$  дорівнює числу коренів характеристичного рівняння ( 13 ), розташованих у правій півплощині комплексної площини.

Таблиця, що реалізує алгоритм Рауса, зручна для програмування на ЕОМ, тому за допомогою цього методу можна дослідити на стійкість системи високого порядку. Більш того, можна досліджувати вплив на стійкість системи окремих її параметрів.

**Критерій Гурвіца.** Цей критерій запропонований німецьким математиком Гурвіцем в 1895 р. Якщо відомо характеристичне рівняння системи ( 12 ), то легко записати матрицю Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (16)$$

**Приклад 1.** Якщо характеристичне рівняння має вигляд

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0,$$

то матриця Гурвіца запишеться так:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{pmatrix}.$$

При складанні матриці Гурвіца перший рядок заповнюється коефіцієнтами характеристичного рівняння з непарними індексами, а друга - з парними. Подальші пари рядків виходять зміщенням вправо першої пари на один, два і т.д. стовпців. Всі коефіцієнти з індексами, великими ступеня, замінюються нулями.

Визначник матриці Гурвіца (16) називається головним визначником Гурвіца. Він має вигляд

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (17)$$

З (16) отримуємо визначники Гурвіца нижчого порядку:

$$\Delta_1 = a_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad (18)$$

і т.д.

Критерій Гурвіца формулюється так:

*Для того щоб замкнута автоматична система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб при  $a_0 > 0$  всі визначники Гурвіца були додатні, тобто*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (19)$$

**Приклад 2.** Користуючись критерієм Гурвіца, отримуємо умови стійкості для систем, порядок характеристичних рівнянь яких не перевищує чотирьох.

Якщо характеристичне рівняння має перший порядок

$$A(p) = a_0 p + a_1 = 0,$$

то умови стійкості мають вигляд

$$a_0 > 0, a_1 > 0.$$

Для рівняння другого порядку

$$A(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

умовами стійкості є:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_1 a_2 > 0.$$

Для рівняння третього порядку

$$A(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

маємо

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Звідси випливають умови:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

І, нарешті, якщо є характеристичне рівняння четвертого порядку

$$A(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0,$$

то визначник Гурвіца запишеться так

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Необхідною і достатньою умовою стійкості є

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0.$$

Практично, оскільки  $a_n > 0$ , знаходять визначники Гурвіца від  $\Delta_1$  до  $\Delta_{n-1}$ . Наприклад, для останнього випадку маємо:

$$a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Система знаходиться на межі стійкості, якщо всі визначники Гурвіца нижчого порядку додатні, а головний визначник дорівнює нулю, тобто  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n = a_n, \Delta_{n-1} = 0$ . Якщо  $a_n = 0$ , а  $\Delta_{n-1} > 0$ , то один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю (система знаходиться на межі аперіодичної стійкості), якщо ж  $a_n \neq 0$ , а  $\Delta_{n-1} = 0$ , то система знаходиться на межі коливальної стійкості (два комплексно-сполучених кореня знаходяться на уявній осі).

З вищесказаного випливає, що необхідною і достатньою умовою стійкості системи, характеристичне рівняння якої має першу або другу ступінь, є додатність всіх коефіцієнтів цього рівняння.

**Приклад 3.** Характеристичне рівняння має вигляд:

$$B(p) = 0,0003p^4 + 0,0337p^3 + 0,43p^2 + 51,2p + 24,8 = 0$$

Всі коефіцієнти характеристичного рівняння позитивні. Знайдемо  $\Delta_3$ :

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 = 51,2(0,0337 \cdot 0,43 - 0,0003 \cdot 51,2) - 24,8 \cdot 0,0337^2 = \\ &= -51,2 \cdot 0,001137 - 24,8 \cdot 0,0337^2 < 0. \end{aligned}$$

Висновок: система нестійка

## Приклади виконання завдань

**Приклад 1.** Дослідити стійкість системи з характеристичним поліномом

$$A(p) = p^3 + 9p^2 + 26p + 24$$

за допомогою критерію Гурвіца.

Розв'язок. Для оцінки стійкості за критерієм Гурвіца необхідно з коефіцієнтів характеристичного рівняння скласти визначник за такими правилами:

- По головній діагоналі виписуються всі коефіцієнти характеристичного рівняння від  $a_1$  до  $a_n$  в порядку зростання індексів;
- Стівпці визначника заповнюються коефіцієнтами від головної діагоналі вниз по убутним, а вгору - по зростаючим індексам;
- Місця коефіцієнтів, індекси яких більше  $n$  або менше нуля заповнююч - ються нулями.

Для характеристичного полінома  $A(p) = a \cdot p^3 + b \cdot p^2 + c \cdot p + d$  складемо визначник Гурвіца в загальному вигляді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & d & 0 \\ a & c & 0 \\ 0 & b & d \end{vmatrix}$$

Для того, щоб всі корені характеристичного рівняння мали негативні реальні частини і система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб всі діагональні визначники визначника Гурвіца були строго більше нуля. Якщо хоча б один з визначників менше нуля, то система нестійка.

Таким чином, необхідно, щоб

$$\Delta_1 = b > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b & d & 0 \\ a & c & 0 \\ 0 & b & d \end{vmatrix} > 0$$

Оцінимо стійкість заданої системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 24 & 0 \\ 1 & 26 & 0 \\ 0 & 9 & 24 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 9 > 0,$$

$$\Delta_2 = 9 \cdot 26 - 1 \cdot 24 = 210 > 0,$$

$$\Delta_3 = 9 \cdot 26 \cdot 24 - 24 \cdot 1 \cdot 24 = 5040 > 0$$

Таким чином, всі діагональні визначники визначника Гурвіца, більше нуля, отже, система з характеристичним поліномом  $A(p) = p^3 + 9p^2 + 26p + 24$  стійка.

**Приклад 2.** Дослідити на стійкість систему з характеристичним поліномом

$$A(p) = p^3 + 4p^2 + 6p + 13$$

за допомогою критерію Рауса.

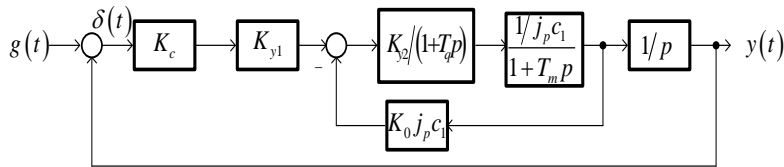
Розв'язок. Складемо таблицю Рауса для системи із заданим характеристичним поліномом:

	$a_3 = 1$	$a_1 = 6$
	$a_2 = 4$	$a_0 = 13$
$r_3 = \frac{a_3}{a_2} = 0.25$	$a_1 - r_3 a_0 =$ $= 6 - 0.25 \cdot 13 = 2.75$	<b>0</b>
$r_4 = \frac{a_2}{2.75} = 1.45$	$a_0 - 1.45 \cdot 0 = 13$	<b>0</b>

Для стійкості системи автоматичного регулювання необхідно і достатньо точно, щоб коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса були позитивні.

У нашому випадку ця умова виконується, отже, система стійка.

**Приклад 3.** Для системи, структурна схема якої представлена на рис. 3,



**Рис. 3. Структурна схема системи**

побудувати область стійкості у функції коефіцієнтів підсилення  $K_{y1}$  та  $K_0$ , якщо інші параметри дорівнюють:

$$K_c = 0,4 \text{ В/град}; K_{y2} = 5,2; c_1 = 0,014 \frac{\text{В}}{\text{град/с}}; j_p = 297; T_q = 0,06 \text{ с}; T_m = 0,1 \text{ с}$$

тобто визначити такі значення коефіцієнтів підсилення  $K_{y1}$  и  $K_0$ , при яких система знаходиться на межі стійкості.

Розв'язок. Передавальна функція розімкнутої системи має вигляд:

$$W_p(p) = \frac{K_c K_{y1} K_{y2} / c_1 j_p}{((1+T_q p)(1+T_m p) + K_{y1} K_0) p}$$

Знайдемо передавальну функцію замкненої системи, при  $W_2 = 1$ :

$$W(p) = \frac{D}{T_q T_m p^3 + (T_q + T_m) p + (1 + K_{y2} K_0) p + D}$$

де

$$D = \frac{K_c K_{y1} K_{y2}}{c_1 j_p}$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

$$a_0 = T_q T_m = 0,006; a_1 = T_q + T_m = 0,06 + 0,1 = 0,16;$$

$$a_2 = 1 + K_{y2} K_0 = 1 + 5,2 K_0; a_3 = \frac{K_c K_{y1} K_{y2}}{c_1 j_p} = \frac{4,0 \cdot 5,2}{0,014 \cdot 297} K_{y1} = 0,5 K_{y1}$$

Користуючись критерієм Гурвіца, маємо

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (20)$$

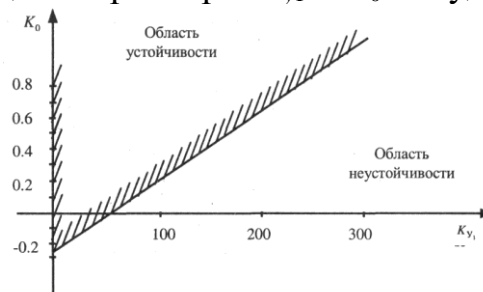
Умови (20) виконуються при  $K_0 > 0, K_{y1} > 0$ . Отримаємо:

$$K_0 > 0,0036 K_{y1} - 0,192$$

Межа стійкості визначається виразом

$$K_0 = 0,0036 K_{y1} - 0,192$$

Область стійкості в площині параметрів  $K_{y1}$  и  $K_0$  побудована на рис. 4.



**Рис 4. Область стійкості в площині параметрів  $K_{y1}$  та  $K_0$**

Таким чином, при виборі параметрів системи  $K_{y1}$  и  $K_0$  (а це необхідно, наприклад, для збільшення точності) необхідно вибирати такі їх значення, які б перебували в заштрихованій області рис. 4. В іншому випадку система буде

нестійкою.

## 2.2. Завдання для самостійної роботи в аудиторії

**Завдання 1.** Дослідити стійкість системи з передавальними функціями:

а)  $W(p) = \frac{3}{p^2 + 2p + 1}$ ;

б)  $W(p) = \frac{6}{p^2 - 1}$ ;

в)  $W(p) = \frac{2}{p^2 + 2p}$

за критерієм Рауса.

**Завдання 2.** Дослідити стійкість системи з передавальними функціями:

а)  $W(p) = \frac{3p}{p^2 + p - 1}$ ;

б)  $W(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$ ;

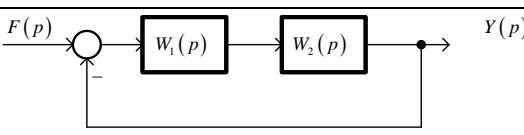
в)  $W(p) = \frac{8}{p^3 + 2p^2 - 1}$

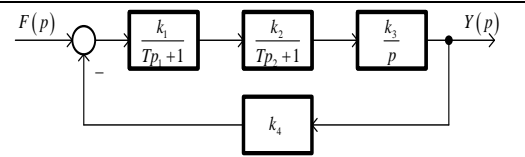
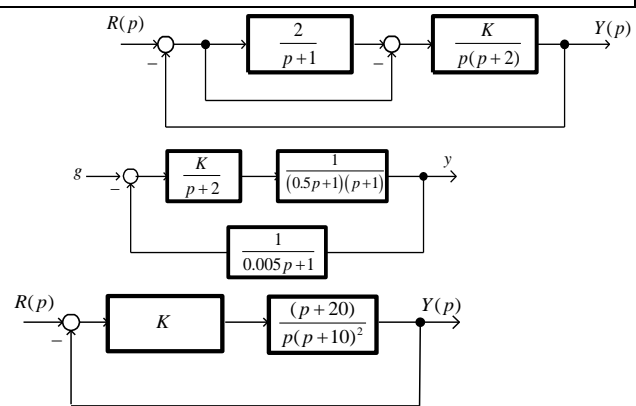
за критерієм Гурвіца.

### Завдання для виконання

Таблиця 2

#### Варіанти домашніх завдань

Варіант	Об'єкт або його опис	Зміст завдання
1 2 3 4	$W_p(p) = \frac{d}{p^3 + ap^2 + bp + c}$ $W(p) = \frac{10(2p+1)}{p(p+1)(p+3)}$ $W(p) = \frac{10}{p^3 + 2p^2 + 2p + 6}$ $W(p) = \frac{10(2p+2)(p+4)}{p(p+1)(p+3)}$	Дослідити за критеріями Рауса і Гурвіца стійкості-с системи з передавальної функцією заданно-го виду.
5 6 7 8 9 10	 $W_1(p) = \frac{1}{p+2}, W_2(p) = \frac{5}{p^2 + 3p + 1}$ $W_1(p) = \frac{1}{p+1}, W_2(p) = \frac{2}{0.5p+1}$ $W_1(p) = \frac{10}{p}, W_2(p) = \frac{5}{2p^2 + 3p + 1}$ $W_1(p) = \frac{20}{0.01p+1}, W_2(p) = \frac{3}{0.25p^2 + 0.5p + 1}$ $W_1(p) = \frac{1}{3p+1}, W_2(p) = \frac{2.5}{0.5p^2 + 0.2p + 1}$ $W_1(p) = \frac{15}{2p+1}, W_2(p) = \frac{2}{0.25p^2 + 0.2p + 1}$	Задана структура системи та передавальні характеристики ланок. Вважаючи коефіцієнт при p в передавальній функції $W_1(p)$ системи невідомим, визначити його граничне значення, при якому система втрачає стійкість.

