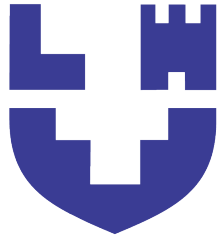


Міністерство освіти та науки України  
Луцький національний технічний університет



# **ЕЛЕКТРОТЕХНІКА В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ**

Методичні вказівки до практичних занять  
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
освітньої програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»  
галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво  
спеціальності G3 Електрична інженерія  
денної та заочної форм навчання

УДК 621.3.01(075)

E50

До друку

Голова вченої ради

факультету архітектури, будівництва та дизайну \_\_\_\_\_

О.В.Андрійчук

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозиторій ЛНТУ

Директор бібліотеки \_\_\_\_\_ Н.П. Поліщук

Затверджено вченою радою факультету архітектури, будівництва та дизайну ЛНТУ,

протокол № від « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2025 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри електричної інженерії ЛНТУ, протокол № від « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2025 року.

Завідувач кафедри електричної інженерії \_\_\_\_\_ Ю.В. Грицюк

Укладач: \_\_\_\_\_ А.В. Гадай, кандидат технічних наук, доцент кафедри електричної інженерії ЛНТУ

Рецензент: \_\_\_\_\_ В. І. Волинець, кандидат технічних наук, доцент кафедри електричної інженерії ЛНТУ

Відповідальний

за випуск: \_\_\_\_\_ Ю.В. Грицюк, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри електричної інженерії ЛНТУ

E50 Електротехніка в електроенергетиці [Текст] : методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 6 Інженерія, виробництво та будівництво спеціальності 63 Електрична інженерія денної та заочної форм навчання / уклад. А.В. Гадай. Луцьк : ЛНТУ. 2025. 255 с.

Видання містить теоретичні відомості та завдання, необхідні для засвоєння основних положень та набуття практичних навичок розрахунку електричних кіл.

Призначене для студентів спеціальності 63 Електрична інженерія денної та заочної форми навчання.

© А.В. Гадай, 2025

## ЗМІСТ

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	6
1.1 Пасивні елементи електричних кіл та їх рівняння	6
1.2 Джерела електричної енергії	9
1.3 Еквівалентні перетворення схем електричних кіл	12
2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	19
2.1 Способи з'єднання елементів у електричному колі. Аналіз простих кіл постійного струму	19
2.2 Розрахунок кіл постійного струму за законами Ома та Кірхгофа	28
2.3 Метод контурних струмів	32
2.4 Метод вузлових потенціалів	40
2.5 Еквівалентні перетворення у лінійних електричних колах	44
2.6 Метод накладання дії джерел енергії	48
2.7 Метод активного двополюсника	52
2.8 Передача максимальної потужності від активного двополюсника пасивному	57
3 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА	63
3.1 Графічний метод	63
3.2 Графо-аналітичний метод	70
4 ЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	75
4.1 Розрахунок кола синусоїдного струму при послідовному та паралельному з'єднанні елементів	75
4.2 Розрахунок кола синусоїдного струму змішаного з'єднання	83
4.3 Розрахунок складного кола синусоїдного струму	90
4.4 Використання методу еквівалентного генератора у колі синусоїдного струму	94
4.5 Розрахунок кола при послідовному та паралельному з'єднанні двох індуктивно-зв'язаних котушок	100
4.6 Розрахунок розгалуженого кола з індуктивними зв'язками	103

4.7 Розрахунок резонансних станів нерозгалужених та розгалужених електричних кіл	107
4.8 Якісний аналіз частотних характеристик двополіусників	115
5 ЧОТИРИПОЛІУСНИКИ	122
5.1 Основи теорії пасивних чотириполіусників	122
5.2 Способи з'єднання пасивних чотириполіусників	126
6 ТРИФАЗНІ КОЛА	134
6.1 Розрахунок трифазного симетричного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" чи "трикутником"	134
6.2 Розрахунок трифазного симетричного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" та "трикутником" (змішане навантаження)	140
6.3 Розрахунок несиметричного трифазного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" чи "трикутником"	145
6.4 Розрахунок трифазних кіл з різними видами з'єднання фаз	154
6.5 Особливі випадки несиметрії в трифазних колах	158
6.6 Розрахунок трифазного кола методом симетричних складових	168
7 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	179
7.1 Розрахунок однофазного лінійного кола з несинусоїдною ЕРС	179
7.2 Вищі гармоніки в трифазному колі	189
8 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	199
8.1 Розрахунок перехідного процесу у колі з одним накопичувачем енергії при дії постійних джерел енергії	199
8.2 Розрахунок перехідного процесу у колі з одним накопичувачем енергії при дії джерела синусоїдної напруги	210
8.3 Розрахунок перехідного процесу у колі з двома накопичувачами енергії при дії постійних джерел енергії	217
8.4 Розрахунок перехідного процесу у колі з двома накопичувачами енергії при дії синусоїдних джерел енергії	228

8.5	Операторній метод розрахунку перехідного процесу в електричному колі	231
8.6	Використання інтеграла Дюамеля для розрахунку перехідного процесу	237
9	ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	241
9.1	Визначення параметрів однорідної довгої лінії.	241
9.2	Лінії, узгоджені з навантаженням	246
9.3	Лінії без спотворень	249
9.4	Лінії без втрат	250

# 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

## 1.1 Пасивні елементи електричних кіл та їх рівняння

### Задача 1.1.

Визначити опір лампи розжарювання, якщо струм через неї дорівнює 0,2 А, а напруга на ній 220 В. Знайдіть потужність, яку споживає лампа.

### Розв'язання

Опір лампи за законом Ома

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220}{0,2} = 1100 \text{ Ом.}$$

Потужність, яку споживає лампа

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = U^2 \cdot R = 220 \cdot 0,2 = \frac{220^2}{1100} = 0,2^2 \cdot 1100 = 44 \text{ Вт.}$$

### Задача 1.2.

Визначити закон зміни струму, що тече через ємнісний елемент на інтервалі часу  $1 < t < 2$  с, якщо відома прикладена напруга (рис. 1.1) і  $C = 1$  Ф.

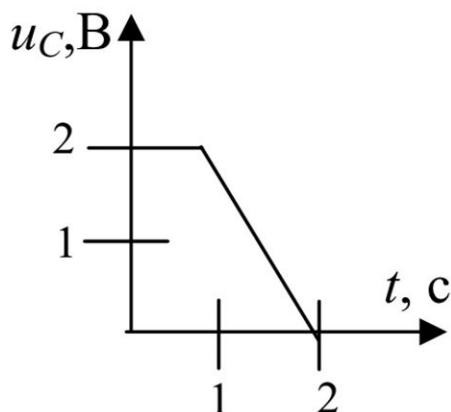


Рисунок 1.1

### Розв'язання

Згідно з рис. 1.1 закон зміни напруги на ємнісному елементі напруги на ємнісному елементі задано у вигляді графіка. Запишемо для нього рівняння прямої для інтервалу часу  $1 < t < 2$ с:

$$u_C(t) = -2t + 4.$$

Тоді струм визначиться

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} = 1 \cdot \frac{d(-2t + 4)}{dt} = -2 \text{ A.}$$

### Задача 1.3.

Напруга на індуктивності з моменту  $t \geq 0$  стає постійною. Визначити закон зміни струму якщо  $i(0) = 0$ .

#### Розв'язання

Оскільки напруга стає постійною, то можна записати

$$u_L(t) = U = \text{const},$$

тоді закон зміни струму запишеться у вигляді

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^t U dt = \frac{Ut}{L}.$$

### Задача 1.4.

Який опір має коло струму, якщо воно розірване? На рис. 1.2 показано розрив шнура для вимикання праски. Праска потужністю 1000 Вт і напругою 220 В.



Рисунок 1.2

#### Розв'язання

Опір праски в робочому стані

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{1000} = 24,2 \text{ Ом.}$$

Струм, який протікає через праску в робочому стані

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220}{24,2} = 9,1 \text{ А.}$$

Розрив кола – це опір, який наближається до нескінченно великої величини, яка позначається  $\infty$ . Тоді струм

$$I = \frac{U}{R + \infty} = \frac{220}{\infty} = 0.$$

### Задача 1.5.

Яке падіння напруги виникає на нитці лампи з опором  $r = 15$  Ом під час протікання струму  $I = 0,3$  А (рис. 1.3)?

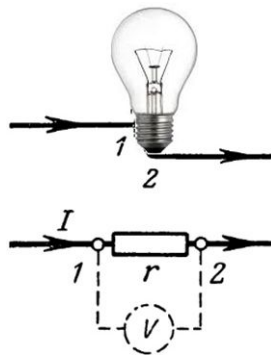


Рисунок 1.3

### Розв'язання

Падіння напруги підраховується за законом Ома

$$U = I \cdot r = 0,3 \cdot 15 = 4,5 \text{ В.}$$

Напруга між точками 1 і 2 лампочки (див. схему) становить 4,5 В. Лампочка світить нормально, якщо через неї проходить номінальний струм або якщо між точками 1 і 2 номінальна напруга (номінальні струм і напруга вказуються на лампі).

### Задача 1.6.

Дві однакові лампочки на напругу  $U_{Л.НОМ} = 2,5$  В і струм  $I_{Л.НОМ} = 0,3$  А з'єднані послідовно і підключені до батареї з напругою  $U_B = 4,5$  В. Яке падіння напруги створюється на затискачах окремих лампочок (рис. 1.4)?

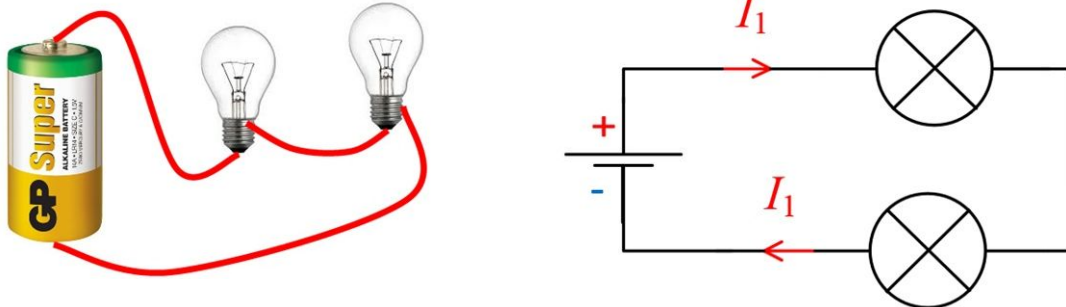


Рисунок 1.4

### Розв'язання

Однакові лампочки мають рівні опори  $r$ . Під час послідовного увімкнення через них проходить один і той самий струм  $I$ . Із цього випливає, що на них будуть однакові падіння напруги, а сума цих напруг має дорівнювати напрузі джерела  $U_B = 4,5$  В. На кожну лампочку припадає напруга  $4,5:2 = 2,25$  В.

Можна розв'язати цю задачу і послідовним розрахунком.

Опір лампочки розраховуємо за даними:

$$R_{Л.НОМ} = \frac{U_{Л.НОМ}}{I_{Л.НОМ}} = \frac{2,5}{0,3} = 8,33 \text{ Ом.}$$

Струм в колі

$$I = \frac{U}{2R_{Л.НОМ}} = \frac{4,5}{2 \cdot 8,33} = 0,27 \text{ А.}$$

Падіння напруги на лампочці

$$U_L = I \cdot R_{Л.НОМ} = 0,27 \cdot 8,33 = 2,25 \text{ В.}$$

## 1.2 Джерела електричної енергії

### Задача 1.7.

Електрорушійна сила елемента живлення  $E = 1$  В, а його внутрішній

опір  $R_{вн} = 0,5$  Ом. Який струм потече через лампочку, розраховану на напругу 1,5 В і струм 0,3 А? Яким буде внутрішнє падіння напруги? Яким буде внутрішнє падіння напруги елемента? Якою буде напруга на затискачах (рис. 1.5)?

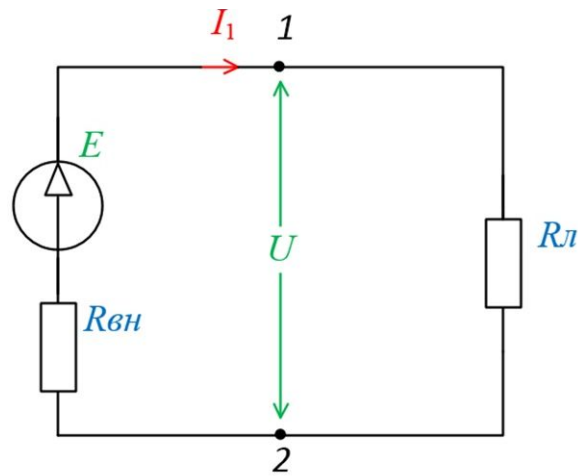


Рисунок 1.5

### Розв'язання

Опір лампочки (споживача)

$$R_{л} = \frac{U_{л.НОМ}}{I_{л.НОМ}} = \frac{1,5}{0,3} = 5 \text{ Ом.}$$

Загальний опір кола

$$R_{заг} = R_{л} + R_{вн} = 5 + 0,5 = 5,5 \text{ Ом.}$$

Струм у колі

$$I = \frac{E}{R_{заг}} = \frac{1}{5,5} = 0,18 \text{ А.}$$

Напруга на затискачах елемента

$$U_{л} = I \cdot R_{л} = 0,18 \cdot 5 = 0,9 \text{ В.}$$

Внутрішнє падіння напруги

$$U_{вн} = E - U_{л} = 1 - 0,9 = 0,1 \text{ В.}$$

### Задача 1.8.

Джерело з ЕРС  $E = 100$  В, внутрішнім опором  $r_0 = 1$  Ом замкнене на

зовнішній опір  $r$  (рис. 1.6). Визначити струм  $I$ ; напругу на затискачах джерела  $U$ ; потужність, яку віддає джерело в зовнішнє коло  $P_{\text{зовн}}$ ; потужність, яка витрачається в джерелі  $P_{\text{вн}}$ ; загальну потужність  $P_{\text{заг}}$ ; коефіцієнт корисної дії  $\eta$ .

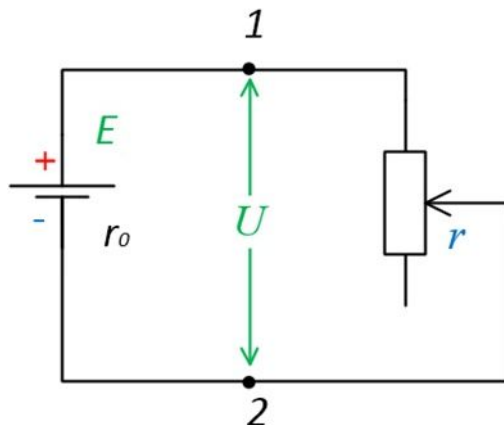


Рисунок 1.6

### Розв'язання

Струм в колі

$$I = \frac{E}{r + r_0} = \frac{100}{r + 1}.$$

Напруга на затискачах джерела

$$U = rI = r \frac{E}{r + r_0} = \frac{100r}{r + 1}.$$

Потужність, яку віддає джерело в зовнішнє коло

$$P_{\text{зовн}} = I^2 r = \frac{E^2}{(r + r_0)^2} r = \frac{10000r}{(r + 1)^2}.$$

Потужність, яка витрачається в джерелі

$$P_{\text{вн}} = I^2 r_0 = \frac{E^2}{(r + r_0)^2} r_0 = \frac{10000}{(r + 1)^2}.$$

Загальна потужність

$$P_{\text{заг}} = EI = I^2 (r + r_0) = \frac{E^2}{r + r_0} = \frac{E^2}{r + 1}.$$

Коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{P_{\text{зовн}}}{P_{\text{вн}}} = \frac{r}{r + r_0} = \frac{r}{r + 1}.$$

### 1.3 Еквівалентні перетворення схем електричних кіл

#### Задача 1.9.

Для кола (рис. 1.7) знайти еквівалентний опір між затискачами  $a$  і  $b$ ,  $c$  і  $d$ ,  $d$  і  $f$ , якщо  $r_1 = 6$  Ом,  $r_2 = 5$  Ом,  $r_3 = 15$  Ом,  $r_4 = 30$  Ом,  $r_5 = 6$  Ом.

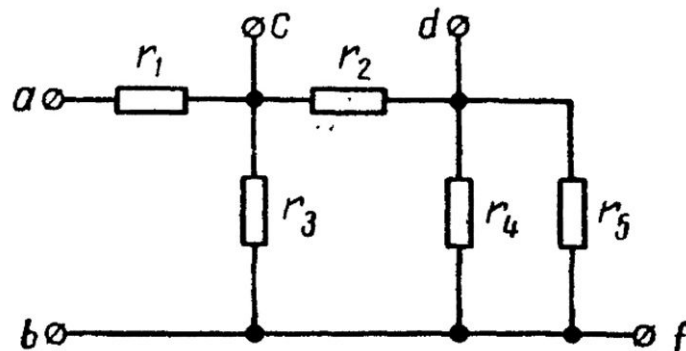


Рисунок 1.7

#### Розв'язання

1. Еквівалентний опір між затискачами  $a$  і  $b$ .

Еквівалентний опір паралельних опорів  $r_4$  і  $r_5$

$$r_{45} = \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} = \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 5 \text{ Ом.}$$

Цей опір з'єднаний послідовно з  $r_2$ . Їх загальний опір

$$r_{245} = r_2 + r_{45} = 5 + 5 = 10 \text{ Ом.}$$

Опір кола складається з опору  $r_1$ , послідовно яким з'єднані два паралельних опори  $r_{245}$  і  $r_3$ . Тоді еквівалентний опір кола

$$r_{ab} = r_1 + \frac{r_{245} r_3}{r_{245} + r_3} = 6 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 12 \text{ Ом.}$$

2. Еквівалентний опір між затискачами  $c$  і  $d$ .

Опори  $r_4$  і  $r_5$  також з'єднані паралельно. Опір  $r_3$  з'єднаний з ними послідовно

$$r_{345} = r_3 + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} = 15 + 5 = 20 \text{ Ом.}$$

Еквівалентний опір кола складається з двох паралельних з'єднаних опорів  $r_4$  і  $r_{345}$

$$r_{cd} = \frac{r_{345} r_2}{r_{345} + r_2} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \text{ Ом.}$$

3. Еквівалентний опір між затискачами  $d$  і  $f$ .

Еквівалентний опір між точками  $d$  і  $f$  складається з трьох паралельних з'єднаних опорів  $r_4$ ,  $r_5$  і  $r_2 + r_3$ . Визначимо еквівалентну провідність між точками  $d$  і  $f$

$$\frac{1}{r_{df}} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_2 + r_3} = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5 + 15} = \frac{1}{4} \text{ См,}$$

звідки

$$r_{df} = 4 \text{ Ом.}$$

### Задача 1.10.

Для кола (рис. 1.8) знайти вхідний опір, якщо  $r_1 = r_4 = 1 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = r_5 = 4 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = r_6 = 5 \text{ Ом}$ .

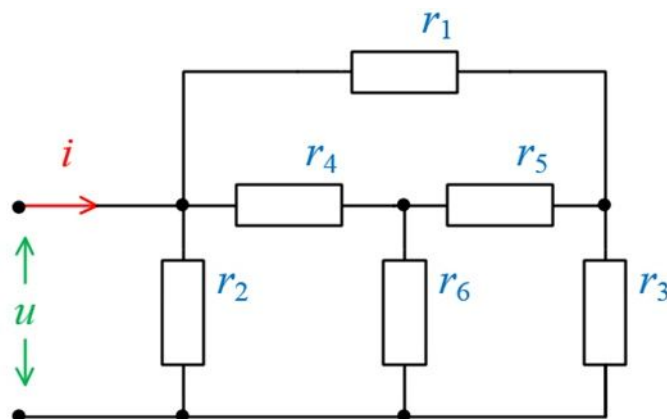


Рисунок 1.8

### Розв'язання

Варіанти спрощення схеми, зображеної на рис 1.8, наведено на рис. 1.9. Якщо перетворити з'єднання зіркою опорів  $r_4$ ,  $r_5$ ,  $r_6$  на еквівалентне з'єднання трикутником опорів  $R_{45}$ ,  $R_{56}$ ,  $R_{64}$ , то отримуємо схему, зображену на рис. 1.9, б,

де можна виділити паралельно і послідовно з'єднані елементи.

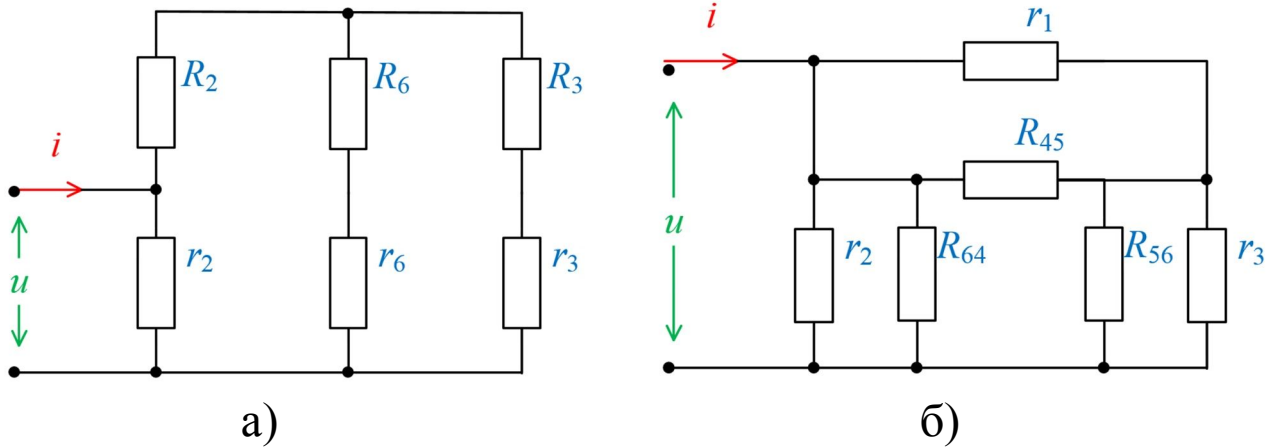


Рисунок 1.9

Аналогічно можна перетворити з'єднання трикутником опорів  $r_1, r_4, r_5$  на еквівалентне з'єднання опорів зіркою опорів  $R_2, R_3, R_6$  і також спростити схему, як показано на рис 1.9, а.

Виконаємо розрахунок для схеми, зображеної на рис. 1.9, б. Спочатку знайдемо значення опорів перетвореної зірки

$$R_{45} = r_4 + r_5 + \frac{r_4 r_5}{r_6} = 1 + 4 + \frac{1 \cdot 4}{5} = 5,8 \text{ Ом},$$

$$R_{56} = r_5 + r_6 + \frac{r_5 r_6}{r_4} = 4 + 5 + \frac{4 \cdot 4}{1} = 29 \text{ Ом},$$

$$R_{64} = r_6 + r_4 + \frac{r_6 r_4}{r_5} = 5 + 1 + \frac{5 \cdot 1}{4} = 7,25 \text{ Ом}.$$

Об'єднаємо паралельне вмикання опорів

$$r'_1 = \frac{r_1 R_{45}}{r_1 + R_{45}} = \frac{1 \cdot 5,8}{1 + 5,8} = 0,853 \text{ Ом},$$

$$r'_2 = \frac{r_2 R_{64}}{r_2 + R_{64}} = \frac{4 \cdot 7,25}{4 + 7,25} = 2,578 \text{ Ом},$$

$$r'_3 = \frac{r_3 R_{56}}{r_3 + R_{56}} = \frac{5 \cdot 29}{5 + 29} = 4,256 \text{ Ом}.$$

Еквівалентний вхідний опір

$$r_{екв} = \frac{r_2'(r_1' + r_3')}{r_2' + (r_1' + r_3')} = \frac{2,578 \cdot (0,853 + 4,256)}{2,578 + (0,853 + 4,256)} = 1,714 \text{ Ом.}$$

Такий самий результат можна отримати, якщо скористатися схемою, зображеною на рис. 1.9, а. Для цієї схеми опори еквівалентної зірки мають значення:

$$R_2 = \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4 + r_5} = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1 + 4} = 0,166 \text{ Ом,}$$

$$R_6 = \frac{r_4 r_5}{r_1 + r_4 + r_5} = \frac{1 \cdot 4}{1 + 1 + 4} = 0,666 \text{ Ом,}$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_5}{r_1 + r_4 + r_5} = \frac{1 \cdot 4}{1 + 1 + 4} = 0,666 \text{ Ом.}$$

Об'єднуючи послідовно з'єднані опори, отримаємо

$$r_3' = R_3 + r_3 = 0,666 + 5 = 5,666 \text{ Ом,}$$

$$r_6' = R_6 + r_6 = 0,666 + 5 = 5,666 \text{ Ом.}$$

Оскільки ці опор ввімкнені паралельно, то результуючий опір

$$r_{63} = \frac{r_6' r_3'}{r_6' + r_3'} = \frac{5,666 \cdot 5,666}{5,666 + 5,666} = 2,833 \text{ Ом.}$$

Об'єднуючи цей опір з опором  $R_2$  знайдемо

$$R_2' = R_2 + r_{63} = 0,166 + 2,833 = 3 \text{ Ом.}$$

Еквівалентний вхідний опір схеми

$$r_{екв} = \frac{r_2 R_2'}{r_2 + R_2'} = \frac{4 \cdot 3}{4 + 3} = 1,714 \text{ Ом,}$$

що співпадає з результатом, отриманим раніше, і показує, що від способу перетворення схеми результат не залежить.

### Задача 1.11.

Для схеми, показаної на рис. 1.10, визначити еквівалентну вхідну ємність, якщо  $C_1 = C_3 = 4$  мкФ,  $C_2 = C_4 = 6$  мкФ,  $C_5 = 2$  мкФ.

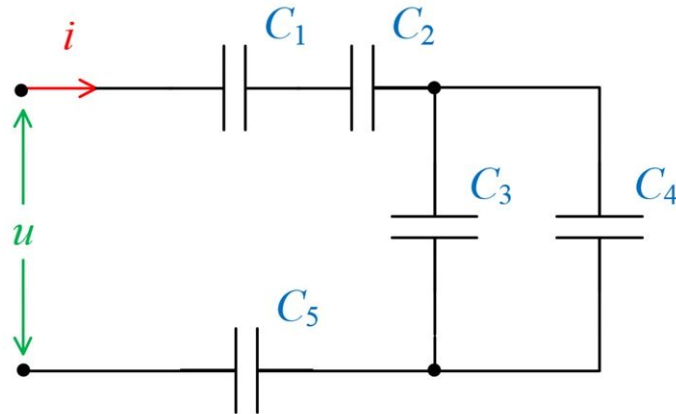


Рисунок 1.10

### Розв'язання

Послідовні етапи спрощення схеми зображено на рис. 1.11.

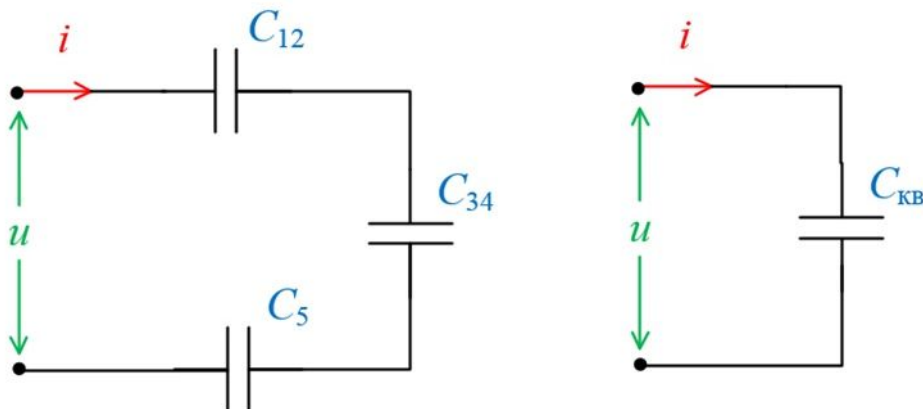


Рисунок 1.11

Значення ємностей при послідовних перетвореннях схеми визначаємо за формулами:

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 2,4 \text{ мкФ};$$

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 6 + 4 = 10 \text{ мкФ}.$$

Оскільки ці ємності увімкнені послідовно з  $C_5$ , то еквівалентну вхідну ємність знайдемо, складаючи зворотні значення ємностей:

$$\frac{1}{C_{\text{екв}}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{34}} + \frac{1}{C_5} = \frac{1}{2,4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = 1,017 \text{ мкФ}^{-1},$$

Звідки знаходимо

$$C_{екв} = \frac{1}{1,017} = 0,983 \text{ мкФ.}$$

**Задача 1.12.**

Для схеми, показаної на рис. 1.12, визначити еквівалентну вхідну індуктивність, якщо  $L_1 = L_4 = 2 \text{ Гн}$ ,  $L_2 = L_3 = 4 \text{ Гн}$ .

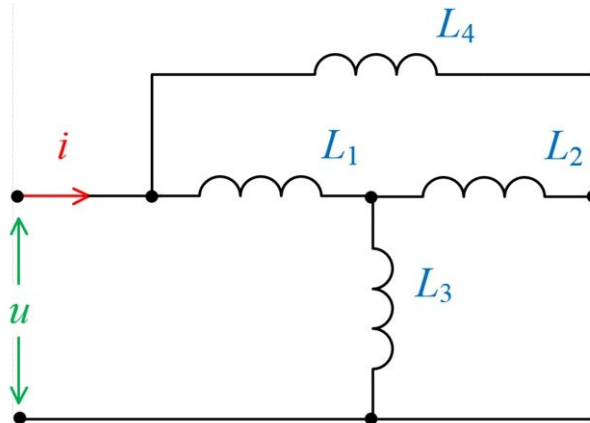


Рисунок 1.12

**Розв'язання**

Рішення. Для визначення еквівалентної індуктивності здійснимо заміну індуктивностей  $L_1, L_2, L_3$ , з'єднаних за схемою зірки, еквівалентним з'єднанням за схемою трикутника, як зображено на рис. 1.13.

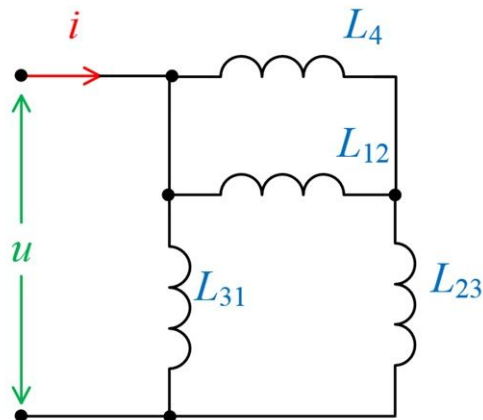


Рисунок 1.13

Значення індуктивностей перетвореної схеми визначимо за формулами:

$$L_{12} = L_1 + L_2 + \frac{L_1 L_2}{L_3} = 2 + 4 + \frac{2 \cdot 4}{4} = 8 \text{ Гн,}$$

$$L_{23} = L_2 + L_3 + \frac{L_2 L_3}{L_1} = 4 + 4 + \frac{4 \cdot 4}{2} = 16 \text{ Гн},$$

$$L_{31} = L_3 + L_1 + \frac{L_3 L_1}{L_2} = 4 + 2 + \frac{4 \cdot 2}{4} = 8 \text{ Гн}.$$

Індуктивності  $L_4$  і  $L_{12}$  ввімкнені паралельно між собою і послідовно з індуктивністю  $L_{23}$ , тому

$$L'_4 = L_{23} + \frac{L_4 L_{12}}{L_4 + L_{12}} = 16 + \frac{2 \cdot 8}{2 + 8} = 17,6 \text{ Гн}.$$

Еквівалентну індуктивність знайдемо за формулою

$$L_{\text{екв}} = \frac{L_{31} L'_4}{L_{31} + L'_4} = \frac{8 \cdot 17,6}{8 + 17,6} = 5,5 \text{ Гн}.$$

## 2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

### 2.1 Способи з'єднання елементів у електричному колі. Аналіз простих кіл постійного струму

#### Задача 2.1.

Визначити покази вольтметра (рис. 2.1) за заданих параметрів кола.  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $E_1 = 60 \text{ В}$ ;  $E_2 = 20 \text{ В}$ ;  $E_3 = 10 \text{ В}$ ;  $U = 40 \text{ В}$ .

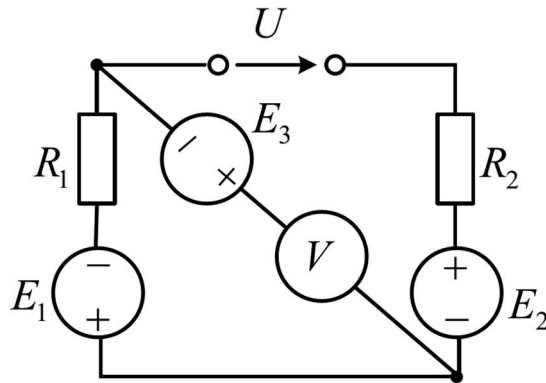


Рисунок 2.1

#### Розв'язання

Будь-який вимірювальний пристрій не повинен вносити змін у розподіл струмів, які протікають у колі. При аналізі кіл умовно приймають внутрішній опір вольтметра рівний нескінченності, а амперметра – нулю. Відповідно на схемах заміщення видалений вольтметр моделюють розривом, а амперметр – перемичкою.

Виходячи з вище сказаного у заданому колі протікає один струм у зовнішньому контурі. Довільно задамо напрям протікання струму, наприклад, проти годинникової стрілки та запишемо рівняння відносно затискачів джерела напруги  $U$ , застосувавши II закон Кірхгофа:

$$U = I \cdot (R_1 + R_2) - E_1 - E_2.$$

Звідки струм у колі

$$I = \frac{U + E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 + 60 + 20}{10 + 20} = 4 \text{ А}.$$

Показ вольтметр

$$U_V = E_3 + IR_1 - E_1 = 10 + 4 \cdot 10 - 60 = -10 \text{ В.}$$

або

$$U_V = E_3 + U + E_2 - IR_2 = 10 + 40 + 20 - 4 \cdot 20 = -10 \text{ В.}$$

Незалежно від напрямку обходу контуру отримані однакові значення показу вольтметра.

### Задача 2.2.

У електричному колі рис. 2.2 відомі опори  $r_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 150 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 50 \text{ Ом}$  і вхідна напруга  $U = 150 \text{ В}$ . Розрахувати струми при розімкненому рубильнику  $S$ . Як зміняться струми, якщо рубильник буде замкнений?

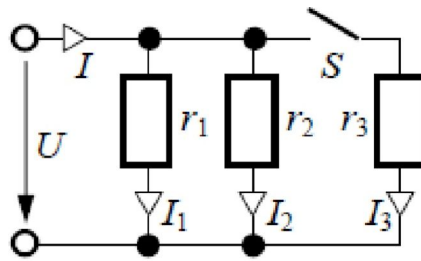


Рисунок 2.2

### Розв'язання

При розімкненому рубильнику  $S$  струми опорів розрахуємо за законом Ома:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{150}{100} = 1,5 \text{ А.}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{150}{150} = 1 \text{ А.}$$

$I_3 = 0$ , оскільки рубильник розімкнений

Струм на вході паралельного з'єднання знайдемо відповідно до першого закону Кірхгофа

$$I = I_1 + I_2 = 1,5 + 1 = 2,5 \text{ А.}$$

При замкненому рубильнику струми

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{150}{100} = 1,5 \text{ A} - \text{ має попереднє значення,}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{150}{150} = 1 \text{ A} - \text{ також не зміниться.}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{150}{50} = 3 \text{ A.}$$

Струм на вході кола зміниться:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1,5 + 1 + 3 = 5,5 \text{ A.}$$

### Задача 2.3.

Встановити залежність між струмом на вході паралельно з'єднання (рис. 2.3) двох гілок з резистивними елементами та струмами у цих паралельних вітках.

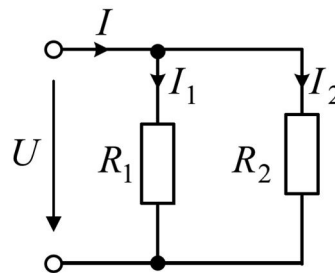


Рисунок 2.3

Згідно першого закону Кірхгофа струм на вході кола

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_{екв}},$$

де

$$R_{екв} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - \text{ еквівалентний опір кола.}$$

Відповідно до закону Ома напруга на вході кола може бути розраховано за одним з виразів:

$$U = I \cdot R_{екв} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_1 R_1 = I_2 R_2.$$

Звідси

$$I_1 R_1 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

тому

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$I_2 R_2 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

тому

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2};$$

Отримані вирази для розрахунку струмів у паралельних вітках називають **правилом чужого опору**. Це правило можна застосовувати, якщо гілок не більше двох. Кількості елементів у кожній з паралельних гілок та способи їх з'єднання не обмежується.

#### Задача 2.4.

У колі рис. 2.4 визначити струми за умови, якщо рубильник буде замкнений. Параметри кола  $U = 36$  В;  $R_1 = 4$  Ом;  $R_2 = 1$  Ом;  $R_3 = 2$  Ом;  $R_4 = R_5 = 6$  Ом.

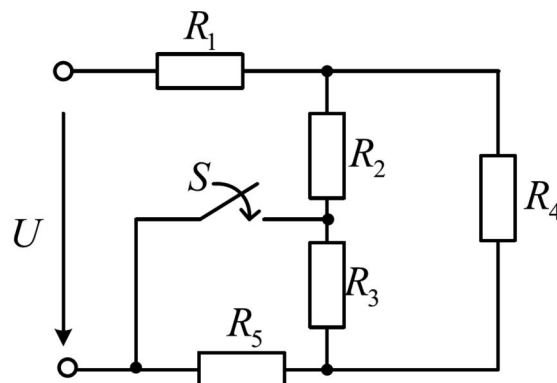


Рисунок 2.4

#### Розв'язання

Виконаємо розрахунок кола при замкненому ключі  $S$ .

Тип з'єднань опорів неочевидний, тому пронумеруємо вузли (див. рис. 2.5) і перемальовуємо коло більш наочно (див. рис. 2.6). У разі замкненого рубильника, провідник, що його містить, формує лінію єдиного потенціалу. А отже резистори  $R_3$  та  $R_5$  з'єднані паралельно, оскільки провідник між точками **3-3** можна подати єдиною точкою, тому

$$R_{35} = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5} = \frac{2 \cdot 6}{2 + 6} = 1,5 \text{ Ом.}$$

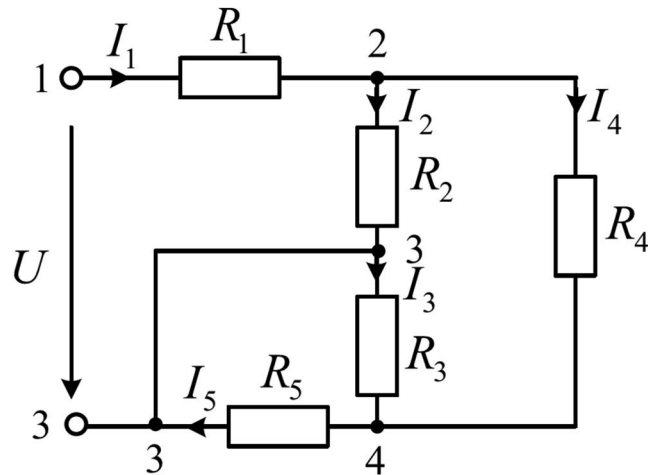


Рисунок 2.5

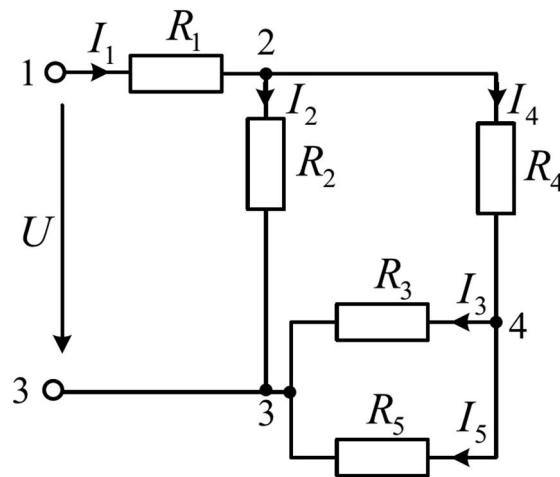


Рисунок 2.6

Отриманий опір з'єднаний послідовно з  $R_4$  (див. рис. 2.7).

Вказуємо додатні напрями струмів (рис. 2.6) за умови замкненого рубильника  $S$ .