11		<p>Задана структура і параметри системи.</p> <p>За допомогою критерію Гурвіца перевірити стійкість системи.</p>	
12			
13			
14			$k_1 = k_2 = 1, k_3 = 2, k_4 = 5, T_1 = 1c, T_2 = 0.5c$
15			$k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3, k_4 = 4, T_1 = 1c, T_2 = 0.5c$ $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2, k_4 = 8, T_1 = 0.1c, T_2 = 0.5c$ $k_1 = 2, k_2 = 5, k_3 = 1, k_4 = 7, T_1 = 0.8c, T_2 = 2.5c$ $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 1, k_4 = 7, T_1 = 1.5c, T_2 = 3.5c$
16	$p^3 + 3Kp^2 + (2 + K)p + 5 = 0$	<p>Визначте діапазон значень коефіцієнта <math>K</math> характеристичного рівняння, виходячи з умови стійкості замкненої системи.</p>	
17	$p^4 + p^3 + 3p^2 + 2p + K = 0$		
18	$p^5 + p^4 + 2p^3 + p^2 + p + K = 0$		
19	$p^3 + 3p^2 + (K + 1)p + 4 = 0$		
20		<p>Задана структура та передавальні функції системи.</p> <p>Визначте значення коефіцієнта <math>K</math>, при яких система буде стійка.</p>	
21			
22			
23	$p^6 + 9p^5 + 31.25p^4 + 61.25p^3 + 67.755p^2 + 14.75p + 15 = 0$	<p>Визнач характеристичне рівняння системи.</p> <p>1. Визначте, стійка чи система, скориставшись критеріями Рауса і Гурвіца.</p> <p>2. Знайдіть корені характеристичного рівняння.</p>	
24	$p^4 + 9p^3 + 45p^2 + 87p + 50 = 0$		
25	$p^4 + 9p^3 + 45p^2 + 87p + 50 = 0$		
26	$p^3 + 20p^2 + 5p + 100 = 0$		
27	$p^3 - 4p^2 + 6p + 100 = 0;$		
28	$p^4 - 6p^3 - p^2 - 17p - 6 = 0;$		
29	$p^2 + 6p + 3 = 0.$		
30	$p^2 + 5p + 2;$		
31	$p^3 + 4p^2 + 6p + 6;$		
32	$p^3 + 2p^2 - 4p + 20;$		
33	$p^4 + p^3 + 2p^2 + 10p + 8;$		
34			
35			
36			

	$p^4 + 9p^3 + 30p^2 + 42p + 20 = 0;$ $p^3 + 19p^2 + 110p + 200 = 0;$ $p^3 + 3p^2 + 4p + 2 = 0;$	
--	---	--

#### Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте необхідні та достатні умови стійкості лінійних САК.
2. Що можна сказати про стійкість лінійної САК, якщо один корінь характеристичного рівняння чисто уявний, а решта – ліві?
3. Що таке критерії стійкості й чим викликана необхідність їх використання?
4. На які групи поділяються всі критерії стійкості?
5. Сформулюйте необхідні та достатні умови стійкості для систем першого та другого порядку.
6. Сформулюйте критерій стійкості Гурвіца.
7. Як визначити граничний коефіцієнт підсилення за критерієм Гурвіца?
8. Сформулюйте критерій стійкості Ляпунова-Шипара.

## Практичне заняття 9

**Тема:** Стійкість систем керування. Частотні критерії стійкості

**Мета:** Отримання практичних навичок оцінки стійкості систем керування з використанням частотних критеріїв стійкості

### Теоретичні відомості

#### 1.1. Частотні критерії стійкості

Оцінка стійкості необхідна для будь-якої системи керування. Але навіть для завідомо стійкої системи необхідно знати ступінь її стійкості, тобто визначити її відносну стійкість.

Розглянемо визначення стійкості системи по її частотним характеристикам. Вони можуть бути розраховані по передавальній функції системи або зняті експериментально подачею на вхід системи синусоїдального сигналу і варіюванні його частоти в заданому діапазоні.

Для визначення стійкості замкнутої системи алгебраїчними методами необхідно досліджувати її характеристичне рівняння

$$A(p) = 1 + W_n(p)W_{oc}(p)$$

Для стійкості системи необхідно, щоб всі нулі цього рівняння знаходились в лівій частині комплексної площини.

Найквистом було запропоновано відображати праву частину  $p$ -площини на  $A(p)$ , тому необхідно навчитися відображати контури на комплексній площині за допомогою функції  $A(p)$ .

**Відображення контурів на  $p$ -площині.** Контур - деяка замкнута траєкторія на одній площині, що відображається на іншу площину співвідношенням  $A(p)$ . Оскільки  $p$  - комплексна змінна  $p = \sigma + j\omega$ , то  $A(p)$  - також комплексна функція, яку можна представити у вигляді  $A(p) = u + jv$  і відобразити на  $A(p)$ -площині в координатах  $u$  і  $v$ .

**Приклад 1.** Нехай  $A(p) = 2p + 1$  і на  $p$ -площині є контур, представлений на рис. 1.

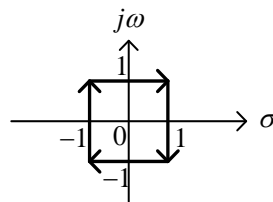


Рис.1. Контур на  $p$ -площині

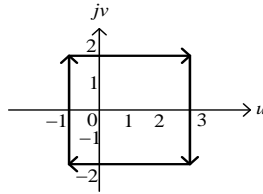
Звідси випливає, що

$$p = |\sigma| + |j\omega|$$

Тоді

$$A(p) = 2p + 1 = 2(\sigma + j\omega) + 1 = (2\sigma + 1) + 2j\omega$$

Таким чином,  $u = (2\sigma + 1)$ ,  $v = 2\omega$ , тобто на  $A(p)$ -площині отримаємо квадрат, зрушуваний на 1 вправо і має довжину сторони в два рази більшу боку вихідного контуру, як показано на рис.2.



**Рис.2. Контур на  $A(p)$ -площині**

Функція  $A(p) = 2p+1$  має нуль при  $p = -1/2$ , охоплюваний исходним контуром на  $p$ -площині. На  $A(p)$ -площині йому соответствует точка с координатами

$$A(p) = (2\sigma + 1) + 2j\omega \Big|_{p=-1/2} = 0,$$

охоплювана також контуром відображення.

Нехай тепер відображає функція  $A(p)$  має вигляд

$$A(p) = \frac{P}{p+2},$$

тоді відображення вихідного контуру на  $A(p)$ -площину набуває вигляду:

$$A(p) = \frac{\sigma + j\omega}{(\omega + 2) + j\omega} = \frac{(\sigma^2 + 2\sigma + \omega^2) + 2j\omega}{(\omega + 2)^2 + \omega^2}.$$

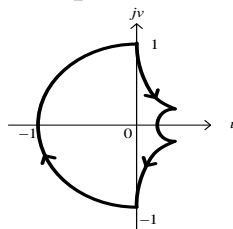
Відображення деяких базових точок вихідного контуру на  $A(p)$ -площину мають значення, наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Значення відображення базових точок на  $A(p)$ -площину

Подання оригіналу і його відображення	Базова точка			
	A	B	C	D
$p = \sigma + j\omega$	$1 + j1$	$1 - j1$	$-1 - j1$	$-1 + j1$
$A(p) = u + jv$	$\frac{4 + j2}{10}$	$\frac{4 - j2}{10}$	$-j1$	$j1$

Контур відображення вихідного квадрата на  $A(p)$ -площину наведено на рис. 3.



**Рис.3. Відображення квадратного контуру на  $A(p)$ -площину за допомогою функції  $A(p) = \frac{P}{p+2}$**

Функція  $A(p) = \frac{P}{p+2}$  має нуль при  $p = -2$ , про який не вихідним контуром на  $p$ -площині. На  $A(p)$ -площині йому відповідає точка з координатами

$$A(p) = \frac{(\sigma^2 + 2\sigma + \omega^2) + 2j\omega}{(\omega + 2)^2 + \omega^2} \Big|_{p=-2} = 0,$$

також охоплювана контуром відображення.

**Критерій Найквіста.** Для дослідження стійкості підсилювачів зі зворотним зв'язком Найквіст в 1932 р. запропонував критерій стійкості, заснований на аналізі частотних характеристик системи. Цей критерій був по-новому обгрунтований і застосований для систем автоматичного регулювання з дробово - раціональними передавальними функціями А. В. Михайловим в 1938 р. Для дослідження стійкості замкнутої системи регулювання, згідно з цим критерієм, необхідно знати амплітудно- фазову частотну характеристику розімкнутої системи, яку можна отримати як аналітично, так і експериментально. Остання обставина вигідно відрізняє розглянутий критерій стійкості від раніше викладених. Зауважимо також, що критерій Найквіста має ясний фізичний зміст. Критерій Найквіста заснований на теоремі Коші, застосовуваної до функції  $A(p)$  з кінцевим числом полюсів і нулів, тобто функції, яка може бути представлена у вигляді

$$A(p) = K \frac{\prod_{i=1}^l (p + z_i)}{\prod_{q=1}^o (p + p_q)}$$

Однак корінням характеристичного рівняння є нулі функції  $A(p)$  і саме вони визначають поведінку системи в часі (нулі функції  $A(p)$  на  $p$ -площині відображаються в початок координат  $A(p)$ -площині!). Охоплення вихідним контуром кореня на  $p$ -площині відповідає обхвату початку координат контуром відображення на  $A(p)$ -площині. На цьому заснований принцип аргументу (охоплення початку координат на основі теореми Коші): Якщо контур  $\Gamma_p$  на  $p$ -площині при русі по ньому за годинниковою стрілкою охоплює (не співпадає!)  $Z$  нулів і  $P$  полюсів функції  $A(p)$ , то відповідний контур  $\Gamma_A$  на  $A(p)$ -площині охоплює початок координат  $N = Z - P$  раз також за годинниковою стрілкою.

Так, у розглянутому вище прикладі число нулів дорівнює 1, а число полюсів дорівнює 0, тому кожен контур відображення на  $A(p)$ -площині охоплює початок координат рівно 1 раз.

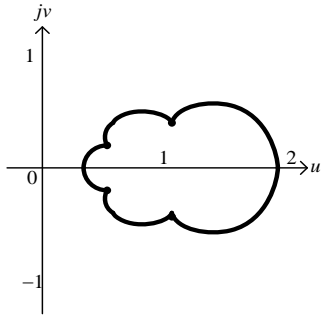
**Приклад 2.** для функції

$$A(p) = \frac{p}{p + 0.5}$$

відображення одиничного квадрата на  $p$ -площині описується як

$$A(p) = \frac{\sigma + j\omega}{(\sigma + 0.5) + j\omega} = \frac{(\sigma^2 + 0.5\sigma) + j(\omega^2 + 0.5\omega)}{(\sigma + 0.5)^2 + \omega^2}$$

При корені  $p = -0.5$ , охоплюваному одиничним контуром на  $p$ -площині, початок координат  $A(p)$ -площини не охоплюється контуром відображення, як показано на рис. 4, оскільки мінімальне значення полюса  $A(p)$  одно 0.5.



**Рис. 4.** Відображення квадратного контуру на  $A(p)$ -площину за допомогою функції  $A(p) = \frac{p}{p+0.5}$

**Критерій Михайлова.** В основі критерію Михайлова, сформульованого ним в 1938 р., лежить відомий в теорії функцій комплексного змінного принцип аргументу. Згідно з цим принципом прирощення аргументу функції  $f$  комплексного змінного  $p$  при зміні його по замкнутому контуру в позитивному напрямі (проти годинникової стрілки) становить  $2\pi(N - P)$ , де  $N$  - число нулів, а  $p$  - число полюсів функції  $f(p)$  всередині замкнутого контуру. Передбачається, що функція  $f(p)$  аналітична всередині цього контуру (окрім кінцевого числа полюсів) і не має нулів і полюсів на контурі.

Якщо застосувати принцип аргументу до характеристическому поліному  $A(p)$  замк - нutoй системи, то можна отримати критерій Михайлова.

Згідно з критерієм Михайлова для стійкості системи автоматичного регулювання необхідно і достатньо, щоб годограф характеристичного вектора  $A(j\omega)$ , починаючись при  $\omega = 0$  на дійсній осі, із зростанням  $\omega$  від 0 до  $\infty$  обходив послідовно в позитивному напрямі (проти годинникової стрілки)  $n$  квадрантів, де  $n$  - порядок характеристичного рівняння.

Характеристичний поліном замкнутої системи можна представити у вигляді суми  $K(p)$  і  $D(p)$ . Звідси випливає, що для отримання годографа  $A(j\omega)$  необхідно побудувати годографи  $K(j\omega)$  та  $D(j\omega)$  і скласти вектори  $K(j\omega)$  та  $D(j\omega)$  для кожного значення  $\omega$ . У разі, коли  $K(j\omega) = k$  ( $k$  - коефіцієнт посилення системи), побудова спрощується. Годограф  $A(j\omega)$  виходить простим зміщенням годографа  $D(j\omega)$  вправо вздовж дійсної осі на величину  $k$  (рис. 4).

Зауважимо, що при підвищенні порядку системи ( $n > 4 \div 5$ ) обсяг обчислень, пов'язаних із застосуванням критерію Михайлова, істотно зростає. При використанні ЕОМ перевагу віддають критерію Рауса.

Нехай передавальна функція розімкнутої системи регулювання  $W_p(p) = K(p)/D(p)$  утворюємо функцію

$$F(p) = 1 + W_p(p) = \frac{[D(p) + K(p)]}{D(p)} = \frac{A(p)}{D(p)}$$

Чисельник цієї функції являє собою характеристичний поліном замкнутої системи, знаменник - характеристичний поліном розімкнутої системи. Нехай ступінь  $D(p)$  дорівнює  $n$ , а ступінь  $K(p)$  дорівнює  $m < n$ . Ступінь характеристичного полінома замкнутої системи  $K(p) + D(p)$  також дорівнює  $n$ .

Розглянемо три випадки стану розімкнутої системи: стійка, нестійка і знаходиться на межі стійкості, причому в останньому випадку характеристичне

рівняння розімкнутої системи  $D(p) = 0$  має нульовий корінь кратності  $\nu$ , тобто

$$D(p) = p^\nu D_1(p).$$

Приведемо формулювання критерію Найквіста для цього випадку. Для стійкості замкнутої системи автоматичного регулювання необхідно і достатньо, щоб частотний годограф комплексного коефіцієнта передачі розімкнутої системи  $W_p(j\omega)$  при зміні  $\omega$  від 0 до  $\infty$  не охоплює точку  $(-1, j0)$ .

**II випадок** - система в розімкнутому стані нестійка. При розгляді багатоконтурних систем або одноконтурних систем, що містять нестійкі ланки, разомкнута система може виявитися нестійкою.

Нехай система в розімкнутому стані нестійка, при цьому характеристичне рівняння розімкнутої системи має  $l$  коренів у правій півплощині.

Для стійкості замкнутої системи автоматичного регулювання необхідно і достатньо, щоб частотний годограф комплексного коефіцієнта передачі розімкнутої системи  $W_p(j\omega)$  при зміні  $\omega$  від 0 до  $\infty$  охоплював  $l/2$  раз в позитивному напрямку точку  $(-1, j0)$ , де  $l$  - число коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи, що лежать в правій півплощині. Очевидно, що формулювання критерію Найквіста для першого випадку є окремим випадком ( $l = 0$ ) тільки що наведеної формулювання.

**III випадок** - система в розімкнутому стані знаходиться на межі стійкості.

Передавальна функція системи в розімкнутому стані

$$W_p(p) = K(p) / [p^\nu D_1(p)],$$

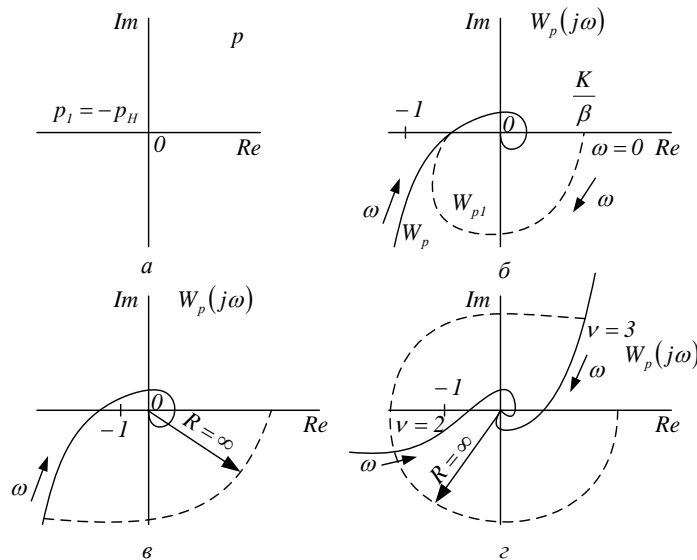
де  $\nu$  - число нульових коренів характеристичного рівняння системи в розімкнутому стані;  $K(p)$  і  $D_1(p)$  - поліноми від  $p$ , причому  $D_1(p)$  не має нулів у правій півплощині і на уявній осі.

Для стійкості замкнутої системи автоматичного регулювання, яка в розімкнутому стані знаходиться на межі стійкості, маючи нульові корені характеристичного рівняння, необхідно і достатньо, щоб частотний годограф комплексного коефіцієнта передачі розімкнутої системи  $W_p(j\omega)$ , доповнений на нескінченності, при зміні  $\omega$  від 0 до  $\infty$  не охоплює точку  $(-1, j0)$ .

Показані на рис. 5 годографи відповідають: на рис. 5 (б) - стійкій системі; на рис. 5 (в) - нестійкою системі; на рис. 5 (г) при  $\nu = 2$  - стійкої, а при  $\nu = 3$  - нестійкої системі.

Поняття «годограф, доповнений на нескінченності» означає, що після побудови годографа розімкнутої системи ми подумки доповнюємо його окружністю нескінченного радіуса, як показано на рис. 5 (в).

Поняття «охоплення точки  $(-1, j0)$ », що використовується в наведених вище формулюваннях критерію Найквіста, має деяку невизначеність. Дійсно, важко відразу сказати, охоплює або не охоплює цю точку частотний годограф  $W_p(j\omega)$ , зображений на рис. 5 (а). У сумнівних випадках можна вдаватися до допомоги формульних записів критерію Найквіста. Краще, однак, дати критерієм Найквіста інше формулювання, засноване на підрахунку числа переходів частотного годографа  $W_p(j\omega)$ , через негативну дійсну піввісь при зміні його уявної складової від  $-1$  до  $-\infty$ . Будемо вважати такий перехід позитивним, якщо при зростанні годограф переходить з верхньої півплощини в нижню, і негативним, якщо годограф переходить з нижньої півплощини у верхню (мал. 5).



**Рис. 5. Ілюстрація випадків критерію Найквіста для різних систем**

Загальна формулювання критерію Найквіста охоплює всі три розглянутих вище випадку.

Для стійкості замкнутої системи автоматичного регулювання необхідно і достатньо, щоб різниця між числами позитивних і негативних переходів частотного годографа комплексного коефіцієнта передачі розімкнутої системи  $W_p(j\omega)$  через негативну дійсну піввісь від  $-1$  до  $-\infty$  дорівнювала  $l/2$ , де  $l$  - число коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи, що лежать в правій півплощині. Для систем, що знаходяться в розімкнутому стані на межі стійкості з нульовими корінням характеристичного рівняння, число  $l$  вважається рівним нулю, а годограф  $W_p(j\omega)$  береться з доповненням у нескінченності.

Показаний раніше на рис. 5, а годограф  $W_p(j\omega)$  при  $l = 0$  відповідає стійкої замкненій системі; на рис. 5, б показаний годограф  $W_p(j\omega)$  нестійкою в розімкнутому стані системи, для якої  $l = 2$ . Годограф має два поло - тивних переходу і один негативний перехід, отже, різниця між числами переходів дорівнює одиниці. Згідно з наведеною вище формулюванні критерію стійкості розглянута система стійка в замкнутому стані.

### Приклад виконання завдань

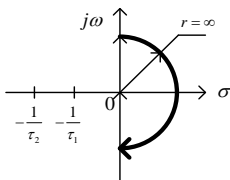
**Приклад 1.** Розглянемо одноконтурну систему, наведену на рис. 6 з передавальної функцією

$$\Phi(p) = \frac{K}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)} \quad (1)$$

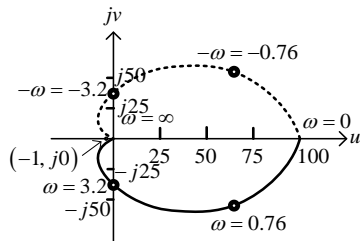
**Рис 6. Операторний уявлення одноконтурної системи**

Побудувати для неї контур на  $p$ -площині і відобразити його за допомогою  $\Phi(p)$ . Розв'язок. Контур на  $p$ -площині при  $\tau_1 = 1$ ,  $\tau_2 = 0.1$  та  $K = 100$ , і має вигляд,

показаний на рис. 7, а його відображення за допомогою функції (1) - на рис.8.



**Рис. 7. Контур на  $p$ -площині**



**Рис. 8. Відображення  $p$ -контур за допомогою функції  $\Phi(p) = \frac{K}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}$**

Побудова цього відображення при зазначених значеннях  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  та  $K$ , і виробляється шляхом визначення значень модуля й аргументу частотної характеристики  $\Phi(j\omega)$

$$\Phi(j\omega) = \frac{K}{(\tau_1 j\omega + 1)(\tau_2 j\omega + 1)} = \frac{K}{(1 - \tau_1 \tau_2 \omega^2) + (\tau_1 + \tau_2) j\omega}$$

Множачи чисельник і знаменник на величину, комплексно-спряжену знаменника, уявімо комплексний коефіцієнт передачі у вигляді

$$\Phi(j\omega) = K \left[ \frac{1 + \tau_1 \tau_2 \omega^2}{(1 + \tau_1 \tau_2 \omega^2)^2 + ((\tau_1 + \tau_2) \omega)^2} - j \frac{(\tau_1 + \tau_2) \omega}{(1 + \tau_1 \tau_2 \omega^2)^2 + ((\tau_1 + \tau_2) \omega)^2} \right]$$

Підставляючи в отримане вираз задані значення  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $K$ , і, отримаємо

$$\Phi(j\omega) = 100 \left( \frac{1 + 0.1\omega^2}{1 + 1.41\omega^2 + 0.01\omega^4} - j \frac{1.1\omega}{1 + 1.41\omega^2 + 0.01\omega^4} \right) \quad (2)$$

Результати обчислення  $\Phi(j\omega)$  при різних значеннях  $\omega$  зведені в таблицю

$\omega$	0	0.1	0.76	1	2	10	20	100	$\infty$
$\Phi(j\omega)$	100	96	79.6	70.1	50.2	6.8	2.24	0.1	0
$\varphi(\omega)$	0	5.7	41.5	50.7	74.7	129.3	150.5	173.7	180

Позитивна частина уявної осі відображається в суцільну криву, а негативні - в пунктирну. Півколо нескінченного радіуса на  $p$ -площині відображається в початок координат на  $\Phi(p)$ -площині.

Оскільки  $\Phi(p)$  не має полюсів у правій півплощині ( $\text{Re } p = 0$ ), то для стійкості системи необхідно виконання умови  $N = Z = 0$ , тобто контур на  $\Phi(p)$ -площині не повинен охоплювати точку -1. З виразу (2) і рис. 8 слід, що ні за яких значеннях  $K$  контур не охоплює точку -1 (вона відповідає значенню  $\omega = \infty$ , а  $\Phi(j\omega)|_{\omega=\infty} = 0$ ), тобто система стійка завжди.

**Приклад 2.** Нехай передавальна функція системи, наведеної на рис. 11, має вигляд

$$W_p(p) = \frac{K(p-2)}{(p+1)^2}$$

Частотна передатна функція в цьому випадку представляється як

$$\begin{aligned} W_p(j\omega) &= \frac{K(j\omega-2)}{(j\omega+1)^2} = \frac{2K(j\omega-2)}{(1-\omega^2)+2j\omega} = \\ &= \frac{2(\omega^2(K+2)-1)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2} + j \frac{\omega(K(1-\omega^2)+4)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}. \end{aligned}$$

Звідси при  $\omega \rightarrow +\infty$  отримуємо

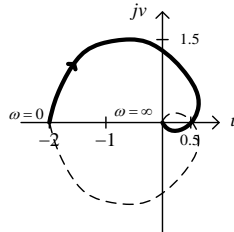
$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W_p(p) = \left( \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{K}{\omega} \right) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Точно так же при  $\omega \rightarrow +0$

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} W_p(p) = -2K,$$

а при  $\omega = \sqrt{5}$   $W_p(p) = K/2$ .

Годограф Найквіста для цього випадку наведено на рис. 16.



**Рис. 16. Годограф Найквіста**

**Приклад 3.** Дослідити стійкість системи з характеристичний поліном-мом

$$A(p) = p^3 + 2p^2 + 9p + 3$$

за критерієм Михайлова.

Розв'язок. Підставляємо  $p = j\omega$  і знаходимо реальну і уявну функції Михайлова:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 9j\omega + 3 = -j\omega^3 - 2\omega^2 + 9j\omega + 3 = \\ &= (3 - 2\omega^2) + j(9\omega - \omega^3), \end{aligned}$$

звідки отримуємо вирази для дійсної та уявної частин

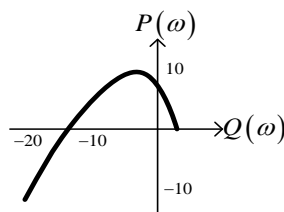
$$P(\omega) = 3 - 2\omega^2,$$

$$Q(\omega) = 9\omega - \omega^3.$$

Побудуємо годограф Михайлова. Для цього визначимо значення базових точок годографа

$\omega$	0	1	2	$\infty$
$P(\omega)$	3	1	-5	$-\infty$
$Q(\omega)$	0	8	10	$-\infty$

Годограф наведений на рис. 17.



## Рис. 17. Годограф Михайлова

Як видно годограф обходить три квадранта проти годинникової стрілки, починаючись на дійсній позитивній півосі, отже, система стійка.

**Приклад 4.** Дослідити стійкість системи з передавальною функцією

$$W(p) = \frac{4}{p^3 + 2p^2 + 9p + 3}$$

за критерієм Найквіста (характеристичний поліном узятий з попереднього завдання).

Розв'язок. Зробимо заміну  $p = j\omega$  і виділимо дійсну та уявну частини комплексного коефіцієнта передачі:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{4}{(3-2\omega^2) + j(9\omega - \omega^3)} = \frac{4 \cdot ((3-2\omega^2) - j(9\omega - \omega^3))}{((3-2\omega^2) + j(9\omega - \omega^3))((3-2\omega^2) - j(9\omega - \omega^3))} = \\ &= \frac{(12-8\omega^2) - j(36\omega - 4\omega^3)}{(3-2\omega^2)^2 + (9\omega - \omega^3)^2} = \frac{(12-8\omega^2)}{(3-2\omega^2)^2 + (9\omega - \omega^3)^2} - \frac{j(36\omega - 4\omega^3)}{(3-2\omega^2)^2 + (9\omega - \omega^3)^2}, \\ P(\omega) &= \frac{(12-8\omega^2)}{(3-2\omega^2)^2 + (9\omega - \omega^3)^2}, \\ Q(\omega) &= -\frac{(36\omega - 4\omega^3)}{(3-2\omega^2)^2 + (9\omega - \omega^3)^2}. \end{aligned}$$

Побудуємо частотний годограф (годограф Найквіста). Значення базових точок наведено нижче:

$$P(0) = \frac{4}{3}, \quad P(1) = 0.061, \quad P(10) = -9 \cdot 10^{-4}, \quad P(\infty) = 0,$$

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 0.49, \quad Q(10) = -4.2 \cdot 10^{-3}, \quad Q(\infty) = 0.$$

Побудований за цим точкам годограф наведено на рис 18. Так як розімкнена система стійка і частотний годограф не охоплює точку з координатами  $(-1, j0)$ , отже, замкнута система теж стійка.

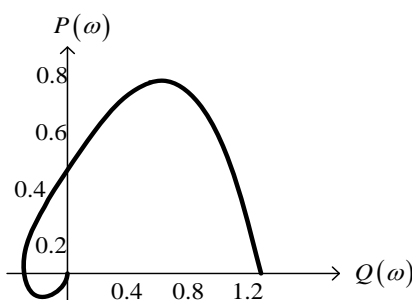


Рис. 18. Годограф системи

### Завдання для виконання

**Завдання 1.** Дослідити стійкість системи за критерієм Михайлова.

$$1. \quad W(p) = \frac{3}{p^2 + 2p + 1},$$

$$2. \quad W(p) = \frac{6}{p^2 - 1},$$

$$3. \quad W(p) = \frac{2}{p^2 + 2p}.$$

**Завдання 2.** Дослідити стійкість системи за критерієм Найквіста.

$$1. \quad W(p) = \frac{3p}{p^2 + p - 1},$$

$$2. \quad W(p) = \frac{1}{p^2 + 1},$$

$$3. \quad W(p) = \frac{8}{p^3 + 2p^2 - 1}.$$

**Завдання 3.**

1. Дослідити стійкість системи з передавальною функцією

$$W_p(p) = \frac{d}{p^3 + ap^2 + bp + c}$$

за критеріями Михайлова і Найквіста.

Примітка: Номер варіанта завдання збігається з номером студента у списку групи.