Для визначення струму на вході кола застосуємо закон Ома:

$$I = \frac{U}{R_{екв}},$$

де  $Re_{кв} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  – еквівалентний опір кола, який треба знайти.

$$Re_{кв} = R_1 + \frac{R_2(R_4 + R_{35})}{R_2 + (R_4 + R_{35})} = 4,882 \text{ Ом.}$$

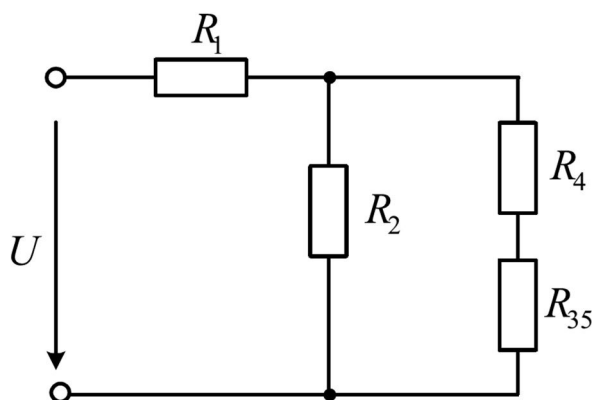


Рисунок 2.7

Струм на вході кола

$$I_1 = \frac{U}{R_{екв}} = \frac{36}{4,882} = 7,374 \text{ А.}$$

Струм у розгалуженій частині кола

$$I_2 = I_1 \frac{R_4 + R_{35}}{R_2 + (R_4 + R_{35})} = 6,506 \text{ А,}$$

$$I_4 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + (R_4 + R_{35})} = 0,868 \text{ А,}$$

$$I_5 = I_4 \frac{R_3}{R_3 + R_5} = 0,217 \text{ А,}$$

$$I_3 = I_4 \frac{R_5}{R_3 + R_5} = 0,651 \text{ А.}$$

### Задача 2.5.

Розрахувати струми у всіх вітках кола (рис. 2.8) та покази вимірювальних приладів  $R_1=20 \text{ Ом}$ ;  $R_2=20 \text{ Ом}$ ;  $R_3=80 \text{ Ом}$ ;  $R_4=120 \text{ Ом}$ ;  $R_5=80 \text{ Ом}$ ;  $R_6=400 \text{ Ом}$ ;  $R_7=36 \text{ Ом}$ ;  $U=100 \text{ В}$ .

### Розв'язання

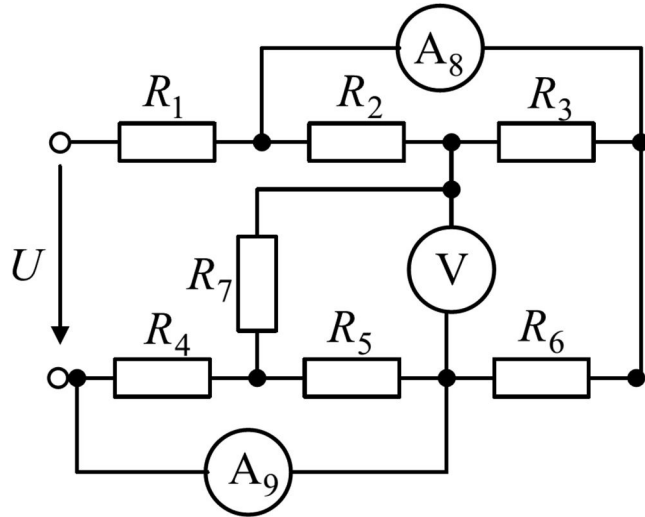


Рисунок 2.8

Тип з'єднань опорів неочевидний, тому пронумеруємо вузли, замінюємо вимірювальні прилади їх внутрішніми опорами (див. рис. 2.9) і перемальовуємо коло більш наочно із зазначенням додатних напрямів струмів (див. рис. 2.10).

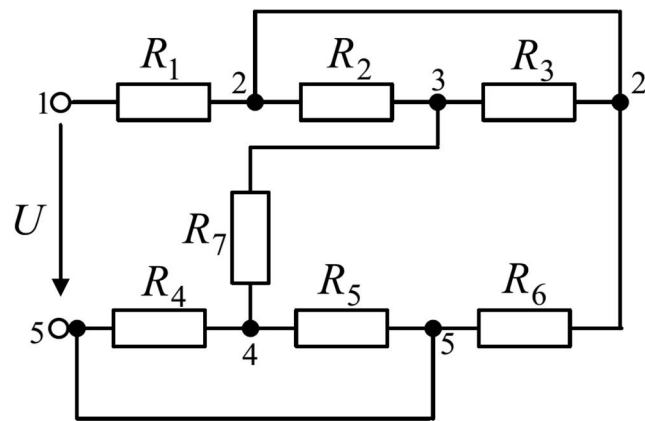


Рисунок 2.9

Для розрахунку вхідного струму застосуємо закон Ома:

$$I_1 = \frac{U_{15}}{R_{екв}},$$

де  $R_{екв}$  – еквівалентний опір кола, який треба знайти.

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20 \cdot 80}{20 + 80} = 16 \text{ Ом},$$

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{120 \cdot 80}{120 + 80} = 48 \text{ Ом},$$

$$R_{e_{кв}} = R_1 + \frac{R_6(R_{23} + R_7 + R_{45})}{R_6 + (R_{23} + R_7 + R_{45})} = 20 + \frac{400 \cdot (16 + 36 + 48)}{400 + (16 + 36 + 48)} = 100 \text{ Ом.}$$

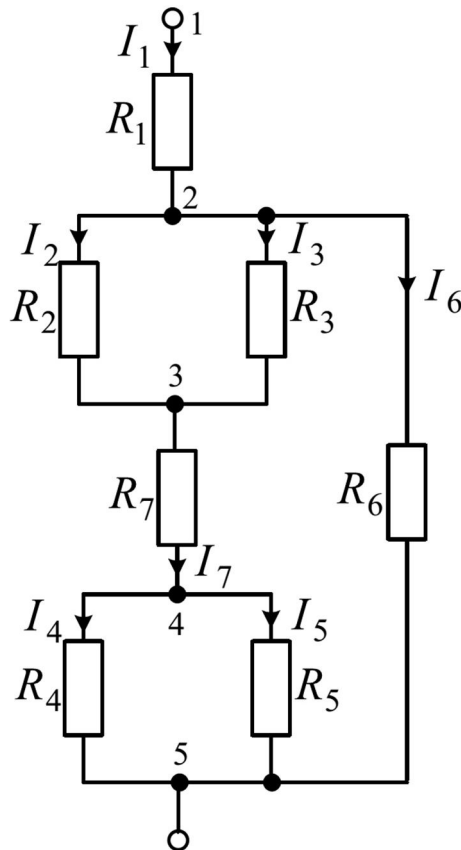


Рисунок 2.10

Розрахунок струму на вході кола:

$$I_1 = \frac{U_{15}}{R_{e_{кв}}} = \frac{100}{100} = 1 \text{ A.}$$

Розрахунок струмів у розгалуженій частині кола:

$$I_6 = I_1 \frac{R_{23} + R_7 + R_{45}}{R_6 + (R_{23} + R_7 + R_{45})} = 1 \cdot \frac{16 + 36 + 48}{400 + (16 + 36 + 48)} = 0,2 \text{ A,}$$

$$I_7 = I_1 \frac{R_6}{R_6 + (R_{23} + R_7 + R_{45})} = 1 \cdot \frac{400}{400 + (16 + 36 + 48)} = 0,8 \text{ A,}$$

$$I_2 = I_7 \frac{R_3}{R_3 + R_2} = 0,8 \cdot \frac{80}{80 + 20} = 0,64 \text{ A,}$$

$$I_3 = I_7 \frac{R_2}{R_3 + R_2} = I_7 - I_2 = 0,8 \cdot \frac{20}{80 + 20} = 0,16 \text{ A,}$$

$$I_4 = I_7 \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 0,8 \cdot \frac{80}{80 + 120} = 0,32 \text{ A},$$

$$I_5 = I_7 \frac{R_4}{R_4 + R_5} = I_7 - I_4 = 0,8 \cdot \frac{120}{80 + 120} = 0,48 \text{ A}.$$

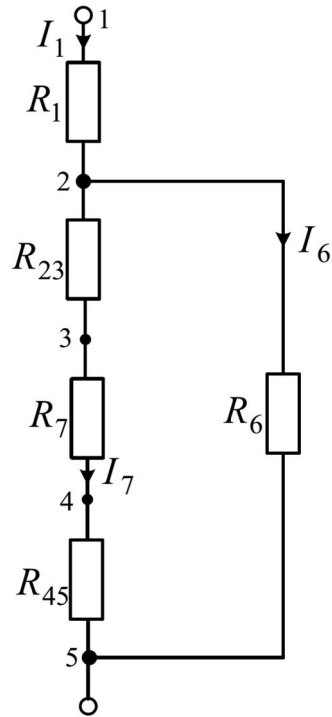


Рисунок 2.11

Встановимо покази вимірювальних приладів, для цього нанесемо обрані напрями струмів (рис. 2.10) на задану схему кола користуючись маркуванням вузлів.

Згідно першому закону Кірхгофа

$$I_8 = I_1 - I_2 = 1 - 0,64 = 0,36 \text{ A},$$

$$I_9 = I_5 + I_6 = I_1 - I_2 = 0,48 + 0,2 = 0,68 \text{ A}$$

або

$$I_9 = I_1 - I_4 = 1 - 0,32 = 0,68 \text{ A}.$$

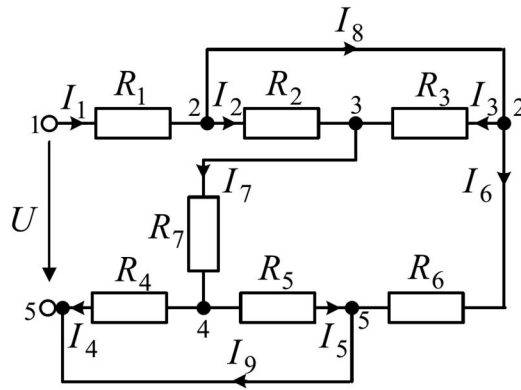


Рисунок 2.12

## 2.2 Розрахунок кіл постійного струму за законами Ома та Кірхгофа

### Задача 2.6.

Для схеми, що наведена на рис. 2.13, відомі покази приладів: вольтметр  $V$  показує 120 В, ватметр  $W$  має показання 240 Вт. Відомі опори  $R_1=16$  Ом,  $R_2=40$  Ом. Визначити струми, опір  $R_3$ , напругу  $U$ . Перевірити баланс потужностей.

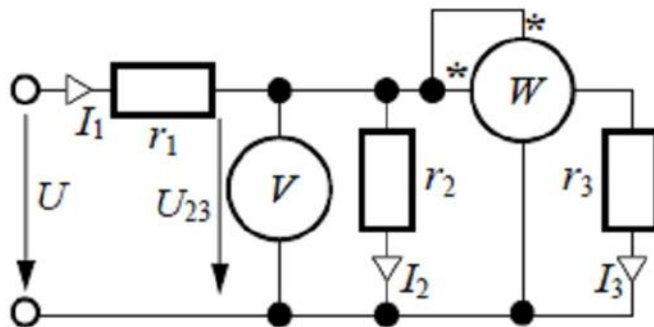


Рисунок 2.13

### Розв'язання

Вольтметр  $V$  вимірює напругу  $U_{23} = 120$  В на ділянці із паралельним з'єднанням опорів  $R_2$  і  $R_3$ . За законом Ома струм через  $R_2$

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = \frac{120}{40} = 3 \text{ A.}$$

Ватметр вимірює потужність, що споживається опором  $R_3$

$$P_W = I_3^2 \cdot R_3 = U_{23} \cdot I_3,$$

тому

$$I_3 = \frac{P_W}{U_{23}} = \frac{240}{120} = 2 \text{ A},$$

а за законом Ома

$$R_3 = \frac{U_{23}}{I_3} = \frac{120}{2} = 60 \text{ Ом.}$$

Струм опору  $R_1$  і джерела живлення відповідно до першого закону Кірхгофа

$$I_1 = I_2 + I_3 = 3 + 2 = 5 \text{ A.}$$

Згідно з другим законом Кірхгофа для контуру  $R_1 - R_2 - U$  знайдемо напругу на вході схеми рис. 2.13

$$U = I_1 R + U_{23} = 5 \cdot 16 + 120 = 200 \text{ В.}$$

Потужність генератора

$$P_G = UI_1 = 200 \cdot 5 = 1000 \text{ Вт.}$$

Сумарна потужність приймачів

$$P_{II} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 5^2 \cdot 16 + 3^2 \cdot 40 + 2^2 \cdot 60 = 1000 \text{ Вт.}$$

Оскільки баланс потужностей  $P_G = P_{II}$  виконується, задача розв'язана вірно.

### Задача 2.7.

В схемі рис. 2.14 струм  $I_4 = 8 \text{ A}$ . Відомі деякі параметри схеми:  $E_1 = 120 \text{ В}$ ,  $E_4 = 80 \text{ В}$ ,  $E_5 = 6 \text{ В}$ ,  $r_2 = r_4 = 6 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = r_5 = 2 \text{ Ом}$ ,  $r_6 = 3 \text{ Ом}$ .

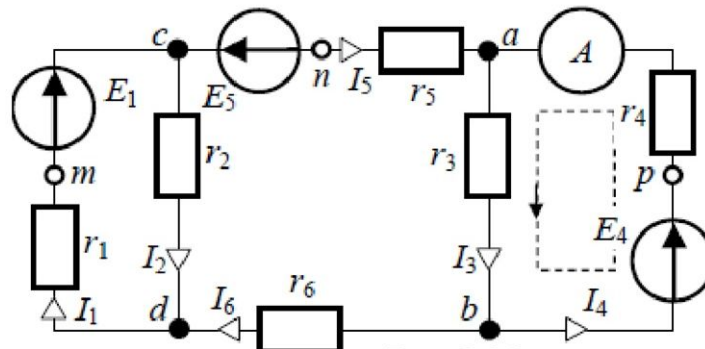


Рисунок 2.14

Визначити решту струмів, знайти опір  $r_1$ . Для зовнішнього контуру побудувати потенціальну діаграму.

### Розв'язання

Відповідно до другого закону Кірхгофа для контуру  $a-b-p-a$  маємо

$$I_4 r_4 + I_3 r_3 = E_4,$$

звідки

$$I_3 = \frac{E_4 - I_4 r_4}{r_3} = \frac{80 - 8 \cdot 6 r_4}{2} = 16 A.$$

За першим законом Кірхгофа одержимо

- для вузла  $a$ :

$$I_3 - I_5 - I_4 = 0;$$

- для вузла  $b$ :

$$I_6 + I_4 - I_3 = 0,$$

звідки

$$I_5 = I_6 = I_3 - I_4 = 16 - 8 = 8 A.$$

Відповідно до другого закону Кірхгофа для контуру  $c-n-a-b-d$  маємо

$$I_6 r_6 - I_2 r_2 + I_5 r_5 + I_3 r_3 = -E_5,$$

звідки

$$I_2 = \frac{E_5 + I_5 r_5 + I_3 r_3 + I_6 r_6}{r_2} = \frac{6 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 16 \cdot 2}{6} = 13 A.$$

За першим законом Кірхгофа одержимо для вузла  $d$ :

$$I_1 = I_2 + I_6 = 13 + 8 = 21 A.$$

Відповідно до другого закону Кірхгофа для контуру  $d-m-c$

$$I_2 r_2 + I_1 r_1 = E_1,$$

звідки

$$r_1 = \frac{E_1 - I_2 r_2}{I_1} = \frac{12 - 13 \cdot 6}{21} = 2 \text{ Ом.}$$

Потенціальна діаграма контуру схеми – це графік зміни потенціалу в залежності від опорів, що входять у цей контур. У зовнішньому контурі кола промарковані не лише вузли, а й полюси послідовно з'єднаних елементів кожної з гілок. Таким чином полюси кожного з елементів зовнішнього контуру промарковані.

Для побудови потенціальної діаграми (рис. 2.15) обираємо базовий вузол, потенціал якого рівний нулю, наприклад,  $\varphi_d = 0$ . Задаємо напрям обходу контуру, наприклад, за годинниковою стрілкою і розраховуємо потенціали наступних точок після базової:

$$\varphi_d = 0;$$

$$\varphi_m = \varphi_d - I_1 r_1 = 0 - 21 \cdot 2 = -42 \text{ В};$$

$$\varphi_c = \varphi_m + E_1 = -42 + 120 = 78 \text{ В};$$

$$\varphi_n = \varphi_c - E_5 = 78 - 6 = 72 \text{ В};$$

$$\varphi_a = \varphi_n - I_5 r_5 = 72 - 8 \cdot 2 = 56 \text{ В};$$

$$\varphi_p = \varphi_a + I_4 r_4 = 56 + 8 \cdot 6 = 104 \text{ В};$$

$$\varphi_b = \varphi_p - E_4 = 104 - 80 = 24 \text{ В};$$

$$\varphi_d = \varphi_b - I_6 r_6 = 24 - 8 \cdot 3 = 0.$$

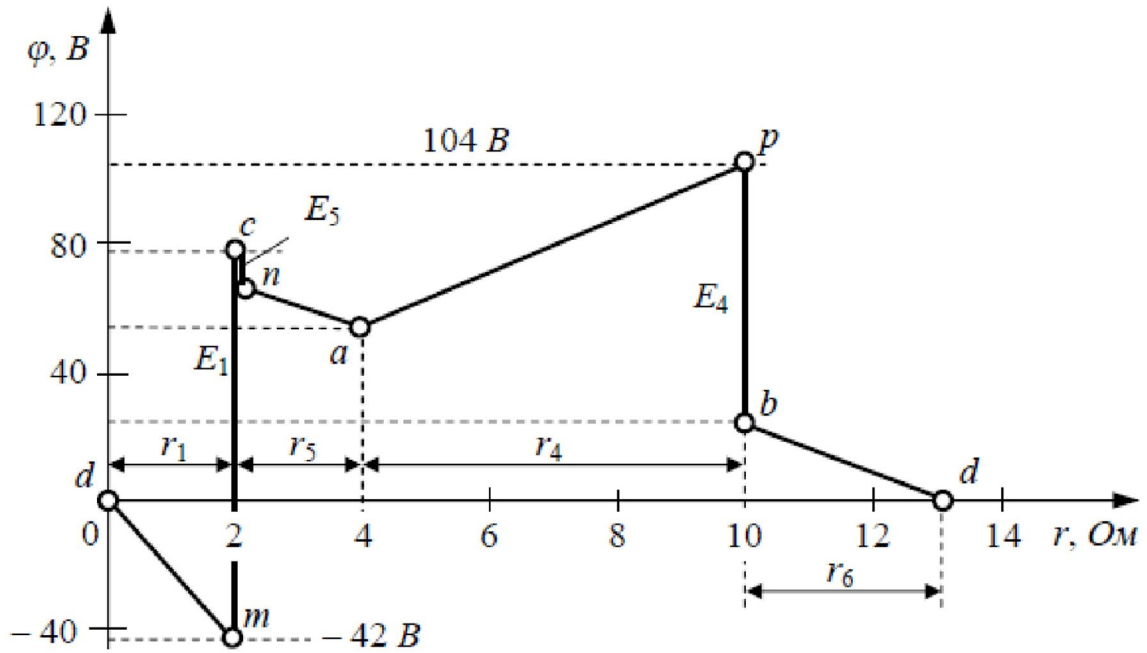


Рисунок 2.15

### 2.3 Метод контурних струмів

#### Задача 2.8.

Повторити розрахунок кола рис. 2.16 методом контурних струмів (МКС) та порівняти методи розрахунків.  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $E_1 = 2 \text{ В}$ ,  $E_2 = 6 \text{ В}$ ,  $J_4 = 3 \text{ А}$ ,  $J_5 = 2 \text{ А}$ .

Перевірити правильність розрахунку за балансом потужностей.

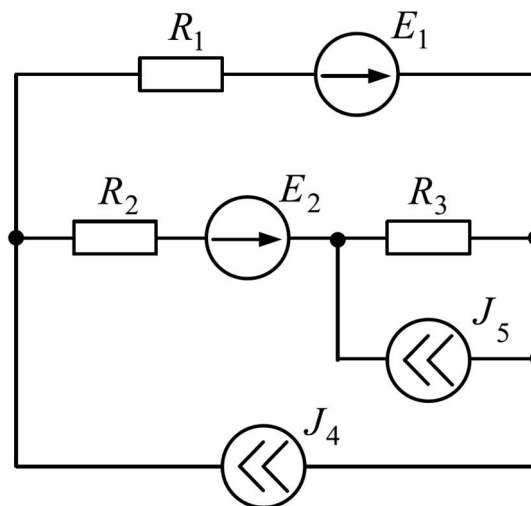


Рисунок 2.16

#### Розв'язання

Задане коло містить три незалежних контури. Для кожного з них

задаємо довільні напрямками контурних струмів.

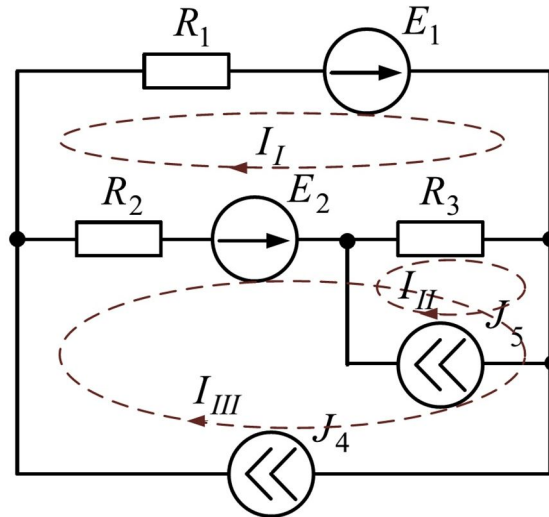


Рисунок 2.17

Оскільки два незалежних контура містять джерела струму, то вважаємо, що контурні струми другого та третього контурів відомі:

$$I_{II} = J_5 = 2 \text{ A},$$

$$I_{III} = J_4 = 3 \text{ A}.$$

Таким чином, за МКС складаємо лише одне рівняння відносно невідомого першого контурного струму  $I_I$ :

$$I_I (R_1 + R_2 + R_3) - I_{II} R_3 - I_{III} (R_2 + R_3) = E_1 - E_2$$

$$I_I (4 + 3 + 3) - 2 \cdot 3 - 3 (3 + 3) = 2 - 6$$

$$I_I = 2 \text{ A}.$$

Визначимо струми у вітках кола.

Оскільки, через гілку з  $R_1$  протікає лише перший контурний струм, то

$$I_1 = I_I = 2 \text{ A}.$$

$$I_2 = I_{III} - I_I = 3 - 2 = 1 \text{ A}.$$

$$I_3 = I_{III} + I_{II} - I_I = 3 + 2 - 2 = 3 \text{ A}.$$

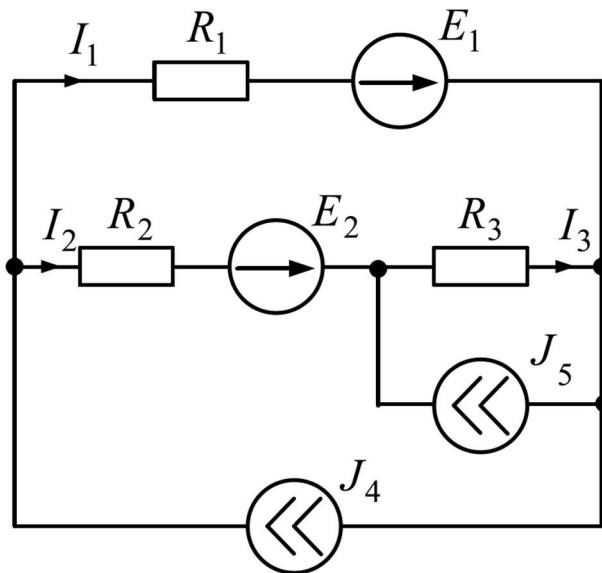


Рисунок 2.18

Розраховані величини струмів у вітках кола МКС співпадають із величинами струмів, розрахованих для цього кола за рівняннями Кірхгофа. Слід зауважити, що система за рівняннями Кірхгофа містить три рівняння, а за МКС лише одне. Отже, при проведенні аналізу кола необхідно коректно вибирати розрахунковий метод.

**Задача 2.9.**

Виконати розрахунок струмів МКС та скласти баланс потужностей за заданих параметрів кола (рис. 2.19):  $R_1=10$  Ом;  $R_2=26$  Ом;  $R_3=20$  Ом;  $R_4=30$  Ом;  $R_5=50$  Ом;  $E_1=260$  В;  $J_6=5$  А

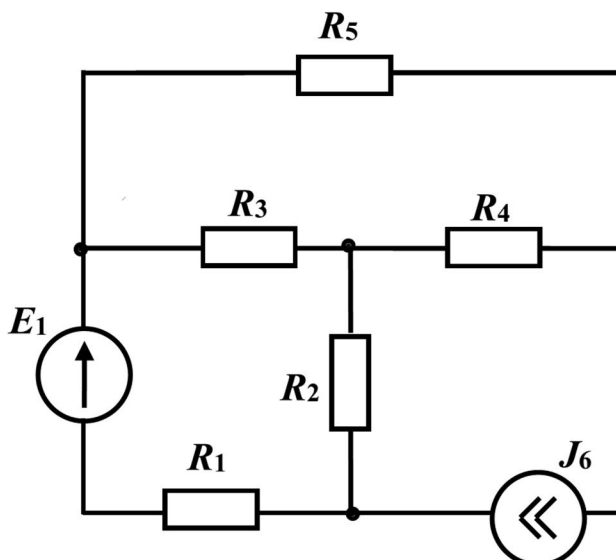


Рисунок 2.19

## Розв'язання

Визначимо кількість рівнянь, яка дорівнює кількості незалежних контурів:

$$n = Bm - (B - 1) - Bm_J = 6 - (4 - 1) - 1 = 2.$$

Отже, в загальному випадку маємо три незалежні контури (рис. 2.20). Але оскільки один із контурів містить джерело струму, то контурний струм цього контуру відомий, він дорівнює величині джерела струму. Задаємося додатними напрямками контурних струмів та складаємо систему рівнянь за II законом Кірхгофа.

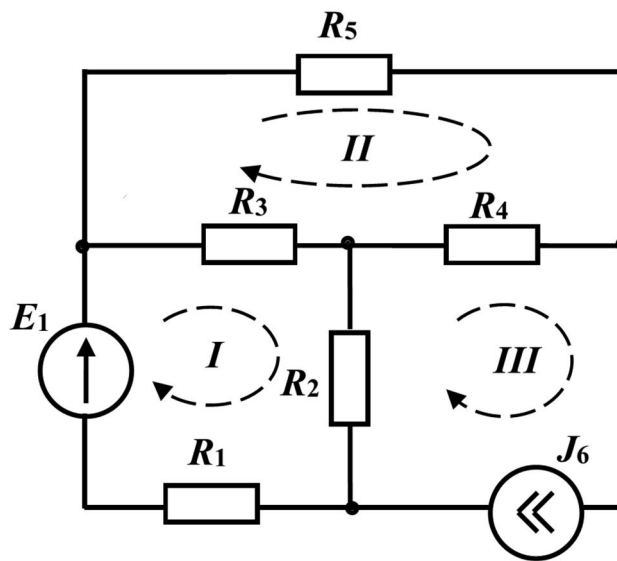


Рисунок 2.20

$$\begin{cases} I_I (R_1 + R_2 + R_3) - I_{II} R_3 - I_{III} R_2 = E_1 \\ -I_I R_3 + I_{II} (R_3 + R_4 + R_5) - I_{III} R_4 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 56I_I - 20I_{II} - 26 \cdot 5 = 260 \\ -20I_I + 100I_{II} - 30 \cdot 5 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 56I_I - 20I_{II} = 390 \\ -20I_I + 100I_{II} = 150 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5,6I_I - 2I_{II} = 39 \\ -2I_I + 10I_{II} = 15 \end{cases}$$

Для розв'язання отриманої системи рівнянь, скористаємось методом визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5,6 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5,6 \cdot 10 - (-2) \cdot (-2) = 52;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 39 & -2 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} = 390 + 30 = 420;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5,6 & 39 \\ -2 & 15 \end{vmatrix} = 84 + 78 = 162.$$

Розрахуємо значення контурних струмів:

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{420}{52} = 8,08 \text{ A},$$

$$I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{162}{52} = 3,12 \text{ A}.$$

Визначимо величини та напрямки струмів у вітках кола.

Через резистор  $R_1$  протікає лише перший контурний струм, тому величини і напрямок  $I_1$  співпадають з  $I_I$ . Аналогічно,  $I_5 = I_{II}$ .

Через резистор  $R_2$ ,  $R_3$  та  $R_4$  протікають по два контурних струми у різних напрямках. Оскільки від'ємних струмів не існує, від більшого контурного струму віднімаємо менший, напрямок струму у вітці співпадає з напрямком більшого контурного струму:

$$I_2 = I_I - I_{III} = 8,08 - 5 = 3,08 \text{ A},$$

$$I_3 = I_I - I_{II} = 8,08 - 3,12 = 4,96 \text{ A},$$

$$I_4 = I_{III} - I_{II} = 5 - 3,12 = 1,88 \text{ A}.$$

Отже, в результаті проведення розрахунків отримали наступні величини

струмів:

$$I_1 = 8,08 \text{ A};$$

$$I_2 = 3,08 \text{ A};$$

$$I_3 = 4,96 \text{ A};$$

$$I_4 = 1,88 \text{ A};$$

$$I_5 = 3,12 \text{ A};$$

Напрямки струмів вказані на рис. 2.21.

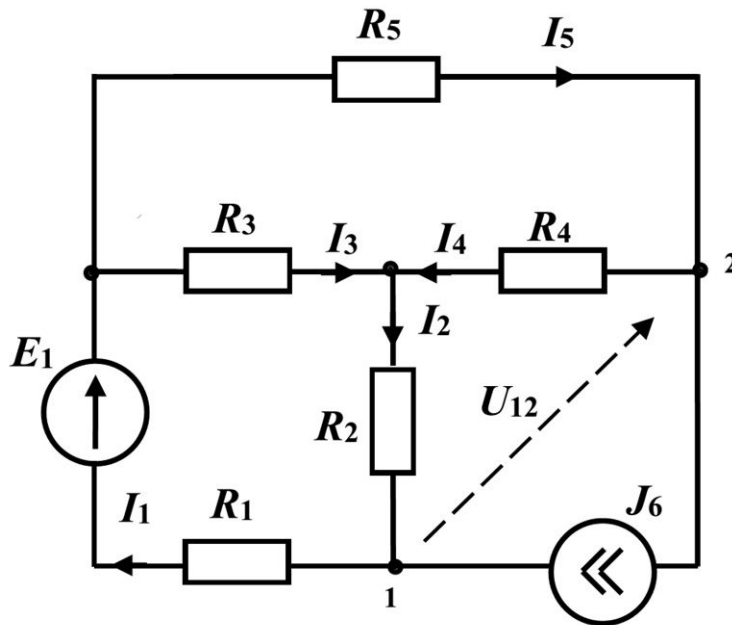


Рисунок 2.21

Перевірку розрахунків здійснюємо за балансом потужностей:

- споживана потужність

$$P_{\text{сп}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = 1984,33 \text{ Вт};$$

- потужність, що генерується у коло джерелами енергії. Для розрахунку потужності джерела струму необхідно знайти напругу на її затискачах:

$$U_{12} = -R_2 I_2 + R_4 I_4 = -23,68 \text{ В}.$$

Оскільки отримана напруга має від'ємне значення, отже джерело струму працює в режимі споживання. А джерело ЕРС працює в режимі генерації енергії, оскільки напрямки ЕРС  $E_1$  та струму  $I_1$  збігаються.

$$P_{\text{дж}} = E_1 I_1 + U_{12} J_5 = 260 \cdot 8,08 + (-23,68) \cdot 5 = 1982,4 \text{ Вт}$$

Розрахунок кола виконано вірно, так як

$$P_{дж} \approx P_{ен}.$$

### Задача 2.10.

Розрахувати величину джерела струму  $J_6$  (рис. 2.22), якщо відомі  $R_1=R_2=R_5=20$  Ом,  $R_4=40$  Ом,  $E_3=50$  В,  $E_4=100$  В,  $I_3=4$  А.

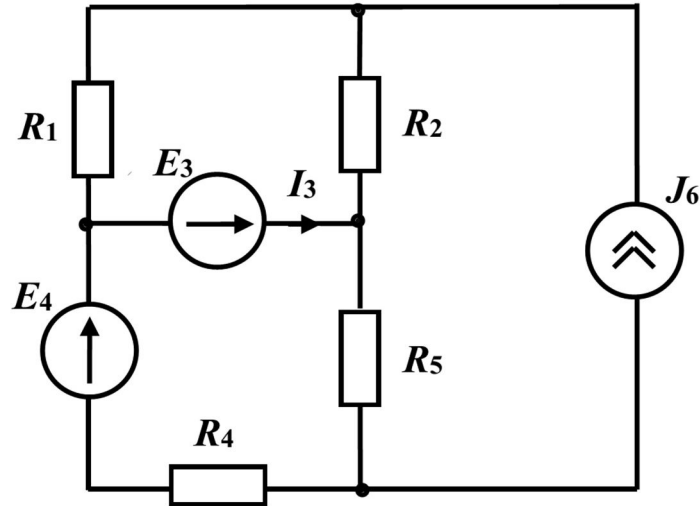


Рисунок 2.22

### Розв'язання

Для визначення величини струму ДС скористаємось МКС.

Кількість рівнянь

$$n = Bm - (B - 1) - Bm_J = 6 - (4 - 1) - 1 = 2.$$

Задаємось довільними напрямками контурних струмів, враховуючи, що напрямок та величина струму  $I_3$  відомі (див. рис. 2.23)

$$\begin{cases} I_I (R_1 + R_2) - I_{II} (R_1 + R_2) - I_{III} R_2 = E_3 \\ -I_I (R_1 + R_2) + I_{II} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - I_{III} R_2 = E_4 \end{cases}$$

Пам'ятаючи, що

$$I_I = I_3;$$

$$I_{III} = J_6.$$

робимо підстановку та розраховуємо невідомі значення

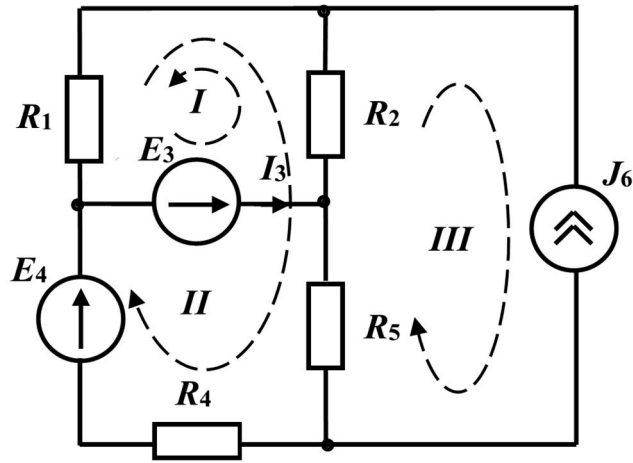


Рисунок 2.23

$$\begin{cases} 4 \cdot 40 - 40 \cdot I_{II} - 20I_{III} = 50 \\ -4 \cdot 40 + 100I_{II} - 20I_{III} = 100 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4I_{II} - 2I_{III} = 11 \\ 5I_{II} - 2I_{III} = 13 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 10 = -2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 26 = -4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 52 - 55 = -3.$$

Отже, отримуємо

$$I_I = I_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ A},$$

$$I_{III} = J_6 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{-2} = 1,5 \text{ A}.$$

## 2.4 Метод вузлових потенціалів

### Задача 2.11.

Виконати розрахунок струмів (рис. 2.24) методом вузлових потенціалів (МВП) та скласти баланс потужностей за заданих параметрів кола  $E_2 = 90$  В;  $E_3 = 5$  В;  $E_7 = 12$  В;  $J = 10$  А;  $R_1 = 8$  Ом;  $R_6 = 4$  Ом;  $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10$  Ом.

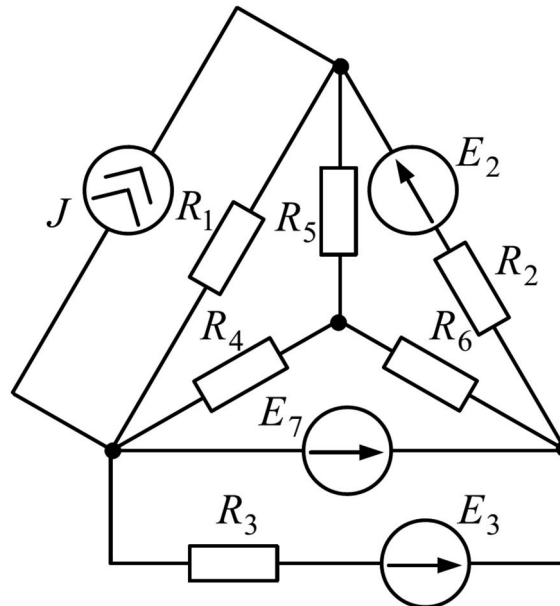


Рисунок 2.24

### Розв'язання

Визначаємо кількість вузлів у схемі кола (рис. 2.25):  $n = 4$ .

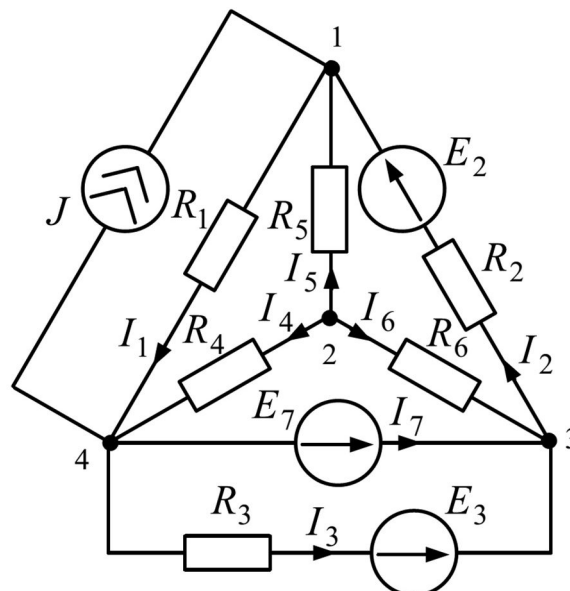


Рисунок 2.25

Одна з гілок між вузлами 3 та 4 містить лише джерело напруги  $E_7$  та має

нульовий опір. Оскільки  $G_7 = \frac{1}{R_7} = \infty$ , доцільно прийняти за нульовий потенціал або у вузлі **3** або у вузлі **4**.

Припустимо, потенціал вузла **4** нуль:  $\varphi_4 = 0$ , тоді  $\varphi_3 = E_7$ . Залишилися невідомими потенціали **1-го** та **2-го** вузлів  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ .

Для обчислення значень невідомих потенціалів необхідно скласти два рівняння.

$$\begin{cases} \varphi_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_2 \left( \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_3 \left( \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E_2}{R_2} + J \\ -\varphi_1 \left( \frac{1}{R_5} \right) + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_3 \left( \frac{1}{R_6} \right) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0,325\varphi_1 - 0,1\varphi_2 = 20,2 \\ -0,1\varphi_1 + 0,45\varphi_2 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему отримаємо такі значення потенціалів:

$$\varphi_1 = 69B,$$

$$\varphi_2 = 22B.$$

Для розрахунку струмів застосуємо закон Ома для ділянки кола:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_1} = \frac{69 - 0}{8} = 8,61 A;$$

$$I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_2}{R_2} = \frac{12 - 69 + 90}{10} = 3,3A;$$

$$I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = \frac{0 - 12 + 5}{10} = -0,7A;$$

$$I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_4} = \frac{22 - 0}{10} = 2,2 A;$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5} = \frac{69 - 22}{10} = 4,7 A;$$

$$I_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_6} = \frac{22 - 12}{4} = 2,5 \text{ A.}$$

Оскільки гілка з  $E_7$  не містить резистивного елемента, виконати розрахунок струму за законом Ома неможливо. Для розрахунку струму  $I_7$  застосуємо перший закон Кірхгофа:

$$I_7 = I_2 - I_6 - I_3 - J = 3,3 - 2,5 - (-0,7) = 1,5 \text{ A.}$$

Складаємо рівняння балансу потужностей і перевіряємо правильність розрахунків:

$$\begin{aligned} P_{дж} &= E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_7 I_7 + (\varphi_1 - \varphi_4) J = \\ &= 90 \cdot 3,3 + 5 \cdot (-0,7) + 12 \cdot 1,5 + (69 - 0) \cdot 10 = 1001,59 \text{ Вт}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{сп} &= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = \\ &= 8 \cdot 8,612 + 10 \cdot 3,32 + 10 \cdot (-0,7)^2 + 10 \cdot 2,22 + 10 \cdot 4,72 + 4 \cdot 2,52 = 1001,66 \text{ Вт} \end{aligned}$$

$P_{дж} \approx P_{сп}$  – отже, розрахунок кола виконано вірно.

### Задача 2.12.

Виконати розрахунок струмів (рис. 2.26) та скласти баланс потужностей за заданих параметрів кола:  $E_1 = 120 \text{ В}$ ;  $E_2 = 80 \text{ В}$ ;  $J_5 = 8 \text{ А}$ ;  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 15 \text{ Ом}$ .