Таблиця 1 – Варіанти завдань

Варіант	Значення коефіцієнтів				Варіант	Значення коефіцієнтів			
	a	b	c	d		a	b	c	d
1	1	2	3	4	19	4	2	2	1
2	2	3	4	5	20	5	1	1	3
3	3	2	5	1	21	7	6	3	1
4	4	2	1	3	22	3	3	2	3
5	6	1	2	2	23	6	2	1	4
6	2	5	4	5	24	7	8	3	3
7	2	6	7	8	25	8	4	2	1
8	3	3	6	4	26	9	2	4	2
9	6	1	1	4	27	5	1	2	1
10	3	7	2	2	28	8	3	3	3
11	2	6	1	6	29	5	2	1	1
12	7	2	3	4	30	7	1	2	2
13	2	7	6	8	31	5	4	3	3
14	4	3	1	2	32	3	4	1	2
15	6	1	4	3	33	5	1	3	3
16	1	8	2	2	34	1	8	4	2
17	8	1	1	3	35	8	4	1	3
18	6	3	3	2	36	6	3	2	3

Контрольні питання

1. Який принцип лежить в основі частотних критеріїв? Поясніть його суть.
2. На який кут обернеться вектор  $D(j\omega)$  системи 4-го порядку з одним правим коренем при зміні частоти  $\omega$  від 0 до  $\infty$ ?
3. Сформулюйте критерій стійкості Михайлова.

4. Як визначається стійкість системи за коренями дійсної та уявної функцій Михайлова?

5. Сформулюйте критерій стійкості Найквіста для випадку нестійкої розімкнутої системи, для випадку стійкої розімкнутої системи.

## Практичне заняття 10

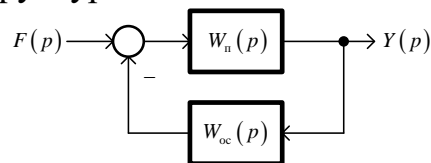
**Тема:** Чутливість і показники якості систем керування

**Мета:** Отримання практичних навичок оцінки чутливості та показників якості систем керування

### Теоретичні відомості

**Чутливість передавальної функції.** Будь-яка система схильна дію-вию навколишнього середовища, старіння, відсутності точної інформації про деякі параметрах і т.д. У розімкнутій системі це призводить до відхилення вихідної величини від бажаного значення. Замкнута ж система відчуває це відхилення і намагається скорегувати вихідну величину в бік, протилежний зміні її, викликаному зовнішніми факторами. Ця властивість характеризується чутливістю системи.

Для замкнутої системи, структурна схема якої наведена на рис.1



**Рис.1. Операторний уявлення структурної схеми системи**

при  $W_n(p)W_{oc}(p) \geq 1$  вихідна величина визначається як

$$Y(p) \approx \frac{1}{W_{oc}(p)} F(p)$$

тобто вихід визначається тільки передавальною функцією ланцюга зворотного зв'язку і при  $W_{oc}(p)=1$  вихід стає рівним входу. Однак при тому ж умови  $W_n(p)W_{oc}(p) \geq 1$  система може стати сильно коливальною або навіть втратить стійкість. Тому необхідно забезпечувати деякий оптимальне значення  $W_n(p)W_{oc}(p)$ , при якому позитивні властивості зворотного зв'язку проявляються найбільш ефективно.

Якщо передавальна функція прямого шляху  $W_n(p)$  може бути представлена у вигляді

$$W_n(p) + \Delta W_n(p),$$

то в розімкнутій системі вихідна змінна одержить збільшення

$$\Delta Y(p) = \Delta W_n(p) F(p),$$

а в замкнутій системі має місце

$$Y(p) + \Delta Y(p) = \frac{W_n(p) + \Delta W_n(p)}{[1 + W_n(p) + \Delta W_n(p)]W_{oc}(p)} F(p),$$

Звідки

$$\Delta Y(p) = \frac{\Delta W_n(p)}{[1 + W_n(p)W_{oc}(p) + \Delta W_n(p)W_{oc}(p)][1 + W_n(p)W_{oc}(p)]} F(p),$$

або

$$\Delta Y(p) = \frac{\Delta W_n(p)}{[1 + W_n(p)W_{oc}(p)]^2} F(p).$$

Звідси випливає, що в замкнутій системі зміна вихідної змінної зменшується в порівнянні з вхідний в  $[1 + W_n(p)W_{oc}(p)]$  раз.

Чутливість системи визначається як відношення зміни передавальної функції системи до зміни передавальної функції об'єкта

$$S = \frac{\Delta\Phi(p)/\Phi(p)}{\Delta W_n(p)/W_n(p)},$$

або при переході до малих приращенням

$$S = \frac{\partial\Phi(p)/\Phi(p)}{\partial W_n(p)/W_n(p)} = \frac{\partial \ln \Phi(p)}{\partial \ln W_n(p)}.$$

Звідси випливає, що чутливість розімкнутої системи дорівнює одиниці (абсолютна).

Оскільки передатна функція замкнутої системи є

$$\Phi(p) = \frac{W_n(p)}{1 + W_n(p)W_{oc}(p)},$$

то

$$S_{W_n}^\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial W_n} \cdot \frac{W_n}{\Phi} = \frac{1}{(1 + W_n W_{oc})} \cdot \frac{W_n}{W_n / (1 + W_n W_{oc})} = \frac{1}{(1 + W_n W_{oc})}.$$

Звідси випливає, що зменшення чутливості в який становить інтерес діапазоні частот може бути досягнуто шляхом збільшення добутку  $W_n W_{oc}$ .

Аналогічно чутливість замкнутої системи до зміни передавальної функції ланцюга зворотного зв'язку є

$$S_{W_{oc}}^\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial W_{oc}} \cdot \frac{W_{oc}}{\Phi} = \left( \frac{W_n}{(1 + W_n W_{oc})} \right)^2 \cdot \frac{-W_{oc}}{W_n / (1 + W_n W_{oc})} = -\frac{W_n W_{oc}}{(1 + W_n W_{oc})}.$$

Якщо добуток  $W_n W_{oc}$  велике, то чутливість близька до одиниці і зміни передавальної функції  $W_{oc}$  безпосередньо позначаються на вихідній змінною. Тому елементи ланцюга зворотного зв'язку повинні бути стабільними.

У практичних завданнях часто буває необхідним визначення чутливості за окремим параметру  $\alpha$  передавальної функції  $W_n$ . Відповідно до правил диференціювання складної функції для цього випадку

$$S_\alpha^\Phi = S_W^\Phi \cdot S_\alpha^W.$$

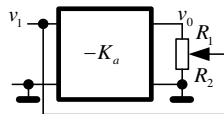
Якщо передавальна функція розімкнутої системи має вигляд дробу

$$\Phi(p, \alpha) = \frac{B(p, \alpha)}{A(p, \alpha)},$$

то чутливість системи за параметром  $\alpha$  можна визначити як

$$S_\alpha^\Phi = \frac{\partial \ln B}{\partial \ln \alpha} = \frac{\partial \ln B}{\partial \ln \alpha} \Big|_{\alpha_0} - \frac{\partial \ln A}{\partial \ln \alpha} \Big|_{\alpha_0} = S_\alpha^B - S_\alpha^A.$$

**Приклад 1.** Визначити вираз чутливості підсилювача зі зворотним зв'язком і коефіцієнтом посилення  $-K_a$ , наведеного на рис.2.



**Рис. 2.** Структурна схема підсилювача зі зворотним зв'язком

Підсилювач без зворотного зв'язку має передавальну функцію  $\Phi = -K_a$ , а її чутливість до зміни коефіцієнта посилення дорівнює 1.

Передавальна функція підсилювача зі зворотним зв'язком дорівнює

$$\Phi = -\frac{K_a}{1+K_a\beta},$$

де

$$\beta = \frac{R_2}{R_1},$$

а її чутливість до зміни коефіцієнта посилення визначається як

$$S_{K_a}^{\Phi} = \frac{1}{1+K_a\beta},$$

тобто значно зменшується в порівнянні з чутливістю його у відсутності зворотного зв'язку.

**Вплив на перехідну характеристику.** Перехідна характеристика - одна з найбільш важливих характеристик систем керування. Для забезпечення заданої реакції системи її необхідно підганяти до тих пір, поки вона не буде задовольняти заданим вимогам.

Для розімкнутої системи незадовільна перехідна характеристика найчастіше вимагає зміни об'єкта. У замкнутій системі можна домогтися бажаного виду перехідної характеристики шляхом зміни параметрів ланцюга зворотного зв'язку, або шляхом включення послідовно з об'єктом (або перед ним) регулятора з передавальною функцією  $W_p(p)$ , що забезпечує бажаний вид передавальної характеристики  $W_p(p) \cdot W_n(p)$ .

Аналогічним чином легко знайти передатну функцію помилки, визначається формулою

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{\Delta(p)}{Y(p)}.$$

Маємо

$$\Delta(p) = Y(p) - W_2(p)X(p);$$

$$X(p) = W_1(p)\Delta(p).$$

Звідси

$$\Delta(p) = Y(p) - W_1(p)W_2(p)\Delta(p);$$

$$\Delta(p)(1 + W_1(p)W_2(p)) = Y(p).$$

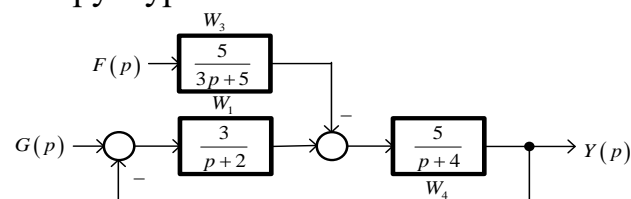
Остаточно маємо

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{\Delta(p)}{Y(p)} = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (1)$$

Вираз (1) буде нами використано нижче, для аналізу точності системи.

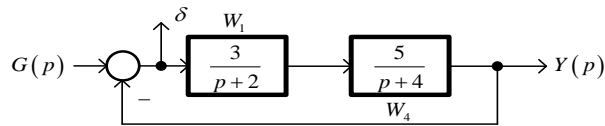
### Приклад виконання завдання

**Приклад 1.** Визначити помилку  $\delta_g(t)$  і  $\delta_f(t)$  в сталому режимі для системи, заданої структурною схемою

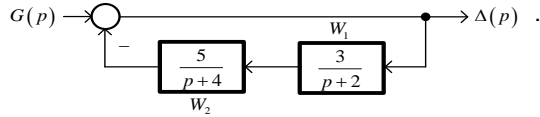


- При вхідному негармонічному впливі виду  $g(t) = 3 + 4 \cdot t^2$ ;
- При зовнішньому гармонійному впливі види  $f(t) = 3 \cdot \sin(4t)$  ..

Розв'язок. Для визначення помилки від першого (вхідного) впливу наведемо частину структурної схеми, яка визначає помилку системи



до наступного вигляду:



Точність системи керування в сталому режимі, при відносно мед-повільно змінюються впливах, може бути оцінена за допомогою коефіцієнтів помилок.

Таким чином, для  $\delta_g(t)$  можна записати:

$$\delta_g(t) = C_0 g(t) + C_1 g'(t) + C_2 g''(t) + \dots + C_i g^{(i)}(t) + \dots,$$

де  $C_i$  – коефіцієнти помилок, які визначаються за формулою:

$$C_i = \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{d^i W_\delta(p)}{dp^i} \right|_{p=0},$$

де  $W_\delta(p)$  – передаточна функція системи по помилці

$$W_\delta(p) = \frac{1}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}$$

або після підстановки значень

$$W_\delta(p) = \frac{1}{1 + \frac{3}{p+2} \cdot \frac{5}{p+4}} = \frac{p^2 + 6p + 8}{p^2 + 6p + 23}$$

Знайдемо похідні від вхідного сигналу за часом:

$$g(t) = 3 + 4t^2,$$

$$g'(t) = 8t,$$

$$g''(t) = 8.$$

Похідні 3-го та вищих порядків рівні 0. Знайдемо коефіцієнти помилок:

$$C_0 = W_\delta(p) \Big|_{p=0} = \frac{0+0+8}{0+0+23} = \frac{8}{23};$$

$$C_1 = \left. \frac{dW_\delta(p)}{dp} \right|_{p=0} = \frac{(2p+6)(p^2+6p+23) - (p^2+6p+8)(2p+6)}{(p^2+6p+23)^2} \Big|_{p=0} =$$

$$= \frac{30 \cdot (p+3)}{(p^2+6p+23)^2} \Big|_{p=0} = \frac{90}{529}.$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{d^2 W_\delta(p)}{dp^2} \right|_{p=0} = -\frac{30 \cdot (3p^2 + 18p + 13)}{(p^2 + 6p + 23)^3} \Big|_{p=0} = \frac{195}{12167}$$

Тоді вираз помилки від вхідного впливу  $\delta_g(t)$  має вигляд

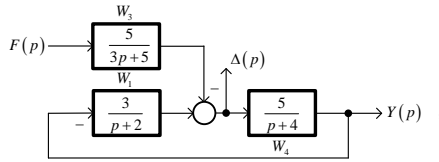
$$\delta_g(t) = C_0 g(t) + C_1 g'(t) + C_2 g''(t) =$$

$$= \frac{8}{23} \cdot (3 + 4t^2) + \frac{90}{529} \cdot 8t + \frac{195}{12167} \cdot 8 \approx$$

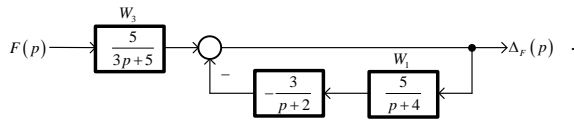
$$\approx 1.17 + 1.36t + 1.39t^2.$$

Для визначення помилки від обурює впливу наведемо частину структурної

схеми, визначальну цю помилку системи



яку перетворимо до вигляду



Звідси випливає, що передавальна функція системи по збурюючому впливу є

$$W_{\delta}(p) = -W_3(p) + \frac{1}{1 - (-W_1(p)) \cdot W_2(p)} =$$

$$= \frac{-5}{3p+5} + \frac{1}{1 - \frac{-3}{p+2} \cdot \frac{5}{p+4}} = \frac{3p^3 + 18p^2 + 24p - 75}{3p^3 + 18p^2 + 99p + 115}.$$

Для  $\delta_f(t)$  при гармонійному впливі можна записати:

$$\delta_f(t) = \Delta_f(\omega_f) \cdot \sin(\omega_f t + \varphi(\omega_f)),$$

де  $\Delta_f(\omega_f) = |W_{\delta}(j\omega_f)| \cdot a$ , причому  $|W_{\delta}(j\omega_f)|$  – модуль комплексного

коефіцієнта передачі,  $a$  - амплітуда вхідного сигналу,  $\varphi(\omega_f)$  - аргумент комплексного коефіцієнта передачі.

Знайдемо модуль комплексного коефіцієнта передачі, з урахуванням того, що за умовою задачі  $\omega_f = 4$  (див. умову завдання):

$$|W_{\delta}(j\omega_f)| = |-0.98 - 0.22j| = 1.005.$$

Тоді

$$\Delta_f(\omega_f) = |W_{\delta}(j\omega_f)| \cdot a \approx 1.005 \cdot 3 \approx 3.015.$$

Знайдемо тепер аргумент комплексного коефіцієнта передачі

$$\varphi(\omega_f) = \text{Arg}(-0.98 - 0.22i) \approx -2.92.$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$\delta_f(t) = \Delta_f(\omega_f) \cdot \sin(\omega_f t + \varphi(\omega_f)) \approx 3.015 \cdot \sin(4 \cdot t - 2.92).$$

**Відповідь:**  $\delta_g(t) \approx 1.17 + 1.36t + 1.39t^2$ ,  $\delta_f(t) \approx 3.015 \cdot \sin(4 \cdot t - 2.92)$ .

**Приклад 2.** Визначити показники якості системи, заданої таким рівнянням вхід-вихід

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 3g(t)$$

при нульових початкових умовах. Необхідне значення вихідного сигналу - 0,65.

Розв'язок. Знайдемо перехідну характеристику  $h(t)$ , для цього вирішимо диференціальне рівняння класичним методом:

$$y_{\text{полн}}(t) = y_{\text{обц}}(t) + y_{\text{част}}(t).$$

Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його Розв'язок:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm i2.$$

Так як корені характеристичного рівняння комплексні, то загальний розв'язок

запишемо у вигляді

$$y_{\text{обц}}(t) = C_1 e^{-t} \cos(2t) + C_2 e^{-t} \sin(2t)$$

Знаходимо частковий Розв'язок диференціального рівняння, яке в загальному вигляді при одиничному вхідному впливі буде мати вигляд

$$y_{\text{част}}(t) = A$$

де  $A$  – деяка невизначена константа.

Знайдемо першу і другу похідну від загального вигляду часткового Розв'язок:

$$y'_{\text{част}}(t) = y''_{\text{част}}(t) = 0$$

Підставами загальний вид часткового розв'язку та його похідні у вихідне диференціальне рівняння:

$$5A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{5}$$

Таким чином, повне Розв'язок буде мати вигляд:

$$y_{\text{полн}}(t) = y_{\text{обц}}(t) + y_{\text{част}}(t) = C_1 e^{-t} \cos(2t) + C_2 e^{-t} \sin(2t) + \frac{3}{5}$$

Так як початкові умови задані, визначимо невідомі коефіцієнти  $C_1$  та  $C_2$ , отримаємо:

$$y_{\text{полн}}(0) = C_1 + \frac{3}{5} = 0,$$

$$y'_{\text{полн}}(0) = C_2 - 0.5C_1 = 0,$$

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{3}{5} \\ C_2 = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

Отже, перехідна функція має наступний вигляд:

$$h(t) = -\frac{3}{5} e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{10} e^{-t} \sin(2t) + \frac{3}{5}$$

Будуємо графік перехідної функції (в домашньому завданні потрібно знайти 10-15 точок для побудови графіка). Він наведено на рис. 3.

За графіком визначаємо показники якості:

1. Величина перерегулювання  $\sigma$ :

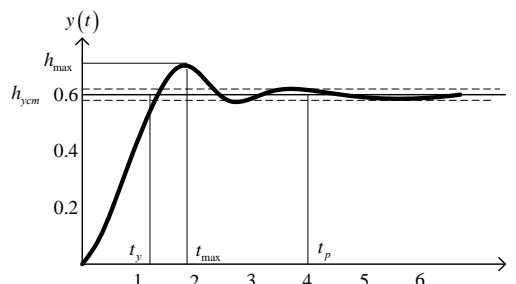


Рис. 3. Перехідна функція системи

$$\sigma = \frac{h_{\text{max}} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} 100\% = \frac{0.72 - 0.6}{0.6} 100\% = 20\%$$

2. Час перехідного процесу або час регулювання  $t_p$  - найменше значення часу, після якого має місце нерівність

$$|h(t) - h(\infty)| \leq \Delta$$

Для  $\Delta = \pm 0.05$  (5%) маємо,  $0.05 \cdot h_{\text{уст}} = 0.05 \cdot 0.6 = 0.03$ , відповідно відхилення від  $h_{\text{уст}}$

рівно  $\pm 0,03$ . Нанесемо на графік задані відхилення і відзначимо час регулювання.

3. Статична похибка  $\delta_{cm}$  – величина відхилення сталого значення регульованої величини  $x(\infty)$  від необхідного значення  $N$ .

$$\delta_{cm} = N - h(\infty) = 0.65 - 0.6 = 0.05$$

4. Час встановлення  $t_y$  - проміжок часу, після закінчення якого регулюються-ється величина перший раз досягає сталого значення. Відзначимо дану величину на графіку.

5. Число коливань регульованої величини за час регулювання.

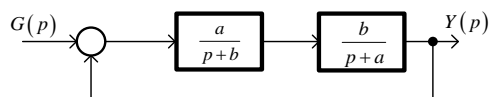
У нашому випадку число коливань дорівнює 2.

6. Час досягнення першого максимуму  $t_m$ , тобто час при якому  $h(t) = h_{\max}$ . Відзначаємо дане значення на графіку.

Для визначення якості системи можуть використовуватися й інші показники, відповідні розв'язуваній задачі. У даному випадку обмежимося шістьма.

### Завдання для виконання

**Завдання 1.** Визначити помилку  $\delta_s(t)$  в сталому режимі, для системи, заданої структурної схемою:



при негармонічній вхідній дії виду:  $g(t) = a + b \cdot t^2$ .

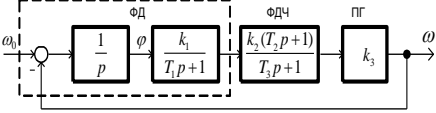
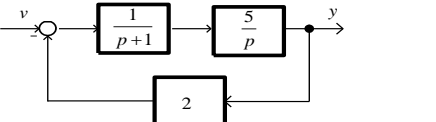
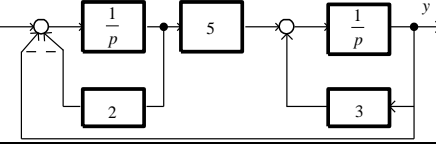
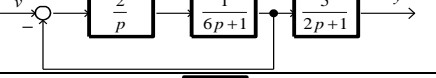
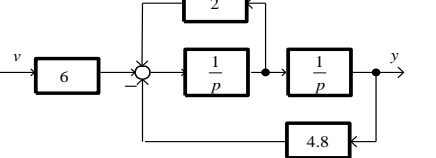
**Завдання 2.** Визначити показники якості для системи, заданої рівнянням вхід-вихід виду

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = (a+b)g(t)$$

при нульових початкових умовах (або показати, що їх визначити не можна). Необхідне значення вихідного сигналу – 1.

Таблиця 1 – Варіанти завдань

Варіант	Представлення системи	Зміст завдання
1		Визначити повну статичну помилку в системі.
2		Визначити відносну статичну і швидкісну помилки при $v = 5t$ .
1	$W_1(p) = \frac{8}{10p+1}, \quad W_2(p) = \frac{3}{p^2 + 0.7p+1}$ $W_1(p) = \frac{2(0.5p+1)}{4p+1}, \quad W_2(p) = \frac{0.25}{0.02p^2 + 0.4p+1};$ $W_1(p) = \frac{25}{(2p+1)p}, \quad W_2(p) = \frac{1}{3p^2 + 4p+1};$	Визначити повну статичну помилку в системі, як функцію $M$ .

2	$W_1(p) = \frac{0.25p+1}{0.1p+1}, W_2(p) = \frac{5}{(0.2p^2+0.1p+1)p};$	
3		
4		
5		Визначити швидкісну похибку системи при наступних значеннях параметрів: $T_1 = 0.1$ с; $T_2 = 0.04$ с; $T_3 = 0,005$ с; $K = k_1 k_2 k_3 = 200$ с <sup>-1</sup> .
6	$W_1(p) = \frac{k_p}{0.5p+1}, W_2(p) = \frac{1}{2p^2+0.7p+1};$	Для системи по варіантам 3 – 5, визначити коефіцієнт посилення $K_p$ так, щоб статична помилка не перевищувала значення $\Delta_*^0 = 5\%$ від $M$ .
7	$W_1(p) = \frac{k_p(p+1)}{4p+1}, W_2(p) = \frac{0.2p+1}{0.04p^2+0.5p+1};$	
8	$W_1(p) = \frac{k_p}{10p+1}, W_2(p) = \frac{2}{(0.5p^2+0.3p+1)p}$	
9	$W(p) = \frac{10}{4p^2+1p+1}$	
10	$\begin{cases} x_1 = -x_1 + x_2, \\ x_2 = -2x_1 - 5x_2 + 15u, \\ y = x_1. \end{cases}$	Оцінити якість перехідних процесів по у для об'єкта, заданого системою рівнянь.
11	$W_{раз}(p) = \frac{5(p+1)}{(p+1p)(6p+1)}$	Оцінити тривалість перехідного процесу $t_n$ в замкнутій системі з негативною одиничної зворотним зв'язком.
12		Оцінити час перехідного процесу в системі.
13		Оцінити якість перехідного процесу в системі.
14		Оцінити час перехідного процесу та перерегулювання в системі.
15		Оцінити якість перехідного процесу в системі.
16	$W_p(p) = \frac{K}{p(p+2)}$ $\sigma = 5\%, t_{уст} = 1.1$ с	визначити: - Чи можливо забезпечення заданих показників якості при замиканні системи одиничної зворотним зв'язком; - Значення $K$ , при якому вони забезпечуються в максимально можливій мірі.

17	$W_1(p) = \frac{k}{3p+1},$	<p>Визначити час перехідного процесу і оцінити його якість для значення коефіцієнта <math>k</math>, для якого відносна статична помилка системи по обуренню не перевищує 5%.</p>
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28	$G(p) = 1,$	<p>Для заданої системи:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Визначте сталу помилку при заданих параметрах;</li> <li>- Визначте вид <math>W(p)</math>, при якому встановилася помилка буде дорівнює 0.</li> </ul>
29		
30		<p>Задана структура системи і параметри вхідного сигналу. визначити:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Сталу помилку;</li> <li>- Умови, при яких вона дорівнюватиме нулю.</li> </ul>
31		
32		
33		<p>визначити:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Вираз для сталої помилки в залежності від <math>K</math> при вхідному східчастому одиничному сигналі;</li> <li>- Значення усталеною помилки і <math>\sigma</math> при <math>K = 1, 10, 100</math>.</li> </ul>
34		
35		
36		

### Контрольні питання

1. Які існують методи оцінювання якості перехідного процесу?
2. Назвіть прямі оцінки (показники) якості перехідного процесу.
3. Як оцінюється якість регулювання в усталеному режимі?
4. Як визначають коефіцієнти помилок за передавальною функцією помилки?
5. Які показники якості можна приблизно оцінити за параметрами АЧХ розімкнутої чи замкнутої системи?
6. Як оцінюють якість перехідних процесів за розташуванням коренів характеристичного рівняння замкнутої системи?
7. Які існують інтегральні оцінки якості перехідних процесів?
8. Чим відрізняються інтегральні критерії оцінювання аперіодичних і коливальних процесів?
9. Які особливості якості САК можна визначити за зовнішнім виглядом дійсної частотної характеристики замкнутої системи?

## Практичне заняття 11

**Тема:** Елементи синтезу систем керування

**Мета:** Отримання практичних навичок забезпечення заданих характеристик систем керування

### Теоретичні відомості

#### 1.1. Основні поняття

Під синтезом будемо розуміти проектування регулятора системи керування по заданих до неї вимогам до статичних і динамічних властивостей. Ці властивості по-різному проявляються в різних режимах роботи системи.

Процеси, що протікають в системі, представлені моделлю

$$\begin{cases} x' = Ax + Bg + f(t), \\ y = Cx \end{cases}$$

Описується відношенням

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bg(\tau)d\tau + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau$$

Режим *відпрацювання початкових умов* - це процес переходу з довільного початкового стану  $x(0)$  в рівноважний стан при відсутності зовнішніх впливів на систему ( $g=0$ ,  $f=0$ ), тобто вільна складова процесу. Цьому процесу відповідає перший доданок записаного виразу.

Режим *відпрацювання входу* - це процес відпрацювання вхідного впливу при  $g = const$ . Цьому процесу відповідає другий доданок записаного виразу.

Режим *стеження за входом* - це процес відпрацювання мінливого вхідного впливу  $g(t)$  при нульових початкових умовах і відсутності збурень, тобто  $y(t)|_{g=var}$ ,  $x(0)=0$ . Цьому процесу також відповідає другий доданок записаного виразу.

Режим *відпрацювання збурень* - це процес відпрацювання збурень  $f(t)$  при фіксованих початкових умовах і вхідній дії. Цьому процесу відповідає третя складова записаного виразу.

При описі перерахованих процесів використовуються тимчасові ( $h(t)$  та  $w(t)$ ) характеристики, передавальні функції ( $W(p)$  та  $W(j\omega)$ ) і логарифмічні частотні (амплітудна  $L(\omega)$  і фазова  $\varphi(\omega)$ ) характеристики.

**Постановка задачі синтезу одноканальних систем.** Одноканальний об'єкт описується передавальною функцією

$$W_o(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Метою функціонування замкнутої системи керування є забезпечення із заданою точністю помилки керування  $\Delta(p)$ , що забезпечує виконання умови статички  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = g(t)$ .

Крім того, повинні бути забезпечені умови динаміки, що задаються зазвичай у вигляді оцінок

$$t_p \leq t_p^0$$

та

$$\sigma \leq \sigma^0$$

При цьому керована змінна  $y(t)$  є вимірюваною величиною, тобто в ланцюг зворотного зв'язку надходить не істинне, а виміряне її значення  $\tilde{y}(t)$ , так що ре-альної метою системи керування є забезпечення умови

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = g(t)$$

Таким чином, помилка регулювання відповідно до принципу суперпозиції є сума трьох складових:

$$\Delta(p) = G(p) - Y(p) = \Delta_g(p) + \Delta_f(p) + \Delta_m(p)$$

Перша (статична помилка з керування) може бути скомпенсована відповідним вибором коефіцієнта посилення регулятора.