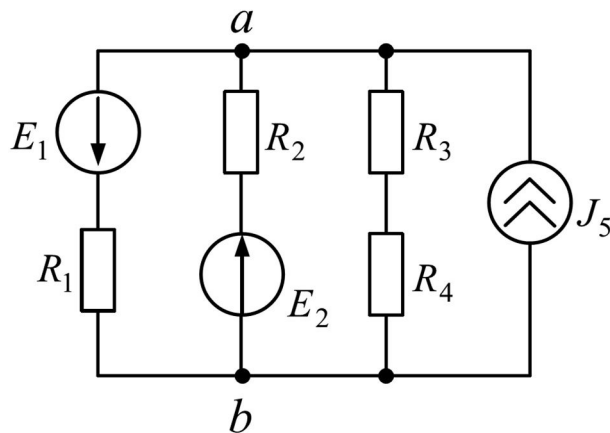


Рисунок 2.26

В електричних колах, які містять лише два вузли раціонально використовувати метод двох вузлів, який базується на МВП. Напругу між

двома вузлами можна розрахувати за формулою:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{\sum E_n g_n + \sum J_n}{\sum g_n}.$$

Після визначення напруги  $U_{ab}$  розраховують струм у будь-якій ( $n$ -й) вітці кола за формулою:

$$I_n = (E_n - U_{ab})g_n.$$

### Розв'язання

Згідно з МВП загальне рівняння для даного кола, за умови, що  $\varphi_b=0$ , має вигляд:

$$G_{11}\varphi_a = I_{11},$$

де міжвузлова провідність

$$G_{11} = G_1 + G_2 + G_{34} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4};$$

вузловий струм

$$I_{11} = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + J_5.$$

Зважаючи на те, що задана схема містить лише два вузли аналіз кола можна спростити, використавши метод двох вузлів. Напруга між двома вузлами заданого кола називається вузловою напругою

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a.$$

$$\sum E_n g_n + \sum J_n = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + J_5 = -\frac{120}{20} + \frac{80}{40} + 8 = -6 + 2 + 8 = 4 \text{ A},$$

$$\sum g_n = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{25+15} = 0,05 + 0,025 + 0,025 = 0,1 \text{ См},$$

$$U_{ab} = \frac{\sum E_n g_n + \sum J_n}{\sum g_n} = \frac{4}{0,1} = 40 \text{ В}.$$

Значення струмів у вітках кола, напрямки яких були довільно задані (рис. 2.27), розраховуються за законом Ома:

$$I_1 = \frac{U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{40 + 120}{20} = 8 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{-U_{ab} + E_2}{R_2} = \frac{-40 + 80}{40} = 1 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3 + R_4} = \frac{40}{25 + 15} = 8 \text{ A},$$

Перевірку правильності розрахунку здійснюємо за балансом потужностей:

$$P_{дж} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_{ab} J_5 = 120 \cdot 8 + 80 \cdot 1 + 40 \cdot 8 = 1360 \text{ Вт};$$

$$P_{cn} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + (R_3 + R_4) I_3^2 = 20 \cdot 8^2 + 40 \cdot 1^2 + (25 + 15) \cdot 8^2 = 1360 \text{ Вт}.$$

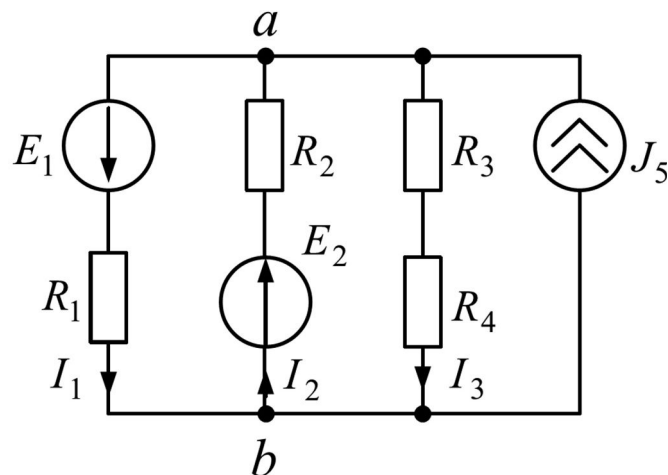


Рисунок 2.27

Розрахунок кола виконано вірно.

## 2.5 Еквівалентні перетворення у лінійних електричних колах

### Задача 2.13.

Розрахувати струми заданого кола на рис. 2.28, визначити показ ватметра, скласти баланс потужностей, якщо  $U = 30 \text{ В}$ ;  $R_1 = 180 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 60 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = R_4 = 120 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 80 \text{ Ом}$ .

## Розв'язання

Задане коло містить два «трикутника» ( $R_1, R_2, R_3$  та  $R_3, R_4, R_5$ ) та дві «зірки» ( $R_1, R_3, R_5$  та  $R_2, R_3, R_4$ ). Для використання методу згортки необхідно здійснити еквівалентне перетворення, яке можна реалізувати шляхом перетворення одного з двох «трикутників» у еквівалентну «зірку» або однієї з двох «зірок» у еквівалентний «трикутник».

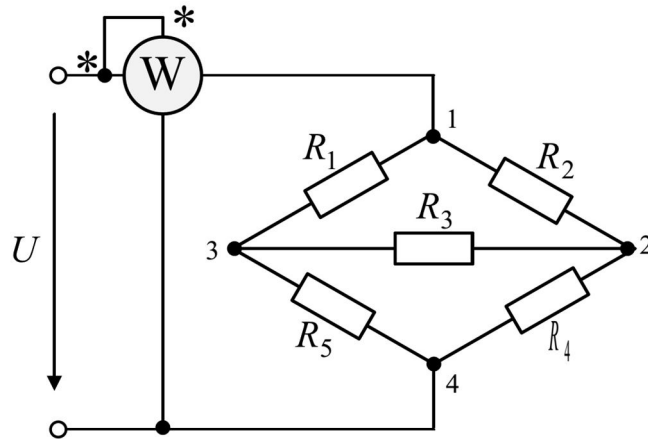


Рисунок 2.28

Обираємо перетворення «трикутника» з опорами  $R_1, R_2, R_3$  у еквівалентну «зірку» з опорами  $R_{12}, R_{23}, R_{13}$  (рис. 2.29).

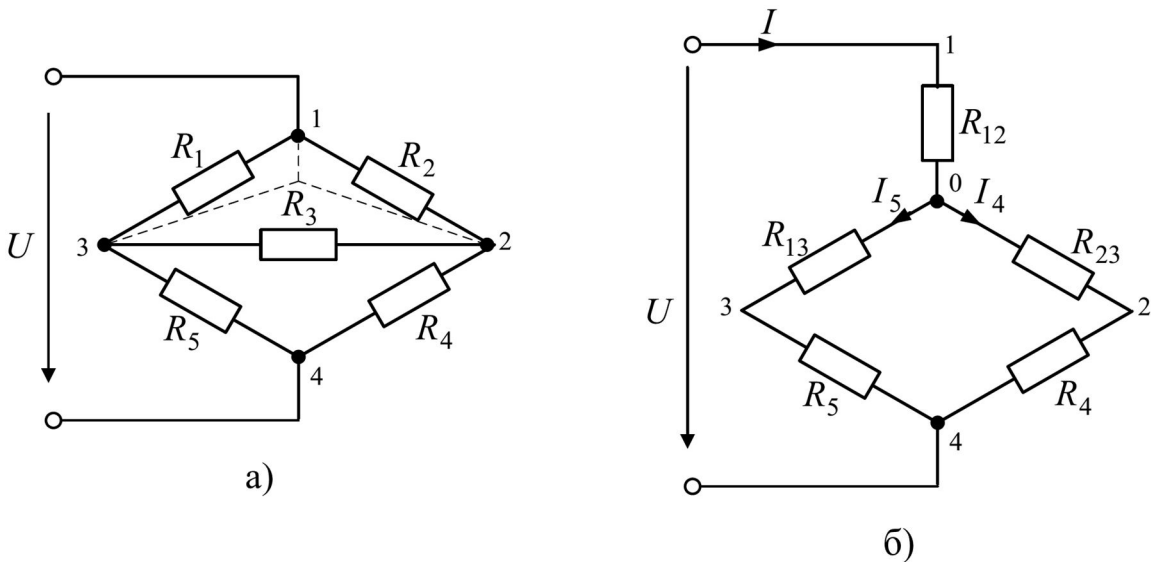


Рисунок 2.29

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 30 \text{ Ом},$$

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 20 \text{ Ом},$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 60 \text{ Ом.}$$

Визначимо еквівалентний опір відносно вхідних затискачів:

$$R_{екв} = R_{12} + \frac{(R_{13} + R_5) \cdot (R_{23} + R_4)}{(R_{13} + R_5) + (R_{23} + R_4)} = 100 \text{ Ом.}$$

Розрахуємо струми у перетвореному колі:

- струм на вході кола визначаємо за законом Ома

$$I = \frac{U}{R_{екв}} = \frac{30}{100} = 0,3 \text{ А.}$$

- струм у паралельних вітках розраховуємо за правилом чужого опору

$$I_4 = I \frac{(R_{13} + R_5)}{(R_{13} + R_5) + (R_{23} + R_4)} = 0,15 \text{ А,}$$

$$I_5 = \frac{(R_{23} + R_4)}{(R_{13} + R_5) + (R_{23} + R_4)} = I - I_4 = 0,15 \text{ А.}$$

Для розрахунку струмів у заданому колі через резистори трикутника  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  застосовуємо закон Ома. Для цього користуючись перетвореною схемою (рис. 2.30, б) визначаємо напруги на затискачах еквівалентної зірки:

$$U_{12} = R_{12} I + R_{23} I_4 = 12 \text{ В;}$$

$$U_{23} = -R_{23} I_4 + R_{13} I_5 = 6 \text{ В;}$$

$$U_{13} = R_{12} I + R_{12} I_5 = 18 \text{ В.}$$

Тоді струми через резистори трикутника

$$I_1 = \frac{U_{13}}{R_1} = \frac{18}{180} = 0,1 \text{ А;}$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{12}{60} = 0,2 \text{ А;}$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = \frac{6}{120} = 0,05 \text{ А.}$$

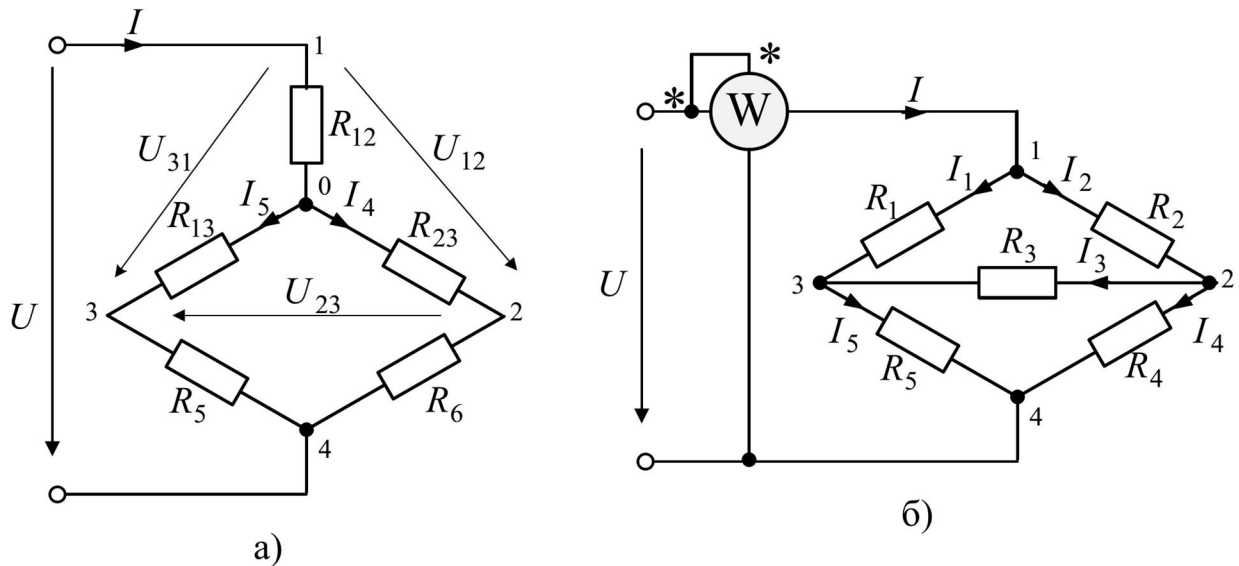


Рисунок 2.30

Показ ватметра

$$P = UI = 30 \cdot 0,3 = 9 \text{ Вт.}$$

#### Задача 2.14.

Спростити схему заданого кола (рис. 5.4) до одноконтурного та виконати розрахунки струмів.  $E_1 = 20 \text{ В}$ ;  $J_2 = 2\text{А}$ ;  $J_3 = 3\text{А}$ ;  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_{02} = 40 \text{ Ом}$ ;  $R_{03} = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 30 \text{ Ом}$ .

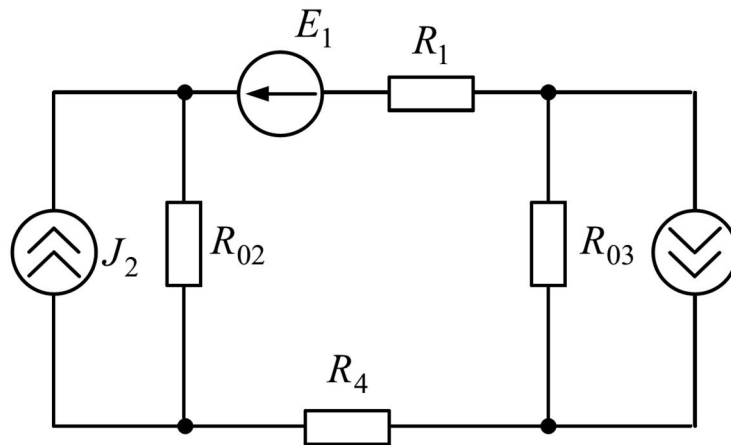


Рисунок 2.31

#### Розв'язання

Замінімо два джерела струму на еквівалентні джерела напруги (ДН):  
параметри другого еквівалентного ДН (рис. 2.32)

$$E_2 = J_2 \cdot E_{02} = 2 \cdot 40 = 80 \text{ В};$$

$$R_{02} = 40 \text{ Ом.}$$

параметри третього еквівалентного ДН

$$E_3 = J_3 R_{03} = 3 \cdot 20 = 60 \text{ В};$$

$$R_{03} = 20 \text{ Ом.}$$

Струм у одноконтурній схемі

$$I = \frac{-E_1 + E_2 + E_3}{R_1 + R_{02} + R_{03} + R_4} = 1,2 \text{ А.}$$

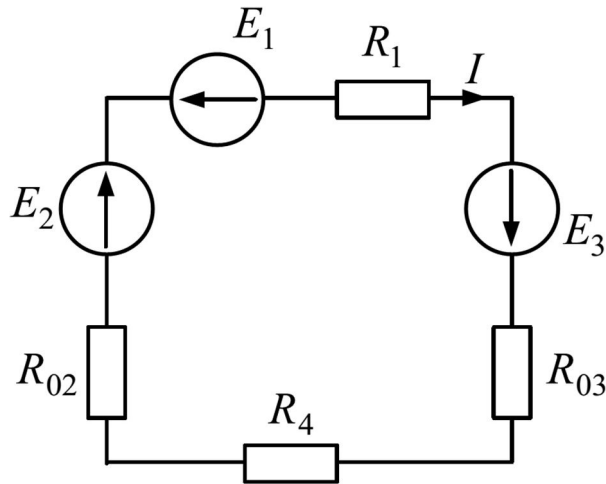


Рисунок 2.32

## 2.6 Метод накладання дії джерел енергії

### Задача 2.15.

Виконати розрахунок струмів заданого кола (рис. 2.33) методом накладання (МН). Вихідні дані:  $E_1 = 150 \text{ В}$ ;  $J_6 = 7.5 \text{ А}$ ;  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 60 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 20 \text{ Ом}$ .

Джерела вважати ідеалізованими. Правильність розрахунків перевірити за балансом потужностей.

### Розв'язання

У заданому колі розподіл струмів викликаний одночасною дією двох джерел: ДН та ДС. Згідно методу накладання струм кожної з гілок кола дорівнює алгебраїчній сумі струмів в цій вітці від дії кожного джерела окремо.

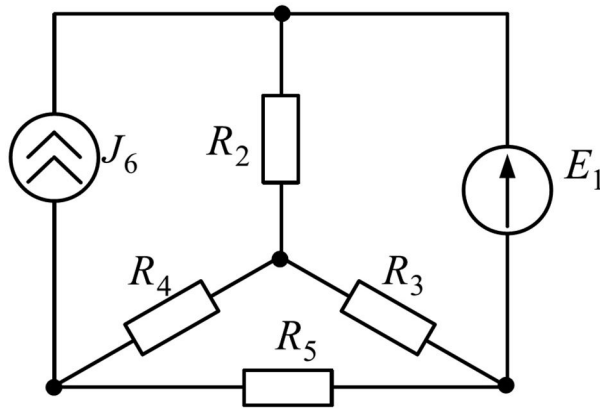


Рисунок 2.33

Отже для розрахунку струмів заданого кола необхідно здійснити аналіз кола при дії кожного джерела окремо, замінивши інші джерела їх внутрішніми опорами.

I. Аналіз кола при дії  $E_1$ . Джерело струму заміняємо його внутрішнім опором  $R_J = \infty$ . Утворена часткова схема зображена на рис. 2.34.

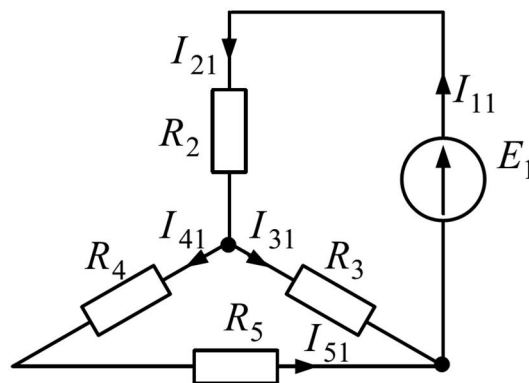


Рисунок 2.34

Виконуємо розрахунок еквівалентного опору відносно вхідних затискачів джерела:

$$R_{екв} = R_2 + \frac{R_3 \cdot (R_4 + R_5)}{R_3 + (R_4 + R_5)} = 50 \text{ Ом.}$$

Виконуємо розрахунок часткових струмів при дії  $E_1$  за законом Ома

$$I_{21} = \frac{E_1}{R_{екв}} = \frac{150}{50} = 3 \text{ А.}$$

$$I_{41} = I_{51} = I_{21} \frac{R_3}{R_3 + (R_4 + R_5)} = 2 \text{ А,}$$

$$I_{31} = I_{21} \frac{R_4 + R_5}{R_3 + (R_4 + R_5)} = I_{21} - I_{41} = 1 \text{ A.}$$

II. Аналіз кола при дії  $J_6$ . Джерело струму замінюємо його внутрішнім опором  $R_E = 0$ . Утворена часткова схема зображена на рис. 2.35.

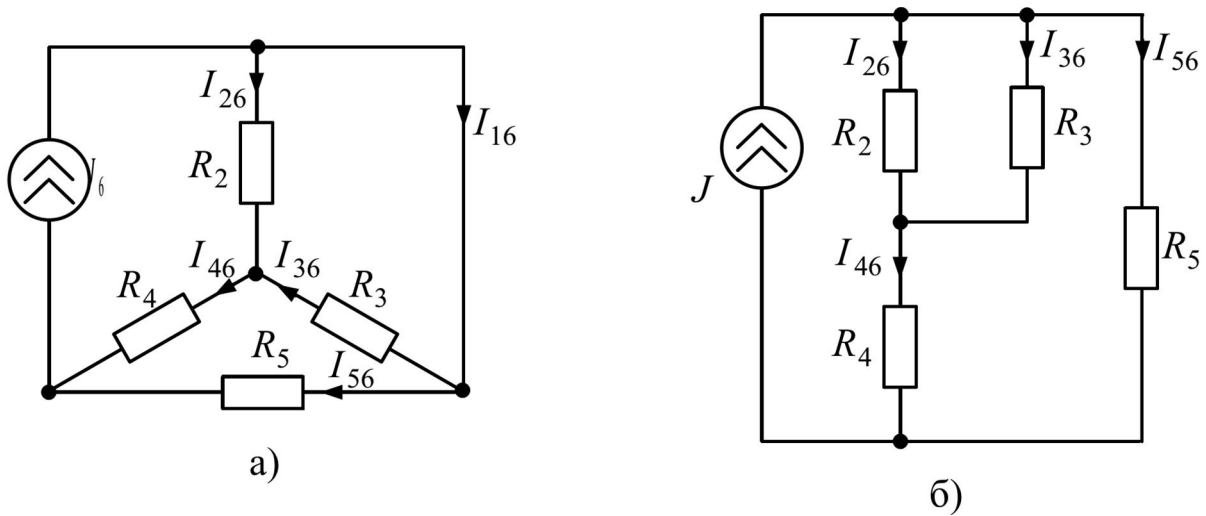


Рисунок 2.35

Приводимо коло до двоконтурного, яке містить ДС та дві паралельні гілки

$$R_{2-3-4} = R_4 + \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2} = 30 \text{ Ом.}$$

Та виконуємо розрахунок часткових струмів при дії  $J_6$  за правилом чужого опору та першим законом Кірхгофа

$$I_{46} = J_6 \frac{R_5}{R_{2-3-4} + R_5} = 3 \text{ A,}$$

$$I_{56} = J_6 \frac{R_{2-3-4}}{R_{2-3-4} + R_5} = 4,5 \text{ A,}$$

$$I_{26} = I_{46} \frac{R_3}{R_3 + R_2} = 2 \text{ A,}$$

$$I_{36} = I_{46} \frac{R_2}{R_3 + R_2} = 2 \text{ A,}$$

$$I_{16} = J_6 - I_{26} = 5,5 \text{ A.}$$

Для визначення реальних струмів від дії двох джерел довільно обираємо

напрями струмів у заданому колі і обчислюємо кожен струм як алгебричну суму часткових струмів (рис. 2.36):

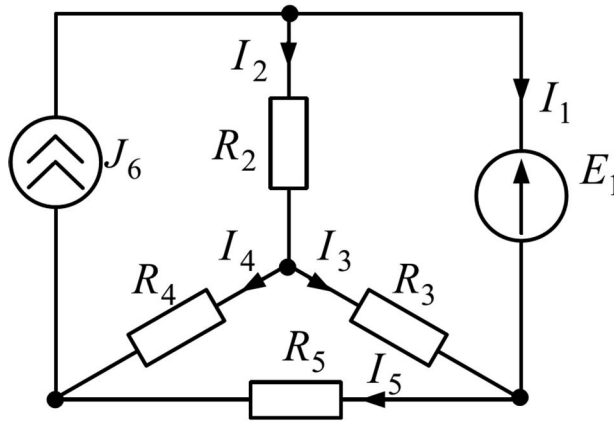


Рисунок 2.36

$$I_1 = -I_{11} + I_{16} = 2,5 \text{ A},$$

$$I_2 = I_{21} + I_{26} = 5 \text{ A},$$

$$I_3 = I_{31} - I_{36} = 0 \text{ A},$$

$$I_4 = I_{41} + I_{46} = 5 \text{ A},$$

$$I_5 = -I_{51} + I_{56} = 2,5 \text{ A},$$

$$I_6 = J_6 = 7,5 \text{ A}.$$

Перевірку розрахунків здійснюємо за балансом потужностей:

споживана потужність

$$P_{cn} = R_2 I_2^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = 1125 \text{ Вт};$$

потужність, що генерується у коло джерелами енергії. Для розрахунку потужності джерела струму необхідно знайти напругу на її затискачах:

$$U_{ДС} = R_2 I_2 + R_4 I_4 = 200 \text{ В},$$

$$P_{дж} = -E_1 I_1 + U_{ДС} J_6 = 1125 \text{ Вт}.$$

Математичний аналіз кола виконано вірно, так як  $P_{дж} \approx P_{сп}$ .

## 2.7 Метод активного двополюсника

### Задача 2.16.

Визначити струм через амперметр  $I_A$  (рис. 2.37), якщо параметри кола задані  $J=2\text{ A}$ ,  $E_1=20\text{ B}$ ,  $E_3=75\text{ B}$ ,  $E=120\text{ B}$ ,  $R_1=40\text{ Ом}$ ,  $R_2=10\text{ Ом}$ ,  $R_3=30\text{ Ом}$ ,  $R_4=60\text{ Ом}$ .

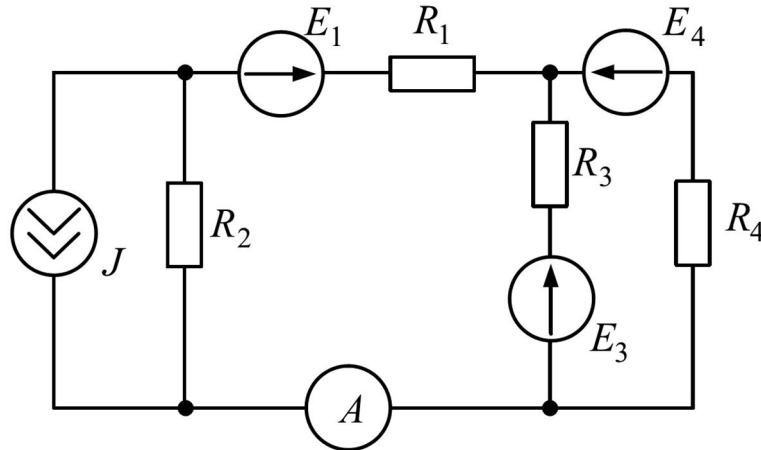


Рисунок 2.37

### Розв'язання

Відповідно до теореми про еквівалентний генератор (метод еквівалентного генератора МЕГ) лінійна частина кола відносно затискачів гілки з шуканим струмом (див. рис. 2.38, а) може бути замінена еквівалентною схемою джерела напруги (див. рис. 2.38, б). Шуканий струм при цьому визначається за законом Ома для замкненого контура:

$$I_A = \frac{E_{EG}}{R_{EG}} = \frac{U_{HXab}}{R_{BX}}.$$

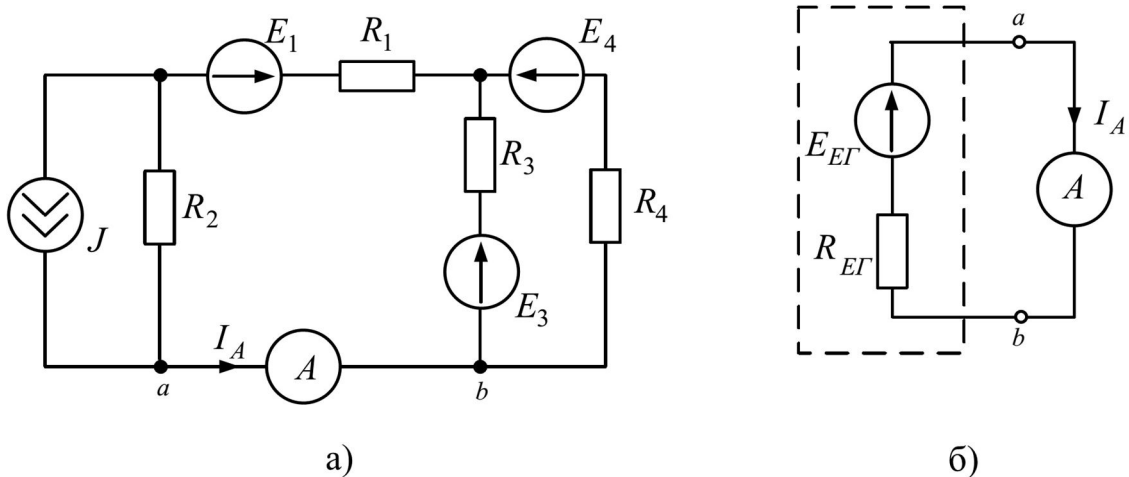


Рисунок 2.38

Напряг шуканого струму задається при цьому довільно для вихідного кола (див. рис. 2.38, а) і зберігається при переході до схеми заміщення (див. рис. 2.38, б).

В утвореній схемі заміщення еквівалентного генератора (рис. 2.38, б) два невідомих параметра.

1. *Визначення ЕРС еквівалентного генератора.*

Оскільки величина ЕРС джерела напруги відповідає значенню напруги неробочого ходу, то для розрахунку ЕРС еквівалентного генератора користуємось режимом неробочого ходу. Для цього штучно утворюємо розрив у вітці з амперметром у заданому колі та розраховуємо напругу  $U_{ab}$  відносно розірваних затискачів у напрямку заданого струму через амперметр.

Розрахунок напруги неробочого ходу  $U_{ab}$  зводиться до аналізу кола на рис. 2.39 та визначення струмів  $I_1$ ,  $I_2$  та  $I_3$ . Слід врахувати, що в колі існують лише два замкнених контури для протікання струму.

$$I_1 = J = 2 \text{ A};$$

$$I_2 = 0;$$

$$I_3 = \frac{E_4 - E_3}{R_3 + R_4} = \frac{120 - 75}{30 + 60} = 0,5 \text{ Ом.}$$

$$U_{ab} = I_1 R_1 - E_2 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + E_3 = 20 - 20 + 0 + 15 + 75 = 90 \text{ В.}$$

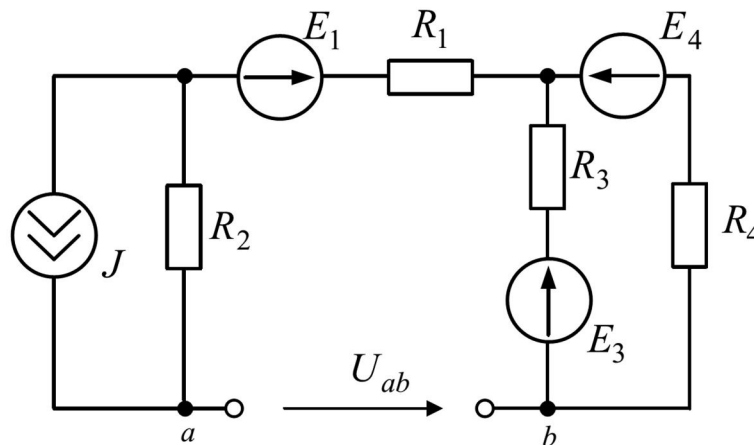


Рисунок 2.39

Отже

$$E_{EG} = U_{ab} = 90 \text{ В.}$$

2. *Визначаємо внутрішнього опору еквівалентного генератора.*

Згідно теорему по еквівалентний генератор внутрішній опір еквівалентного генератора відповідає вхідному опору кола відносно розірваних затискачів  $a-b$  (рис. 2.40).

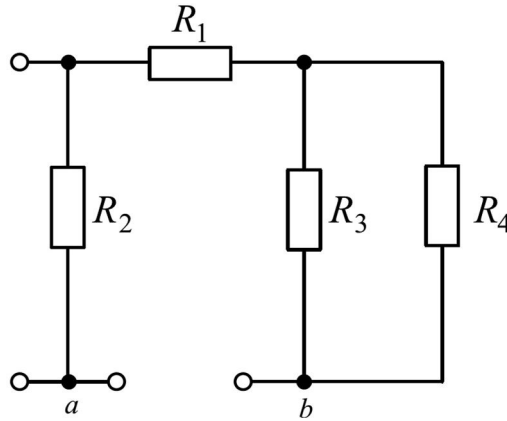


Рисунок 2.40

Для розрахунку вхідного опору замінимо всі джерела енергії їх внутрішніми опором (слід пам'ятати, що розрахунок проводиться для кола з ідеальними елементами).

$$R_{\text{вх}} = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 10 + 40 + \frac{30 \cdot 40}{30 + 40} = 70 \text{ Ом.}$$

Отже

$$R_{EG} = R_{\text{вх}} = 70 \text{ Ом.}$$

3. *Розрахунок шуканого струму.*

Застосувавши закон Ома до одноконтурної схеми заміщення еквівалентного генератора розраховуємо шуканий струм:

$$I_A = \frac{E_{EG}}{R_{EG}} = \frac{90}{70} = 1,3 \text{ А.}$$

### Задача 2.17.

Визначити залежність показів амперметра в схемі на рис. 2.41 при зміні опору  $R$  змінного резистора в діагоналі моста в межах  $0 \leq R \leq 50 \text{ Ом}$ .  $E=100 \text{ В}$ ;

$R_1=R_4=40 \text{ Ом}; R_2=R_3=60 \text{ Ом}.$

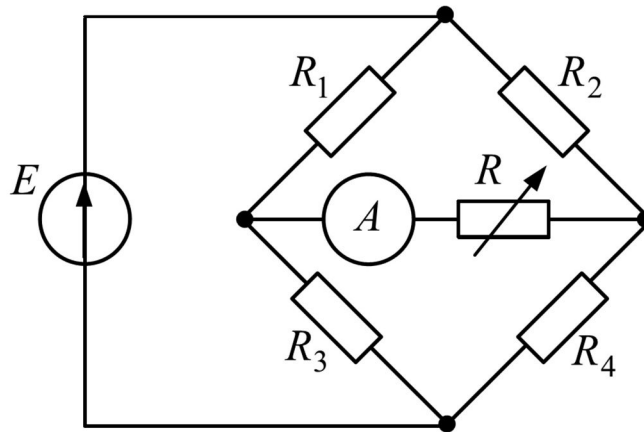


Рисунок 2.41

### Розв'язання

Відповідно до методики визначення параметрів активного двополюсника для знаходження значення  $E_{ЕГ}$  перейдемо до схеми на рис. 2.42, де напруга  $U_{HXab}$  на розімкнутих затисках  $a$  й  $b$  визначає шукану ЕРС  $E_{ЕГ}$ . У даному колі

$$U_{HXab} = R_3 I_1 - R_4 I_2 = R_3 \frac{E}{R_1 + R_3} - R_4 \frac{E}{R_2 + R_4} = 20 \text{ В}.$$

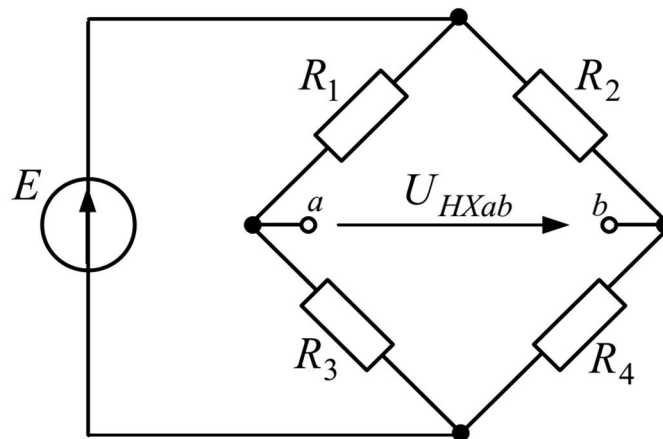


Рисунок 2.42

Для визначення вхідного опору активного двополюсника схему рис. 2.41 перетворимо в схему на рис. 2.43.

Відносно затисків  $a-b$  даного пасивного двополюсника його опір дорівнює:

$$R_{gx} = R_3 \frac{R_3}{R_1 + R_3} + R_4 \frac{R_4}{R_2 + R_4} = 48 \text{ Ом}.$$

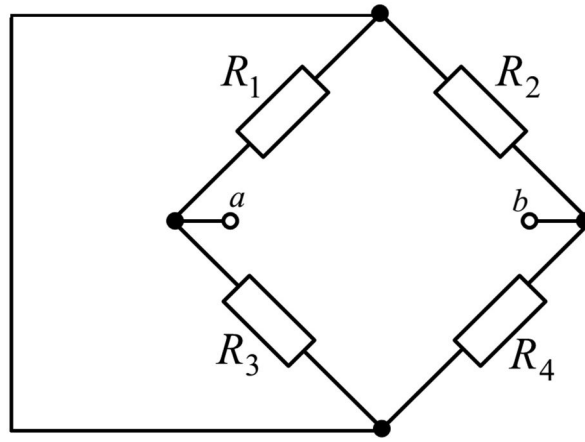


Рисунок 2.43

Таким чином, для показу амперметра в заданому колі (рис. 2.44) застосовуємо закон Ома для схеми заміщення еквівалентного генератора:

$$I_A = \frac{U_{HXab}}{R_{вх} + R} = \frac{20}{48 + R} \text{ A.}$$

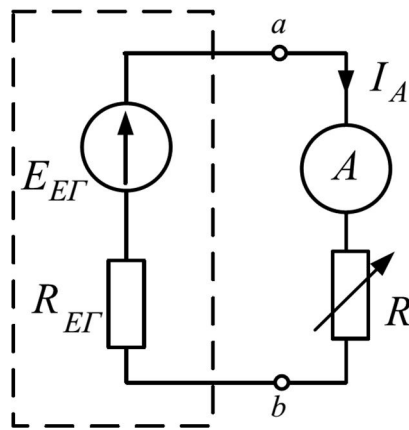


Рисунок 2.44

Задаючись значеннями  $R$  у межах його зміни, одержуємо криву на рис.

2.45.

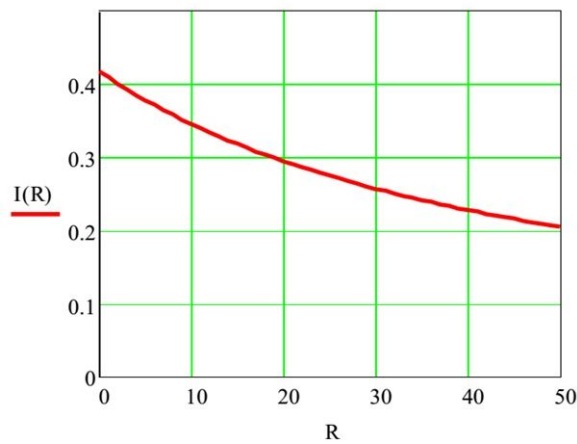
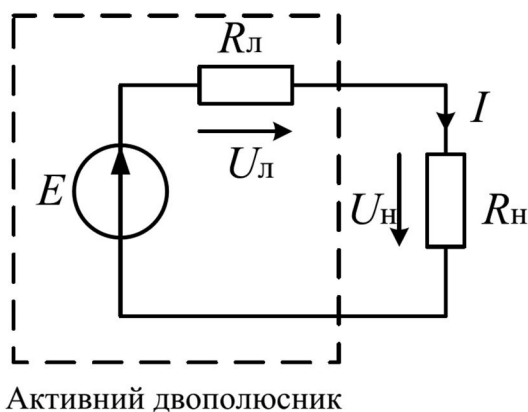


Рисунок 2.45

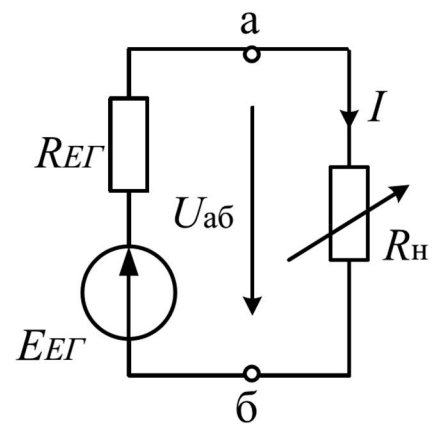
## 2.8 Передача максимальної потужності від активного двополюсника пасивному

### Задача 2.18.

Нехай енергія від джерела постійної ЕРС  $E$  через двопровідну лінію, опір двох проводів якої дорівнює  $R_{\text{л}}$ , передається до споживача з опором  $R_{\text{н}}$  (рис. 2.46). За умови, що  $R_{\text{н}}$  змінюється в широких межах ( $R_{\text{н}} = 0 \div \infty$ ), дослідимо як змінюються  $I$ ,  $U_{\text{н}}$ ,  $U_{\text{л}}$ ,  $P_{\text{г}}$ ,  $P_{\text{л}}$ ,  $P_{\text{н}}$ ,  $\eta$  (ККД) при зміні  $R_{\text{н}}$ . А також визначимо, при якому значенні опору навантаження на ньому виділяється максимальна потужність.