Друга складова (помилка за збуренням) є найбільш істотною і повинна бути зменшена до максимально допустимої величини:

$$\Delta_f(p) \leq \Delta_f^o(p)$$

Третя ( помилка виміру керованої величини ) найбільшою мірою проявляється в динаміці ( перешкода вимірювання являє собою високочастотний сигнал).

**Умови розв'язання задачі синтезу** . До них відносяться:

- Обмеження по ресурсах керування;
- Стійкість зворотного об'єкта;
- Керованість і наблюдаемость об'єкта;
- Вирожденність передавальної функції .

Обмеженість по ресурсах керування полягає в тому , що сигнал керування повинен мати достатню потужність для встановлення заданого значення керованої змінної.

Вважаючи перешкоду вимірювання нульовий, можна представити рівняння виходу об'єкта у вигляді

$$y(p) = F(p) + W_o(p)U(p)$$

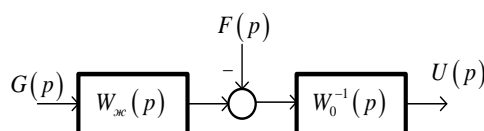
Бажаний вид керованої змінної буде забезпечений за умови формування бажаної передавальної характеристики  $W_{ж}(p)$  . Він матиме вигляд

$$y(p) = W_{ж}(p)U(p)$$

З двох останніх співвідношень отримуємо необхідну «точне» керуючий вплив у вигляді

$$U(p) = W_o^{-1}(p)W_{ж}(p)G(p) - W_o^{-1}(p)F(p)$$

Останнє співвідношення носить назву ресурсного обмеження. Його структурна інтерпретація наведена на рис. 1.



**Рис. 1. Структурна інтерпретація «точного» керування**

Оскільки в реальних системах закон зміни обурення невідомий, то завдання синтезу вирішити за умови, що

$$U(p) \geq \{W_o^{-1}(p)W_{ж}(p)G(p) - W_o^{-1}(p)F(p)\}$$

Вимога *стійкості «зворотного» об'єкта* засноване на тому, що згідно рис. 1 в забезпеченні керування бере участь ланка з передавальної функцією  $W_o^{-1}(p)$  . Якщо

воно нестійке, то система керування буде непрацездатною. Ця вимога відповідає умові

$$\operatorname{Re}\{B(p)=0\} < 0,$$

тобто умові заперечності речових частин коренів чисельника передаточної функції системи.

Умови спостереження та управління об'єкта використовуються при перевірці можливості розв'язання лінійних систем, що задаються у формі простору станів і тут не розглядаються.

Умова невиродженості передавальної функції полягає в тому, що при наявності в передавальній функції системи однакових або близьких сомножителей в поліномах чисельника і знаменника, тобто при поданні її у вигляді

$$W(p) = \frac{B(p)D(p)}{A(p)D(p)}$$

в результаті скорочення виходить вироджена передавальна функція

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

Система буде працездатною, тільки якщо загальні сомножители мають коріння з негативною дійсною частиною. У цьому випадку видалення цих співмножників не змінює характеристик стійкості системи. Відзначимо, що наявність в чисельнику і знаменнику скорочуваних множників свідчить про наявність в системі некеруваних або неспостережених частин.

## 1.2. Частотний метод синтезу

Частотний метод синтезу одноканальних систем заснований на використанні асимптотичних логарифмічних амплітудних частотних характеристик цих систем. Розрахункова структурна схема такої системи має вигляд, показаний на рис 2.

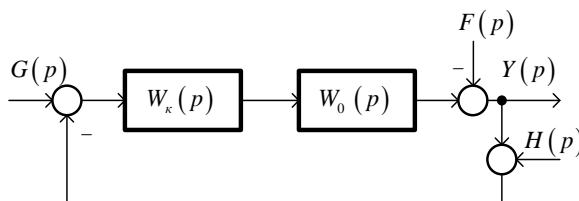


Рис. 2. Розрахункова структурна схема системи

Оскільки передавальна функція розімкнутої системи є

$$W_p(p) = W_k(p)W_o(p),$$

а передавальна функція замкнутої системи є

$$\Phi(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}, \quad (1)$$

то при формуванні певної передавальної функції розімкнутої системи можна забезпечити необхідні властивості замкнутої системи.

Частотна характеристика розімкнутої системи

$$W_p(j\omega) = W_k(j\omega)W_o(j\omega) \quad (2)$$

в діапазоні частот має різні прикладні інтерпретації. Так в зоні нижніх частот, де передавальна функція об'єкта за умовою статичності є

$$W_o(0) = k_o \gg 1$$

частотна характеристика наводиться до виду

$$|W_p(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} \gg 1$$

В області високих частот

$$|W_o(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \approx 0$$

тому

$$|W_p(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \approx 0$$

У зоні середніх частот виконується співвідношення

$$|W_o(0)| \approx 1$$

тому для  $W_p(j\omega)$  також виявляється справедливим співвідношення

$$|W_p(0)| \approx 1$$

Оскільки частотні характеристики замкнутої і розімкнутої систем пов'язані співвідношенням, аналогічним виразом (1), а з нього випливає, що на нижніх частотах

$$\Phi(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1+W_p(j\omega)} \approx 1$$

а на високих частотах

$$\Phi(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1+W_p(j\omega)} \approx 0$$

то найбільший вплив розімкнута система впливає на властивості замкнутої системи на середніх частотах, де необхідно більш ретельне формування частотної характеристики.

З (2) випливає, що

$$L_p(\omega) = L_k(\omega) + L_o(\omega)$$

Якщо під розрахунковою характеристикою розуміти бажану характеристику, то вираз для визначення логарифмічною амплітудної частотної характеристики ланки корекції приймає вид

$$L_k(\omega) = L_{жс}(\omega) - L_o(\omega)$$

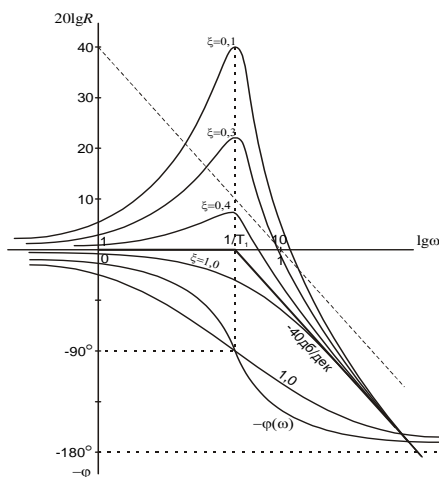
Таким чином, для побудови ланки корекції (регулятора) необхідно побудувати логарифмічну амплітудну частотну характеристику об'єкта  $L_o(\omega)$  і бажану логарифмічну амплітудну частотну характеристику, а потім відняти їх відповідно з останнім виразом. Для цього необхідно, перш за все, вміти будувати логарифмічні амплітудні і фазові частотні характеристики на основі їх математичних виразів. При цьому побудована характеристика повинна враховувати вимоги до якості процесів в замкнутій системі. Крім того, необхідно вміти відновити передавальну функцію ланки (коефіцієнт посилення і значення постійних часу) по його логарифмічною амплітудній частотній характеристиці.

**Для побудови асимптотичної логарифмічною амплітудної частотної характеристики** попередньо здійснюється уявлення передавальної функції розімкнутої системи у вигляді твору співмножників, типові висловлювання та асимптотичні логарифмічні амплітудні частотні характеристики яких наведені в табл. 1 ( $V$  - кратність множника).

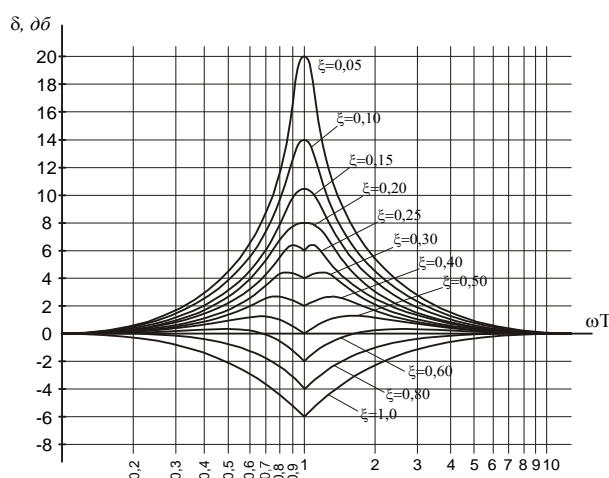
Таблиця 1 – Типові вирази та асимптотичні логарифмічні амплітудні частотні характеристики співмножники передавальної функції

Назва ланки	Передаточна функція	Логарифмічна амплітудна частотна характеристика
Пропорційна	$W(p) = k$	
Диференційна	$W(p) = p^v$	
Інтегруюча	$W(p) = \frac{1}{p^v}$	
Форсуюча порядку 1-го	$W(p) = (Tp + 1)^v$	
Аперіодична порядку 1-го	$W(p) = \frac{1}{(Tp + 1)^v}$	
Форсуюча порядку 2-го	$W(p) = (T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)^v$ , $0.4 \geq \xi \geq 0.7$	
Аперіодична порядку 2-го	$W(p) = \frac{1}{(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)^v}$ , $0.4 \geq \xi \geq 0.7$	

Для останніх двох ланок при  $0.4 \leq \xi \leq 0.7$  вводяться коригувальні характеристики, що дозволяють уникнути великих помилок при зображенні асимптотических логарифмічних амплітудних характеристик. Дійсний вид амплітудної характеристики ланки в області сполучення асимптот наведено на рис. 3, а графік корекції - на рис. 4



**Рис. 3. Логарифмічна амплітудна характеристика коливальної ланки**



**Рис. 4. Графік поправок для корекції ЛАХ**

Побудова асимптотичної логарифмічної амплітудної частотної характеристики об'єкта проводиться в такій послідовності:

1. Передавальна функція системи наводиться до нормованого виду, т.е.

$$\Phi(p) = k\Phi_n(p)$$

і представляється у вигляді добутку простих множників, тобто послідовного з'єднання типових ланок.

2. На частоті  $\omega = 1$  ( $\lg \omega = 0$ ) фіксується точка, відповідна  $20 \lg k$ , де  $k$  - статичний коефіцієнт посилення об'єкту.

3. На осі частот в порядку зростання значень відзначаються частоти спряження  $\omega_i = 1/T_i$  ( $\lg \omega_i = \lg T_i^{-1}$ ), де  $i$  - число типових ланок в передавальній функції об'єкта.

4. До першої частоти сполучення будується низькочастотна асимптота з нахилом  $-20 \cdot r$  дБ/дек, якщо  $W_o(p)$  містить  $r$  ідеальних інтегруючих ланок, і  $+20 \cdot r$  дБ/дек, якщо  $W_o(p)$  містить  $r$  ідеальних диференціюючих ланок. Ця асимптота (або її продовження) повинна проходити через точку  $20 \lg k$ .

5. На першому частоті сполучення відбувається «злам» асимптотичною амплітудної частотної характеристики в бік, яка визначається місцем розташування наступної постійної часу. злам дорівнює  $-20 \cdot s$  дБ/дек (по часовій стрелці), якщо постійна часу знаходиться в знаменнику  $W_o(p)$ , і  $+20 \cdot s$  дБ/дек (проти годинникової стрілки), якщо постійна часу знаходиться в чисельнику  $W_o(p)$ , де  $s$  - ступінь

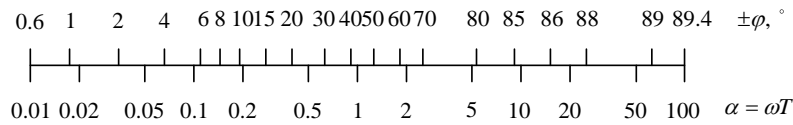
комплексної змінної  $p$ , при якій стоїть постійна часу. Нова асимптота триває до наступної частоти сполучення, де відбувається новий злам.

6. Описаний в п. 5 процес продовжується до вичерпання всіх виділених частот сполучення.

Побудова логарифмічної фазової частотної характеристики утруднень не викликає, оскільки фазові частотні характеристики ланок-співмножників мають простий вигляд, так:

- для множників  $k$   $\varphi(\omega) = 0$ ;
- для множників  $p^v$   $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \cdot v$ ;
- для множників  $\frac{1}{p^v}$   $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \cdot v$ .

Для множників  $(1+Tp)^v$  і  $\frac{1}{(1+Tp)^v}$  визначення виробленого ними фазового зсуву проводиться через арктангенс відносини уявної частини амплітудної характеристики до речової, або за допомогою номограми, наведеної на рис. 5.



**Рис. 5. Номограма для побудови фазової частотної характеристики**

При  $0 \leq \omega \leq \infty$  значення фазової частотної характеристики набору таких множників кратності обчислюються як

$$\varphi(\omega) = \frac{v \cdot \pm \varphi}{\omega}, \quad \omega = \alpha/T.$$

Частотна фазова характеристика об'єкта будується шляхом підсумовування частотних фазових характеристик типових ланок, складових передавальну функцію об'єкта:

$$\varphi(\omega) = \sum_1^s \varphi_i(\omega),$$

де  $s$  – число множників передавальної функції.

**Зв'язок між логарифмічними характеристиками та показниками якості.**

**Побудова бажаної асимптотичної логарифмічною амплітудної частотної характеристики.** Бажана логарифмічна амплітудна характеристика будується з урахуванням забезпечення вимог до якості роботи в статиці і динаміці.

Статичну помилку в системі породжує в основному рівноваги вплив, тому якість роботи системи в статиці забезпечується при виконанні умови

$$\delta_{cm} \leq \delta_{дон},$$

де  $\delta_{дон}$  – максимально допустима статична помилка.

Величину статичної помилки можна зменшити вибором значення коефіцієнта системи  $k = k_o k_p$  (добуток коефіцієнтів посилення об'єкту і регулятора). Для статичного режиму помилка визначається виразом

$$\delta_{cm} = -\frac{1}{1 + k_o k_p}.$$

Звідси випливає розрахункове співвідношення для визначення коефіцієнта

посилення системи

$$\frac{1}{1+k} \leq \delta_{\text{доп}}$$

Вибір значення коефіцієнта посилення системи з урахуванням допустимого значення помилки визначає положення низькочастотної частини бажаної асимптотической амплітудної частотної характеристики.

Для астатичних систем, що працюють в режимі лінійної заведення, коефіцієнт посилення системи визначається на основі виразу

$$\delta_{\text{ск}} = -\frac{1}{k_o k_p} \eta$$

де  $\eta$  – деяка константа.

Вище було відзначено, що найбільший вплив на властивості замкнутої системи розімкнута система надає в області середніх частот, то побудова бажаної асимптотичної амплітудної частотної характеристики необхідно починати саме з цієї області частот.

Встановлено, що для забезпечення заданих динамічних якостей системи середньочастотна асимптота її логарифмічною амплітудної частотної характеристики повинна мати нахил -20 дБ / дек і перетинати вісь абсцис в точці  $\lg \omega_{cp}$ , де  $\omega_{cp}$  - частота зрізу, оцінювана виразом

$$\omega_{cp} \cong \frac{k\pi}{t_{уст}}$$

Тут  $k = 2 \dots 4$  і залежить від величини заданого перерегулювання .

Довжина середньочастотної ділянки бажаної логарифмічної амплітудної частотної характеристики визначається запасом стійкості по модулю , який відкладається вгору і вниз по осі ординат. Вона становить 1 ... 1.5 декади , а точка  $\omega_{cp}$  , відповідна , знаходиться посередині характеристики . У цьому випадку буде забезпечено значення перерегулювання  $\sigma = (20 \dots 30)\%$  .

Для визначення параметрів логарифмічною амплітудної частотної характеристики залежно від заданих показників якості керування розроблені номограми , наведені на рис. 5 . Ними необхідно користуватися при побудові бажаної логарифмічної амплітудної частотної характеристики проектованої системи .

Далі виробляється пару середньочастотної ділянки бажаної логарифмічної амплітудної частотної характеристики та її низькочастотного і високочастотного ділянок . Низькочастотна частина будується з урахуванням певного вище коефіцієнта посилення , що забезпечує необхідну статичну помилку . Високочастотний частина може збігатися з високочастотної частиною логарифмічною характеристики вихідної системи .

### Приклад виконання завдань

**Приклад 1.** Побудувати асимптотичну логарифмічну амплітудну частотну характеристику об'єкта, заданого функцією передачі

$$W_o(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

при  $k = 10$ ,  $T_1 = 10$ ,  $T_2 = 1$  .

1. Представляємо передавальну функцію в нормованому вигляді (вона вже

задана такий).

2. Визначаємо характерні точки логарифмічною амплітудною характеристикою і відзначаємо їх на осях координат (на рис. 4 відзначені жирними кружками):

$$20 \lg k = 20 \text{дБ/дек}$$

$$\lg \omega_1 = \lg(1/T_1) = \lg 0.1 = -1$$

$$\lg \omega_2 = \lg(1/T_2) = \lg 1 = 0$$

3. Перша низькочастотна асимптота (рис. 6) відповідає першому співмножнику  $p$  в  $W_o(p)$  і проводиться з нахилом  $-20$  дБ/дек, оскільки він знаходиться в знаменнику. Її продовження проходить через точку  $20 \lg k = 20 \text{дБ/дек}$ .

4. Наступна асимптота починається з точки, відповідної перетинанню першої асимптоти з перпендикуляром, відновленим з абсциси  $\lg \omega_1 = \lg(1/T_1) = \lg 0.1 = -1$  і проводиться під нахилом  $-20$  дБ / дек щодо першої асимптоти ( $-40$  дБ / дек в абсолютному вираженні), оскільки відповідний їй множник знаходиться також в знаменнику  $W_o(p)$  и степінь  $p$ , при якому знаходиться  $T_1$ , рівна 1.

5. Третя асимптота будується аналогічно, її нахил щодо попередньої асимптоти становить  $-20$  дБ / дек, а абсолютний  $-60$  дБ / дек.

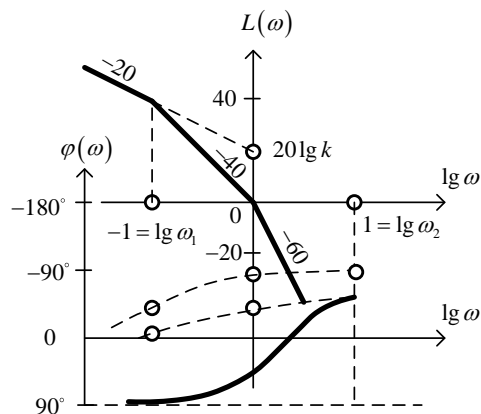
Тепер побудуємо фазову характеристику. Скориставшись номограмою, наведеною на рис. 5, визначимо значень фази в характерних точках і зведемо їх у таблицю:

$\alpha$	Ланка 1	Ланка 2	Ланка 3	Всього
0.1	$\pi/2$	—	$-5^\circ$	$85^\circ$
1	$\pi/2$	$-42^\circ$	$-42^\circ$	$6^\circ$
10	$\pi/2$	$-85^\circ$	$-85^\circ$	$-80^\circ$
100	$\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$

Відповідні цим значенням фазові характеристики ланок наведено на рис. 6 пунктирними лініями, а підсумкова - суцільний жирною лінією.

Приклад 2. Для системи з прикладу 1 побудувати логарифмічну амплітудну частотну характеристику розімкнутої системи, що забезпечує задані вимоги до статички ( $\sigma_{ж} \leq 30\%$ ) і динаміки ( $t_{уст} = 2c$ ), і визначити передавальну функцію регулятора.

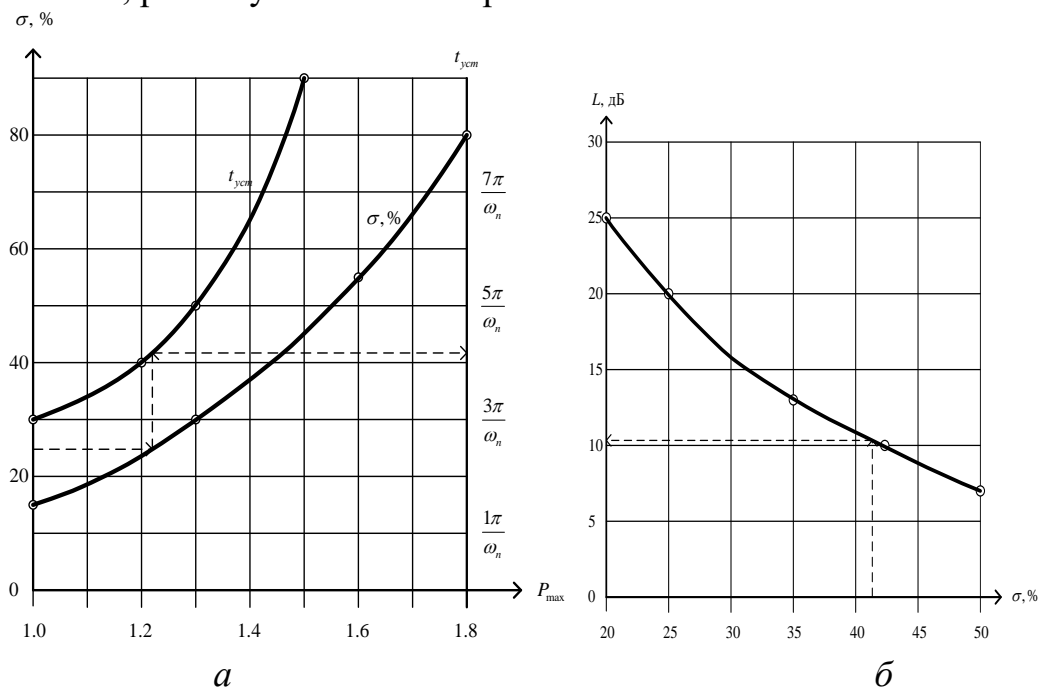
Асимптотична амплітудна частотна характеристика об'єкта була побудована в прикладі 1 і наведена на рис. 7 пунктирною жирною лінією.



**Рис. 6. Асимптотичні логарифмічні амплітудна і фазова характеристики об'єкта**

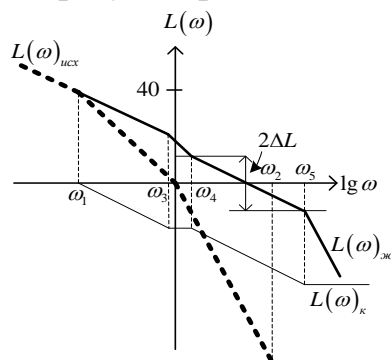
Побудуємо тепер бажану логарифмічну амплітудну частотну характеристику розімкнутої системи. Її середньочастотна ділянка повинна мати нахил  $-20$  дБ / дек. По заданому перерегулюванню по номограмі, наведеної на рис. 7, а визначаємо  $P_{max} = 1.22$  и  $\omega_n = 4\pi / t_{уст}^{ж} \approx 6.6 \text{ c}^{-1}$ . Частоту зрізу  $\omega_{cp}$  визначають зазвичай зі співвідношення  $\omega_{cp} = (0.6 \dots 0.9)\omega_n$ , тому виберемо  $\omega_{cp} = 5 \text{ c}^{-1}$ . В цьому випадку  $\lg \omega_{cp} = 0.7$ .

Запас стійкості по модулю, що обмежує середньочастотний ділянка характеристики, визначаємо за номограми, наведеної на рис. 7, б при заданому Перерегулюванні, рівному  $\sigma_{ж} \leq 30\%$ . Він рівний  $\Delta L = 11$  дБ.



**Рис. 7. Номограми для визначення параметрів логарифмічних характеристик**

Бажана логарифмічна  $L(\omega)_{ж}$  проведена на рис. 8 суцільною лінією, а різниця між логарифмічною амплітудної частотної характеристикою об'єкта та бажаної характеристикою  $L(\omega)_{к}$  - тонкою суцільною лінією. Остання і є логарифмічна амплітудна частотна характеристика регулятора



**Рис. 8. Побудова логарифмічної амплітудної частотної характеристики регулятора**

Для отримання виразу передавальної функції регулятора визначимо частоти

сполучення  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  відповідні точкам зламу характеристики коригуючої ланки і постійні часу ланок, складових регулятор:

$\lg \omega_i$	-1	-0.1	0.2	1.3
$\omega_i, c^{-1}$	0.1	0.8	1.58	20
$T_i, c$	10	1.25	0.63	0.05

Визначаємо вираз передавальної функції. Першою асимптоти, розташованій на ділянці від  $\omega_1$  до  $\omega_3$ , відповідає інтегруюча ланка з передавальної функцією

$$\frac{1}{T_1 p + 1}$$

Другій асимптоті відповідає форсуюча ланка з передавальної функцією  $(T_2 p + 1)$ .

Третій асимптоті відповідає інтегруюча ланка з передавальної функцією  $\frac{1}{T_3 p + 1}$ .

Четвертій асимптоті відповідає форсуюча ланка з передавальної функцією  $(T_4 p + 1)$ .

Таким чином, передавальна функція коригуючого ланки запишеться у вигляді

$$W_k(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_4 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)} = \frac{(1.25 p + 1)(0.05 p + 1)}{(10 p + 1)(0.63 p + 1)}$$

Розкривши дужки і привівши подібні члени, остаточно отримаємо

$$W_k(p) = \frac{0.0625 p^2 + 1.255 p + 2}{6.3 p^2 + 10.63 p + 2}$$

### Завдання для виконання

**Завдання 1.** Розкласти вираз  $0.002 p^2 + 0.12 p + 1$  на прості множники.

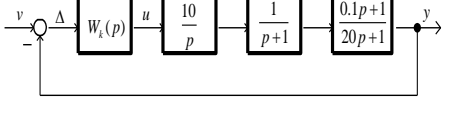
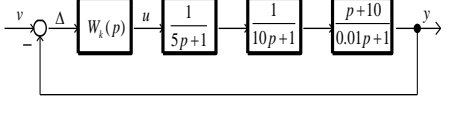
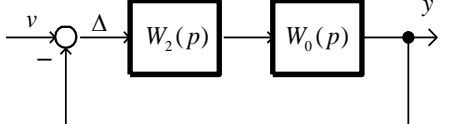
**Завдання 2.** Побудувати амплітудну і фазову логарифмічні частотні характеристики розімкнутої системи з передавальної функцією

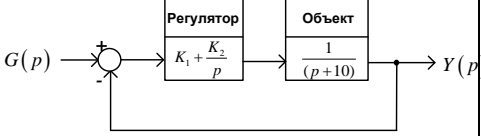
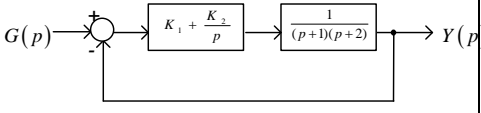
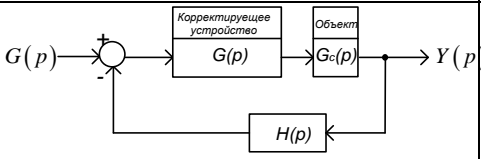
$$W(p) = 75 \frac{0.15 p^2 + 1}{p^2 (4 p + 1) (0.8 p + 1)}$$

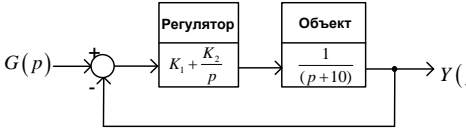
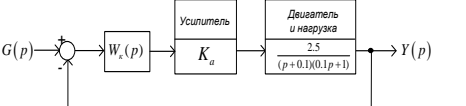
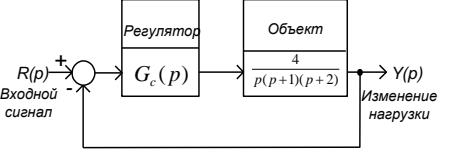
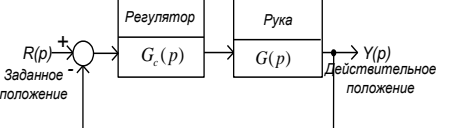
### 3. Завдання 3

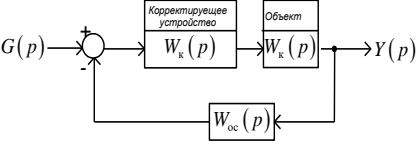
Таблиця 2 – Варіанти завдань

Варіант	Представлення системи	Зміст завдання
1	2	3
1	$W_0(p) = \frac{10}{(10 p + 1)(0.01 p^2 + 0.1 p + 1)}$	Для системи частотним методом розрахувати параметри регулятора, що забезпечує наступні показники якості перехідних процесів: $t_{\text{п}} < 10$ с, $\sigma < 30$ %, $\delta \leq 5$ %.
2		Для системи, розрахувати параметри регулятора частотним методом з урахуванням таких вимог до якості перехідних процесів: $t_{\text{п}} < 5$ с, $\sigma < 20$ %, $\delta < 5$ %.