а)



б)

Рисунок 2.46

### Розв'язання

Джерело ЕРС і лінію з опором  $R_{\text{л}}$  можемо розглядати, як активний двополюсник, а споживач  $R_{\text{н}}$ , як пасивний двополюсник (рис. 2.46, б). Для вказаних величин маємо:

струм, що протікає у колі

$$I = \frac{E}{R_{\text{л}} + R_{\text{н}}};$$

напруга лінії

$$U_{\text{л}} = R_{\text{л}} I;$$

напруга на навантаженні

$$U_{\text{н}} = E - R_{\text{л}} I;$$

потужність генерована у коло

$$P_{\Gamma} = EI;$$

втрати в лінії

$$P_{\text{л}} = R_{\text{л}} I^2;$$

потужність споживання

$$P_{\text{н}} = P_{\Gamma} - P_{\text{л}} = EI - R_{\text{л}} I^2;$$

ККД

$$\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P_{\Gamma}} = \frac{EI - R_{\text{л}} I^2}{EI} = 1 - \frac{R_{\text{л}} I}{E} = 1 - \frac{R_{\text{л}}}{R_{\text{л}} + R_{\text{н}}} = \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{л}} + R_{\text{н}}}.$$

Відповідно до методу еквівалентного генератора струм через навантаження знаходимо за формулою:

$$I = \frac{U_{\text{аб}}}{R_{\text{аб}} + R_{\text{н}}} = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{аб}} + R_{\text{н}}}.$$

Перепишемо вирази потужностей у відповідності до цього виразу струму:

$$P_{\text{н}} = R_{\text{н}} I^2 = R_{\text{н}} \left( \frac{U_{\text{аб}}}{R_{\text{аб}} + R_{\text{н}}} \right)^2 = \frac{R_{\text{н}} U_{\text{аб}}^2}{(R_{\text{аб}} + R_{\text{н}})^2};$$

$$P_{\text{л}} = I^2 R_{\text{л}}$$

$$P_{\Gamma} = E_{\text{ЕГ}} I.$$

Для визначення при якому значенні опору навантаження на ньому виділяється максимальної потужності  $P_{\text{max}}$  необхідно знайти точки екстремуму. Отже, необхідно знайти похідну від виразу потужності відносно опору навантаження і, прирівняти її до нуля, визначити величину опору при якому виділяється максимальна потужність  $\frac{dP_{\text{н}}}{dR_{\text{н}}} = 0$ .

$$\frac{dP_{\text{н}}}{dR_{\text{н}}} = \frac{U_{\text{аб}}^2 (R_{\text{аб}} + R_{\text{н}})^2 - 2R_{\text{н}} U_{\text{аб}} (R_{\text{аб}} + R_{\text{н}})}{(R_{\text{аб}} + R_{\text{н}})^4};$$

$$U_{a\bar{b}}^2 (R_{a\bar{b}} + R_H)^2 - 2U_{a\bar{b}}^2 R_H (R_{a\bar{b}} + R_H) = 0;$$

$$R_{a\bar{b}}^2 + 2R_{a\bar{b}} R_H + R_H^2 - 2R_{a\bar{b}} R_H - 2R_H^2 = 0;$$

$$R_{a\bar{b}} = R_H.$$

Проведені розрахунки показали, що максимальна потужність виділяється при опорі еквівалентного генератора. За умови  $R_{a\bar{b}} = R_H$

- у колі протікає струм короткого замикання  $I = \frac{U_{a\bar{b}}}{2R_{a\bar{b}}} = \frac{E_{EG}}{2R_{EG}}$ ,

- у навантаженні виділяється максимальна потужність

$$R_{H \max} = \frac{U_{a\bar{b}}^2 R_{a\bar{b}}}{(R_{a\bar{b}} + R_H)^2} = \frac{U_{a\bar{b}}^2}{4R_{a\bar{b}}};$$

- потужність генерована у коло

$$P_{\Gamma} = E_{EG} I = \frac{U_{a\bar{b}}^2}{2R_{a\bar{b}}};$$

- ККД

$$\eta = \frac{P}{P_{\Gamma}} = \frac{U_{a\bar{b}}^2}{4R_{a\bar{b}}} \frac{2R_{a\bar{b}}}{U_{a\bar{b}}^2} = 0,5.$$

### Задача 2.19.

У колі постійного струму визначити максимальну потужність, що виділяється у змінному опорі  $R$  (рис. 2.47). Параметри кола:  $J_1=3,5$  А,  $E_2=3$  В,  $R_1=2$  Ом,  $R_2=1$  Ом,  $R'_2=2$  Ом,  $R_3=5$  Ом,  $R_4=0,5$  Ом.

### Розв'язання

Згідно закону Джоуля-Ленца  $P = I^2 R$ . Визначимо умови, за яких  $P_R = P_{max}$ , використовуючи для цього схему заміщення, складену у відповідності до теореми про активний двополіусник (рис. 2.48).

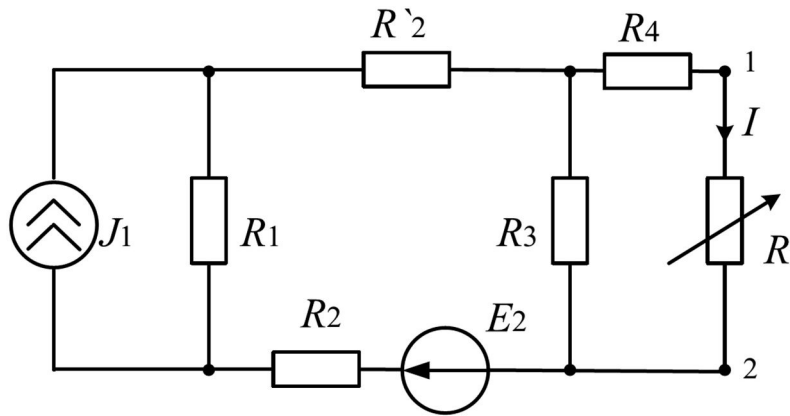


Рисунок 2.47

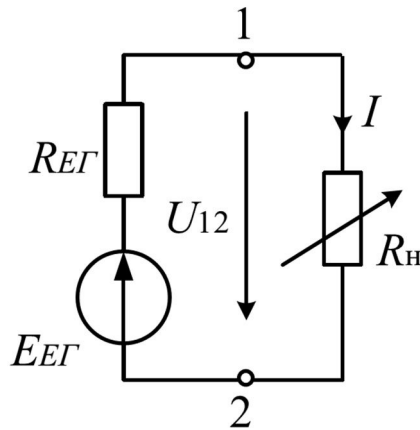


Рисунок 2.48

Рівняння електричної рівноваги для такої схеми має вигляд:

$$P_{EГ} = P_{R_{EГ}} + P_R,$$

звідки

$$E_{EГ} I = I^2 R_{EГ} + I^2 R_R$$

Звідки випливає, що

$$P_R = I^2 R = E_{EГ} I - I^2 R_{EГ}.$$

З курсу математики відомо, що максимальна потужність  $P_{max}$  виділяється за умови  $\frac{dP_R}{dI} = 0$

$$\frac{dP_R}{dI} = \frac{d}{dI}(E_{EГ} I - I^2 R_{EГ}) = E_{EГ} - 2IR_{EГ} = 0,$$

звідки  $I = \frac{E_{EГ}}{2R_{EГ}}.$

З іншого боку, відповідно до методу еквівалентного генератора

$$I = \frac{E_{EG}}{R_{EG} + R}$$

Прирівнявши два вирази одного струму визначимо, що умовою виділення максимальної потужності є  $R = R_{EG}$ , такий режим кола називається *погодженням*

$$\frac{E_{EG}}{R_{EG} + R} = \frac{E_{EG}}{2R_{EG}}$$

тобто

$$R = R_{EG}$$

Беручи до уваги умову виділення максимальної потужності маємо:

$$I = \frac{E_{EG}}{R_{EG} + R} = \frac{E_{EG}}{2R_{EG}}$$

$$P_{\max|_{R=R_{EG}}} = I^2 R_{EG} = \left( \frac{E_{EG}}{2R_{EG}} \right)^2 R_{EG} = \frac{E_{EG}^2}{4R_{EG}}$$

Для проведення обчислень, використовуємо методику активного двополюсника, розкрити у задачах 2.16 і 2.17.

Розмикаємо гілку з опором  $R$ .

Визначаємо напругу неробочого ходу на розімкнених затискачах. Для цього доцільно звести схему до одноконтурної (рис. 2.49), керуючись перетворенням джерела струму на джерело напруги:

$$E_{ek1} = J_1 R_1 = 7 \text{ В},$$

$$R_{ek1} = R_1.$$

Струм у контурі обчислюємо за законом Ома:

$$I_3 = \frac{E_{ek1} + E_2}{R_1 + R_2 + R'_2 + R_3} = 1 \text{ А}.$$

а напругу

$$E_{EG} = U_{12} = I_3 R_3 = 5 \text{ В}.$$

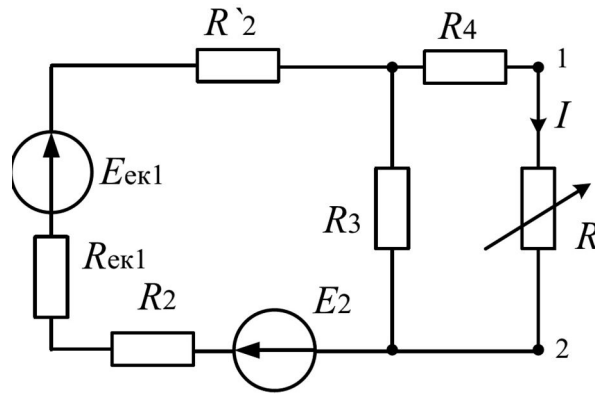


Рисунок 2.49

Розраховуємо еквівалентний опір відносно розірваних затискачів 1-2 (рис. 2.50):

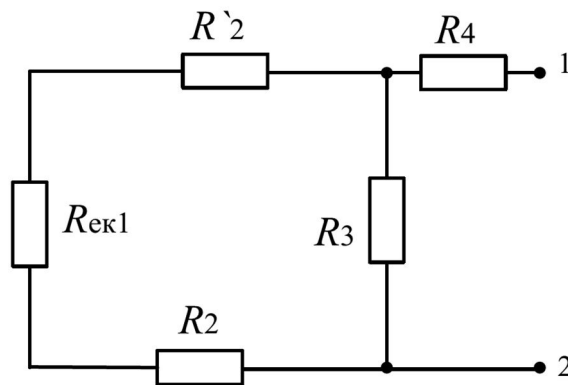


Рисунок 2.50

$$R_{EF} = \frac{(R_1 + R_2 + R'_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R'_2 + R_3} + R_4 = 3 \text{ Ом.}$$

Максимальна потужність:

$$P_{max} = \frac{E_{EF}^2}{4R_{EF}} = 2,08 \text{ Вт.}$$

## 3 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

### 3.1 Графічний метод

#### Задача 3.1.

На рис. 3.1 показано схему з трьома однаковими нелінійними елементами, вольт-амперні характеристики яких задано у таблиці 3.1. ЕРС джерел напруги  $E_1 = 100$  В,  $E_2 = 10$  В,  $E_3 = 20$  В. Визначити струми у всіх вітках схеми.

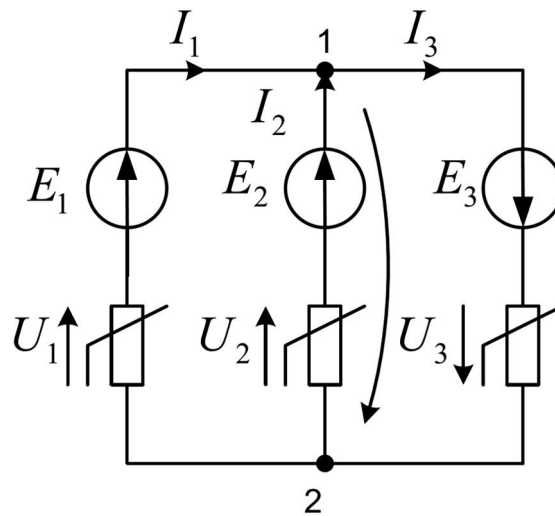


Рисунок 3.1

Таблиця 3.1

$\pm U$ , В	0	5	20	30	50	70	100
$\pm I$ , мА	0	10	30	39	50	55	60

**Розв'язання.** Оскільки всі вітки схеми увімкнені паралельно до двох вузлів 1 і 2, для розв'язання скористаємось методом двох вузлів.

Довільно оберемо додатні напрямки струмів і вузлової напруги  $U_{12}$  (рис. 3.1). Запишемо рівняння за 2-м законом Кірхгофа для контурів, до складу яких входить одна з віток і напруга  $U_{12}$ :

$$U_{12} + U_1 = E_1, U_{12} + U_2 = E_2, U_{12} - U_3 = E_3.$$

Виразимо з цих рівнянь напругу  $U_{12}$ :

$$U_{12} = E_1 - U_1, U_{12} = E_2 - U_2, U_{12} = -E_3 + U_3.$$

Користуючись цими виразами, розраховуємо залежність напруги  $U_{12}$  від

струму у такій послідовності:

1) довільно задамо значення струму  $i$  за ВАХ нелінійного елемента визначимо на ньому напругу;

2) за відповідним рівнянням другого закону Кірхгофа розрахуємо вузлову напругу  $U_{12}$ , яка буде відповідати обраному значенню струму.

Результати розрахунків зведено у таблиці 3.2–3.4, а відповідні графіки показано на рис. 3.2.

Таблиця 3.2

$I_1$ , мА	0	10	30	39	50	55	60
$U_{12}$ , В	100	95	80	70	50	30	0

Таблиця 3.3

$I_2$ , мА	-10	0	10	30	30
$U_{12}$ , В	15	10	5	-10	-20

Таблиця 3.4

$I_3$ , мА	0	10	30	39	50	55	60
$U_{12}$ , В	-20	-15	0	10	30	50	80

За першим законом Кірхгофа можна записати рівняння  $I_1 + I_2 = I_3$ , яке для даної схеми повинно виконуватись за одного значення напруги  $U_{12}$ . Щоб визначити це значення побудуємо допоміжну криву  $(I_1 + I_2)(U_{12})$  і знайдемо точку перетину цієї кривої із залежністю  $(I_3)(U_{12})$ . Ця точка визначає розв'язок задачі:  $U_{12} = 18$  В,  $I_1 = 58$  мА,  $I_2 = -15$  мА,  $I_3 = 43$  мА; напруга на елементах  $U_1 = 82$  В,  $U_2 = -8$  В,  $U_3 = 38$  В.

Правильність розрахунків перевіряємо за балансом потужностей. Сумарна потужність джерел енергії

$$P_{\text{джер}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = 100 \cdot 50 + 10 \cdot (-15) + 20 \cdot 43 = 6510 \text{ мВт.}$$

Сумарна потужність споживачів

$$P_{cn} = U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3 = 82 \cdot 50 + (-8) \cdot (-15) + 38 \cdot 43 = 6510 \text{ мВт.}$$

Баланс потужностей виконується.

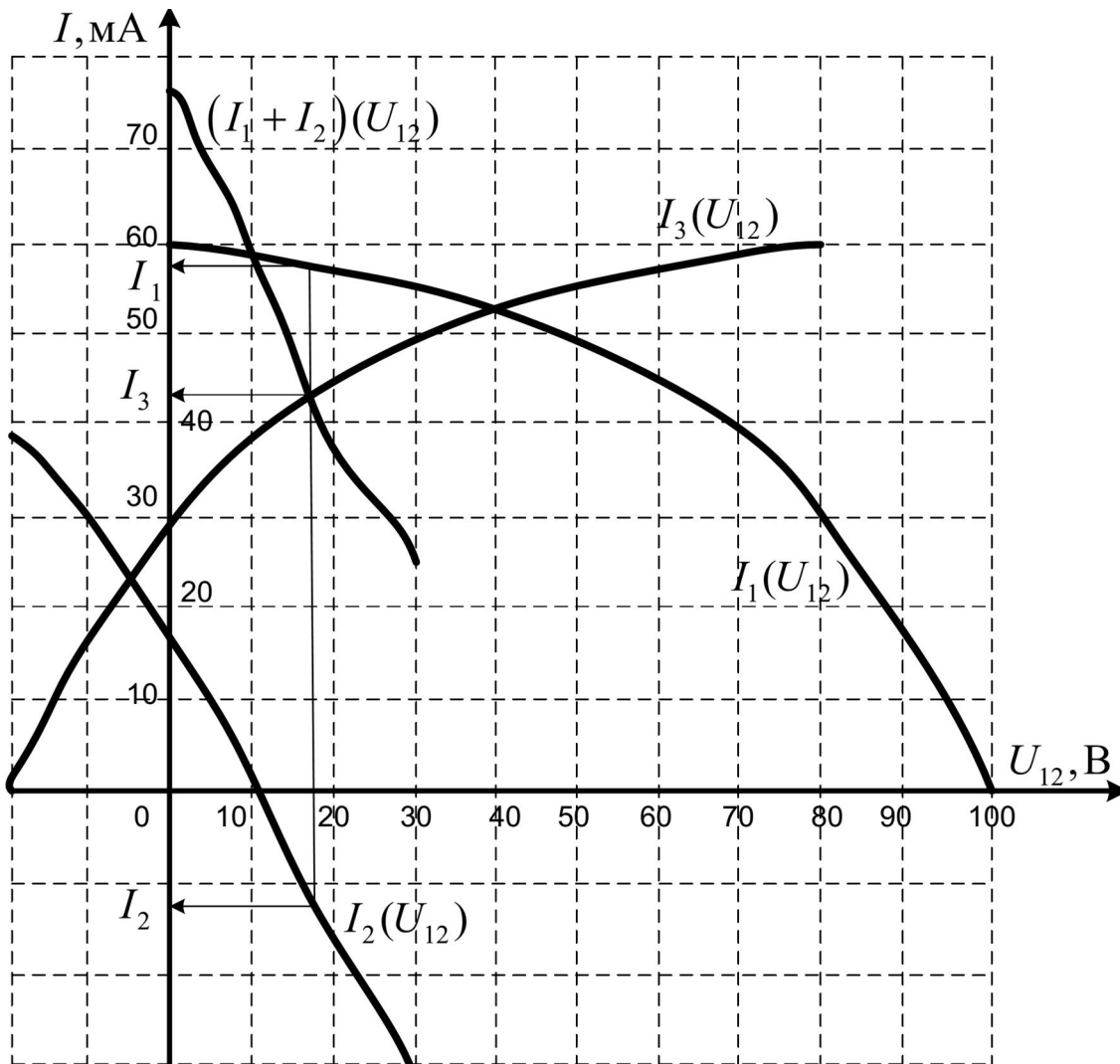


Рисунок 3.2

### Задача 3.2.

Вольт-амперні характеристики нелінійних елементів кола рис. 3.3  $U_1(I_1)$  і  $U_2(I_2)$  наведено у табл. 3.5. Визначити струми, перевірити баланс потужностей, якщо  $E = 70$  В,  $J = 1,5$  А.

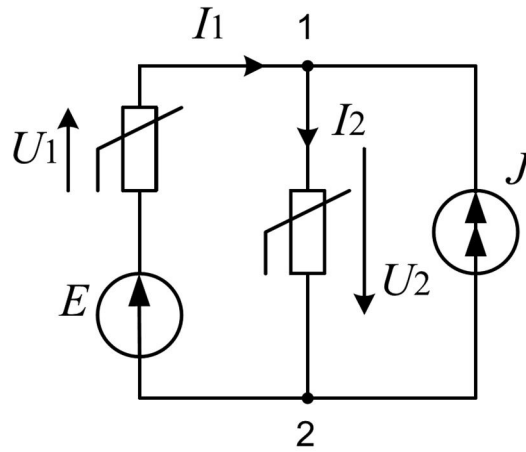


Рисунок 3.3

Таблиця 3.5

$U$ , в	5	10	20	30	40	50	60	70
$I_1$ , мА	0,2	0,4	0,68	0,86	0,96	1	1	1
$I_2$ , мА	1,12	1,4	1,8	2,14	2,44	2,77	3,5	4

### Розв'язання.

Оскільки всі вітки схеми увімкнені паралельно до двох вузлів 1 і 2, для розв'язання скористаємось методом двох вузлів.

Довільно оберемо додатні напрямки струмів і вузлової напруги  $U_{12}$  (рис. 3.3) і запишемо рівняння за 2-м законом Кірхгофа:

$$U_{12} = E_1 - U_1, \quad U_{12} = U_2.$$

Користуючись цими виразами, для першої вітки розрахуємо залежність напруги  $U_{12}$  від струму. Довільно задамо значення струму і за ВАХ першого нелінійного елемента визначимо на ньому напругу; за відповідним рівнянням розрахуємо вузлову напругу  $U_{12}$ , яка буде відповідати обраному значенню струму. Результати розрахунків зведені у таблиці 3.6, а відповідні графіки показано на рис. 3.4.

Таблиця 3.6

$I_1$ , мА	0,2	0,4	0,68	0,86	0,96	1	1	1
$U_{12}$ , В	65	60	50	40	30	20	10	0

За першим законом Кірхгофа можна записати рівняння  $I_1 + J = I_2$ , яке для даної схеми повинно виконуватись за одного значення напруги  $U_{12}$ . Щоб знайти це значення побудуємо допоміжну криву  $(I_2 - J)(U_{12})$  і знайдемо точку перетину цієї кривої із залежністю  $(I_1)(U_{12})$ . Ця точка визначає розв'язок задачі:  $U = 38 \text{ В}$ ,  $I_1 = 0,9 \text{ А}$ ,  $I_2 = 2,4 \text{ А}$ .

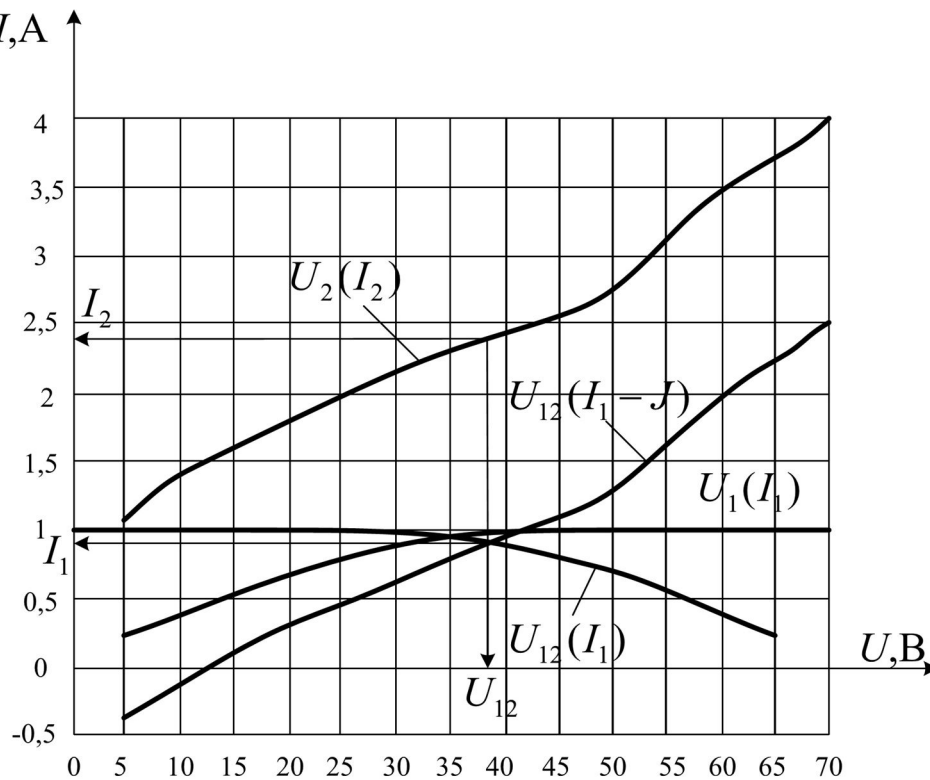


Рисунок 3.4

Правильність розрахунків перевіряємо за балансом потужностей.

Сумарна потужність джерел енергії

$$P_{дж} = E_1 I_1 + U_{12} J = 70 \cdot 0,9 + 38 \cdot 1,5 = 120 \text{ Вт.}$$

Сумарна потужність споживачів

$$P_{cn} = U_1 I_1 + U_2 I_2 = 32 \cdot 0,9 + 38 \cdot 2,4 = 120 \text{ Вт.}$$

Баланс потужностей виконується.

### Задача 3.3.

У колі на рис. 3.5 крім лінійних опорів  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 2 \text{ Ом}$  є два однакових нелінійних резистора із заданою ВАХ (табл. 3.7) ЕРС джерел  $E_1 = 5 \text{ В}$ ,  $E_4 = 5 \text{ В}$ . Розрахувати усі струми в колі.

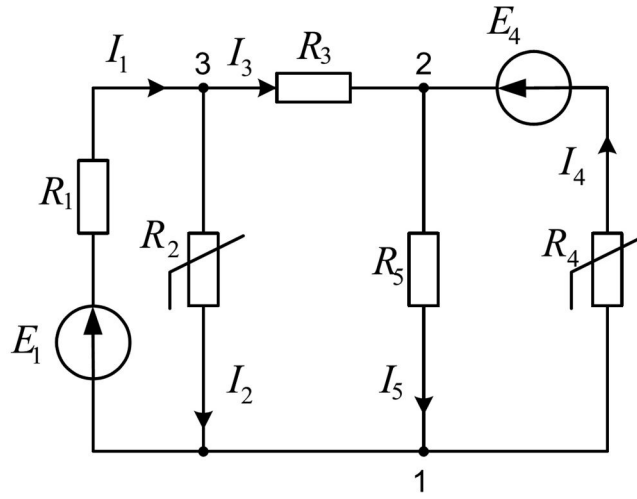


Рисунок 3.5

Таблиця 3.7

$U, \text{В}$	0	1	2	3	4
$I, \text{А}$	0	0,2	0,5	1	2

**Розв'язання.**

Будуємо ВАХ нелінійного елемента  $U = f(I)$  (рис. 3.6).

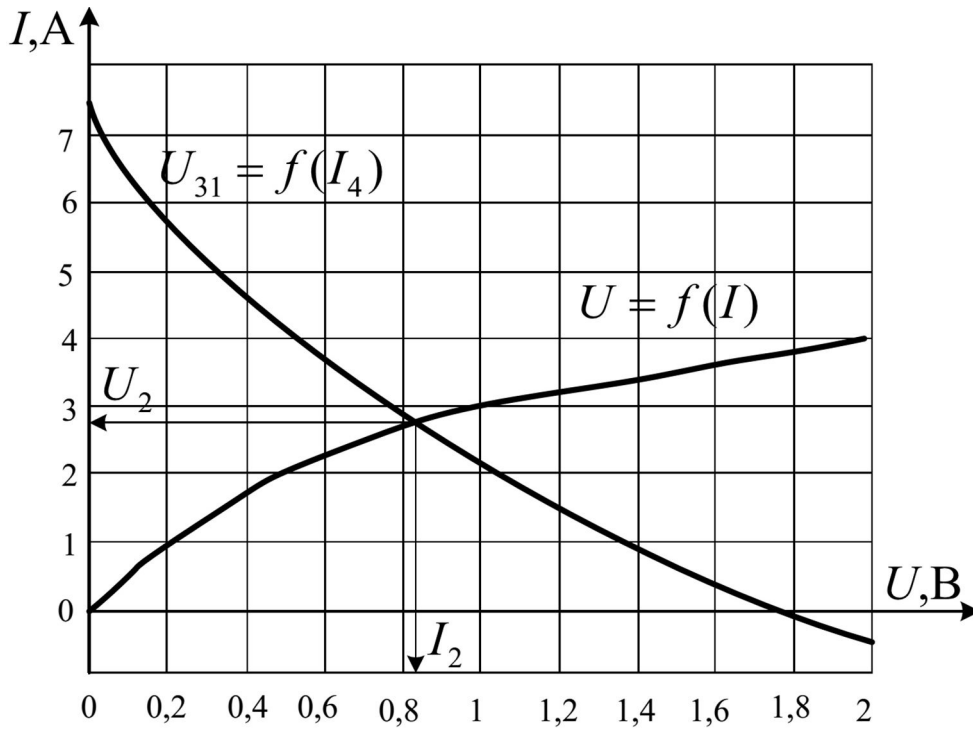


Рисунок 3.6

Довільно задамо значення струму  $I_4$  і обчислимо відповідну напругу  $U_4$  та струм  $I_2$  нелінійного опору  $R_2$ .

Для струму  $I_4 = 2 \text{ А}$  відповідна напруга становить  $U_4 = 4 \text{ В}$  (див.табл.

3.7), тоді

$$U_{21} = E_1 - U_4 = 5 - 4 = 1 \text{ В},$$

$$I_5 = \frac{U_{21}}{R_5} = 0,5 \text{ А},$$

$$I_3 = I_5 - I_4 = -1,5 \text{ А},$$

$$U_{31} = R_3 \cdot I_3 + U_{21} = -1,5 \cdot 1 + 1 = -0,5 \text{ В}.$$

Припустимо далі, що  $I_4 = 1 \text{ А}$  і в такій самій послідовності знову обчислимо  $U_{31}$ . Цю процедуру повторимо декілька разів. Розрахунки зведено у табл. 3.8.

Таблиця 3.8

$I_4, \text{ А}$	$U_4, \text{ В}$	$U_{21} = E_1 - U_4,$ В	$I_5 = \frac{U_{21}}{R_5}, \text{ А}$	$I_3 = I_5 - I_4, \text{ А}$	$U_{31} = R_3 \cdot I_3 + U_{21},$ В
2	4	1	0,5	-1,5	-0,5
1	3	2	1	0	2
0,5	2	3	1,5	1	4
0,2	1	4	2	1,8	5,8
0	0	5	2,5	2,5	7,5

Побудуємо графік залежності  $U_{31} = f(I_{14})$  (рис. 3.6). Точка перетину графіків  $U = f(I)$  і  $U_{31} = f(I_{14})$  відповідає дійсному значенню струму  $I_2 = 0,84 \text{ А}$ . За ВАХ  $U = f(I)$  визначаємо напругу  $U_2 = 2,7 \text{ В}$ .

Усі інші напруги та струми легко розраховуються за законами Кірхгофа:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{31}}{R_1} = 1,15 \text{ А},$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 1,15 - 0,84 = 0,31 \text{ А},$$

$$U_{21} = -R_3 \cdot I_3 + U_2 = -0,31 + 2,7 = 2,39 \text{ В},$$

$$I_5 = \frac{U_{21}}{R_5} = 1,195 \text{ A},$$

$$U_4 = E_4 - U_{21} = 5 - 2,31 = 2,69 \text{ B}.$$

Струм  $I_4$  знаходимо за формулою лінійної інтерполяції:

$$\frac{U_4 - 2}{3 - 2} = \frac{I_4 - 0,5}{1 - 0,5},$$

$$\frac{U_4 - 2}{1} = \frac{I_4 - 0,5}{0,5},$$

$$I_4 - 0,5 = 0,5 \cdot (U_4 - 2),$$

$$I_4 = 0,5 + 0,5 \cdot (2,69 - 2),$$

$$I_4 = 0,5 + 0,5 \cdot 0,69 = 0,845 \text{ A}.$$

### 3.2 Графо-аналітичний метод

#### Задача 3.4.

У колі, показаному на рис. 3.7 відомо:  $E_1 = 250 \text{ B}$ ,  $E_2 = 50 \text{ B}$ ,  $J = 2 \text{ A}$ ,  $R_1 = 150 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 120 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 180 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 60 \text{ Ом}$ . Вольт-амперна характеристика нелінійного опору задана у таблиці 3.9. Розрахувати струм нелінійного елементу  $I$ .

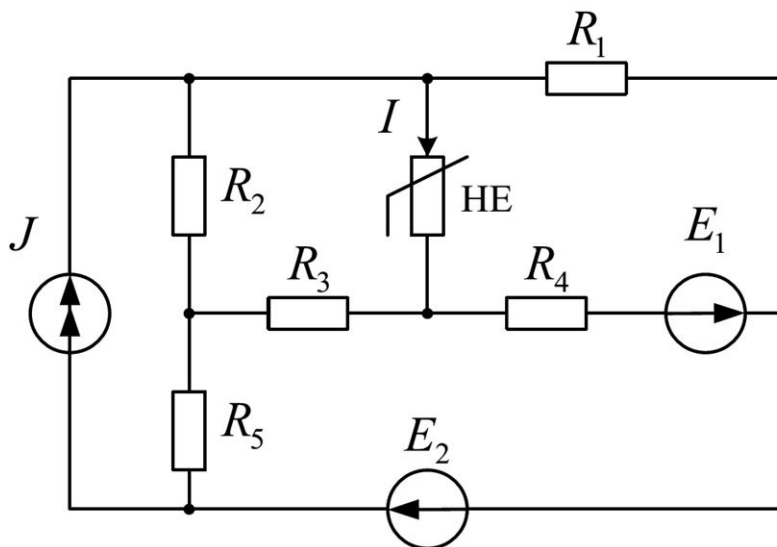


Рисунок 3.7

Таблиця 3.9

$U, \text{В}$	0	40	70	95	110	150	170
$I, \text{А}$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,75	2,5

### Розв'язання

Схема має один нелінійний елемент, тому для її розрахунку застосовуємо метод еквівалентного генератора. Після видалення вітки з нелінійним опором схема набуде вигляду, показаного на рис. 3.8. Відносно затискачів 1-2 вона являє собою активний лінійний двополюсник.

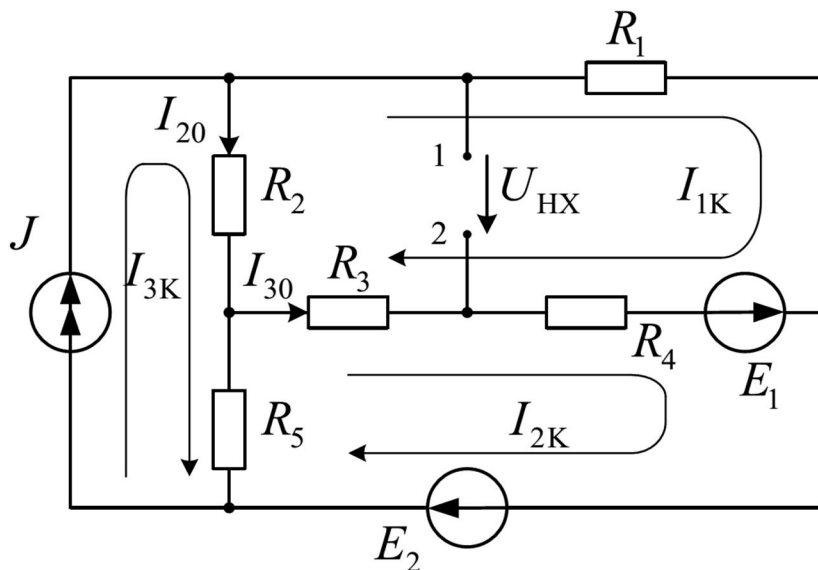


Рисунок 3.8

Визначимо напругу  $U_{\text{НХ}}$  між вхідними клемми двополюсника 1-2, застосовуючи 2-й закон Кірхгофа

$$U_{\text{НХ}} = I_{20}R_2 + I_{30}R_3.$$

Для знаходження струмів  $I_{20}$ ,  $I_{30}$  скористаємось методом контурних струмів.

Контурний струм  $I_{3к}$  відомий:  $I_{3к} = J = 2 \text{ А}$ . Тому необхідно визначити тільки струми  $I_{1к}$ ,  $I_{2к}$ .

Складемо рівняння для контурів з невідомими контурними струмами

$$\begin{cases} I_{1к} (R_1 + R_4 + R_3 + R_2) - I_{2к} (R_4 + R_3) - JR_2 = -E_1 \\ -I_{1к} (R_4 + R_3) + I_{2к} (R_4 + R_3 + R_5) - JR_5 = E_1 + E_2 \end{cases}$$

Після підстановки чисельних даних будемо мати

$$\begin{cases} 500I_{1к} - 300I_{2к} = -50 \\ -300I_{1к} + 360I_{2к} = 420 \end{cases}$$

З останньої системи рівнянь визначаються контурні струми  $I_{1к} = 1 \text{ А}$ ,  $I_{2к} = 2 \text{ А}$ .

Далі визначимо струми

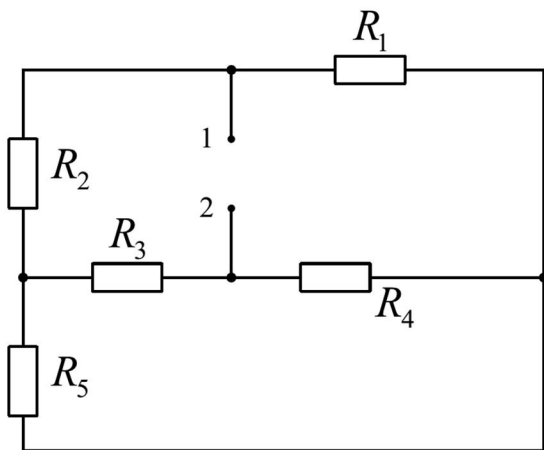
$$I_{20} = I_{3к} - I_{1к} = 2 - 1 = 1 \text{ А},$$

$$I_{30} = I_{2к} - I_{1к} = 2 - 1 = 1 \text{ А}.$$

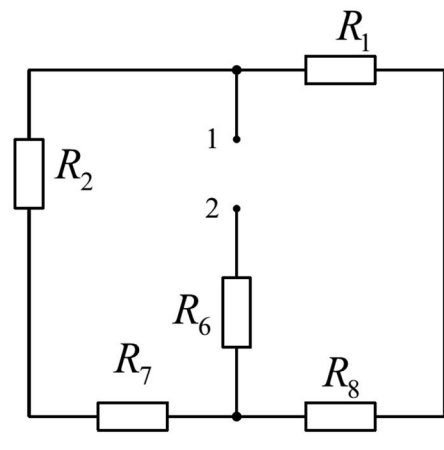
Знайдемо напругу між вхідними клемми двополюсника

$$U_{HX} = I_{20}R_2 + I_{30}R_3 = 1 \cdot 100 + 1 \cdot 120 = 220 \text{ В}.$$

Вилучимо із схеми джерела енергії (рис. 3.9,а) і розрахуємо вхідний опір двополюсника.



а)



б)

Рисунок 3.9

Для цього попередньо перетворимо трикутник опорів  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  на еквівалентну зірку  $R_6$ ,  $R_7$ ,  $R_8$ :

$$R_6 = \frac{R_3R_4}{R_3+R_4+R_5} = \frac{120 \cdot 180}{120 + 180 + 60} = 40 \text{ Ом},$$

$$R_7 = \frac{R_3R_5}{R_3+R_4+R_5} = \frac{120 \cdot 60}{120 + 180 + 60} = 20 \text{ Ом},$$

$$R_8 = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{180 \cdot 60}{120 + 180 + 60} = 30 \text{ Ом.}$$

Вхідний опір двополюсника відносно клем 1 і 2

$$R_{BX} = R_6 + \frac{(R_1 + R_8) \cdot (R_2 + R_7)}{(R_1 + R_8) + (R_2 + R_7)} = 40 + \frac{(150 + 30) \cdot (100 + 20)}{(150 + 30) + (100 + 20)} = 112 \text{ Ом.}$$

Обчисливши значення  $U_{BX}$ ,  $R_{BX}$ , складемо відповідну схему (рис. 3.10).

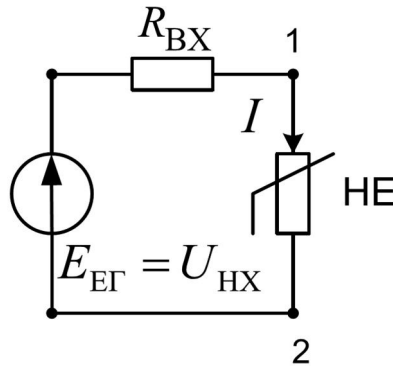


Рисунок 3.10

Графічне розв'язання задачі наведено на рис. 3.11.

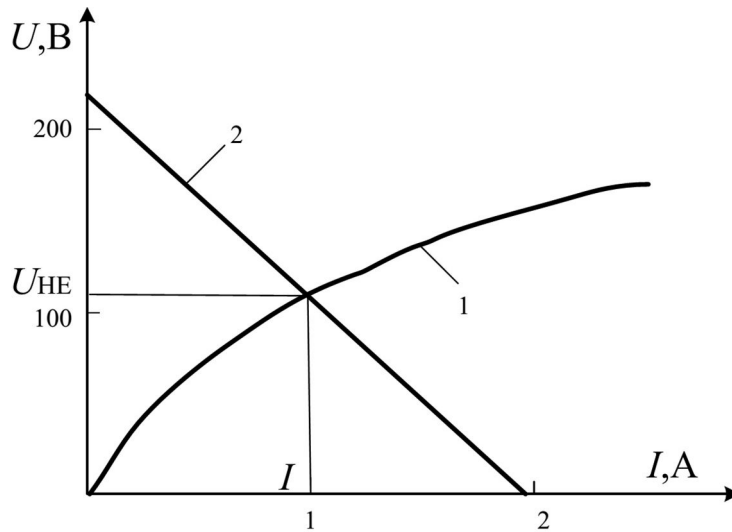


Рисунок 3.11

В одній координатній площині будовані вольт-амперні характеристики нелінійного елемента (рис. 3.11, крива 1) і лінійного активного двополюсника (рис. 3.11, крива 2), в який входять  $E_{EГ}$  і  $R_{BX}$ . У відповідності з рівнянням для цієї ділянки кола маємо:

$$U_{12}(I) = E_{EГ} - R_{BX} I.$$

ВАХ двополюсника будуюмо за двома точками:

$$E_{EG} = 220 \text{ В коли } I = 0,$$

$$I_{\kappa} = \frac{E_{EG}}{R_{BX}} = \frac{220}{112} = 1,96 \text{ А для } U=0.$$

Точка перетину ВАХ лінійного активного двополюсника і НЕ визначає напругу  $U = 110 \text{ В}$  і струм нелінійного елемента  $I = 1 \text{ А}$ .

## 4 ЕЛІПІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

### 4.1 Розрахунок кола синусоїдного струму при послідовному та паралельному з'єднанні елементів

#### Задача 4.1.

Через котушку індуктивності  $L=1$  Гн протікає струм, що змінюється за законом синуса  $i_L(t) = 1,41\sin(314t - \frac{\pi}{4})$  А. Визначити комплекс діючого значення напруги на котушці.