3		Для системи, розрахувати параметри $W_K(p)$ частотним методом з урахуванням таких вимог до якості перехідних процесів: $t_{\pi} < 3$ с, $\sigma < 30\%$ , $\delta_{\text{скор}} \leq 5\%$ .
4		Для системи, розрахувати параметри регулятора частотним методом з урахуванням таких вимог до якості перехідних процесів: $t_{\pi} \leq 5$ с, $\sigma < 30\%$ , $\delta \leq 5\%$ .
5	$W_0(p) = \frac{10}{(p+100)(0.25p^2 + 0.425p + 1)}$ 	Розрахувати параметри $W_K(p)$ частотним методом для об'єкта, з урахуванням вимог до показників якості перехідних процесів: $t_{\pi} \leq 1,5$ с, $\sigma < 30\%$ , $\delta \leq 2\%$ .
6	$W_0(p) = \frac{10}{p(p+1)(0.1p+1)}$ 	Розрахувати параметри регулятора частотним методом у системі з урахуванням вимог до показників якості перехідних процесів: $t_{\pi} \leq 10$ с, $\sigma < 20\%$ , $\delta \leq 5\%$ .
7	$W_0(p) = \frac{50}{(10p+1)(p+1)(0.01p+1)}$ 	Розрахувати частотним методом регулятор для системи з урахуванням вимог до показу-телям якості перехідних процесів: $t_{\pi} \leq 2$ с, $\sigma < 30\%$ , $\delta \leq 5\%$ .
8	$W_0(p) = \frac{10(p+0.1)}{p(5p+1)(0.1p+1)}$ 	Синтезувати систему частотним методом з урахуванням вимог до якості перехідних процесів: $t_{\pi} \leq 2$ с, $\sigma < 20\%$ , $\delta_{\text{скор}} < 5\%$ .
9		Записати характеристичний поліном четвертого порядку, відповідний наступними показниками якості процесів: $t_{\pi} \leq 10$ с, $\sigma \leq 40\%$ , $\Delta^0 = 0$ .
10	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + 3x_2 + 2u, \\ y = x_1. \end{cases}$	Для об'єкта керування, розрахувати параметри регулятора. Вимоги до якості перехідних процесів у системі наступні: $t_{\pi} \leq 2$ с, $\sigma < 30\%$ , $\delta \leq 5\%$ .
11	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2, \\ y = x_1 - x_2, \end{cases}$	Для об'єкта керування, розрахувати параметри регулятора. Вимоги до якості перехідних процесів у системі наступні: $t_{\pi} \leq 10$ с, $\sigma = 0$ , $\delta \leq 5\%$ .
12	$W_0(p) = \frac{5(2p+1)}{p^2 + 3p + 2}$	Для об'єкта керування розрахувати параметри регулятора частотним методом. Вимоги до якості перехідних процесів у системі наступні: $t_{\pi} \leq 5$ с, $\sigma < 20\%$ , $\delta \leq 2\%$ .

13	$W_0(p) = \frac{2}{p^3 + 4p^2 - p + 1}$	Розрахувати параметри регулятора частотним методом
14	$W_0(p) = \frac{0.2}{p^2 - 2p + 5}$	Для об'єкта керування, поведінка якого описує передатна функція розрахувати регулятор частотним методом. Якість перехідних процесів у системі визначають бажані коріння характеристичного рівняння: $p_{1,2} = -2 \pm j2$ , $p_3 = -3$ . Уявити структурну схему системи з урахуванням реалізації регулятора
15	$W_0(p) = \frac{2}{5p^2 + 3p - 1}$	Розрахувати регулятор для об'єкта, поведінка якого описує передатна функція. Необхідно забезпечити такі показники якості перехідних процесів в замкнутій системі: $t_{\text{п}} < 2$ с, $\sigma < 10$ %, $\delta = 0$ . Уявити структурну схему реалізації регулятора
16	$W_0(p) = \frac{5(3p+1)}{(p+1)(p-2)}$	
17	$W_0(p) = \frac{10}{(2p+1)(5p+1)}$	
18	$W(p) = \frac{K}{p+3}$ , $W_p(p) = \frac{p+a}{p}$	Задані передавальна функція розімкнутої системи і регулятора. Виберіть значення $a$ і $K$ так, щоб перехідна характеристика мала перерегулювання близько 5%, а час встановлення (за критерієм 2%) дорівнювало приблизно 1с.
19	$W(p) = \frac{20}{p(p+2)(p+3)}$ , $W_p(p) = \frac{(p+0.15)(p+0.7)}{(p+0.015)(p+7)}$	Задані передавальна функція розімкнутої системи і регулятора. Покажіть, що в скоригованій системі запас по модулю дорівнює 24дБ, а запас по фазі становить $75^\circ$ .
20		Виберіть $K_1$ та $K_2$ так, щоб при ступінчастому вхідному сигналі перерегулювання становило 5%, а коефіцієнт помилки по швидкості $K_v$ дорівнював 5
21		Виберіть $K_1$ та $K_2$ так, щоб при ступінчастому вхідному сигналі перерегулювання становило 5%, а коефіцієнт помилки по швидкості $K_v$ дорівнював 5
22	$W(p) = \frac{1350}{p(p+2)(p+30)}$ , $W_k(p) = \frac{1+0.25p}{1+0.025p}$	Задані передавальна функція розімкнутої системи і регулятора. Визначте максимальне значення амплітудної характеристики і смугу пропускання замкнутої системи за допомогою діаграми Бode.
23	 $G(p) = \frac{3}{p(p+1)(0.5p+1)}$ , $H(p) = 1$	Задані передавальна функція прямого шляху і зворотного зв'язку. Синтезуються коригуючий пристрій з відставанням по фазі, яке забезпечуватиме запас по фазі $45^\circ$ .

24	$G(p) = \frac{40}{p(p+2)}$	<p>Задана передатна функція замкнутої системи. Потрібно, щоб при лінійному вхідному сигналі <math>r(t) = At</math> встановилася помилка була менше 0,05, а запас по фазі повинен бути рівний <math>30^\circ</math>.</p>
25		<p>Виберіть <math>K_1</math> та <math>K_2</math> так, щоб система володіла аперіодичною реакцією на ступінчастий вхідний сигнал і час встановлення (за критерієм) було менш 2с.</p>
26		<p>Визначте належні значення параметрів, про яких система буде мати перерегулювання близько 10% і час встановлення (по критерію 2%) от 0,4 до 0,6с.</p>
27	$G(p) = \frac{e^{-pT}}{\tau p + 1}, \quad W_p(p) = K_1 + \frac{k_2}{p}$	<p>Задані передавальні функції об'єкта і регулятора. Використовуючи частотні характеристики, визначте параметри регулятора, при яких величина перерегулювання буде менше 10%. Оцініть час встановлення (за критерієм 2%) синтезованої системи. Визначте дійсні значення перерегулювання і часу встановлення.</p>
28		<p>Вважаючи <math>G_c(p) = K</math>, виберіть таке значення K, при якому запас по фазі буде дорівнює <math>50^\circ</math>. Визначте, чому в цьому випадку дорівнює смуга пропускання замкнутої системи.</p>
29	$G(p) = \frac{K}{p(\frac{p}{2} + 1)(\frac{p}{6} + 1)}$	<p>Для системи, заданої передаточною функцією потрібно отримати коефіцієнт помилки за швидкістю <math>K_v = 20</math>, запас по фазі приблизно <math>45^\circ</math> і смугу пропускання замкнутої системи більше, ніж <math>\omega = 4</math> рад/с. Для розв'язок завдання використовуйте два однакових коригувальних пристрої з випередженням по фазі, з'єднаних послідовно.</p>
30	 $G(p) = \frac{100}{p(\frac{p^2}{6400} + \frac{p}{50} + 1)}$	<p>Скоригованій система повинна мати <math>K_v = 20</math>. Синтезуються регулятор, який забезпечував би при ступінчастому вхідному сигналі перерегулювання не більше 10%.</p>
31	$G(p) = \frac{0.15}{p(p+1)(5p+1)}$	<p>Передавальна функція системи має вигляд. Синтезуються коригуючий пристрій з випередженням по фазі так, щоб замкнута система мала смугу пропускання 0,75 рад/с, а запас по фазі дорівнював <math>30^\circ</math>.</p>

32	$G(p) = \frac{K}{p(p+10)(p+14)}$	<p>Задана розімкнута система. Потрібно, щоб при лінійному вхідному сигналі встановилася помилка дорівнювала 10% від швидкості цього сигналу, а домінуючим коріння повинен відповідати коефіцієнт загасання <math>\zeta = 0.707</math>. Синтезуються коригуючий пристрій з відставанням по фазі і визначте дійсні значення перерегулювання і часу встановлення (за критерієм 2%).</p>
33	$G(p) = \frac{10e^{-sT}}{p^2(p+10)}, T = 50,$ $G_c(p)G(p)H(p), \text{ где } H(p) = 1$	<p>Задані передавальні функції об'єкта та розімкнутого контуру керування. Синтезуються регулятор так, щоб максимум амплітудної характеристики замкнутої системи <math>M_{p\omega}</math> не перевищував 3,5 дБ, а її резонансна частота приблизно дорівнювала 1,4 рад / с.</p>
34	 $G(p) = \frac{1}{(p+1)(p+10)}$	<p>Синтезуйте регулятор <math>G_c(p)</math> так, щоб при ступінчастому вхідному сигналі перерегулювання було не менше 10%, а що встановилася помилка - менше 5% від амплітуди вхідного сигналу. Визначте смугу пропускання замкнутої системи.</p>
35	$G(p) = \frac{40}{p(p+2)}$	<p>Задана передавальна функція об'єкта. Потрібно забрати запас по фазі <math>30^\circ</math> і досить велику смугу пропускання. Виберіть частоту <math>\omega_c = 10</math> рад/с і синтезує коригуючий пристрій з випередженням по фазі. Перевірте результат синтезу, побудувавши діаграму Боде.</p>
36	$G(p) = \frac{40}{p(p+2)}$	<p>Запас по фазі в системі повинен бути рівний <math>30^\circ</math>. Встановлена помилка при лінійному вхідному сигналі <math>r(t) = t</math>, повинна дорівнювати 0,05. Синтезуються коригуючий пристрій з відставанням по фазі, що задовольняє цим вимогам. Перевірте результати шляхом побудови діаграми Боде.</p>

#### Питання для контролю

1. Що таке коректувальний пристрій, які існують способи включення коректувальних пристроїв до САК?
2. Які види перетворювальних елементів використовують у САК?
3. Як визначається передавальна функція пасивного чотириполосника?
4. Наведіть схеми диференціюючих, інтегруючих, інтегро-диференціюючих пасивних чотириполосників постійного струму.
5. Назвіть основні недоліки пасивних чотириполосників.

6. Як визначається передавальна функція активного чотиріполюсника постійного струму?
7. Назвіть основні переваги активних чотиріполюсників постійного струму.
8. Назвіть способи підвищення точності регулювання в усталених режимах.
9. У чому полягає протиріччя між точністю регулювання і стійкістю системи?

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурау Н. І., Півторак Д. О. Теорія автоматичного управління. Практикум: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2021. 57 с

2. Марченко А. А., Гулий В. С., Настенко Д. В. Теорія автоматичного керування: Дослідження системи автоматичного регулювання. КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 31 с.

3. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Електронні системи керування транспортними засобами» для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» («Колісні та гусеничні транспортні засоби») усіх форм навчання. Частина 2. Лабораторні роботи № 1-7 / Укл.: О. М. Артюх, О. В. Дударенко, А. Ю. Сосик, А. В. Щербина. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2020. 40 с.

4. В.В. Лишук, С.А. Мороз, В.Ю. Заблоцький, М.М. Євсюк, В.В. Гриценюк. Алгоритми керування автономними інверторами напруги перетворювачів частоти. Науковий журнал «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво». Луцьк, 2024. Випуск № 55. С.151-156.

5. Лишук В.В., Євсюк М.М., Селепина Й.Р., Мороз С.А., Літковець С.П. Імпульсно-фазове керування в електротехнічних пристроях. Журнал: «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво». №42, 2021. С.65-71.

6. Лишук В.В., Євсюк М.М., Мороз С.А., Хвищун М.В., Бабула І.В. Мікроконтролерне керування гібридними кроковими двигунами. Науковий журнал «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво» Луцьк, 2021. Випуск № 44. С. 30-36.

7. Лишук В. В., Заблоцький В. Ю., Приступа С. О., Мороз С. А., Євсюк М. М. Дослідження мехатронної системи «перетворювач частоти-асинхронний двигун-автомобільний генератор». Науковий журнал «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво». Луцьк, 2024. Випуск № 58. С.127-135.

8. Теорія автоматичного управління. Частина 1. Аналіз та дослідження САУ: навчальний посібник / [Т. М. Боровська, П. В. Северілов, В. А. Северілов та ін.]. Вінниця: ВНТУ, 2017. 144 с.

9. Інформаційні комп'ютерні системи автомобільного транспорту. URL: [https://atm.vntu.edu.ua/subject/books/IKCAT/Lec\\_Lab\\_IKS\\_AT.pdf](https://atm.vntu.edu.ua/subject/books/IKCAT/Lec_Lab_IKS_AT.pdf) (дата звернення 08.02.2026 р.)

10. Системи керування автоматичною коробкою передач. URL: <https://zauto.com.ua/systemy-keruvannia-avtomatom/> (дата звернення 08.02.2026 р.)

11. Теорія автоматичного управління. URL: [https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fksa/11Borovska\\_tau\\_kl/01.html](https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fksa/11Borovska_tau_kl/01.html) (дата звернення 08.02.2026 р.)

12. Халіков В. А.. Теорія автоматичного керування. Практикум. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/7b02486f-3732-424e-b0ef-bc751dc91990/content> (дата звернення 08.02.2026 р.)

A33

Автоматичне керування в автомобільних системах. Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Автомобільна електроніка» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво), спеціальності 171 Електроніка (G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка), денної та заочної форм навчання / уклад. С. А. Мороз. Луцьк: ЛНТУ, 2026. 128 с.

Друкується в авторській редакції

Підп. до друку «\_\_»\_\_\_\_\_2026 р.  
Формат 60x84/16. Папір офс.  
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. \_\_\_\_.  
Тираж \_\_\_\_ прим.

Відділ іміджу та промоції  
Луцького національного технічного університету  
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75  
Друк – ВІП ЛНТУ