#### Розв'язання

Зв'язок напруги та струму для котушки індуктивності описуються співвідношенням

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

Користуючись цією диференційною залежністю виведемо закон зміни напруги на котушці як синусоїдної функції:

$$\begin{aligned} u_L &= \omega L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \psi) = 314 \cdot 1 \cdot 141 \sin(314t - 45^\circ + 90^\circ) = \\ &= 442,74 \cdot \sin(314t + 45^\circ) = 314 \sqrt{2} \cdot \sin(314t + 45^\circ). \end{aligned}$$

Користуючись правилами переходу від синусоїдної функції до її комплексу діючого значення, отримуємо

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 314 e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

Досягнути цього ж результату можна скориставшись іншим підходом:

- перейти від синусоїдної функції струму до її комплексу діючого значення  $\underline{I} = 1 e^{-j45^\circ}$  А;
- розрахувати реактивний опір котушки  $X_L = \omega L = 314$  Ом;
- за законом Ома у комплексній формі для ділянки кола

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot X_L e^{j90^\circ} = 1e^{-j45^\circ} \cdot 314e^{j90^\circ} = 314 e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

### Задача 4.2.

Визначити струм та характер навантаження у колі (рис. 4.1) з параметрами

$$u_{ab}(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В,}$$

$$e(t) = 40\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В,}$$

$$i(t) = 4,163\sqrt{2} \sin(\omega t + 166,102^\circ) \text{ А.}$$

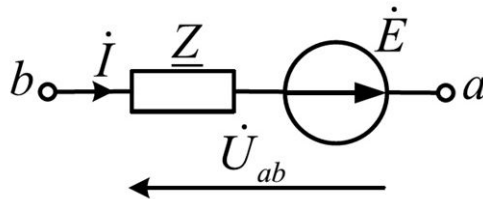


Рисунок 4.1

### Розв'язання

Перейдемо від миттєвих величин до їх комплексів діючих значень:

$$u_{ab}(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В} \Rightarrow \underline{U}_{ab} = 100 e^{j30^\circ} \text{ В,}$$

$$e(t) = 40\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В} \Rightarrow \underline{E} = 40 e^{-j90^\circ} \text{ В,}$$

$$i(t) = 4,163\sqrt{2} \sin(\omega t + 166,102^\circ) \text{ А} \Rightarrow \underline{I} = 4,163 e^{j166,102^\circ}.$$

Застосуємо II закон Кірхгофа для розрахунку комплексу повного опору навантаження:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{E} - \underline{I}Z \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{E} - \underline{U}_{ab}}{\underline{I}} = 30 e^{j60^\circ} = 15 + j25,981 \text{ Ом.}$$

### Задача 4.3.

У колі (4.2) відомі покази трьох амперметрів:  $I_1 = 2\sqrt{3}$  А,  $I_2 = I_3 = 2$  А та  $r=50$  Ом. Розрахувати значення  $x_C$  и  $R$  за умови їх рівності. Визначити  $\cos\phi$  кола.

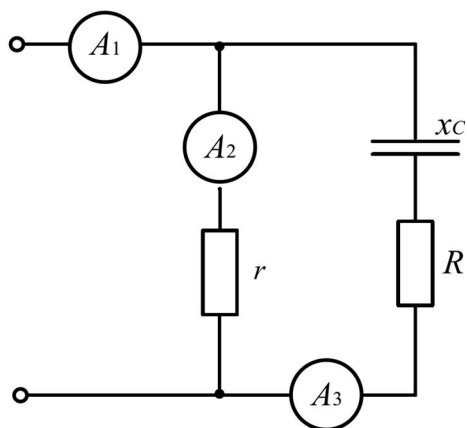


Рисунок 4.2

### Розв'язання

Згідно закону Ома розраховуємо напругу на паралельній ділянці кола:

$$U_2 = I_2 r = 2 \cdot 50 = 100 \text{ В.}$$

Оскільки напруга  $U_2$  однакова для обох паралельно з'єднаних гілок, то

$$Z_3 = \frac{U_2}{I_3} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Ом.}$$

З трикутника опорів (рис. 4.3) для третьої гілки розраховуємо значення їх модулів, зважаючи на їх рівність між собою

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + X_c^2} = 50 \text{ Ом,}$$

звідки

$$R = x_c = 35 \text{ Ом.}$$

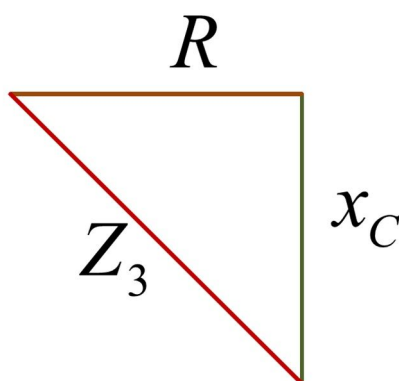


Рисунок 4.3

Оскільки аргумент комплексного опору третьої гілки водночас є кутом зсуву фаз між, то

$$\underline{Z}_3 = R - jx_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\varphi}.$$

Звідси

$$\varphi = \arctg\left(\frac{-x_C}{R}\right) = -45^\circ.$$

Тому  $\cos \varphi = \cos(-45^\circ) = 0,707$ .

#### Задача 4.4.

У колі синусоїдного струму увімкнені три амперметри (рис. 4.4). Визначити покази амперметра  $A_2$ , якщо амперметри  $A_0$  та  $A_1$  реєструють відповідно 10 А і 6 А.

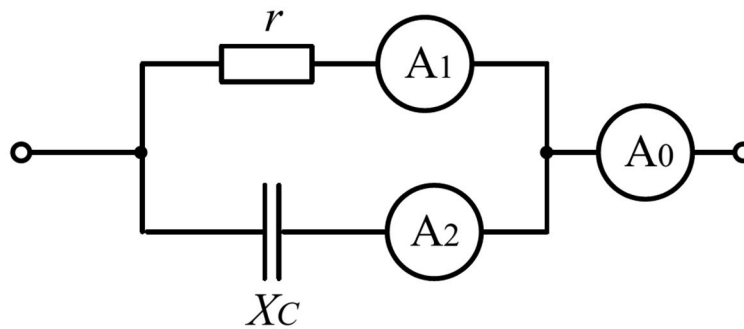


Рисунок 4.4

#### Розв'язання

Розв'язання базується на використанні векторної діаграми струмів (рис. 4.5).

$$I_{A2} = \sqrt{I_{A0}^2 - I_{A1}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{A}.$$

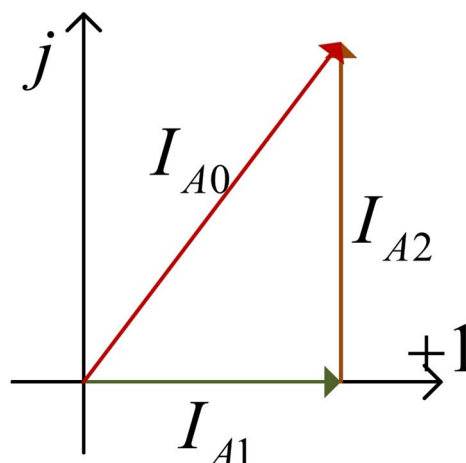


Рисунок 4.5

### Задача 4.5.

За відомих показів першого та другого вольтметрів (рис. 4.6)  $U_1=100$  В,  $U_2=150$  В, та опору резистора  $r=10$  Ом, виконати розрахунок третього вольтметра та індуктивності, якщо частота  $f=50$  Гц.

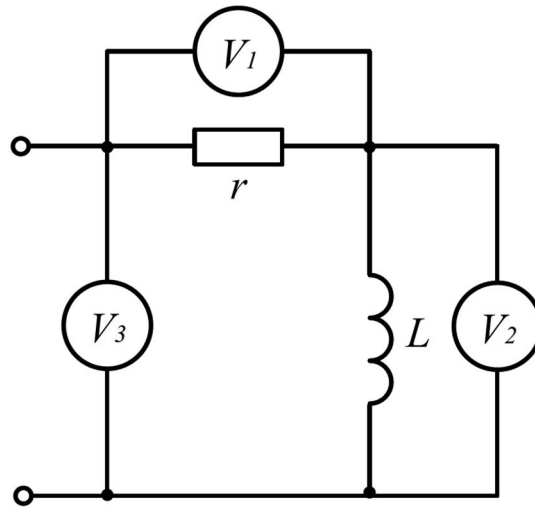


Рисунок 4.6

### Розв'язання

Розв'язання базується на використанні векторної діаграми напруг (рис. 4.7)

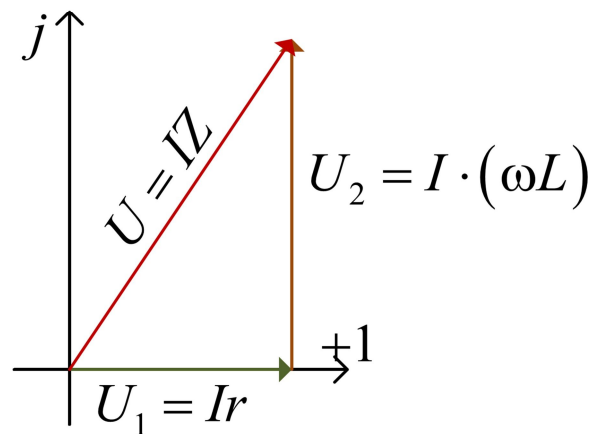


Рисунок 4.7

$$U_1 = Ir \Rightarrow I = \frac{U_1}{r} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A};$$

$$U_2 = I x_L \Rightarrow x_L = \frac{U_2}{I} = \frac{150}{10} = 15 \text{ Ом};$$

$$x_L = 2\pi f L \Rightarrow L = \frac{x_L}{2\pi f} = \frac{15}{2\pi \cdot 50} = 47,8 \text{ мГн};$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{100^2 + 150^2} = 180,28 \text{ В.}$$

**Задача 4.6.**

У колі на рис. 4.8  $u_R(t) = 1128\sin(\omega t + 32^\circ)$ ,  $u_C(t) = 84\sin(\omega t - 58^\circ)$ .

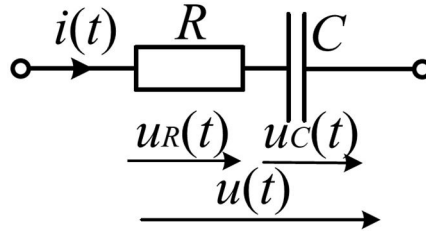


Рисунок 4.8

Розрахувати діюче значення та записати рівняння миттєвого значення вхідної напруги.

**Розв'язання**

Визначаємо амплітудне значення вхідної напруги  $U_m$  та кут зсуву фаз  $\varphi$  між напругою та струмом на вході кола. Для цього зручно скористатися трикутником напруг (рис. 4.9), який можна будувати як для діючих так і для амплітудних значень.

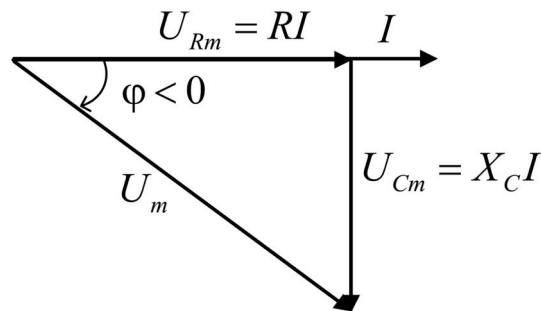


Рисунок 4.9

$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + U_{Cm}^2} = \sqrt{112,8^2 + 84,6^2} = 141 \text{ В,}$$

$$\varphi = \arctg \frac{U_{Cm}}{U_{Rm}} = \arctg \frac{-84,6}{112,8} = -37^\circ.$$

Відомо, що напруга та струм на резистивному елементі співпадають за фазою, отже для заданої схеми на резисторі  $\psi_{u_R} = \psi_{i_R} = \psi_i = 32^\circ$

Розрахуємо початкову фазу вхідної напруги з рівняння

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \Rightarrow \psi_u = \varphi + \psi_i = -37^\circ + 32^\circ = -5^\circ.$$

Вираз миттєвої напруги на вході кола має вигляд:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 141 \sin(\omega t - 5^\circ).$$

Діюче значення вхідної напруги

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В}.$$

#### **Задача 4.7.**

Три однофазних двигуни увімкнені паралельно і до них підведена напруга  $U = 400 \text{ В}$ . Паспортні дані двигунів:

$$P_1 = 1,2 \text{ кВт}, \cos(\varphi_1) = 1;$$

$$P_2 = 1,6 \text{ кВт}, \cos(\varphi_2) = 0,8 (\varphi_2 < 0);$$

$$P_3 = 2,4 \text{ кВт}, \cos(\varphi_3) = 0,6 (\varphi_3 > 0);$$

Визначити струм, що споживається всіма двигунами разом.

#### **Розв'язання**

Розраховуємо струми, що протікають у паралельних вітках через кожний двигун окремо:

$$P = UI_1 \cos(\varphi_1) \Rightarrow I_1 = \frac{P}{U \cos(\varphi_1)} = 3 \text{ А},$$

$$P_2 = UI_2 \cos(\varphi_2) \Rightarrow I_2 = \frac{P}{U \cos(\varphi_2)} = 5 \text{ А},$$

$$P_3 = UI_3 \cos(\varphi_3) \Rightarrow I_3 = \frac{P}{U \cos(\varphi_3)} = 10 \text{ А}.$$

Прийнявши початкову фазу напруги живлення  $\psi_u = 0$ , визначаємо початкові фази кожного із струмів:

$$\varphi_1 = \psi_u - \psi_{i1} \Rightarrow \psi_{i1} = \psi_u - \varphi_1 = \psi_u - \arccos(\varphi_1) = 0^\circ,$$

$$\varphi_2 = \psi_u - \psi_{i2} \Rightarrow \psi_{i2} = \psi_u - \varphi_2 = \psi_u - \arccos(\varphi_2) = 0 - (-36,87^\circ) = 36,87^\circ,$$

$$\varphi_3 = \psi_u - \psi_{i_3} \Rightarrow \psi_{i_3} = \psi_u - \varphi_3 = \psi_u - \arccos(\varphi_3) = 0 - 53,13^\circ = -53,13^\circ.$$

Будуємо векторну діаграму (рис. 4.10) та визначаємо вхідний струм

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 13,92 \text{ A.}$$

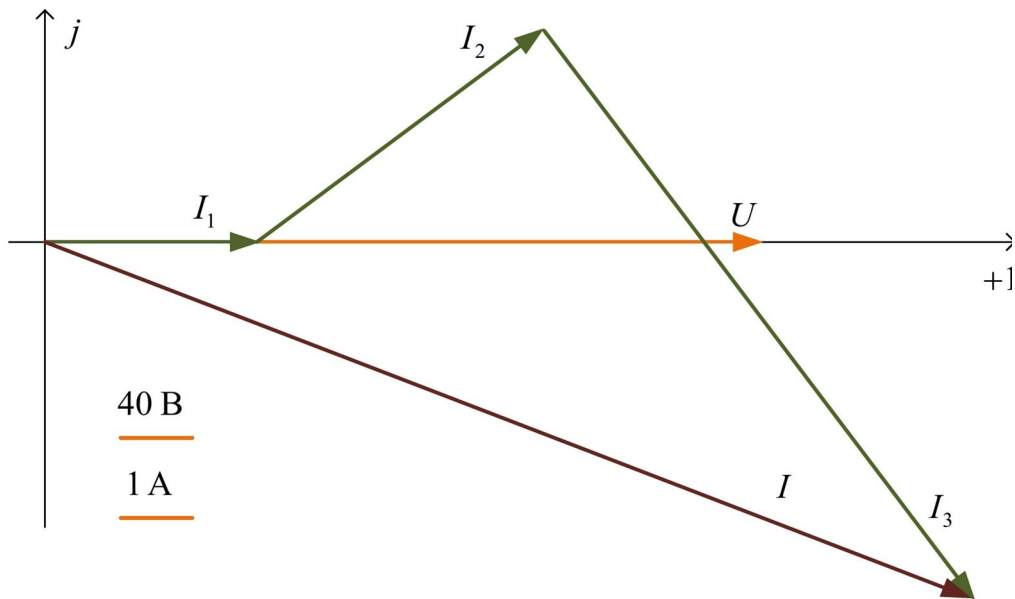


Рисунок 4.10

### Завдання для самостійного розв'язання

#### Задача 4.8.

1. Чи існує залежність між діючим значенням напруги (струму) та початковою фазою напруги (струму)?
2. Для кожної пари миттєвих напруги та струму а-в:

$$a) i_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 20^\circ), u_1(t) = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ);$$

$$б) i_2(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ), u_2(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ);$$

$$в) i_3(t) = 15\sin(\omega t - 30^\circ), u_3(t) = 380\sin(\omega t + 60^\circ),$$

- визначити кут зсуву фаз;
- визначити діючі значення напруги та струму;
- записати комплекси діючі значення напруги та струму використовуючи показникову, алгебричну та тригонометричну форми записів комплексів;
- побудувати векторні діаграми заданих синусоїдних напруги та струму.

3. Розрахувати суми напруг та струмів, заданих у п.2, користуючись теорією комплексних обчислень.

4. Подати комплекси напруг та струмів, отриманих у п.3, синусоїдними функціями.

#### 4.2 Розрахунок кола синусоїдного струму змішаного з'єднання

##### Задача 4.9.

Для схеми рис. 4.11 розрахувати значення струмів в усіх вітках кола та напруг на її ділянках, визначити покази приладів, скласти баланс активних і реактивних потужностей, побудувати повну векторну діаграму кола, записати миттєві значення струмів, якщо

- напруга на вході кола  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ ,  $U_m = 127\sqrt{2}$  В,  $\psi_w = 0$ ;

- опори елементів навантаження  $R_1=R_2=30$  Ом,  $X_{L1}=130$  Ом,  $X_{C1}=50$  Ом,  $X_{L2}=X_{C3}=40$  Ом.

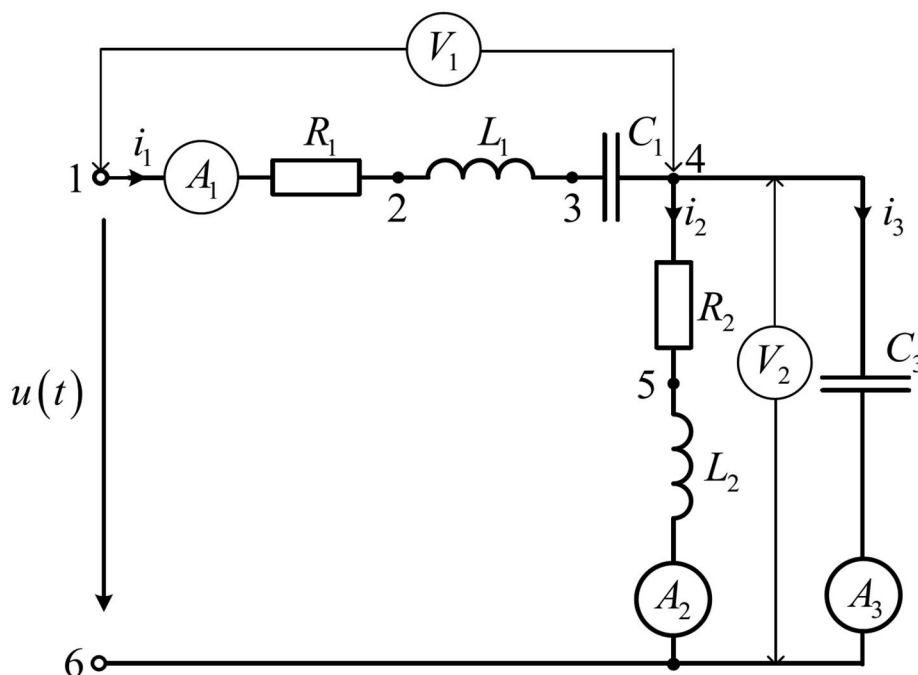


Рисунок 4.11

##### Розв'язання

Перейдемо від схеми заданого кола до комплексної схеми заміщення (рис. 4.12).

Комплекс діючого значення вхідної напруги

$$\underline{U} = \frac{U}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 127e^{j0^\circ} = 127 \text{ В.}$$

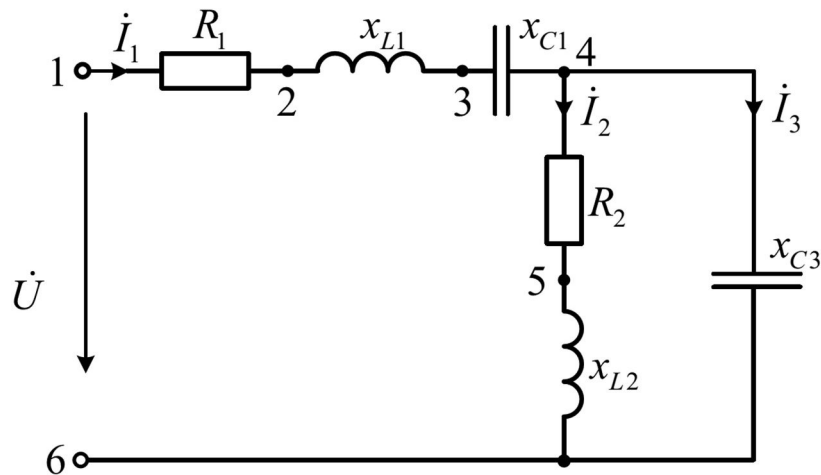


Рисунок 4.12

Розраховуємо повні комплексні опори гілок кола (рис. 4.13).

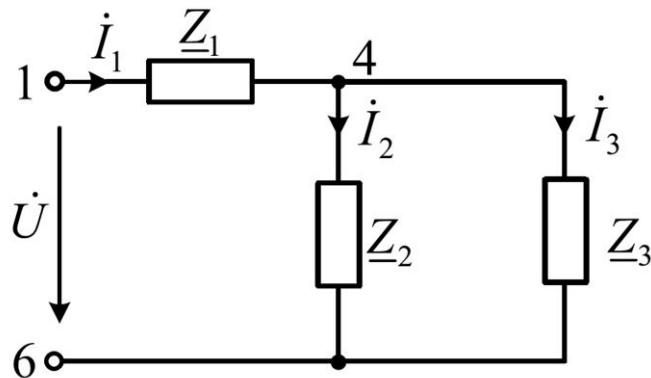


Рисунок 4.13

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= R_1 + jX_{L1} + (-jX_{C1}) = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = \\ &= 30 + j(130 - 50) = 30 + j80 = 85,44e^{j69,5^\circ}, \end{aligned}$$

де

$$\varphi_1 = \psi_{u14} - \psi_1 = \arctg\left(\frac{X_{L1} - X_{C1}}{R_1}\right) = \arctg\left(\frac{80}{30}\right) = 69,5^\circ;$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 30 + j40 = 50e^{j53^\circ},$$

де

$$\varphi_2 = \psi_{u46} - \psi_2 = \arctg\left(\frac{X_{L2}}{R_2}\right) = \arctg\left(\frac{40}{30}\right) = 53^\circ;$$

$$\underline{Z}_3 = -jX_{C3} = -j40 = 40e^{-j90^\circ},$$

де

$$\varphi_3 = \psi_{u_{46}} - \psi_3 = -90^\circ.$$

Розрахуємо сумарний комплексний опір паралельної вітки між вузлами 4-6 (рис. 4.14)

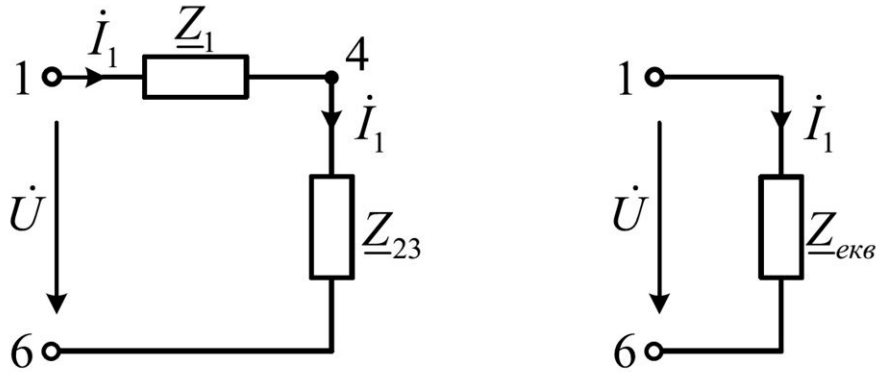


Рисунок 4.14

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{23} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(R_2 + jX_{L2}) \cdot (-jX_{C3})}{(R_2 + jX_{L2}) + (-jX_{C3})} = \frac{50e^{j53^\circ} \cdot 40e^{-j90^\circ}}{(30 + j40) + (-j40)} = \\ &= 53,3 - j40 = 66,7e^{-j37^\circ}, \end{aligned}$$

де

$$\varphi_{23} = \psi_{u_{46}} - \psi_{i1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-40}{53,3}\right) = -37^\circ.$$

Розрахуємо еквівалентний комплексний опір кола (рис. 4.15):

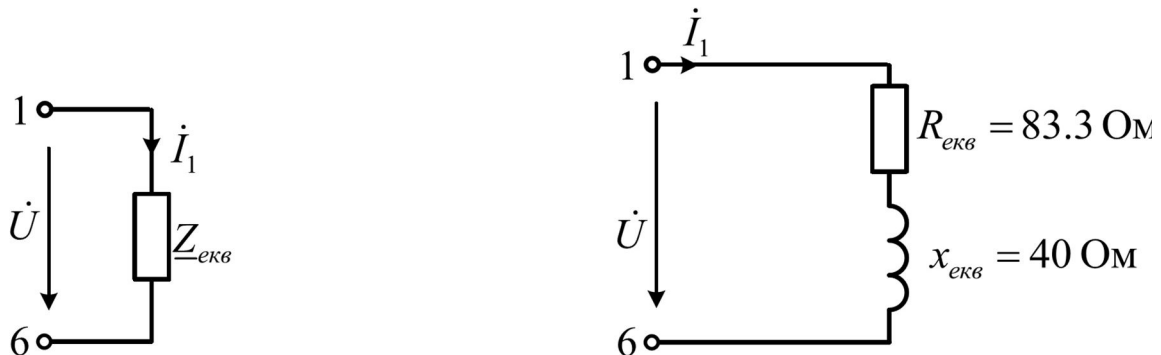


Рисунок 4.15

$$\underline{Z}_{екв} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) + \underline{Z}_{23} =$$

$$= 30 + j80 + 53,3 - j40 = 83,3 + j40 = 92,42e^{j25,7^\circ},$$

де

$$\varphi = \psi_u - \psi_{i1} = \arctg\left(\frac{40}{83,3}\right) = 25,7^\circ.$$

Розраховуємо струм на вході кола:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{екв}} = \frac{127}{92,42e^{j25,7^\circ}} = 1,37 e^{j25,7^\circ} A.$$

Для розрахунку струмів у розгалуженій частині застосуємо закон Ома.

Для цього, спершу, розрахуємо напругу між точками 4-6:

$$\underline{U}_{46} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{23} = 1,37e^{-j25,7^\circ} \cdot 66,7e^{-j37^\circ} = 91,6e^{-j62,7^\circ} B.$$

Тоді струми у розгалуженій частині

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{46}}{\underline{Z}_2} = \frac{91,6e^{-j62,7^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 1,83 e^{-1125,7^\circ} A.$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{46}}{\underline{Z}_3} = \frac{91,6e^{-j62,7^\circ}}{40e^{-j90^\circ}} = 2,29 e^{j27,3^\circ} A.$$

Для розрахунку струмів у розгалуженій частині кола можна було застосувати правило чужого опору та перший закон Кірхгофа:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \underline{I}_1 - \underline{I}_3.$$

На рис. 4.16 побудована векторна діаграма струмів.

Для перевірки правильності проведення розрахунків складаємо баланс потужностей:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}_1^* = 127 \cdot 1,37e^{j25,7^\circ} = 174e^{j25,7^\circ} = 156,91 + j75,18 VA,$$

$P_T = 156,91$  Вт – активна потужність на вході кола;

$Q_T = 75,18$  вар – реактивна потужність на вході кола.

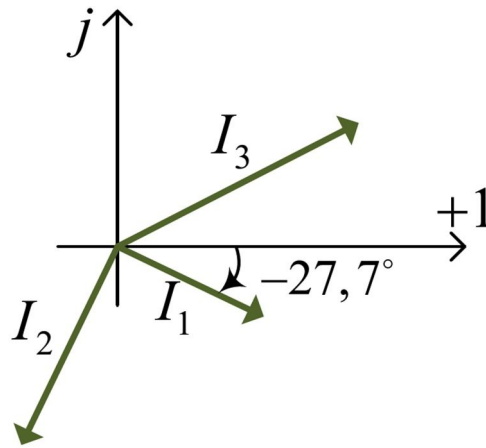


Рисунок 4.16

Активна потужність, яка споживається активними елементами кола:

$$P_{cn} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 = 1,37^2 \cdot 30 + 1,83^2 \cdot 30 = 156,77 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність

$$\begin{aligned} Q_{cn} &= I_1^2 \cdot (X_{L1} - X_{C1}) + I_2^2 \cdot X_{L2} + I_3^2 \cdot (-X_{C3}) = \\ &= 1,37^2 \cdot (130 - 50) + 1,83^2 \cdot 40 + 2,29^2 \cdot (-40) = 74,844 \text{ вар.} \end{aligned}$$

Для побудови векторної діаграми (рис. 4.17) розрахуємо напруги на кожному з елементів:

$$\underline{U}_{12} = I_1 R_1 = 1,37e^{-j25,7^\circ} \cdot 30 = 41,1e^{-j25,7^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{23} = I_1 X_{L1} e^{j90^\circ} = 1,37e^{-j25,7^\circ} \cdot 130e^{j90^\circ} = 178,1e^{j64,3^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{34} = I_1 X_{C1} e^{-j90^\circ} = 1,37e^{-j25,7^\circ} \cdot 50e^{-j90^\circ} = 68,5e^{-j115,7^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{45} = I_2 R_2 = 1,83e^{-j115,7^\circ} \cdot 30 = 54,9e^{-j115,7^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{56} = I_2 X_{L2} e^{j90^\circ} = 1,83e^{-j115,7^\circ} \cdot 40e^{j90^\circ} = 73,2e^{-j25,7^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{46} = I_2 X_{C3} e^{-j90^\circ} = 1,83e^{-j115,7^\circ} \cdot 40e^{-j90^\circ} = 91,6e^{-j62,7^\circ} \text{ В.}$$

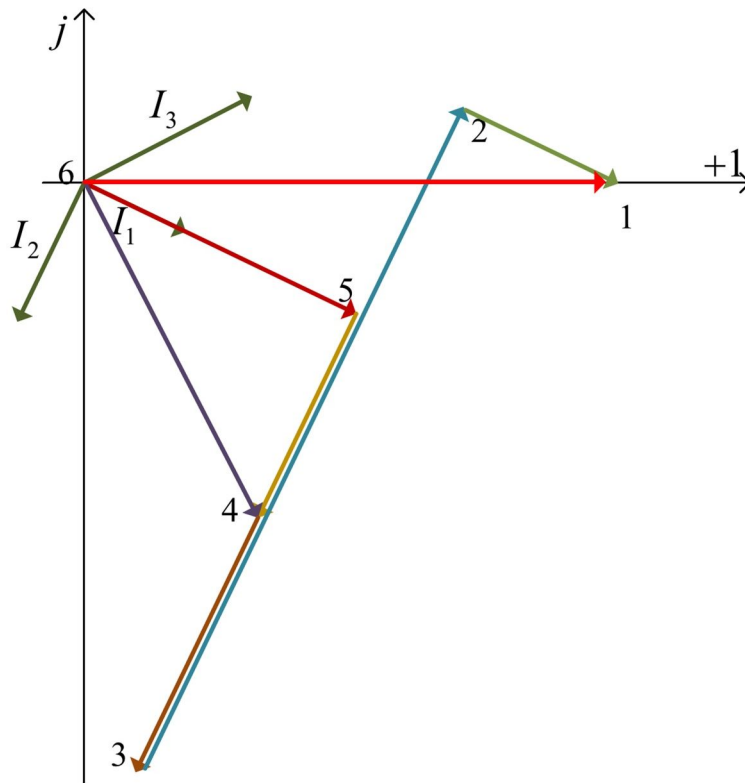


Рисунок 4.17

**Задача 4.10.**

У колі на рис. 4.18, а протікає синусоїдний струм  $i(t) = 10\sin(\omega t + 15^\circ)$  А частоти  $f=400$  Гц, резистивні опори  $r_1 = 10$  Ом,  $r_2 = 20$  Ом, ємність  $C = 10$  мкФ.

Користуючись методом провідностей розрахувати миттєве значення напруги на вході кола  $u(t)$  і напруги на конденсаторі  $u_C(t)$ , визначити покази приладів, побудувати векторну діаграму кола.

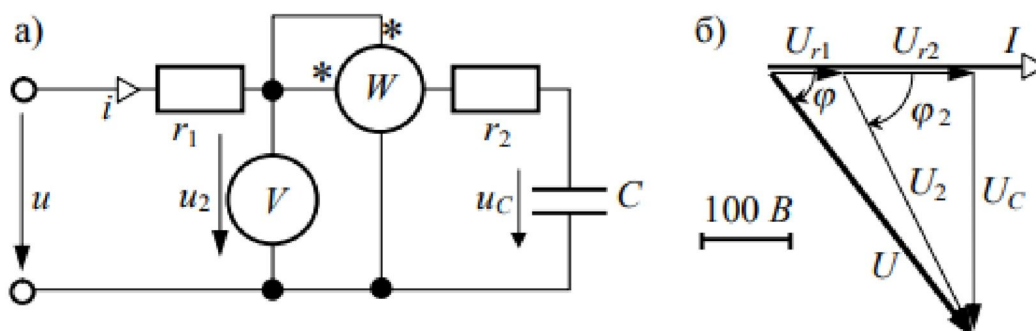


Рисунок 4.18

**Розв'язання**

Ємнісний опір кола

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = 39,81 \text{ Ом.}$$

Амплітудне значення напруги на ємності

$$U_{mC} = \text{Im}X_C = 10 \cdot 39,81 = 398,1 \text{ В.}$$

Діючі значення

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ А,}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{398,1}{\sqrt{2}} = 281,5 \text{ В.}$$

Діючі значення напруг на резистивних опорах

$$U_{r1} = I \cdot r_1 = 7,07 \cdot 10 = 70,7 \text{ В,}$$

$$U_{r2} = I \cdot r_2 = 7,07 \cdot 20 = 141,4 \text{ В,}$$

Другий закон Кірхгофа у векторній формі має вигляд

$$\underline{U}_{r1} + \underline{U}_{r2} + \underline{U}_C = \underline{U},$$

відповідно до якого будуюмо діаграму напруг кола (рис. 4.18, б). З прямокутного трикутника напруг

$$U = \sqrt{(U_{r1} + U_{r2})^2 + U_C^2} = 352 \text{ В,}$$

$$\varphi = \arctg \frac{-U_C}{U_{r1} + U_{r2}} = -53^\circ.$$

Миттєве значення напруги на вході кола

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i + \varphi) = \\ &= 352 \sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ + (-53^\circ)) = 352 \sqrt{2} \sin(\omega t - 38^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Напруга на конденсаторі відстає за фазою від струму на  $90^\circ$ , його миттєве значення

$$u(t) = U_{mC} \sin(\omega t + \psi_{U_C}) = U_{mC} \sin(\omega t + \psi - 90^\circ) = 398,1 \sin(\omega t - 75^\circ) \text{ В.}$$

Напругу на ділянці  $r_2$ -C, прикладено до ватметра та вольтметра і кут зсуву фаз, розраховуємо за трикутником напруг векторної діаграми згідно

$$\underline{U}_2 + \underline{U}_{r_2} + \underline{U}_C = 0,$$

$$U_2 = U_W = \sqrt{U_{r_2}^2 + U_C^2} = 315 \text{ В},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{-U_C}{U_{r_2}} = -63,33^\circ.$$

Вольтметр схеми вимірює діюче значення напруги  $U_2 = 315 \text{ В}$ .

Показ ватметра:

$$P_W = U_W I_W \cos(\varphi_W, I_W) = U_2 I \cos(\varphi_2) = 1000 \text{ Вт}.$$

Оскільки показ ватметра показує величину потужності, яка споживається резистором  $r_2$ , то показ ватметра можна розрахувати іншим чином

$$P_W = I^2 r_2 = 1000 \text{ Вт}.$$

### 4.3 Розрахунок складного кола синусоїдного струму

#### Задача 4.11.

Розрахувати значення струмів в усіх вітках кола (рис. 4.19) та скласти баланс активних і реактивних потужностей.  $\underline{E} = 10 \text{ В}$ ,  $R = 2x_L = x_C = 10 \text{ Ом}$ ,  $\underline{J} = 2e^{j90^\circ} \text{ А}$ .

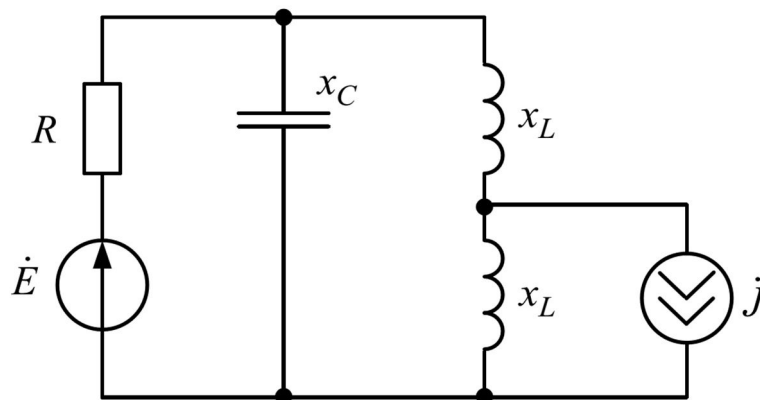


Рисунок 4.19

#### Розв'язання

Для обчислення значень струмів у вітках кола доцільно використати метод контурних струмів.

Довільно задаємо напрями контурних струмів (4.20) та складаємо

систему

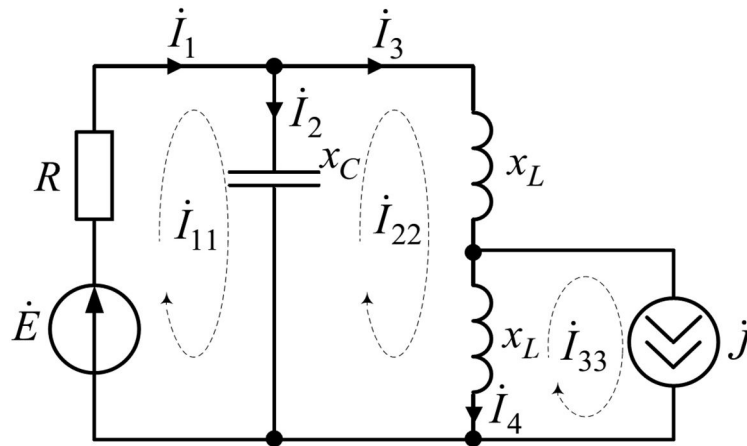


Рисунок 4.20

$$\begin{cases} \underline{J} = \underline{I}_{33} \\ \underline{I}_{11}(R - jx_C) - \underline{I}_{22}(-jx_C) = \underline{E}_1 \\ -\underline{I}_{11}(-jx_C) + \underline{I}_{22}(2jx_L - jx_C) - \underline{I}_{33}(jx_L) = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}(10 - j10) + \underline{I}_{22}(j10) = 10 \\ \underline{I}_{11}(j10) + \underline{I}_{22}(j10 - j10) - \underline{I}_{33}(j5) = 0 \end{cases}$$

За результатами розрахунку отримаємо значення контурних струмів:

$$\underline{I}_{11} = j1 = 1e^{j90} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{22} = -1 = 1e^{j180} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{33} = 2e^{j90} \text{ A}.$$

Знаходимо дійсні струми у вітках кола:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = j1 = 1e^{j90} \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22} = j1 - (-1) = 1 + j1 = \sqrt{2} e^{j45} \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{22} = -1 = 1e^{j180} \text{ A},$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_{22} - \underline{I}_{33} = -1 - j2 = \sqrt{5} e^{-j116} \text{ A},$$

Для перевірки правильності проведення розрахунків складаємо баланс потужностей:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{J}^* (-\underline{I}_4 jX_L) = 10 \cdot 1 e^{-j90} + 2 e^{-j90} \cdot (-\sqrt{5} e^{-j116} \cdot 5 e^{j90}) = \\ &= 9,802 + j10,098 \text{ ВА}, \end{aligned}$$

$P_{\Gamma} = 9,802$  Вт – активна потужність на вході кола;

$Q_{\Gamma} = 10,098$  вар – реактивна потужність на вході кола.

Активна потужність, яка споживається активними елементами кола:

$$P_{cn} = I_1^2 \cdot R_1 = 1^2 \cdot 10 = 10 \text{ Вт}.$$

Реактивна потужність

$$Q_{cn} = I_2^2 \cdot (-X_C) + I_3^2 \cdot X_L + I_4^2 \cdot (X_L) = \sqrt{2}^2 \cdot (-10) + 1^2 \cdot 5 + \sqrt{5}^2 \cdot 5 = 10 \text{ вар}.$$

#### Задача 4.12.

У схемі на рис. 4.21 відомо:  $E_1 = E_2 = 100$ В, причому  $E_2$ , випереджає  $E_1$  на  $90^\circ$  за фазою;  $J = 5$  А, причому струм цього джерела знаходиться у протифазі з  $E_2$ ;  $R = X_C = 10$  Ом,  $X_L = 20$  Ом.

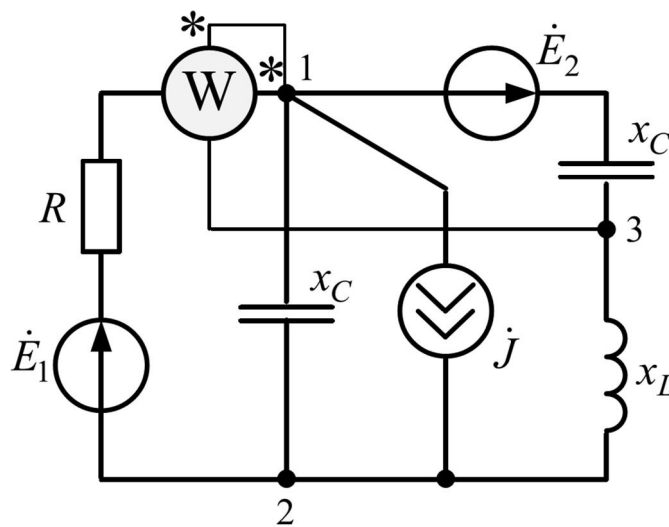


Рисунок 4.21

Визначити струми у всіх вітках кола, розрахувати показ ватметра, скласти баланс потужностей.

#### Розв'язання

Якщо прийняти початкову фазу  $E_1$  за нуль, тоді комплексні значення джерел будуть наступними

$$\underline{E}_1 = 100 \text{ В}, \underline{E}_2 = 100e^{j90^\circ} = j100 \text{ В}, \underline{J} = 5e^{-j90^\circ} = -j5 \text{ А}.$$

Оскільки схема містить лише два вузли (рис. 4.22), раціонально провести розрахунок струмів із використанням методу двох вузлів.

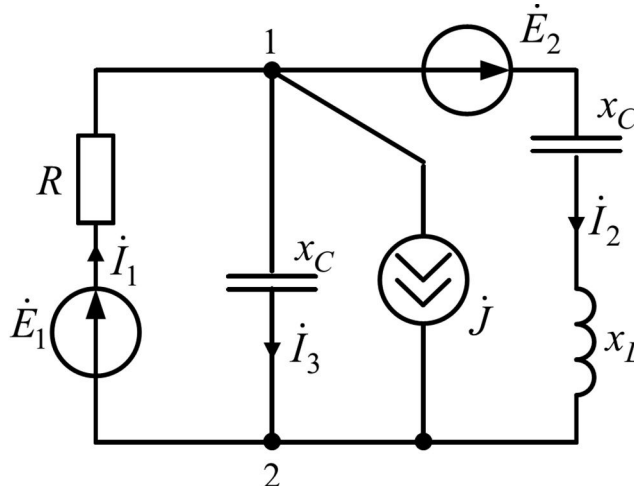


Рисунок 4.22

Напруга між вузлами 1-2

$$\underline{U}_{12} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2 - \underline{J}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2},$$

де комплексні провідності гілок

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{jX_L - jX_C} = \frac{1}{j10 - j10} = -j0,1 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{-j10} = j0,1 \text{ См}.$$

Тоді

$$\underline{U}_{12} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2 - \underline{J}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{100 \cdot 0,1 + 100e^{j90^\circ} \cdot 0,1e^{-j90^\circ} - 5e^{-j90^\circ}}{0,1 - j0,1 + j0,1} = j50 = 50e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

Струми у кожній з гілок визначаємо за законом Ома:

$$\underline{I}_1 = (\underline{E}_1 - \underline{U}_{12}) \underline{Y}_1 = 11,18e^{-j26,56^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = (\underline{E}_2 - \underline{U}_{12}) \underline{Y}_2 = 15 \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}_{12} \underline{Y}_2 = -5 = 5e^{j180} \text{ A.}$$

Напруга між вузлами 1-3 за другим законом Кірхгофа

$$\underline{U}_{12} = -\underline{E}_2 + \underline{I}_2 (-jX_C) = -j250 = 250 e^{j90} \text{ B.}$$

Розрахунок показу ватметра:

$$P_W = \text{Re} \left[ \underline{U}_{13} (-I_1^*) \right] = \text{Re} \left[ 250e^{j90} \cdot (-11,18e^{j26,56}) \right] = -1250 \text{ Вт.}$$

Для перевірки правильності проведення розрахунків складаємо баланс потужностей:

$$\underline{S} = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* + \underline{J}^* (-\underline{I}_3 \cdot (-jX_C)) = 1249,92 + j2000 \text{ ВА,}$$

$P_I = 1249,92$  Вт – активна потужність на вході кола;

$Q_I = 2000$  вар – реактивна потужність на вході кола.

Активна потужність, яка споживається активними елементами кола:

$$P_{cn} = P_W = I_1^2 \cdot R_1 = 1249,92 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність

$$Q_{cn} = I_2^2 \cdot (X_L - X_C) + I_3^2 \cdot (-X_C) = 2000 \text{ вар.}$$

#### 4.4 Використання методу еквівалентного генератора у колі синусоїдного струму

##### Задача 4.13.

Для кола на рис. 4.23 виконати розрахунок струму через активно-ємнісне навантаження п'ятої гілки  $i_5(t)$ , якщо параметри кола  $J(t) = 2\sin(\omega t + 60^\circ)$  А,  $e_1(t) = 100\sin(\omega t - 45^\circ)$  В,  $R_1 = x_1 = 5$  Ом,  $R_2 = x_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 10$  Ом,  $R_4 = 5$  Ом,  $R_5 = 10$  Ом,  $x_4 = 10$  Ом,  $x_5 = 5$  Ом.

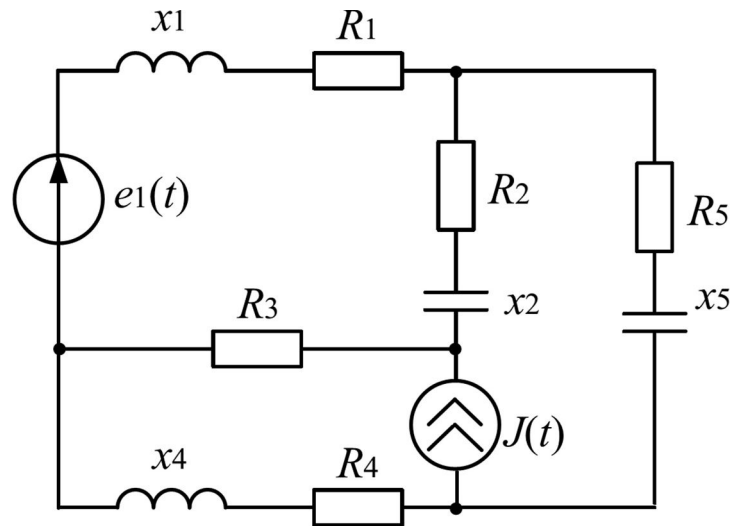


Рисунок 4.23

### Розв'язання

Відповідно до теореми про еквівалентний генератор, частина кола відносно затискачів гілки з шуканим струмом (див. рис. 4.24, а) може бути замінена еквівалентною схемою джерела напруги (див. рис. 4.24, б).

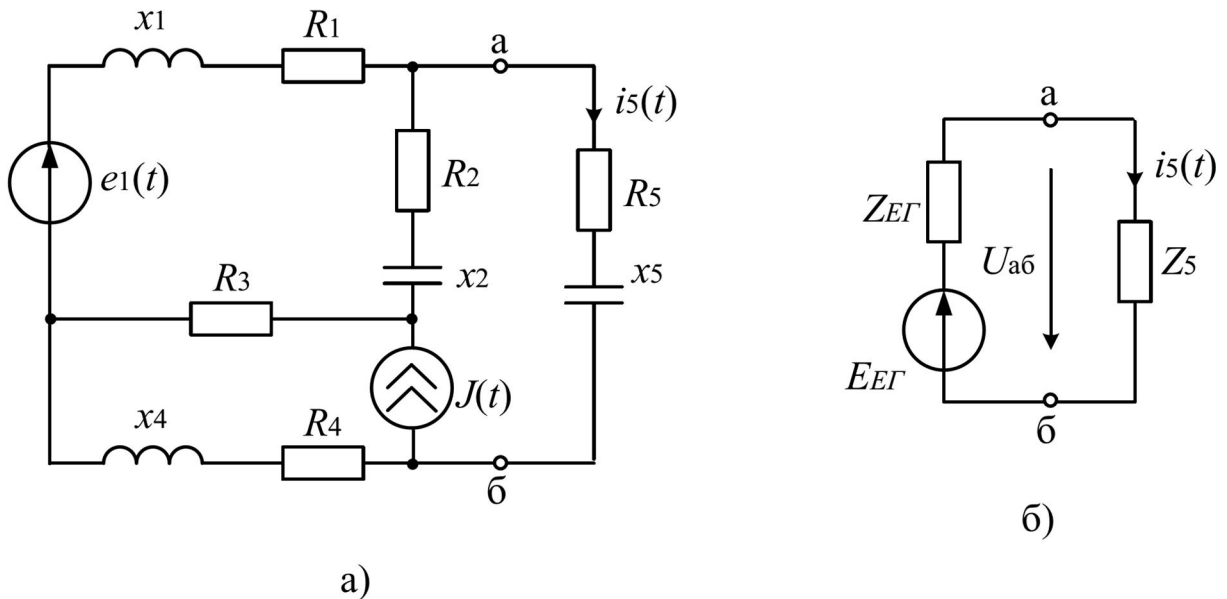


Рисунок 4.24

Шуканий струм при цьому визначається за законом Ома у комплексній формі:

$$I_5 = \frac{U_{aб}}{Z_{aб} + Z_H} = \frac{E_{EГ}}{Z_{EГ} + Z_H}.$$

Напрямок шуканого струму задається при цьому довільно для вихідного кола (див. рис. 4.24, а) і зберігається при переході до схеми заміщення (див.

рис. 4.24, б).

1. Визначення ЕРС еквівалентного генератора.

Оскільки величина ЕРС джерела напруги відповідає значенню напруги неробочого ходу, то для розрахунку комплексу ЕРС еквівалентного генератора користуємось режимом неробочого ходу. Для цього штучно утворюємо розрив у вітці з  $R_5$  та  $x_5$  (рис. 4.25) та розраховуємо напругу відносно розірваних затискачів у напрямку заданого струму ( $\underline{U}_{a\delta}$ ).

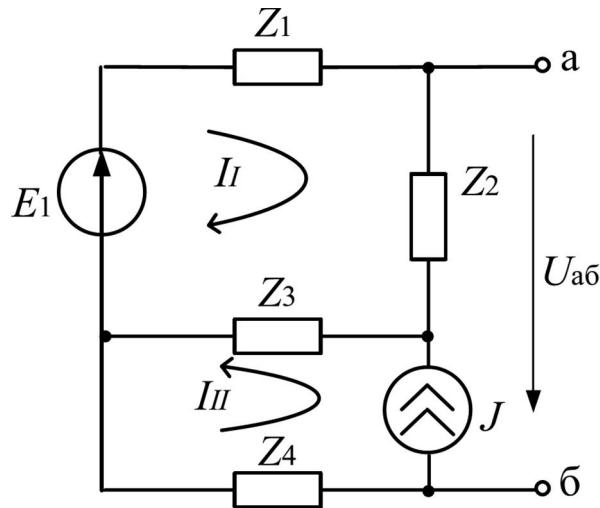


Рисунок 4.25

Параметри кола у комплексній формі:

$$\underline{E}_m = 100 e^{-j45^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{J}_m = 2 e^{j60^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jx_1 = 5 + j5 = 5\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jx_2 = 10 - j10 = 10\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 = 10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 + jx_4 = 5 + j10 \text{ Ом}.$$

Розрахунок напруги неробочого ходу  $\underline{U}_{a\delta}$  зводиться до аналізу кола із використанням комплексних обчислень на рис. 4.25. Для розрахунку струмів у вітках отриманого кола скористаємось методом контурних струмів.

$$\begin{cases} \underline{I}_{II} = \underline{J} \\ \underline{I}_I (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) + \underline{I}_{II} \underline{Z}_3 = \underline{E}_1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \underline{I}_{II} = \underline{J} \\ \underline{I}_I [(R_1 + R_2 + R_3) + j(x_1 - x_2)] + \underline{I}_{II} R_3 = \underline{E}_1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \underline{I}_{II} = 2e^{j60^\circ} \\ \underline{I}_I [(5 + 10 + 10) + j(5 - 20)] + 2e^{j60^\circ} \cdot 10 = 100e^{-j45^\circ} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \underline{I}_{II} = 2e^{j60^\circ} \\ \underline{I}_I = 3,012 - j2,918 = 4,194e^{-j44,098^\circ} \end{cases};$$

Отже, струми у вітках кола:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_I = 4,194e^{-j44,098^\circ},$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_{II} = 2e^{j60^\circ}.$$

Обійшовши контур від точки *a* до точки *b* визначимо напругу неробочого ходу:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{a\bar{b}} &= -\underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_4 \underline{Z}_4 + \underline{E}_1 = -\underline{I}_1 (R_1 + jx_1) + \underline{I}_4 (R_4 + jx_4) + \underline{E}_1 \\ &= 28,75 - j52,52 = 59,865e^{-j61,31^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

## 2. Визначення внутрішнього опору еквівалентного генератора.

Для розрахунку опору еквівалентного генератора заміняємо всі джерела енергії кола їх власними внутрішніми опорами (рис. 4.26). Далі розрахуємо комплексний опір кола відносно точок розриву.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{a\bar{b}} &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)} + \underline{Z}_4 = \frac{(R_1 + jx_1) (R_2 + R_3 - jx_2)}{(R_1 + jx_1) + (R_2 + R_3 - jx_2)} + R_4 + jx_4 = \\ &= 10,385 + j13,07 = 16,699e^{j51,546^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

## 3. Розрахунок шуканого струму.

Згідно теореми про активний двополюсник задане коло (рис. 4.23) було подане одноконтурною схемою заміщення (рис. 4.24, б) із розрахованими вище параметрами:

$$\underline{E}_{EG} = \underline{U}_{a\bar{b}} = 59,865e^{-j61,314^\circ} \text{ В;}$$

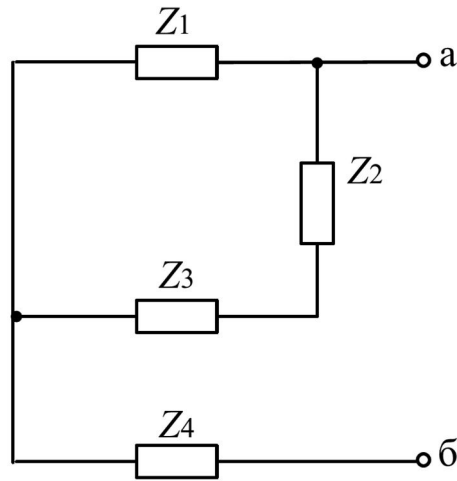


Рисунок 4.26

$$\underline{Z}_{EГ} = \underline{Z}_{aб} = 16,699e^{j51,546^\circ} \text{ Ом.}$$

Струм  $\underline{I}_5$  обчислюємо за законом Ома для замкненого контура

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{E}_{EГ}}{\underline{Z}_{EГ} + \underline{Z}_5} = 0,336 - j2,709 = 2,73e^{-j82,93^\circ} \text{ А,}$$

Запишемо миттєве значення струму:

$$i_5(t) = 2,73\sin(\omega t - 82,93^\circ) \text{ А.}$$

#### Задача 4.14.

Як приклад використання методу еквівалентного генератора для аналізу електричного кола при синусоїдальному живленні визначимо, при якому значенні навантажувального опору  $\underline{Z}_H$  у колі на рис. 4.27 на ньому буде виділятися максимальна потужність, і чому вона буде дорівнювати. Параметри електричного кола:  $e(t) = 100\sin(\omega t)$  В;  $R = x_L = 10$  Ом.

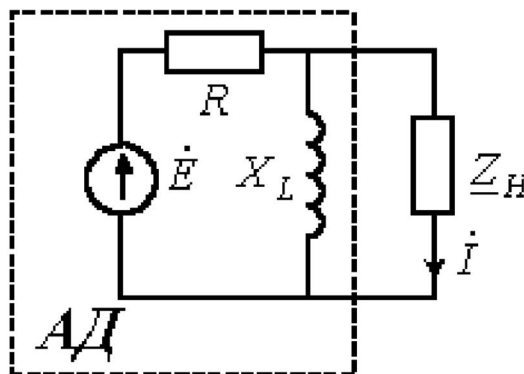


Рисунок 4.27

## Розв'язання

Відповідно до теореми про активний двополіусник, частина кола обведена пунктиром на рис. 4.27 замінюється еквівалентним генератором з параметрами:

$$\underline{E}_{ек} = \frac{\underline{E}}{R + jx_L} jx_L = \frac{100}{10\sqrt{2} e^{j45^\circ}} \cdot 10\sqrt{2} e^{j90^\circ} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{Z}_{ек} = \frac{R}{R + jx_L} jx_L = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 5 + j5 \text{ Ом.}$$

Відповідно до методу еквівалентного генератора для струму через  $\underline{Z}_H$  можна записати

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{ек}}{\underline{Z}_{ек} + \underline{Z}_H} = \frac{\underline{E}_{ек}}{(R_{ек} + jx_{ек}) + (R_H + jx_H)} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}}{(5 + R_H) + j(5 + x_H)},$$

звідки для модуля цього струму маємо

$$\underline{I} = \frac{E_{ек}}{\sqrt{(R_{ек} + R_H)^2 + (x_{ек} + x_H)^2}} = \frac{100}{\sqrt{2} \sqrt{(5 + R_H)^2 + (5 + x_H)^2}}.$$

Аналіз отриманого виразу показує, що струм  $I$ , а отже, і потужність будуть максимальні, якщо  $x_{ек} + x_H = 0$ ; звідки  $x_{ек} = -5$  Ом, причому знак “-” показує, що навантаження  $\underline{Z}_H$  має ємнісний характер.

Таким чином, як і для кіл постійного струму максимальний струм та потужність розраховується за формулами

$$I_{max} = \frac{E_{ек}}{R_{ек} + R_H}$$

та

$$P_{Hmax} = I_{max}^2 R_H = \frac{E_{ек}^2}{(R_{ек} + R_H)^2} R_H.$$

Дані співвідношення аналогічні відповідним виразам у колі постійного струму, для якого максимальна потужність на навантаженні виділяється в

режимі узгодженого навантаження, умовою якого є

$$R_{ек} = R_H.$$

Таким чином, шукані значення  $\underline{Z}_H$  і максимальної потужності:

$$\underline{Z}_H = 5 - j5 \text{ Ом};$$

$$P_{Hmax} = 250 \text{ Вт}.$$

#### 4.5 Розрахунок кола при послідовному та паралельному з'єднанні двох індуктивно-зв'язаних котушок

##### Задача 4.15.

При розімкненому рубильнику  $P$  (рис. 4.28) показ вольтметра в схемі становить 150 В.

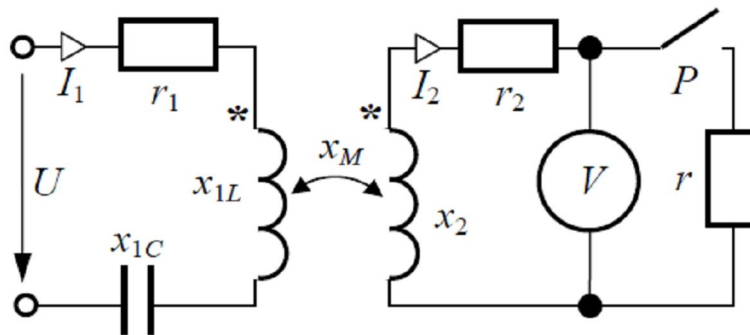


Рисунок 4.28

Параметри схеми  $r_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $x_{1L} = 10 \text{ Ом}$ ,  $x_{1C} = 26 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $x_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $r_H = 12 \text{ Ом}$ ,  $U = 300 \text{ В}$ .

Розрахувати струми при замкненому рубильнику, побудувати суміщену векторну діаграму.

##### Розв'язання

1. Визначимо опір взаємоіндукції  $x_M$  із умови, що за розімкненого рубильника струм через навантаження  $r_H$  не протікає  $I_{2нх} = 0$  – неробочий хід однофазного трансформатора. Для цього визначимо первинний струм неробочого ходу

$$\underline{I}_{1нх} = \frac{\underline{U}}{r_1 + j(x_{1L} - x_{1C})} = \frac{300}{12 + j(10 - 26)} = 15e^{j53,13^\circ} \text{ А}.$$

Оскільки показ вольтметра відомий і становить

$$U_{2HX} = I_{1HX} \cdot x_M = 150 \text{ В},$$

то звідси модуль опору взаємоіндукції

$$x_M = \frac{U_{2HX}}{I_{1HX}} = \frac{150}{15} = 10 \text{ Ом}.$$

З умови явища взаємоіндуктивності

$$x_M \leq \sqrt{x_{1L} \cdot x_2}$$

$$10 \leq \sqrt{10 \cdot 20}$$

$10 \leq 14,14$  – умова виконується.

2. При замкненому рубильнику через навантаження протікає струм, який створює напругу взаємоіндукції на первинній котушці і впливає на струм на вході кола.

За другим законом Кірхгофа маємо

$$\begin{cases} \underline{I}_1 [r_1 + j(x_{1L} - x_{1C})] - \underline{I}_2 jx_M = \underline{U} \\ \underline{I}_2 (r_2 + r_H + jx_2) - \underline{I}_1 jx_M = 0 \end{cases},$$

що можна записати

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_M = \underline{U} \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_1 \underline{Z}_M = 0 \end{cases},$$

де комплексний опір первинного контуру

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j(x_{1L} - x_{1C}) = 12 - j16 \text{ Ом};$$

комплексний опір вторинного контуру

$$\underline{Z}_2 = r_2 + r_H + jx_2 = 16 + j20 \text{ Ом};$$

комплексний опір взаємоіндукції

$$\underline{Z}_M = jx_M = j10 \text{ Ом}.$$

Розв'язавши систему відносно невідомих струмів отримаємо

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U} \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{300 (16 + j 20)}{(12 - j16)(16 + j 20) - (j10)^2} = 7,582 + j10 = 12,55e^{j52,83^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U} \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{300 (j 10)}{(12 - j16)(16 + j 20) - (j10)^2} = -0,128 + j4,9 = e^{j91,5^\circ} \text{ A}.$$

Складемо баланс потужностей за результатами розрахунків.

Генерована потужність

$$\underline{S}_G = P_G + jQ_G = \underline{U} \underline{I}_1^* = 300 \cdot (12,55e^{-j52,8^\circ}) = 2275 - j3000 \text{ ВА}.$$

Сумарна споживана активна потужність

$$P_{cn} = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_2^2 r_H = 12,55^2 \cdot 10 + 4,9^2 \cdot (4 + 12) = 2274 \text{ Вт} \approx P_G = 2275 \text{ Вт}.$$

Сумарна споживана реактивна потужність

$$\begin{aligned} Q_{cn} &= I_1^2 (x_{1L} + x_{1C}) + I_2^2 x_2 - 2\text{Im}(\underline{I}_2 jx_M \underline{I}_1^*) = \\ &= 12,55^2 \cdot (10 - 26) + 4,9^2 \cdot 20 - 2\text{Im}(4,9e^{j91,5^\circ} \cdot 10e^{j90^\circ} \cdot 12,55e^{-j52,83^\circ}) = \\ &= -3000 \text{ вар} = Q_G = -3000 \text{ вар}. \end{aligned}$$

Відзначимо, що у повітряному трансформаторі відсутній електричний канал передачі енергії із первинної обмотки у вторинну, тому передача активної потужності здійснюється у магнітному полі:

$$P_{1 \rightarrow 2} = -\text{Re}(\underline{I}_2 jx_M \underline{I}_1^*) = \underline{I}_2 (r_2 + r_H).$$

Перевіримо

$$P_1 = \text{Re}(\underline{I}_2 jx_M \underline{I}_1^*) = \text{Re}(4,9e^{j91,5^\circ} \cdot 10e^{j90^\circ} \cdot 12,55e^{-j52,83^\circ}) = -384,242 \text{ Вт},$$

$$P_2 = (\underline{I}_1 jx_M \underline{I}_2^*) = \text{Re}(12,55e^{j52,83^\circ} \cdot 10e^{j90^\circ} \cdot 4,9e^{-j91,5^\circ}) = 384,242 \text{ Вт}.$$

Показ вольтметра при замкненому рубильнику

$$I \underline{L}_2 r_H = 4,9 \cdot 12 = 58,8 \text{ В}.$$

Для побудови векторної діаграми попередньо проводиться розрахунок падінь напруг на елементах кола:

$$I_1 r_1 = 12,55 \cdot 12 = 150,6 \text{ В},$$

$$I_1 x_{1C} = 12,55 \cdot 26 = 326,3 \text{ В},$$

$$I_2 r_2 = 4,9 \cdot 4 = 19,6 \text{ В},$$

$$I_2 r_H = 4,9 \cdot 12 = 58,8 \text{ В},$$

$$I_1 x_{1L} = 12,55 \cdot 10 = 125,6 \text{ В},$$

$$I_2 x_M = 4,9 \cdot 10 = 49 \text{ В},$$

$$I_2 x_2 = 4,9 \cdot 20 = 98 \text{ В},$$

$$I_1 x_M = 12,55 \cdot 10 = 125,6 \text{ В}.$$

Побудову векторної діаграми починаємо з побудови векторів  $\underline{I}_1$  та  $\underline{I}_2$  на комплексній площині. Вектори падінь напруг відкладаємо відповідно до другого закону Кірхгофа

$$\underline{I}_1 r_1 + \underline{I}_1 j x_1 - \underline{I}_2 j x_M + \underline{I}_1 (-j x_{1C}) = \underline{U},$$

$$\underline{I}_2 r_H + \underline{I}_2 r_2 + \underline{I}_2 j x_2 - \underline{I}_1 j x_M = 0.$$

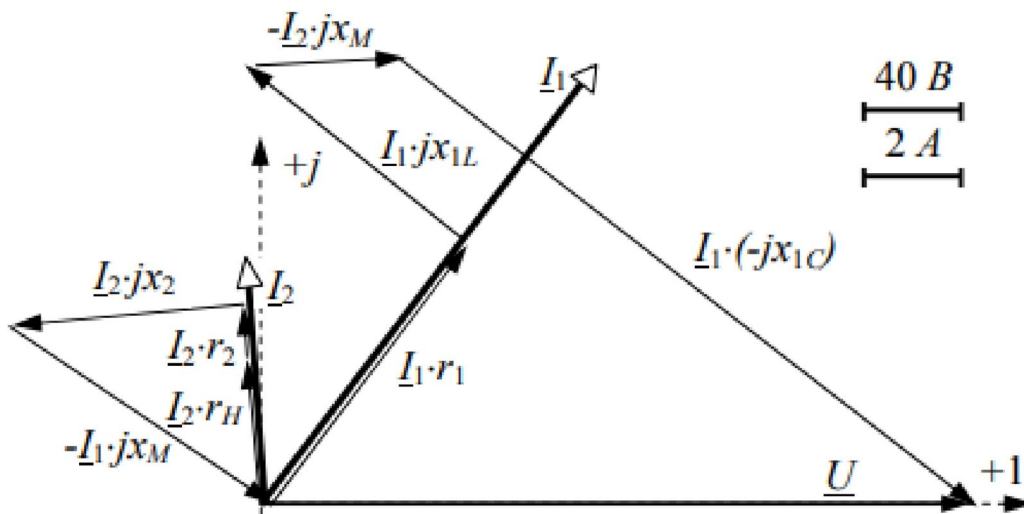


Рисунок 4.29

#### 4.6 Розрахунок розгалуженого кола з індуктивними зв'язками

##### Задача 4.16.

Розрахувати стан кола з автотрансформатором (рис. 4.30, а), знайти активну потужність, що передається магнітним полем, побудувати суміщену векторну діаграму кола, якщо параметри кола задані  $x_1 = 40$  Ом,  $x_2 = 80$  Ом,  $x_M$

$= 50 \text{ Ом}, r_3 = 40 \text{ Ом}, x_3 = 20 \text{ Ом}, E = 220 \text{ В}.$

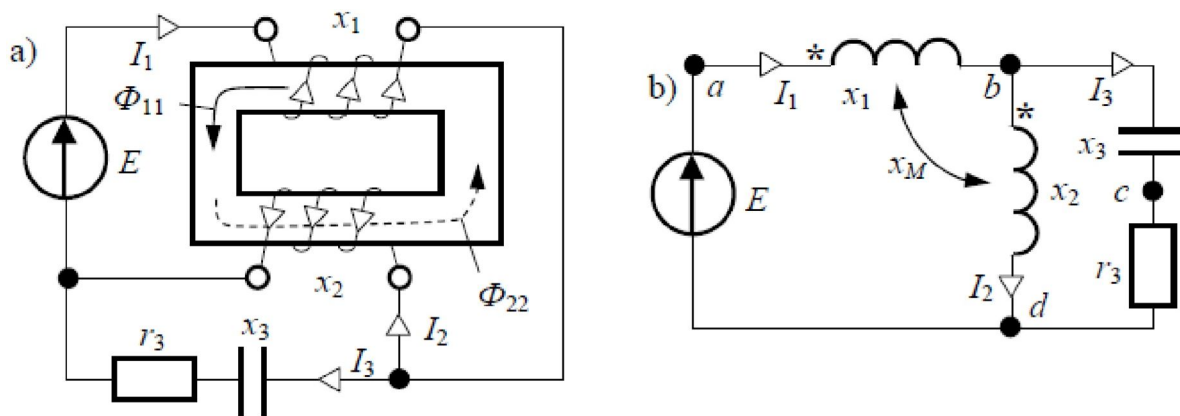


Рисунок 4.30

### Розв'язання

Після розмітки однополярних затискачів за допомогою потоків  $\Phi_{11}$  та  $\Phi_{22}$  розрахункова схема електричного кола набуває вигляду рис. 4.30, б.

За другим законом Кірхгофа маємо

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_1 jx_1 + I_2 jx_M + I_3 (r_3 - jx_3) = \underline{E} \\ I_1 jx_M + I_2 jx_2 - I_3 (r_3 - jx_3) = 0 \end{cases}$$

Розв'язок системи дасть нам значення невідомих струмів. Відповідно до цієї системи буде побудовано векторну діаграму кола.

Щоб уникнути розв'язання системи представлених рівнянь, усунемо взаємоіндуктивний зв'язок, отримавши еквівалентну схему заміщення (рис. 4.31).

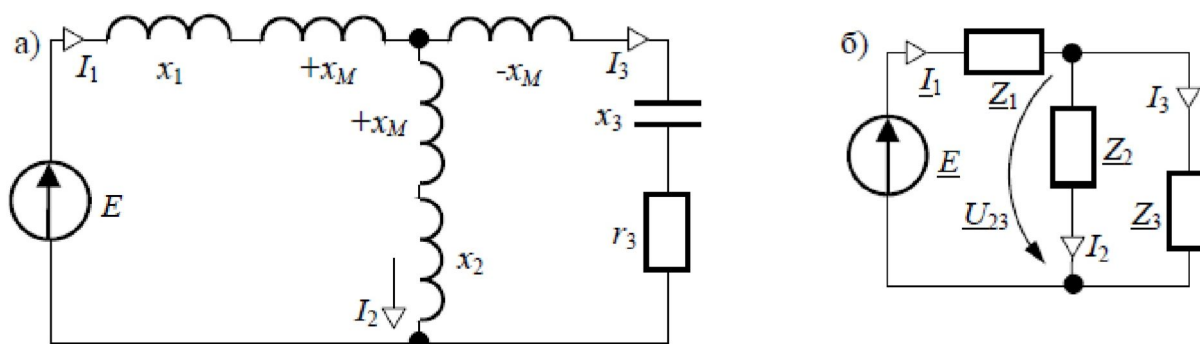


Рисунок 4.31

Приймемо комплексну ЕРС схеми  $\underline{E} = E e^{j\psi_E} = 220 \text{ В}.$

Комплексні опори мішано з'єднаних гілок

$$\underline{Z}_1 = jx_1 + jx_M = j40 + j50 = j90 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = jx_2 + jx_M = j80 + j50 = j130 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - jx_3 - jx_M = 40 - j20 - j50 = 40 - j70 = 80,62e^{-j60,25^\circ} \text{ Ом}.$$

Опір розгалуження

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{j130 \cdot (40 - j70)}{j130 + (40 - j70)} = 145,3e^{-j26,56^\circ} \text{ Ом}.$$

Вхідний опір кола

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = j90 + \frac{j130 \cdot (40 - j70)}{j130 + (40 - j70)} = 132,4e^{j10,89^\circ} \text{ Ом}.$$

Вхідний струм

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{220}{132,4e^{j10,89^\circ}} = 1,662e^{-j10,89^\circ} \text{ А}.$$

Напруга на розгалуженні

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 1,662e^{-j10,89^\circ} \cdot 145,3e^{-j26,56^\circ} = 241,5e^{-j37,45^\circ} \text{ В}.$$

Струми паралельних гілок

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{241,5e^{-j37,45^\circ}}{j130} = 1,858e^{-j127,45^\circ} \text{ А}.$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{241,5e^{-j37,45^\circ}}{80,62e^{-j60,25^\circ}} = 3e^{j22,8^\circ} \text{ А}.$$

Щоб переконатись у правильності проведених розрахунків вихідної схеми, складемо баланс потужностей:

- повна потужність генератора

$$\underline{S}_G = P_G + jQ_G = \underline{E} \underline{I}_1^* = 220 \cdot 1,662e^{j10,89^\circ} = 359 + j69 \text{ ВА},$$

- активна потужність споживачів

$$P_{\text{сн}} = I_3^2 r_3 = 3^2 \cdot 40 = 360 \text{ Вт} \approx P_G = 359 \text{ Вт},$$

- реактивна потужність споживачів

$$\begin{aligned}
Q_{cn} &= I_1^2 x_1 + I_2^2 x_2 + 2\text{Im}(I_1 jx_M I_2^*) - I_3^2 x_3 = \\
&= 1,662^2 \cdot 40 + 1,858^2 \cdot 80 + 2\text{Im}(1,662e^{-j10,89} \cdot 50e^{j90} \cdot 4,858e^{j127,45}) - 3 \cdot 20 = \\
&= 69 \text{ вар} = Q_{\Gamma} = 69 \text{ вар}.
\end{aligned}$$

Оскільки теплові втрати у першій вітці відсутні, то вся активна потужність від джерела надходить у другу гілку:

$$P_{1 \rightarrow 2} = -\text{Re}(I_2 jx_M I_1^*) = I_2 \cdot (r_2 + r_H).$$

Перевіримо

$$P_1 = \text{Re}(I_2 jx_M I_1^*) = \text{Re}(1,858e^{-j127,45} \cdot 50e^{j90} \cdot 1,662e^{-j10,89}) = 138,1 \text{ Вт},$$

$$P_2 = \text{Re}(I_1 jx_M I_2^*) = \text{Re}(1,662e^{-j10,89} - 50e^{j90} \cdot 1,858e^{-j127,45}) = -138,1 \text{ Вт}.$$

Для побудови векторної діаграми знайдемо падіння напруг на елементах кола:

$$I_1 x_1 = 1,662 \cdot 40 = 66,5 \text{ В},$$

$$I_1 x_M = 1,662 \cdot 50 = 83,1 \text{ В},$$

$$I_2 x_2 = 1,858 \cdot 80 = 150,6 \text{ В},$$

$$I_2 x_M = 1,858 \cdot 50 = 92,9 \text{ В},$$

$$I_3 x_3 = 3 \cdot 20 = 60 \text{ В},$$

$$I_3 r_3 = 3 \cdot 40 = 120 \text{ В}.$$

На комплексній площині (рис. 4.32) будуюмо вектори струмів відповідно до першого закону Кірхгофа, а потім відкладаємо вектори падінь напруг на елементах кола відповідно до вихідних рівнянь, записаних за другим законом Кірхгофа.

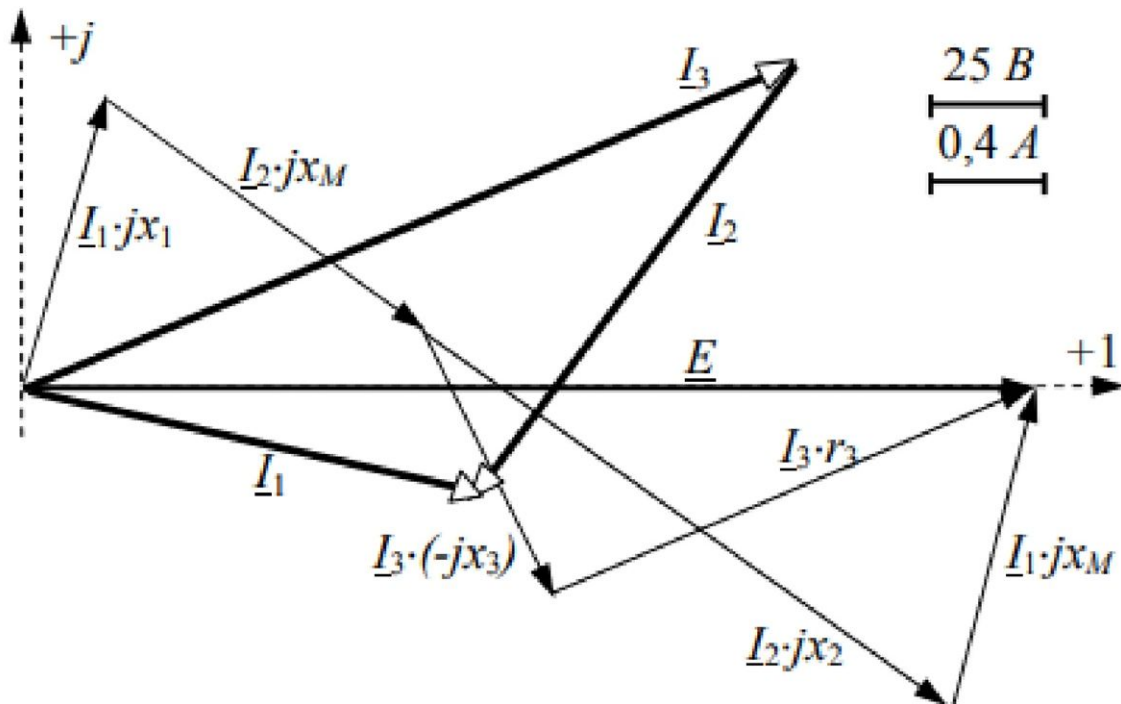


Рисунок 4.32

#### 4.7 Розрахунок резонансних станів нерозгалужених та розгалужених електричних кіл

##### Задача 4.17.

У колі на рис. 4.33 має місце резонанс. Визначити показ вольтметра, якщо  $i(t) = 5,63\sin(1000t)$  А;  $L=10$  мГн.

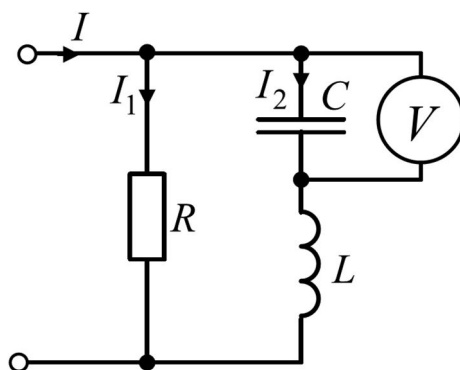


Рисунок 4.33

##### Розв'язання

Оскільки у заданому колі конденсатор та котушка індуктивності з'єднані послідовно, то можливий резонанс напруг, який виникає за умови рівності опорів реактивних елементів  $x_L = x_C$ .

Виконаємо розрахунок опору індуктивності:  $x_L = \omega L = 10$  Ом.

Оскільки коло перебуває у стані резонансу, то  $x_L = x_C = 10$  Ом, а отже повний реактивний опір другої гілки  $x_L - x_C = 0$ , яку можна змодельовати на схемі заміщення перемичкою (рис. 4.34)

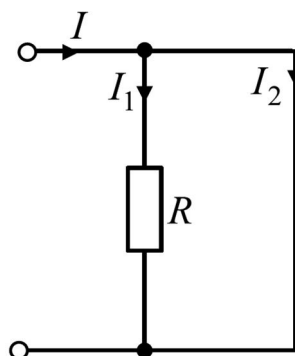


Рисунок 4.34

Аналізуючи схему заміщення заданого кола у режимі резонансу, маємо:

$$i_2(t) = i(t) = 5,63 \sin(1000t) \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{I_{m2}}{\sqrt{2}} = 4 \text{ A};$$

$$U_C = I_2 x_C = 40 \text{ B}.$$

#### Задача 4.18.

При зміні індуктивного опору кола на рис. 4.35 максимальне значення показу амперметра становить 2 А. При цьому покази решти приладів наступні:  $U_V = 60\text{В}$ ,  $U_{V2} = 100\text{В}$ ,  $P_W = 40\text{Вт}$ .

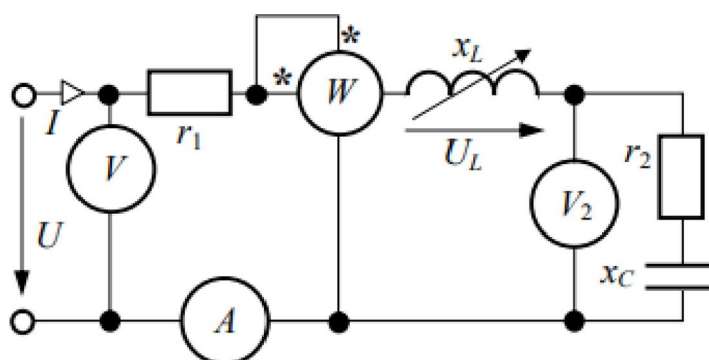


Рисунок 4.35

Визначити параметри схеми  $r_1$ ,  $x_L$ ,  $r_2$ ,  $x_C$ . Побудувати векторну діаграму та резонансні криві  $U_L(x_L)$ ,  $U_C(x_L)$ ,  $I(x_L)$  при зміні індуктивного опору в межах від 0 до  $\infty$ .

## Розв'язання

Оскільки задане коло є послідовним коливальним контуром, то момент досягнення максимуму струму характеризує резонанс напруг для якого справедливі рівності реактивних опорів послідовного контура та рівності напруг на цих елементах.

Ватметр реєструє активну потужність резистора  $r_2$  при протіканні максимального струму, тому

$$P_W = I_A^2 r_2,$$

звідси

$$r_2 = \frac{P_W}{I_A^2} = \frac{40}{2^2} = 10 \text{ Ом.}$$

Тоді напруга на  $r_2$  буде  $U_{r_2} = I r_2 = 20 \text{ В.}$

Будуємо векторну діаграму ділянки кола  $r_2$ - $x_C$  за другим законом Кірхгофа

$$\underline{U}_{V2} = \underline{U}_{r_2} + \underline{U}_C$$

та розраховуємо напругу на конденсаторі

$$U_C = \sqrt{U_{V2}^2 + U_{r_2}^2} = 97,98 \text{ В.}$$

Оскільки коло перебуває у стані резонансу напруг, тоді

$$\underline{U}_C = \underline{U}_L = 97,98 \text{ В,}$$

а опір котушки індуктивності та конденсатора рівні

$$x_L = x_C = \frac{U_L}{I_A} = \frac{U_C}{I_A} \approx 50 \text{ Ом.}$$

Будуємо векторну діаграму кола (рис. 4.36) згідно другого закону Кірхгофа

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{r_1} + \underline{U}_L + \underline{U}_C + \underline{U}_{r_2} = \underline{U}_{r_1} + \underline{U}_{r_2},$$

$$\underline{U}_L + \underline{U}_C = 0$$

та розраховуємо напругу на  $r_1$ :

$$U_{r1} = U_V - U_{r2} = 60 - 20 = 40B.$$

Знаходимо опір

$$r_1 = \frac{U_{r1}}{I_A} = 20 \text{ Ом.}$$

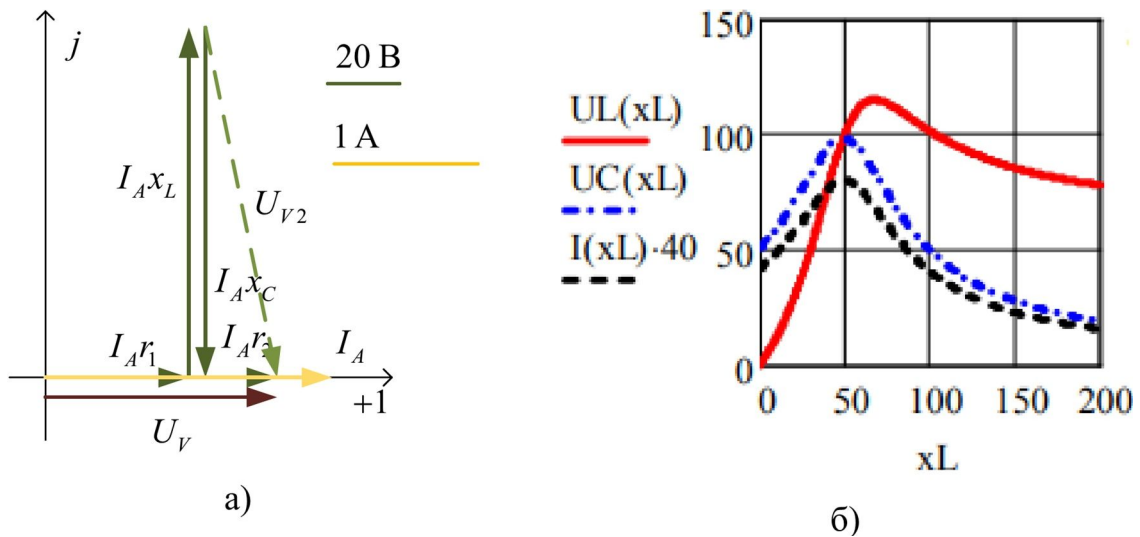


Рисунок 4.36

#### Задача 4.19.

Коло на рис. 4.37 перебуває у стані резонансу. Визначити параметри схеми  $R$ ,  $x_L$ ,  $x_C$ , якщо на частоті  $\omega=0$  вхідний опір кола  $Z_{\text{вх}}(0) = 5 \text{ Ом}$ , а на резонансній частоті  $\omega_0$  вхідний опір кола  $Z_{\text{вх}}(\omega_0) = 2,5 \text{ Ом}$ .

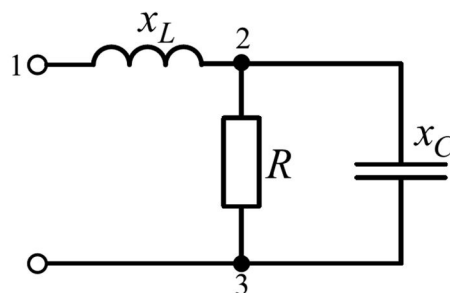


Рисунок 4.37

#### Розв'язання

Оскільки на частоті  $\omega=0$  опори реактивних елементів  $x_L = \omega L = 0$  та

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \infty,$$

то задане коло можна подати схемою заміщення на рис. 4.38.

Вхідний опір утвореної схеми заміщення чисто активний  $Z_{вх}(0) = R = 5$

Ом

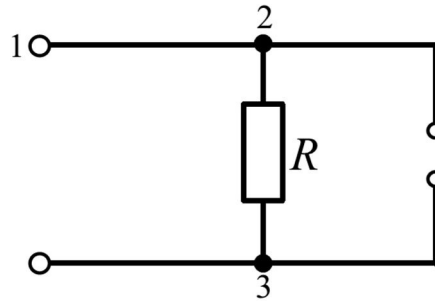


Рисунок 4.38

У заданому колі можливий резонанс напруг за умови рівності індуктивного опору котушки та еквівалентного ємнісного опору паралельної ділянки кола  $x_L = x_{екв}$  (рис. 4.39).

$$\underline{Z}_{23} = \frac{R \cdot (-jx_C)}{R - jx_C} = \frac{R \cdot (-jx_C)}{R - jx_C} \cdot \frac{R + jx_C}{R + jx_C} = \frac{R \cdot x_C^2}{R^2 + x_C^2} - j \frac{R^2 + x_C}{R^2 + jx_C} = R_{екв} - jx_{екв}$$

$$R_{екв} = \frac{R \cdot x_C^2}{R^2 + x_C^2}$$

$$x_{екв} = \frac{R^2 + x_C}{R^2 + jx_C}$$

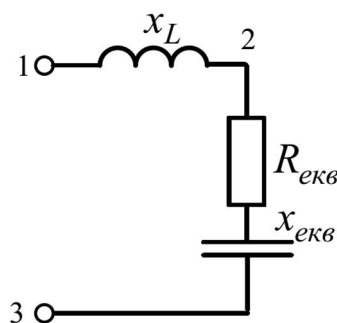


Рисунок 4.39

Тоді за умови резонансу повний опір кола можна розрахувати за виразом:

$$Z_{вх}(\omega_0) = R_{екв} - jx_{екв} + jx_L = 2,5 \text{ Ом.}$$

Згідно умови задачі та умови резонансу напруг одержуємо два рівняння:

$$\begin{cases} Z_{\text{ex}}(\omega_0) = R_{\text{екв}} = 2,5 \\ x_{\text{екв}} = x_L \\ R = 5 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} R_{\text{екв}} = \frac{R \cdot x_C^2}{R^2 + x_C^2} ; \\ x_L = \frac{R^2 \cdot x_C}{R^2 + x_C^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,5 = \frac{5 \cdot x_C^2}{5^2 + x_C^2} ; \\ x_L = \frac{5^2 \cdot x_C}{5^2 + x_C^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = 5 \\ x_L = 2,5 \end{cases}$$

#### Задача 4.20.

Коло на рис. 4.40 перебуває у стані резонансу.

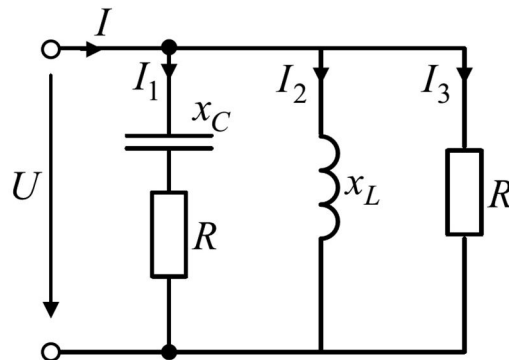


Рисунок 4.40

Визначити параметри елементів схеми  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , якщо відомі діючі значення струмів  $I_1 = 3$  А,  $I_3 = 4$  А, споживана потужність  $P = 100$  Вт і частота джерела  $f = 50$  Гц.

#### Розв'язання

Оскільки котушка індуктивності та конденсатор увімкнені паралельно, то у колі можливий резонанс струмів, який виникає за умови рівності

реактивних провідностей першої та другої гілок.

Для наочності проведення розрахунків побудуємо діаграму з урахуванням рівності уявних складових струмів у першій та другій вітках, яка має місце за умови резонансу струмів  $I_{1p} = I_{2p}$ .

Оскільки напруга на затискачах кожної з гілок однакова, приймемо початкову фазу вхідної напруги за нуль. Зважаючи на те, що третя гілка містить лише резистор, а напруга та струм на резисторі збігаються за фазою, то вектор струму  $I_3$  буде лежати на горизонтальній осі. Аналогічно друга гілка містить лише котушку індуктивності, а на котушці індуктивності напруга випереджає струм на  $90^\circ$ , тоді вектор струму  $I_2 = I_{2p}$  буде лежати на вертикальній осі, причому  $I_2 = I_{2p} = I_{1p}$  згідно умови резонансу струмів.

З діаграми (рис. 4.41) випливають наступні співвідношення:

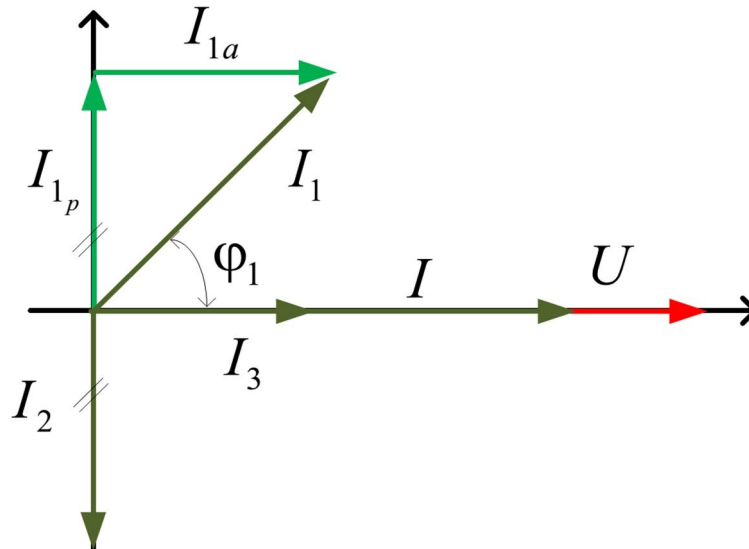


Рисунок 4.41

$$\underline{I}_2 + \underline{I}_{1p} = 0$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (\underline{I}_{1a} + \underline{I}_{1p}) + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_{1a} + \underline{I}_3.$$

Струм на вході кола визначаємо з виразу для активної потужності:

$$\begin{cases} P = I_1^2 R + I_3^2 R = R(I_1^2 + I_3^2) = \frac{U}{I_3}(I_1^2 + I_3^2); \\ P = UI \end{cases}$$

$$\frac{U}{I_3}(I_1^2 + I_3^2) = UI.$$

Тоді

$$I = \frac{I_1^2 + I_3^2}{I_3} = \frac{3^2 + 4^2}{4} = 6,25 \text{ A.}$$

Тоді напруга на вході кола

$$U = \frac{P}{I} = \frac{100}{6,25} = 16 \text{ B.}$$

Оскільки

$$\underline{I} = \underline{I}_{1a} + \underline{I}_3$$

активна складова першого струму з векторної діаграми

$$\underline{I}_{1a} = I - I_3 = 6,25 - 4 = 2,25 \text{ A.}$$

З трикутника векторів першого струму  $\underline{I}_1 = \underline{I}_{1a} + \underline{I}_{1p}$  обчислюємо його реактивну складову

$$\underline{I}_{1p} = \sqrt{I_1^2 - I_{1a}^2} = 2 \text{ A.}$$

Обчислюємо опори елементів кола за законом Ома:

- опір резистивного елемента

$$R = \frac{U}{I_3} = \frac{16}{4} = 4 \text{ Ом};$$

- опір індуктивного елемента

$$x_L = \frac{U}{I_2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ Ом},$$

звідки індуктивність котушки

$$L = \frac{x_L}{\omega} = \frac{8}{2\pi \cdot 50} = 25 \text{ мГн};$$

- повний опір першої гілки

$$Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{16}{3} = 5,3 \text{ Ом},$$

звідки опір ємнісного елемента

$$x_C = \sqrt{Z_1^2 + R^2} = \sqrt{5,3^2 + 4^2} = 3,5 \text{ Ом}$$

та ємність конденсатора

$$C = \frac{1}{\omega x_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 3,5} = 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ Ф.}$$

#### 4.8 Якісний аналіз частотних характеристик двополюсників

##### Задача 4.21.

Коло на рис. 4.42 перебуває у стані резонансу. Добротність котушки на резонансній частоті  $Q = 4$ . Як зміниться ємність конденсатора, якщо при збільшенні частоти джерела живлення вдвічі коло знову опиняється у режимі резонансу.

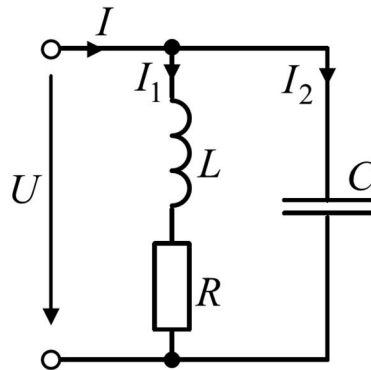


Рисунок 4.42

##### Розв'язання

Оскільки котушка індуктивності та конденсатор увімкнені паралельно, то у колі можливий резонанс струмів, який виникає за умови рівності реактивних провідностей першої та другої гілок  $B_1 = B_2$ .

Умова резонансу струмів на початковій частоті  $\omega_0$  для заданого кола має вигляд

$$\frac{\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C'.$$

Згідно умови задачі добротність котушки індуктивності на початковій резонансній частоті  $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 4$ . Виразимо з цієї формули опір резистора

$$R = \frac{\omega_0 L}{4}.$$

Підставивши вираз для активного опору в умову резонансу на первинній частоті:

$$\frac{\omega_0 L}{\left(\frac{\omega_0 L}{4}\right)^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C'$$

звідки виразимо ємність конденсатора

$$C' = 0,94 \frac{1}{\omega_0^2 L}.$$

Умова резонансу струмів на подвоєній частоті  $2\omega_0$  для заданого кола має вигляд

$$\frac{2\omega_0 L}{R^2 + 4\omega_0^2 L^2} = 2\omega_0 C''.$$

При цьому добротність котушки

$$Q = \frac{2\omega_0 L}{R} = 8,$$

звідки опір резистора

$$R = \frac{2\omega_0 L}{8} = \frac{\omega_0 L}{4}.$$

Виразимо ємність конденсатора за умови резонансу струмів на подвійній частоті:

$$\frac{2\omega_0 L}{\left(\frac{\omega_0 L}{4}\right)^2 + 4\omega_0^2 L^2} = 2\omega_0 C''$$

$$C'' = 0,246 \frac{1}{\omega_0^2 L}.$$

Встановимо співвідношення між ємностями конденсаторів на двох

резонансних частотах:

$$C'' = \frac{0,246}{0,94} C' = 0,262 C'$$

#### Задача 4.22.

Побудувати частотну характеристику для реактивного двополюсника, показаного на рис. 4.43, якщо задані опори елементів кола та частота джерела живлення  $X_{L1} = 5$  Ом,  $X_{L3} = 6$  Ом,  $X_{C2} = 3$  Ом,  $f = 50$  Гц.

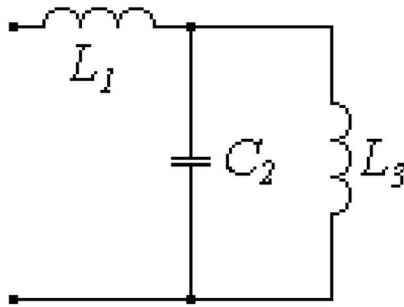


Рисунок 4.43

#### Розв'язання

Параметри реактивних елементів знаходяться з умови, що відомих індуктивні і ємнісні опори для частоти 50 Гц.

$$L_1 = \frac{X_{L1}}{\omega} = \frac{X_{L1}}{2\pi f} = \frac{50}{2\pi \cdot 50} = 1,59 \text{ Гн},$$

$$L_3 = \frac{X_{L3}}{\omega} = \frac{X_{L3}}{2\pi f} = \frac{6}{2\pi \cdot 50} = 1,91 \cdot 10^{-2} \text{ Гн},$$

$$C_2 = \frac{1}{X_{C2}\omega} = \frac{1}{X_{L3} \cdot 2\pi f} = \frac{1}{3 \cdot 2\pi} = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ Ф},$$

По схемі можна визначити, що частотна характеристика почнеться з нуля (є прямий шлях через індуктивності для постійного струму ( $\omega = 0$ ), потім буде перша резонансна частота струмів  $\omega_1$  (поліос), за ним друга резонансна частота напруг  $\omega_2$  (нуль). Вхідний опір двополюсника:

$$X(\omega) = \omega L_1 + \frac{\omega L_3 \left( -\frac{1}{\omega C_2} \right)}{\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2}} = \omega L_1 - \frac{\omega L_3}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} =$$

$$= \frac{\omega^3 L_1 L_3 C_2 - \omega L_1 - \omega L_3}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} = \frac{\omega \left[ \omega^2 L_1 L_3 C_2 - (L_1 + L_3) \right]}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}.$$

Визначення нулів та полюсів функції  $X(\omega)$ :

$$H(\omega) = 0; \omega(\omega^2 L_1 L_3 C_2 - (L_1 + L_3)) = 0;$$

звідки  $\omega_0 = 0$ ,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{L_1 + L_3}{L_1 L_3 C_2}} = \sqrt{\frac{(1,59 + 1,91) \cdot 10^{-2}}{1,59 \cdot 1,91 \cdot 1,06 \cdot 10^{-7}}} = 329,73 \text{ с}^{-1},$$

$$F(\omega) = 0; \omega^2 L_3 C_2 - 1 = 0;$$

звідки:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{1,91 \cdot 1,06 \cdot 10^{-5}}} = 222,24 \text{ с}^{-1},$$

Підставляючи значення частоти  $\omega$  від 0 до 400  $\text{с}^{-1}$  у рівняння вхідного опору будуюмо частотну характеристику реактивного двополюсника показану на рис. 4.44.

$$(\omega) = \frac{\omega^3 L_1 L_3 C_2 - \omega(L_1 + L_3)}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} = \frac{\omega^3 \cdot 1,59 \cdot 1,91 \cdot 1,06 \cdot 10^{-7} - \omega(1,59 + 1,91 \cdot 10^{-5})}{\omega^2 \cdot 1,91 \cdot 1,06 \cdot 10^{-5} - 1}.$$

Аналогічно розраховується частотна характеристика для складніших схем, при цьому степінь рівнянь у чисельнику та знаменнику відповідно збільшується з кількістю елементів у вітках схеми.

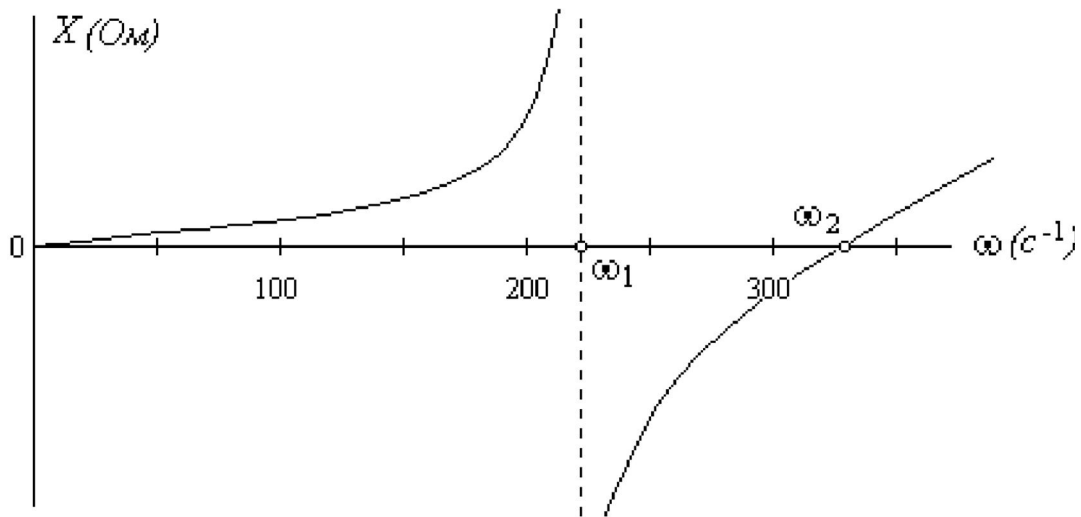


Рисунок 4.44

### Задача 4.23.

У колі на рис. 4.45 задані параметри кола  $R = 2$  Ом,  $L = 4$  мГн,  $L_1 = 2$  мГн,  $C = 250$  мкФ. Визначити резонансні частоти, побудувати частотні характеристики ділянок 1-2, 2-3 та вхідного реактивного опору  $x_{вх}$ .

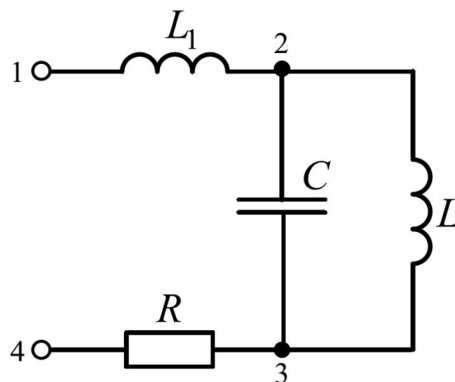


Рисунок 4.45

### Розв'язання

Аналіз заданого кола показує, що на ділянці 2-3 можливий резонанс напруг за умови

$$b_L = b_C$$

тобто, якщо виконується умова

$$b_{23} = b_L - b_C = 0.$$

Отже, у випадку резонансу струмів вхідний опір кола

$$x_{23} = \frac{1}{b_{23}} = \infty$$

тобто

$$x_{\text{ex}} = x_{L1} + x_{23} = \infty.$$

За умови рівності реактивних опорів ділянок 1-2 та 2-3 ( $x_{L1} = x_{23}$ ) можливий резонанс напруг, тоді вхідний опір кола

$$x_{\text{ex}} = x_{L1} - x_{23} = 0.$$

Таким чином, у заданому колі можливо два резонансних стани: резонанс напруг на частоті  $\omega_1$  та резонанс напруг на частоті  $\omega_2$ . По схемі можна визначити, що частотна характеристика почнеється з нуля (є прямий шлях через індуктивності для постійного струму ( $\omega=0$ )), потім буде перша резонансна частота струмів  $\omega_1$  (полюс), за ним друга резонансна частота напруг  $\omega_2$  (нуль).

Вхідний опір двополюсника:

$$\begin{aligned} x_{\text{ex}}(\omega) &= \omega L_1 + \frac{\omega L \left( -\frac{1}{\omega C} \right)}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \omega L_1 - \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} = \\ &= \frac{\omega^3 L_1 LC - \omega L_1 - \omega L}{\omega^2 LC - 1} = \frac{\omega \left[ \omega^2 L_1 LC - [L_1 + L] \right]}{\omega^2 LC - 1} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}. \end{aligned}$$

Визначення нулів та полюсів функції  $x_{\text{ex}}(\omega)$ .

Вхідний опір буде рівним нескінченності  $x_{\text{ex}}(\omega) = \infty$ , якщо знаменник виразу вхідного опору рівний нулю

$$F(\omega) = 0; \omega^2 LC - 1 = 0;$$

звідки

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \cdot 10^{-6}}} = 1000 \text{ c}^{-1}.$$

Вхідний опір буде рівним нулю  $x_{\text{ex}}(\omega)=0$ , якщо чисельник виразу вхідного опору рівний нулю

$$H(\omega) = 0; \omega(\omega^2 L_1 LC - (L_1 + L)) = 0;$$

звідки  $\omega_0 = 0$ ,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{L_1 + L}{L_1 LC}} = \sqrt{\frac{(2 + 4) \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 10^{-1}}} = 1730 \text{ с}^{-1}.$$

Підставляючи значення частоти  $\omega$  від 0 до  $2000 \text{ с}^{-1}$  у рівняння вхідного опору будемо частотну характеристику реактивного двополюсника показану на рис 4.46.

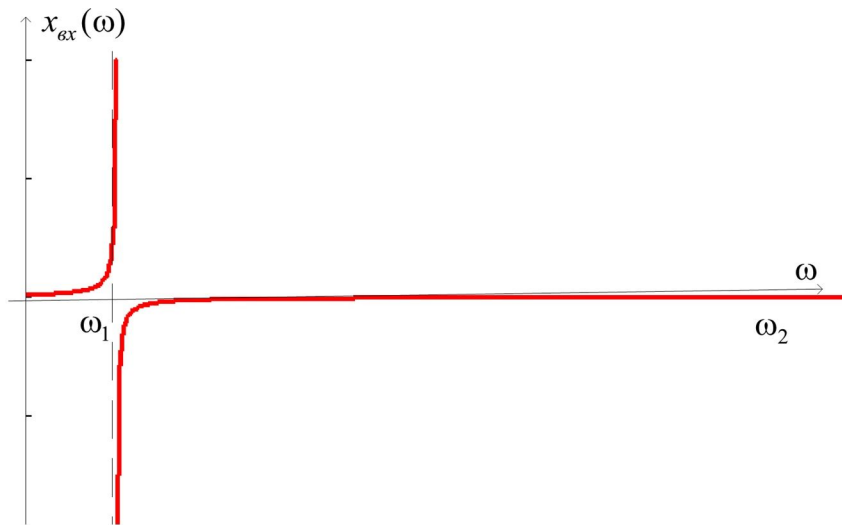


Рисунок 4.46

## 5 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

### 5.1 Основи теорії пасивних чотириполюсників

#### Задача 5.1.

Для заданого чотириполюсника (рис. 5.1) з відомими параметрами  $X_L = 10 \text{ Ом}$ ;  $X_C = 20 \text{ Ом}$  виконати розрахунок первинних та вторинних параметрів чотириполюсника  $\underline{A}_{11}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$ ,  $\underline{A}_{22}$ ,  $\underline{Z}_C$ ,  $\Gamma$  та параметрів для  $\Pi$ - та  $T$ -подібної схем заміщень чотириполюсника за умови  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ .

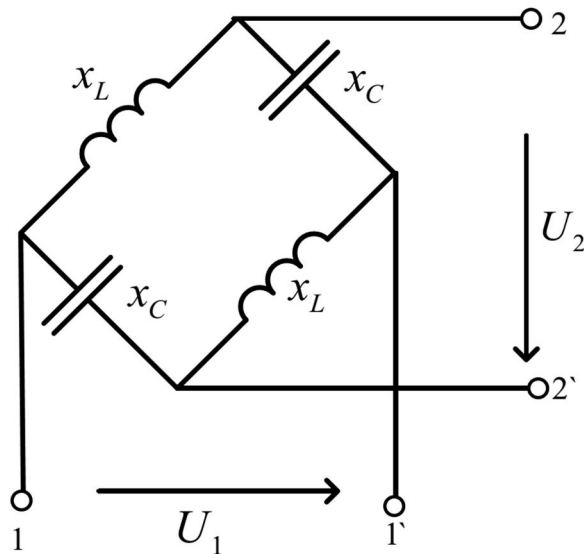


Рисунок 5.1

#### Розв'язання

Виконаємо розрахунок коефіцієнтів чотириполюсника за його опорами неробочого ходу та короткого замикання

$$\underline{Z}_{HX} = \frac{1}{2} (jX_L - jX_C) = \frac{1}{2} (j10 - j20) = -j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{K3} = 2 \frac{jX_L \cdot (-jX_C)}{jX_L - jX_C} = 2 \frac{j10 \cdot (-20)}{j10 - j20} = j40 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{HX}}{\underline{Z}_{HX} - \underline{Z}_{K3}}} = \sqrt{\frac{-j5}{-j5 - j40}} = 0,333;$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{K3} = 0,333 \cdot j40 = j13,33 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{HX}} = \frac{0,333}{-j5} = j6,67 \cdot 10^{-2} \text{ Ом.}$$

Виконаємо перевірку:

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1;$$

$$0,333^2 - j13,33 - j6,67 \times 10^{-2} = 1;$$

$$1 = 1.$$

Розраховуємо вторинні параметри чотиріполюсника:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{j13,33}{j6,67 \cdot 10^{-2}}} = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \ln(0,333 + \sqrt{j13,33 j 6,67 \cdot 10^{-2}}) = \\ &= \ln(0,333 + j0,943) = \ln(1 \angle 70,5^\circ) = \ln(1 \angle 1,231) = j1,231, \end{aligned}$$

$$A=0; B=1,231 \text{ рад};$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{HX} \cdot \underline{Z}_{K3}} = \sqrt{(-j5) \cdot j40} = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ Ом};$$

$$th\underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{K3}}{\underline{Z}_{HX}}} = \sqrt{\frac{j40}{-j5}} = j2,83,$$

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + th\underline{\Gamma}}{1 - th\underline{\Gamma}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + j2,83}{1 - j2,83} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{3e^{j70,5^\circ}}{3e^{-j70,5^\circ}} \right) = \frac{1}{2} \ln(1e^{j141^\circ}) = j1,231.$$

Виконаємо розрахунок параметрів для П- та Т-подібної схем заміщень чотиріполюсника:

для Т-подібної схеми заміщення

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = j6,67 \cdot 10^{-2} \text{ См},$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{0,333 - 1}{j6,67 \cdot 10^{-2}} = j10 \text{ Ом};$$

для П-подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = j13,33 \text{ Ом},$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{0,333 - 1}{j13,33} = j0,05 \text{ См.}$$

### Задача 5.2.

Виконати розрахунок первинних та вторинних параметрів чотириполюсника за відомими даними досліджень неробочого ходу та короткого замикання:  $U_1 = 220 \text{ В}$ ,  $I_{1HX} = 2,56 \text{ А}$ ,  $I_{1K3} = 4,15 \text{ А}$ ,  $I_{2HX} = 1,720 \text{ А}$ ,  $I_{2K3} = 2,78 \text{ А}$ ,  $\varphi_{1HX} = -42^\circ$ ,  $\varphi_{1K3} = 10^\circ$ ,  $\varphi_{2HX} = -34^\circ$ ,  $\varphi_{2K3} = 18^\circ$ .

Розрахувати параметрів для П- та Т-подібної схем заміщень чотириполюсника.

### Розв'язання

Запишемо вирази для вхідних опорів у режимах неробочого ходу та короткого замикання:

$$\underline{Z}_{1HX} = \frac{U_{1HX}}{I_{1HX}} = \frac{U_{1HX}}{I_{1HX}} \cdot e^{j\varphi_{1HX}} = \frac{220}{2,56} \cdot e^{-j42^\circ} = 85,9 e^{-j42^\circ} \text{ Ом} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}},$$

$$\underline{Z}_{1K3} = \frac{U_{1K3}}{I_{1K3}} = \frac{U_{1K3}}{I_{1K3}} \cdot e^{j\varphi_{1K3}} = \frac{220}{4,15} \cdot e^{j10^\circ} = 53 e^{j10^\circ} \text{ Ом} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}},$$

$$\underline{Z}_{2HX} = \frac{U_{2HX}}{I_{2HX}} = \frac{U_{2HX}}{I_{2HX}} \cdot e^{j\varphi_{2HX}} = \frac{220}{1,72} \cdot e^{-j34^\circ} = 127,9 e^{-j34^\circ} \text{ Ом} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}},$$

$$\underline{Z}_{2K3} = \frac{U_{2K3}}{I_{2K3}} = \frac{U_{2K3}}{I_{2K3}} \cdot e^{j\varphi_{2K3}} = \frac{220}{2,78} \cdot e^{j18^\circ} = 79,1 e^{j18^\circ} \text{ Ом} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}.$$

Зробимо перевірку правильності проведення розрахунків:

$$\frac{\underline{Z}_{1HX}}{\underline{Z}_{1K3}} = \frac{\underline{Z}_{2HX}}{\underline{Z}_{2K3}},$$

$$\frac{85,9 e^{-j42^\circ}}{53 e^{j10^\circ}} = \frac{127,9 e^{-j34^\circ}}{79,1 e^{j18^\circ}},$$

$$1,621 e^{-j52^\circ} \approx 1,627 e^{-j52^\circ}.$$

Виконаємо розрахунок первинних параметрів чотириполюсника:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1HX}}{\underline{Z}_{2HX} - \underline{Z}_{2K3}}} = \sqrt{\frac{85,9e^{-j42^\circ}}{106 - j72,5 - 75,2 - j24,4}} = \sqrt{\frac{85,9e^{-j42^\circ}}{100,8e^{-j72,2^\circ}}} = 0,923e^{j15,1^\circ} = 0,891 + j0,241,$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{2K3} = 0,923e^{j15,1^\circ} \cdot 79,1e^{j10^\circ} = 73,0e^{j33,1^\circ} = 61,2 + j39,9 \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1HX}} = \frac{0,923e^{j15,1^\circ}}{85,9e^{-j42^\circ}} = 1,075 \cdot 10^{-2} e^{j57,1^\circ} = (5,84 + j9,02)10^{-3} \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{2HX}}{\underline{Z}_{1HX}} = \frac{0,923e^{j15,1^\circ} \cdot 127,9e^{-j34^\circ}}{85,9e^{-j42^\circ}} = 1,375e^{j23,1^\circ} = 1,265 + j0,539 \text{ Ом}.$$

Перевірка:

$$\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} = 1;$$

$$0,923e^{j15,1^\circ} \cdot 1,375e^{j23,1^\circ} - 73,0e^{j33,1^\circ} \cdot 1,075 \cdot 10^{-2} e^{j57,1^\circ} = 1$$

Виконаємо розрахунок вторинних параметрів чотириполюсника:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\underline{Z}_{1HX} \cdot \underline{Z}_{1K3}} = \sqrt{85,9e^{-j42^\circ} \cdot 53e^{j10^\circ}} = 67,5e^{j-16^\circ} \text{ Ом},$$

або

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{0,923e^{j15,1^\circ} \cdot 73,0e^{j33,1^\circ}}{1,375e^{j23,1^\circ} \cdot 1,075 \cdot 10^{-2} e^{j57,1^\circ}}} = 67,5e^{j-16^\circ} \text{ Ом};$$

та

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\underline{Z}_{2HX} \cdot \underline{Z}_{2K3}} = \sqrt{127,9e^{-j34^\circ} \cdot 79,1e^{j10^\circ}} = 100,6e^{-j8^\circ},$$

або

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{1,375e^{j23,1^\circ} \cdot 73,0e^{j33,1^\circ}}{1,075 \cdot 10^{-2} e^{j57,1^\circ} \cdot 0,923e^{j15,1^\circ}}} = 100,6e^{-j8^\circ};$$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \\ &= \ln(\sqrt{0,923e^{j15,1^\circ} \cdot 1,375e^{j23,1^\circ}} + \sqrt{73,0e^{j33,1^\circ} \cdot 1,075 \cdot 10^{-2} e^{j57,1^\circ}}) = \\ &= \ln(1,961e^{j30,6^\circ}) = 0,673 + j0,533, \end{aligned}$$

або

$$th\underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1K3}}{\underline{Z}_{1HX}}} = \sqrt{\frac{53 e^{j10^\circ}}{85,9 e^{-j42^\circ}}} = 0,785 e^{j26^\circ} = 0,709 + j0,344,$$

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+th\underline{\Gamma}}{1-th\underline{\Gamma}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+0,709+j0,344}{1-0,709+j0,344}\right) = \frac{1}{2} \ln(3,8 e^{j60,9^\circ}) = 0,673 + j0,533.$$

Виконаємо розрахунок параметрів для П- та Т-подібних схем заміщень чотирьохполосника

для Т-подібної схеми заміщення

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = 1,075 \cdot 10^{-2} e^{j57,1^\circ} = (5,84 + j9,02) \cdot 10^{-3} \text{ См},$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{0,891 + j0,241 - 1}{1,075 \cdot 10^{-2} e^{j57,1^\circ}} = 24,6 e^{j57,2^\circ} = 13,33 + j20,7 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1,265 + j0,539 - 1}{1,075 \cdot 10^{-2} e^{j57,1^\circ}} = 24,6 e^{j57,2^\circ} = 13,33 + j20,7 \text{ Ом};$$

для П-подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = 73,0 e^{j33,1^\circ} = 61,2 + j39,9 \text{ Ом},$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{1,265 + j0,539 - 1}{73,0 e^{j33,1^\circ}} = 8,23 \cdot 10^{-3} e^{j30,8^\circ} \text{ См}.$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{0,891 + j0,241 - 1}{73,0 e^{j33,1^\circ}} = 3,63 \cdot 10^{-3} e^{j81,2^\circ} \text{ См}.$$

## 5.2 Способи з'єднання пасивних чотирьохполосників

### Задача 5.3.

Послідовне з'єднання чотирьохполосників двох чотирьохполосників (рис. 5.2) з параметрами  $\underline{A}'_{11} = 0,4 - j0,8$ ;  $\underline{A}'_{12} = 2 - j4 \text{ Ом}$ ;  $\underline{A}'_{21} = 0,1 - j0,2 \text{ См}$ ;  $\underline{A}'_{22} = 1$ ;  $\underline{A}''_{11} = 1,5$ ;  $\underline{A}''_{12} = -j2,5 \text{ Ом}$ ;  $\underline{A}''_{21} = -j0,1 \text{ См}$ ;  $\underline{A}''_{22} = 0,5$ .

Розрахувати первинні та вторинні параметри результуючого з'єднання  $\underline{A}_{11}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$ ,  $\underline{A}_{22}$ ,  $\underline{Z}_{1C}$ ,  $\underline{Z}_{2C}$ ,  $\underline{\Gamma}$ .

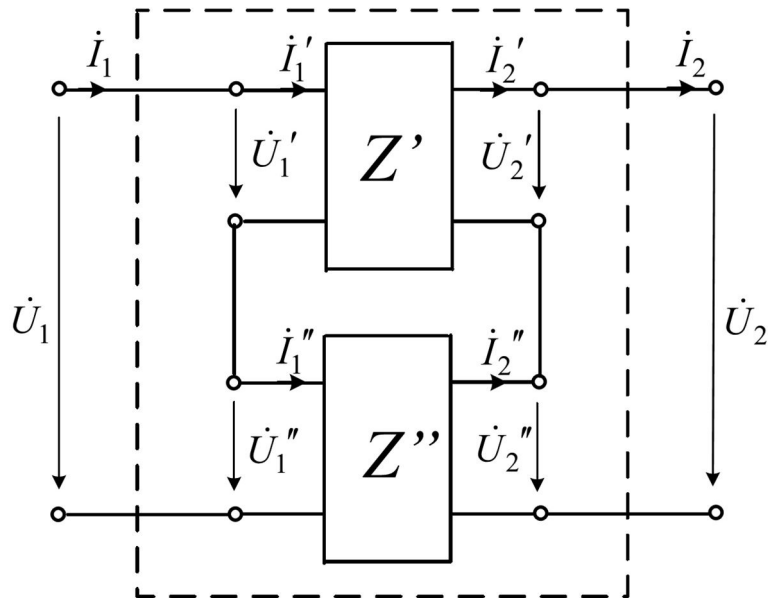


Рисунок 5.2

### Розв'язання

При такому з'єднанні мають місце рівності

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}'_2 + \underline{U}''_2$$

та

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = \underline{I}''_1, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 = \underline{I}''_2.$$

У цьому випадку доцільно обрати систему рівнянь чотирьохполосника, записану через  $Z$ - параметрів

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2,$$

де

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{12} = -\frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{22} = -\frac{\underline{D}}{\underline{C}}.$$

або

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_{12} = -\frac{1}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_{22} = -\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}.$$

Виконаємо їх розрахунок:

$$\underline{Z}'_1 = \frac{\underline{A}'_{11}}{\underline{A}'_{21}} = \frac{0,4 - j0,8}{0,1 - j0,2} = 4 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{12} = -\frac{1}{\underline{A}'_{21}} = -\frac{1}{0,1 - j0,2} = -2 - j4 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{21} = \frac{1}{\underline{A}'_{21}} = \frac{1}{0,1 - j0,2} = 2 + j4 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{22} = -\frac{\underline{A}'_{22}}{\underline{A}'_{21}} = -\frac{1}{0,1 - j0,2} = -2 - j4 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}''_1 = \frac{\underline{A}''_{11}}{\underline{A}''_{21}} = \frac{1,5}{-j0,1} = j15 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}''_{12} = -\frac{1}{\underline{A}''_{21}} = -\frac{1}{-j0,1} = -j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}''_{21} = \frac{1}{\underline{A}''_{21}} = \frac{1}{-j0,1} = j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}''_{22} = -\frac{\underline{A}''_{22}}{\underline{A}''_{21}} = -\frac{0,5}{-j0,1} = -j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}'_1 + \underline{Z}''_1 = 4 + j15 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}'_{12} + \underline{Z}''_{12} = -2 - j4 - j10 = -2 - j14 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}'_{21} + \underline{Z}''_{21} = 2 + j4 + j10 = 2 + j14 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}'_{22} + \underline{Z}''_{22} = -2 - j4 - j5 = -2 - j9 \text{ Ом};$$

Коефіцієнти чотирьохполюсника виражені через Z-параметри мають вигляд

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} = \frac{4 + j15}{2 + j14} = 1,09 - j0,13 = 1,098e^{-j6,8^\circ};$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{(4 + j15) \cdot (-2 - j9) - (-2 - j14) \cdot (2 + j14)}{-2 - j14} =$$

$$= 1,35 - j4,45 \text{ Ом} = 4,65e^{-j73^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}} = \frac{1}{2 + j14} = 0,01 - j0,07 = 0,0707e^{-j82^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{-2 - j9}{-2 - j14} = 0,65 - j0,05 = 0,652e^{-j4,4^\circ}.$$

Перевірка

$$\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} = 1;$$

$$(1,09 - j0,13) \cdot (0,65 - j0,05) - (1,35 - j4,45) \cdot (0,01 - j0,07) = 1;$$

$$1 = 1.$$

Знайдемо параметри схем заміщення

для Т-подібної схеми заміщення

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = 0,01 - j0,07 \text{ См},$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1,09 - j0,13 - 1}{0,01 - j0,07} = 2 + j1 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{0,65 - j0,05 - 1}{0,01 - j0,07} = -j5 \text{ Ом};$$

для П-подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = 1,35 - j4,45 \text{ Ом},$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{0,65 - j0,05 - 1}{1,35 - j4,45} = (-6,94 - j77) \cdot 10^{-3} \text{ См},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{1,09 - j0,13 - 1}{1,35 - j4,45} = (32,2 + j12,63) \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

Виконаємо розрахунок вторинних параметрів:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{1,098e^{-j6,8^\circ} \cdot 4,65e^{-j73^\circ}}{0,652e^{-j4,4^\circ} \cdot 0,0707e^{-j82^\circ}}} = 10,5e^{j3,2^\circ} = 10,5 + j0,582 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{0,652e^{-j4,4^\circ} \cdot 4,65e^{-j73^\circ}}{0,0707e^{-j82^\circ} \cdot 1,098e^{-j6,8^\circ}}} = 6,28e^{j5,5^\circ} = 6,25 + j0,607 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \\ &= \ln(\sqrt{1,098e^{-j6,8^\circ} \cdot 0,652e^{-j4,4^\circ}} + \sqrt{4,65e^{-j73^\circ} \cdot 0,0707e^{-j82^\circ}}) = 0,148 - j0,587, \end{aligned}$$

$$A = 0,1484 \text{ Нн}; B = -0,587 \text{ рад} = -33,6^\circ.$$

#### Задача 5.4.

Паралельне з'єднання чотирьох полюсників (рис. 5.3) з параметрами  $\underline{A}'_{11} = 0,4 - j0,8$ ;  $\underline{A}'_{12} = 2 - j4 \text{ Ом}$ ;  $\underline{A}'_{21} = 0,1 - j0,2 \text{ См}$ ;  $\underline{A}'_{22} = 1$ ;  $\underline{A}''_{11} = 1,5$ ;  $\underline{A}''_{12} = -j2,5 \text{ Ом}$ ;  $\underline{A}''_{21} = -j0,1 \text{ См}$ ;  $\underline{A}''_{22} = 0,5$ .

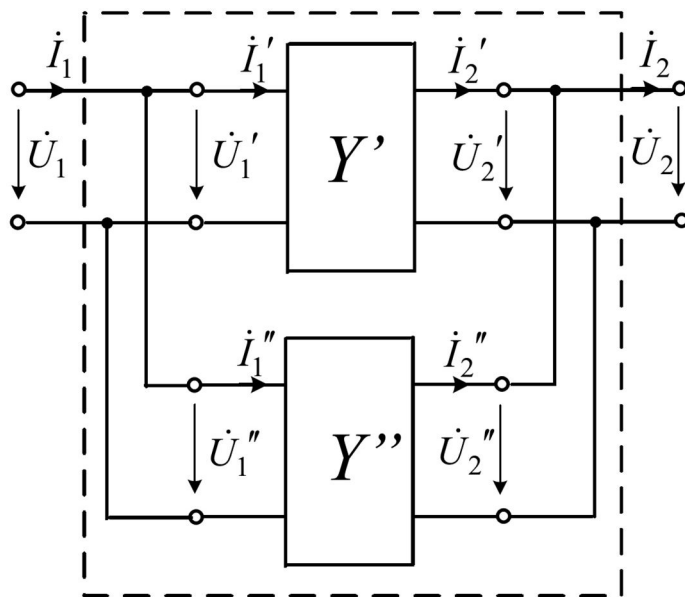


Рисунок 5.3

Розрахувати первинні та вторинні параметри результуючого з'єднання  $\underline{A}_{11}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$ ,  $\underline{A}_{22}$ ,  $\underline{Z}_{1C}$ ,  $\underline{Z}_{2C}$ ,  $\underline{\Gamma}$ .

#### Розв'язання

При такому з'єднанні мають місце рівності

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1 = \underline{U}''_1, \underline{U}_2 = \underline{U}'_2 = \underline{U}''_2$$

та

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1, \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2.$$

Скористаємось системою записаною через  $Y$ -параметри:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2,$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2,$$

де

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}}; \underline{Y}_{12} = -\frac{1}{\underline{A}_{12}}; \underline{Y}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{12}}; \underline{Y}_{22} = -\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}.$$

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}; \underline{A}_{12} = \frac{1}{\underline{Y}_{21}}; \underline{A}_{21} = \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{12}}; \underline{A}_{22} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}.$$

Виконаємо розрахунок  $Y$ -параметрів для кожної складової паралельного з'єднання

$$\underline{Y}'_{11} = \frac{\underline{A}'_{22}}{\underline{A}'_{12}} = \frac{1}{2-j4} = 0,1 + j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}'_{12} = -\frac{1}{\underline{A}'_{12}} = -\frac{1}{2-j4} = -0,1 - j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}'_{21} = \frac{1}{\underline{A}'_{12}} = \frac{1}{2-j4} = 0,1 + j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}'_{22} = -\frac{\underline{A}'_{11}}{\underline{A}'_{12}} = -\frac{0,4-j0,8}{2-j4} = -0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}''_{11} = \frac{\underline{A}''_{22}}{\underline{A}''_{12}} = \frac{0,5}{-j2,5} = j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{12}'' = -\frac{1}{\underline{A}_{12}''} = -\frac{1}{-j2,5} = -j0,4 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{21}'' = \frac{1}{\underline{A}_{12}''} = \frac{1}{-j2,5} = j0,4 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{22}'' = -\frac{\underline{A}_{11}''}{\underline{A}_{12}''} = -\frac{1,5}{-j2,5} = -j0,6 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{11}' + \underline{Y}_{11}'' = 0,1 + j0,2 + j0,2 = 0,1 + j0,4 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{12}' + \underline{Y}_{12}'' = -0,1 - j0,6 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{21}' + \underline{Y}_{21}'' = 0,1 + j0,6 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{22}' + \underline{Y}_{22}'' = -0,2 - j0,6 \text{ См}.$$

Виконаємо розрахунок первинних коефіцієнтів чотирьохполюсника:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} = \frac{-0,2 - j0,6}{-0,1 - j0,6} = 1,027 - j0,1622 = 1,04e^{-j9^\circ};$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{1}{\underline{Y}_{21}} = \frac{1}{0,1 + j0,6} = 0,27 - j1,622 = 1,64e^{-j81^\circ};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{12}} = \frac{(0,1 + j0,4) \cdot (-0,2 - j0,6) - (-0,1 - j0,6) \cdot (0,1 + j0,6)}{-0,1 - j0,6} =$$

$$= 0,0676 - j0,205 = 0,216e^{-j72^\circ};$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{0,1 + j0,4}{0,1 + j0,6} = 0,676 - j0,0541 = 0,678e^{-j4,6^\circ}.$$

Перевірка:

$$\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} = 1;$$

$$(1,027 - j0,1622) \cdot (0,676 - j0,0541) - (0,27 - j1,622) \cdot (0,0676 - j0,205) = 1$$

$$1 = 1.$$

Знайдемо параметри Т-подібної схеми заміщення

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = 0,0676 - j0,205 \text{ См},$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1,027 - j0,1622 - 1}{0,0676 - j0,205} = 0,752 - j0,1165 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1,027 - j0,1622 - 1}{0,0676 - j0,205} = -0,232 - j1,504 \text{ Ом};$$

Знайдемо параметри П-подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = 0,27 - j1,622 \text{ Ом},$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{0,0676 - j0,205 - 1}{0,27 - j1,622} = -j0,2 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{0,676 - j0,0541 - 1}{0,27 - j1,622} = 0,1 \text{ См}.$$

Виконаємо розрахунок вторинних параметрів:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{1,04e^{-j9^\circ} \cdot 1,64e^{-j81^\circ}}{0,678e^{-j4,6^\circ} \cdot 0,216e^{-j72^\circ}}} = 3,42e^{-j6,6^\circ} = 3,39 - j0,393 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{0,678e^{-j4,6^\circ} \cdot 1,64e^{-j81^\circ}}{0,216e^{-j72^\circ} \cdot 1,04e^{-j9^\circ}}} = 2,23e^{-j2,2^\circ} = 2,23 - j0,0856 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \\ &= \ln(\sqrt{1,04e^{-j9^\circ} \cdot 0,678e^{-j4,6^\circ}} + \sqrt{1,64e^{-j81^\circ} \cdot 0,216e^{-j72^\circ}}) = 0,173 - j0,607, \end{aligned}$$

$$A = 0,173 \text{ Hn}; B = -0,607 \text{ рад} = -74^\circ.$$

## 6 ТРИФАЗНІ КОЛА

### 6.1 Розрахунок трифазного симетричного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" чи "трикутником"

Розрахунок симетричних трифазних кіл зводиться до розрахунку однієї фази за однолінійною еквівалентною схемою. У двох інших фазах будуть такі ж за величиною струми і напруги, як в першій, але зсунені за фазою на кут  $120^\circ$ .

#### Задача 6.1.

До симетричного трифазного джерела напругою  $U = 380 \text{ В}$  увімкнений симетричний приймач, фази якого з'єднані в «зірку» (рис. 6.1,а), опори фаз  $r = 12 \text{ Ом}$ ,  $x = 16 \text{ Ом}$ . Знайти покази приладів, побудувати векторну діаграму кола.

#### Розв'язання

Коли говорять про напругу трифазного кола, мають на увазі лінійну напругу мережі (за умовчанням). Якщо задається фазна напруга, то це підкреслюється спеціально.

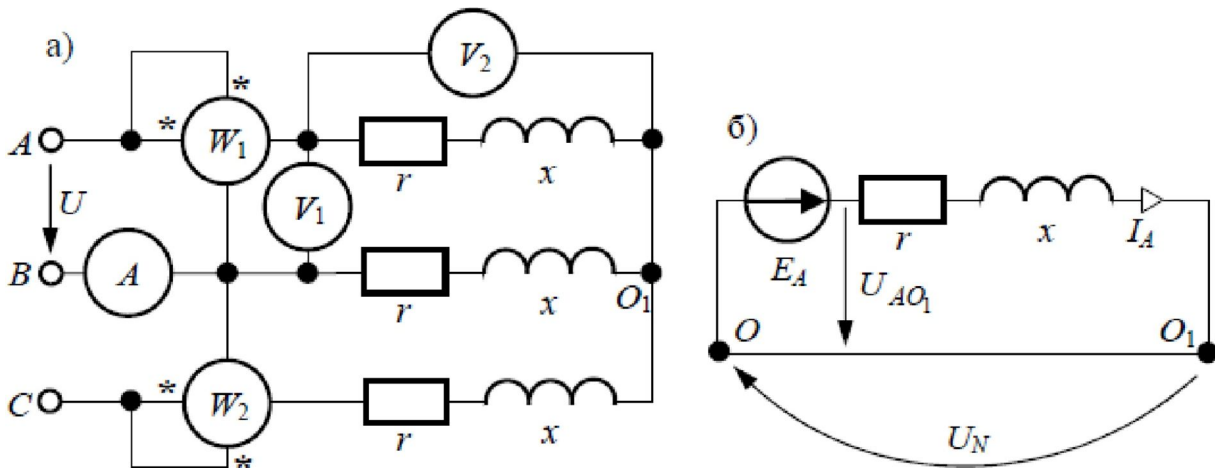


Рисунок 6.1

В умовах нашої задачі напруга мережі  $U = 380 \text{ В}$ , причому за умови симетрії

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U = 380 \text{ В}.$$

Фазні напруги менші за лінійні у  $\sqrt{3}$  разів:

$$U_A = U_B = U_C = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В.}$$

Зауважимо, що фази генератора за умовчанням сполучені в зірку, тоді фазні ЕРС генератора

$$E_A = E_B = E_C = U_\phi = 220 \text{ В.}$$

У симетричній системі «зірка»-«зірка» напруга  $U_N = 0$  і розрахунок стану кола можна вести за схемою заміщення для однієї фази (рис. 6.1, б).

Прийmemo  $E_A = 220 \text{ В}$ , тоді струм в схемі заміщення

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_N}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{12 + j16} = 11e^{-j53,13^\circ} \text{ А.}$$

причому фазна напруга приймача

$$\underline{U}_{AN'} = \underline{E}_A - \underline{U}_N = \underline{E}_A = \underline{U}_A.$$

Результати розрахунку режиму роботи решти фаз (В і С) запишемо на підставі поняття про симетричну трифазну систему прямого порядку чергування фаз

$$\underline{E}_B = \underline{U}_{BN'} = \underline{U}_B - \underline{E}_A e^{-j120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{E}_C = \underline{U}_{CN'} = \underline{U}_C - \underline{E}_A e^{-j120^\circ} \text{ В,}$$

аналогічно для струмів

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A e^{-j120^\circ} = 11e^{-j173,13^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_A e^{-j120^\circ} = 11e^{j66,87^\circ} \text{ А.}$$

Векторна діаграма кола наведена на 6.2, для якої потенціал нульової точки генератора, обмотки якого з'єднані в «зірку»,  $\phi_N = 0$  (рис. 6.1, б).

$$\phi_A = \underline{E}_A = 220 \text{ В;}$$

$$\phi_B = \underline{E}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В;}$$

$$\phi_C = \underline{E}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В;}$$

$$\varphi_{N'} = \varphi_N - U_N = 0,$$

а струми фаз орієнтовані відносно своєї фазної напруги і зсунені на кут

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r} = \operatorname{arctg} \frac{16}{12} = 53,13^\circ.$$

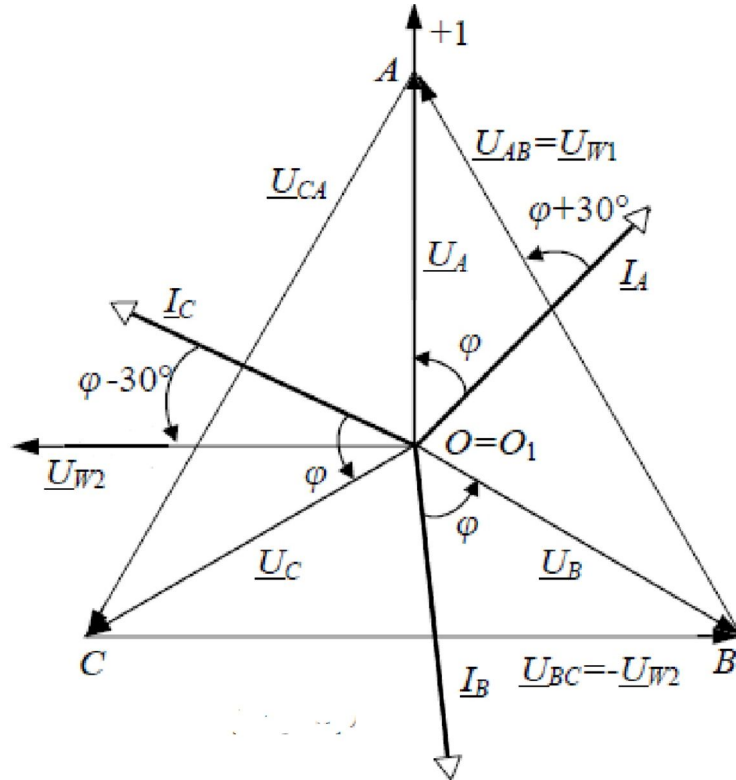


Рисунок 6.2

Лінійні напруги:

$$\underline{U}_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \sqrt{3} \underline{U}_A e^{j30^\circ} = 380 e^{j30^\circ} \text{ B},$$

$$\underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \underline{U}_A e^{-j120^\circ} = 380 e^{-j90^\circ} \text{ B},$$

$$\underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \underline{U}_A e^{j120^\circ} = 380 e^{j150^\circ} \text{ B}.$$

Напруга і струми котушок ватметрів:

$$\underline{U}_{W1} = \underline{U}_{AB} = 380 e^{j30^\circ} \text{ B},$$

$$\underline{I}_{W1} = \underline{I}_A = 11 e^{-j53,13^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{U}_{W2} = -\underline{U}_{BC} = 380 e^{j90^\circ} \text{ B},$$

$$\underline{I}_{W2} = \underline{I}_C = 11 e^{j66,87^\circ} \text{ A}.$$

Покази приладів:

- амперметр  $A$  вимірює лінійний струм  $I_B$  і його показ  $I_B = 11 \text{ A}$ ;
- вольтметр  $V1$  вимірює лінійну напругу  $U_{AB} = 380 \text{ B}$ ;
- вольтметр  $V2$  вимірює фазну напругу приймача  $U_A = 220 \text{ B}$ ;
- покази ватметрів:

$$P_{W1} = \text{Re}[\underline{U}_{W1} \cdot \underline{I}_{W1}^*] = \text{Re}[380e^{j30^\circ} \cdot 11e^{j53,13^\circ}] = 500 \text{ Вт};$$

$$P_{W2} = \text{Re}[\underline{U}_{W2} \cdot \underline{I}_{W2}^*] = \text{Re}[380e^{j90^\circ} \cdot 11e^{j66,87^\circ}] = 3846 \text{ Вт}.$$

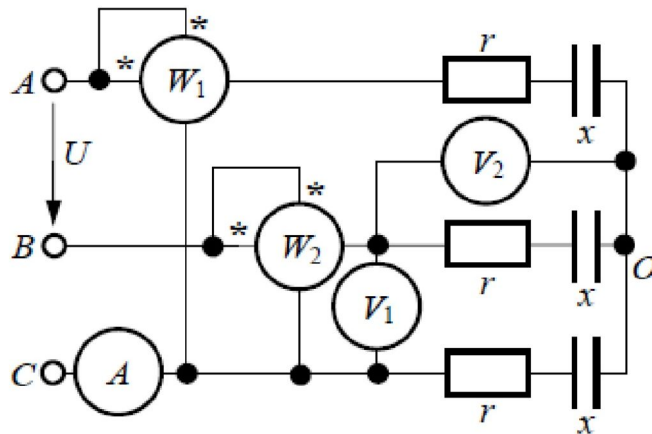


Рисунок 6.3

Звертаємо увагу на суму показів двох ватметрів, яка є активною потужністю симетричного приймача. У нашому прикладі:

$$P_{W1} + P_{W2} = 500 + 3846 = 4346 \text{ Вт}.$$

### Задача 6.2.

Фази приймачів з'єднані у трикутник (рис. 6.4). Розрахувати режим роботи схеми, якщо  $r = 40 \text{ Ом}$ ,  $x = 80 \text{ Ом}$ , напруга мережі  $U = 380 \text{ В}$ . Знайти відношення між лінійними струмами кола у разі з'єднання приймача у трикутник та у зірку.

### Розв'язання

При з'єднанні приймача у трикутник його лінійна напруга дорівнює фазній напрузі. Прийmemo  $\underline{U}_{AB} = U = 380 \text{ В}$ .

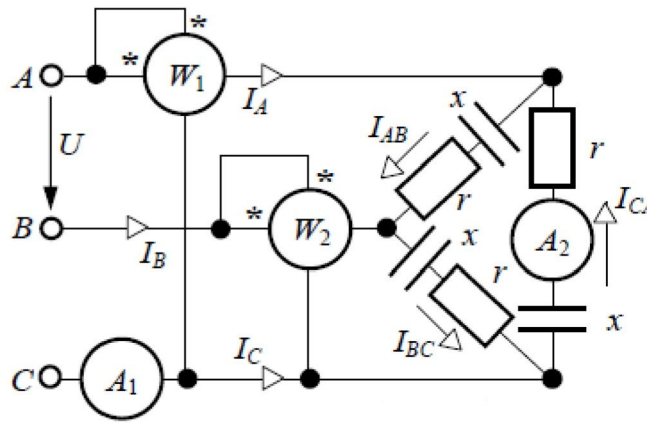


Рисунок 6.4

Тоді

$$\underline{U}_{AB} = 380 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{BC} = 380e^{-j120^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{CA} = 380e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Фазні струми розрахуємо за законом Ома:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{380}{40 - j80} = 4,25e^{j63,44^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \underline{I}_{AB}e^{-j120^\circ} = 4,25e^{-j56,56^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \underline{I}_{AB}e^{j120^\circ} = 4,25e^{j83,44^\circ} \text{ А}.$$

Лінійні струми знаходимо за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{BC} = \sqrt{3} \underline{I}_{AB} e^{-j30^\circ} = 7,36e^{j33,44^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{CA} = \sqrt{3} \underline{I}_{BC} e^{-j30^\circ} = 7,36e^{-j86,56^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{AB} = \sqrt{3} \underline{I}_{CA} e^{-j30^\circ} = 7,36e^{j153,44^\circ} \text{ А}.$$

Векторну діаграму струмів та напруг з'єднання у трикутник будуємо так, щоб зручно було показувати співвідношення між лінійними і фазними струмами: з однієї точки побудуємо вектори фазної напруги трикутника (рис. 6.5, а), відносно їх зорієнтуємо фазні струми трикутника, а лінійні струми

знайдемо відповідно до першого закону Кірхгофа. На підставі співвідношень між струмами, представленими на векторній діаграмі, можна наочно отримати записані вище співвідношення для розрахунку лінійних струмів.

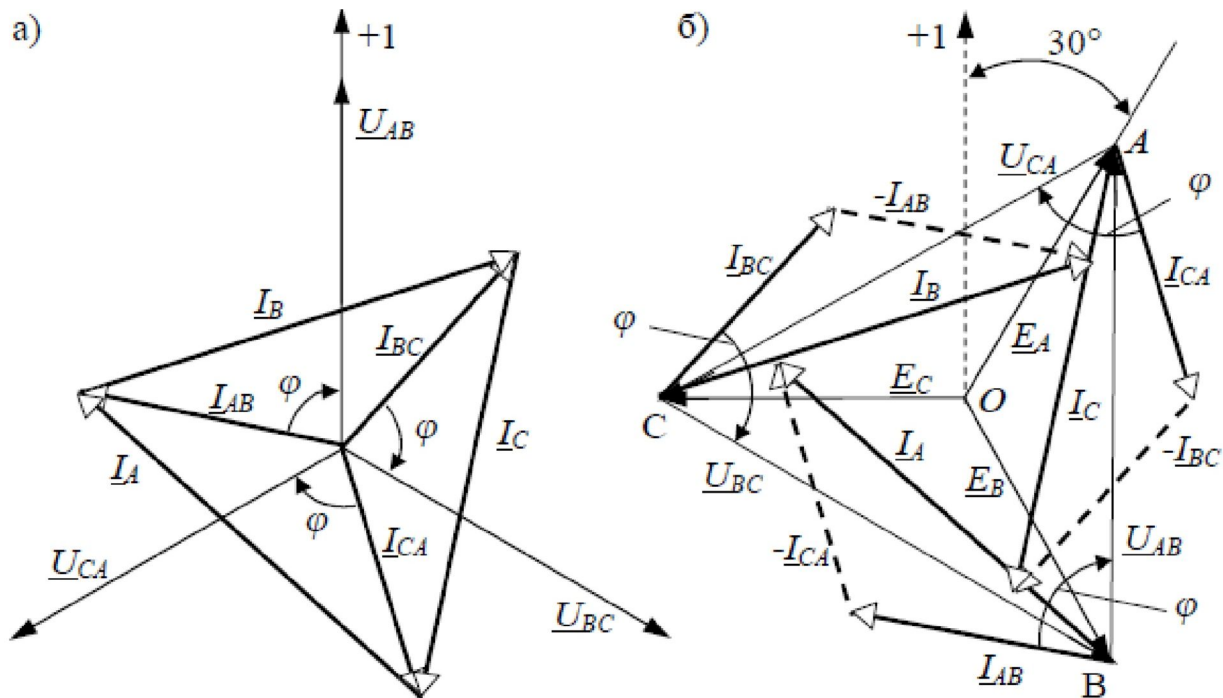


Рисунок 6.5

Відмітимо, що при побудові векторної діаграми трикутника можна користуватися і традиційним способом побудови топографічної діаграми комплексних потенціалів (рис. 6.2), орієнтуючи фазні струми трикутника відносно лінійних напруг мережі, рівних фазним напругам трикутника, як це показано на рис. 6.5, б. Проте, при такому способі побудови лінійних струмів необхідно переносити вектори фазних струмів із зворотним напрямом.

На підставі розрахунків запишемо покази амперметрів:

- лінійний струм  $I_A = 7,36$  А вимірюється амперметром А1;
- фазний струм трикутника  $I_{CA} = 4,25$  А вимірюється амперметром А2.

При з'єднанні тих же опорів в зірку лінійні струми склали  $I_Y = 2,46$  А. Таким чином, при перемиканні фаз приймача із зірки на трикутник при однаковій напрузі мережі лінійний струм збільшується в 3 рази:

$$\frac{I_{\Delta}}{I_Y} = \frac{7,36}{2,46} = 3.$$

Покази ватметрів в схемі рис. 6.4:

$$P_{W1} = \operatorname{Re}[\underline{U}_{AC} \cdot \underline{I}_A^*] = \operatorname{Re}[-380e^{j120^\circ} \cdot 7,36e^{-j33,44^\circ}] = -168 \text{ Вт};$$

$$P_{W2} = \operatorname{Re}[\underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_B^*] = \operatorname{Re}[380e^{-j120^\circ} \cdot 7,36e^{j86,56^\circ}] = 2334 \text{ Вт}.$$

Сума показів двох ватметрів

$$P_{W1} + P_{W2} = 2167 \text{ Вт}$$

дорівнює активній потужності трифазного приймача.

## 6.2 Розрахунок трифазного симетричного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" та "трикутником" (змішане навантаження)

### Задача 6.3.

До джерела з лінійною напругою  $U = 660 \text{ В}$  (рис. 6.6, а) через реактори з опором  $x_0 = 25 \text{ Ом}$  увімкнені: електродвигун, кожна фаза якого має опір  $r = x = 50 \text{ Ом}$  при сполученні зіркою; трифазний конденсатор, який використовується для підвищення коефіцієнта потужності установки, фази якого з'єднані у трикутник і мають опір  $x_C = 300 \text{ Ом}$ . Визначити напругу на затискачах двигуна і його потужність. Знайти втрату напруги на реакторах.

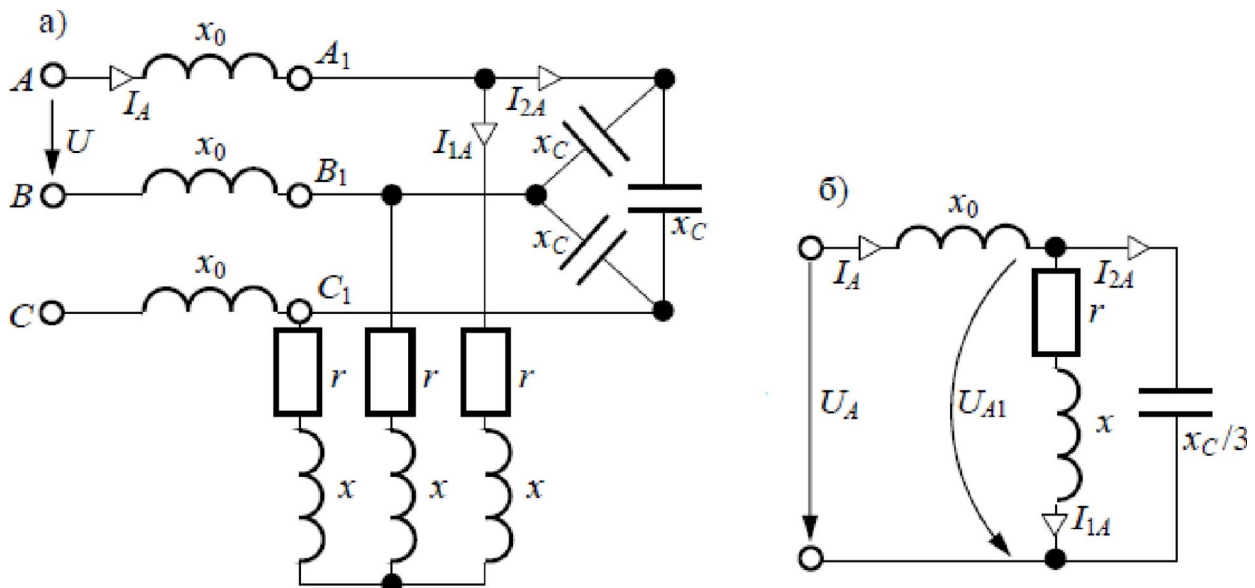


Рисунок 6.6

### Розв'язання

Розрахунок трифазної системи виконаємо за схемою заміщення для однієї фази (рис. 6.6, б).

Фазна напруга генератора

$$\underline{U}_A = \frac{U}{\sqrt{3}} = 380 \text{ В.}$$

Опір зірки еквівалентної симетричному трикутнику

$$x_Y = \frac{x_C}{3} = \frac{300}{3} = 100 \text{ Ом.}$$

Прийmemo

$$\underline{U}_A = U_A = 380 \text{ В,}$$

тоді

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \frac{\underline{U}_A}{jx_0 + \frac{(r + jx)(-jx_Y)}{(r + jx) + (-jx_Y)}} = \frac{380}{j25 + \frac{(50 + j50)(-j100)}{(50 + j50) + (-j100)}} = \\ &= \frac{380}{j25 + 1003} = 3,687e^{-j14,04^\circ} \text{ А,} \end{aligned}$$

фазна напруга двигуна

$$\underline{U}_{A1} = \underline{I}_A \frac{(r + jx)(-jx_Y)}{(r + jx) + (-jx_Y)} = 3,687e^{-j14,04^\circ} \cdot 100 = 368,7e^{-j14,04^\circ} \text{ В.}$$

Лінійна напруга на затискачах двигуна (рис. 6.6, а)

$$U_{A1B1} = \sqrt{3} \underline{U}_{A1} = \sqrt{3} \cdot 368,7 = 638,6 \text{ В.}$$

Втрата напруги

$$\Delta U = U_{AB} - U_{A1B1} = 660 - 638,6 = 21,4 \text{ В,}$$

що у відсотковому вираженні від напруги мережі складає

$$\Delta U \% = \frac{\Delta U}{U_{AB}} 100\% = \frac{21,4}{660} 100\% = 3,24\%.$$

Відмітимо, що відповідно до Правил технічної експлуатації установок споживачів (ПТЕ) втрата напруги не повинна перевищувати 5%. Таким чином, схема з реакторами для обмеження струмів короткого замикання на затискачах

споживачів задовольняє вимоги ПТЕ щодо допустимої втрати напруги.

Струм двигуна

$$\underline{I}_{1A} = \frac{U_{A1}}{r + jx} = \frac{368,7e^{-j14,04^\circ}}{50 + j50} = 5,215e^{-j59,04^\circ} \text{ A.}$$

Активна потужність двигуна

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{A1B1} \cdot I_{1A} \cos(\varphi_1) = 3 I_{1A}^2 r = 3 \cdot 5,2152 \cdot 50 = 4079 \text{ Вт.}$$

#### Задача 6.4.

На шини підстанції підприємства електрична енергія подається від двох трифазних джерел живлення, розташованих в різних географічних точках, через лінії електропередач ЛЕП1 і ЛЕП2 (рис. 6.7).

Лінійні напруги на вході ліній однакові  $U_1 = U_2 = 6,3 \text{ кВ}$  і зфазовані в режимі неробочого ходу (мають однакові початкові фази відповідних одна одній фаз кола). Активні і індуктивні опори фаз першої і другої ліній  $r_1 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $x_1 = 0,3 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 0,4 \text{ Ом}$ ,  $x_2 = 0,6 \text{ Ом}$ .

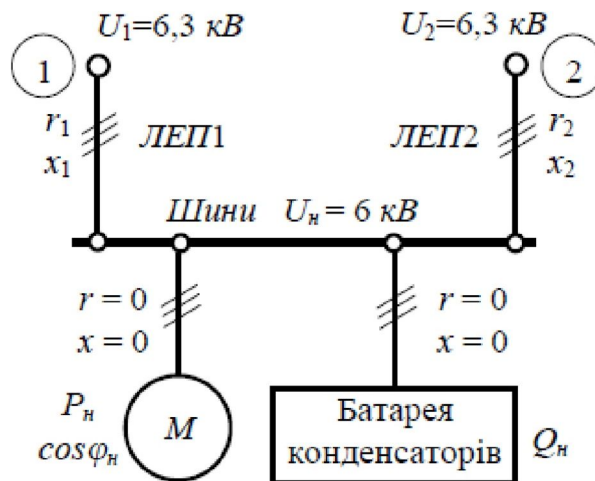


Рисунок 6.7

Номінальна напруга на шинах підстанції  $U_n = 6 \text{ кВ}$ , встановлена потужність двигунів  $P_n = 4000 \text{ кВт}$  при  $\cos\varphi_n = 0,8$  при  $\varphi > 0$ , реактивна потужність статичних конденсаторів  $Q_n = 2500 \text{ квар}$ .

Визначити напругу на шинах підстанції, струми ліній, активні, реактивні і повні потужності джерел живлення.

## Розв'язання

Побудуємо схему заміщення трифазної системи для однієї фази (рис. 6.8).

Фазні ЕРС розрахуємо відповідно до заданої лінійної напруги на початку ліній електропередачі

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{6300}{\sqrt{3}} = 3638 \text{ В.}$$

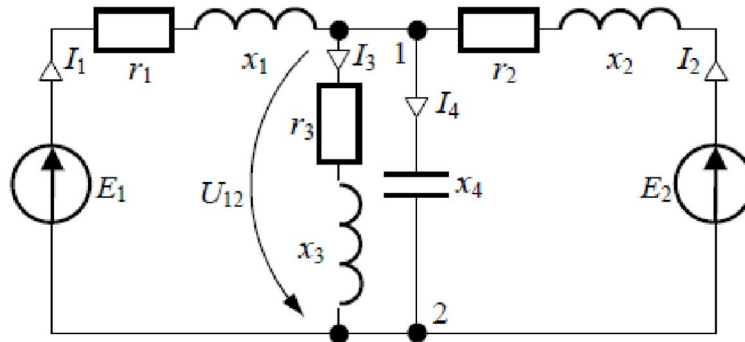


Рисунок 6.8

Оскільки ці ЕРС при паралельній роботі ліній зфазовані, то початкові фази у них однакові для відповідних фаз. Прийmemo

$$\psi_{e1} = \psi_{e2} = 0$$

тоді комплекси ЕРС

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_2 = 3638 \text{ В.}$$

Комплексні опори ЛЕП на фазу

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = 0,5 + j0,3 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2 = 0,4 + j0,6 \text{ Ом.}$$

Параметри приєднань розрахуємо за номінальними даними.

Потужність двигуна (приєднання 3 на рис. 6.8)

$$P_n = \sqrt{3} U_n I_n \cos \varphi_n$$

звідки

$$I_n = \frac{P_n}{\sqrt{3} \cdot U_n \cos \varphi_n} = \frac{400}{\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 0,8} = 481 \text{ А;}$$

повний опір фази при з'єднанні навантаження в зірку

$$Z_3 = \frac{U_H}{I_H} = \frac{600}{481} = 7,2 \text{ Ом};$$

активний опір фази навантаження

$$r_3 = Z_3 \cos \varphi_H = 7,2 \cdot 0,8 = 5,76 \text{ Ом},$$

індуктивний опір

$$x_3 = Z_3 \sin \varphi_H = Z_3 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_H} = 7,2 \cdot \sqrt{1 - 0,8^2} = 4,32 \text{ Ом},$$

комплексний опір

$$\underline{Z}_3 = r_3 + jx_3 = 5,76 + j4,32 = 7,2 e^{j36,87^\circ} \text{ Ом}.$$

Потужність батареї конденсаторів (приєднання **4** на рис. 6.8)

$$Q_H = 3 I_{4H}^2 x_4 = \sqrt{3} U_H I_{4H},$$

звідки

$$I_{4H} = \frac{Q_H}{\sqrt{3} \cdot U_H} = \frac{2500}{\sqrt{3} \cdot 6} = 240,6 \text{ А},$$

$$x_4 = \frac{U_H}{I_{4H}} = \frac{600}{240,6} = 14,4 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_4 = -jx_4 = -j14,4 \text{ Ом}$$

Розрахунок схеми рис. 6.8 виконаємо методом вузлової напруги

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \frac{\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4}} = \frac{\frac{3638}{0,5 + j0,3} + \frac{3638}{0,4 + j0,6}}{\frac{1}{0,5 + j0,3} + \frac{1}{0,4 + j0,6} + \frac{1}{5,76 + j4,32} + \frac{1}{-j14,4}} = \\ &= 3530 - j75,8 = 3531 e^{-j1,18^\circ} \text{ В} \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1} = \frac{3638 - 3530 + j72,8}{0,5 + j0,3} = 223,1 + j11,77 = 223,4 e^{j3,02^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{U}_{12}}{\underline{Z}_2} = \frac{3638 - 3530 + j72,8}{0,4 + j0,6} = 166,8 - j65,5 = 180 e^{-j22,2^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_3} = \frac{3530 + j72,8}{5,76 + j4,32} = 386,2 - j302,2 = 490,4 e^{-j38,05^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_4} = \frac{3530 + j72,8}{-j14,4} = 5 + j245 = 245,1 e^{j88,1^\circ} \text{ A}.$$

Лінійна напруга на шинах підстанції

$$\underline{U}_{\gamma 12} = \sqrt{3} \underline{U}_{12} = \sqrt{3} \cdot 3531 = 6115 \text{ B} = 6,115 \text{ кВ/}$$

Струми ліній

$$I_1 = 223,4 \text{ A}; I_2 = 180,3 \text{ A}.$$

Комплексні потужності джерел живлення (на вході ЛЕП)

$$\underline{S}_1 = 3 \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* = 3 \cdot 3638 \cdot 223,4 e^{-j3,02^\circ} = 2438 e^{-j3,02^\circ} = 2435 - j128,5 \text{ кВА};$$

$$\underline{S}_2 = 3 \underline{E}_2 \cdot \underline{I}_2^* = 3 \cdot 3638 \cdot 180,3 e^{j22,23^\circ} = 1843 e^{j22,23^\circ} = 1685 - j747,5 \text{ кВА}.$$

Звідки

$$P_1 = 2435 \text{ кВт}, Q_1 = -128,5 \text{ квар}, S_1 = 2438 \text{ кВА};$$

$$P_2 = 1685 \text{ кВт}, Q_2 = 747,5 \text{ квар}, S_2 = 1843 \text{ кВА}.$$

### 6.3 Розрахунок несиметричного трифазного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" чи "трикутником"

#### Задача 6.5.

Визначити струми у чотирипровідному колі (рис. 6.9, а) і напруги на фазах несиметричного приймача, який увімкнений в симетричну трифазну мережу з напругою  $U = 380 \text{ B}$ , якщо  $r = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 44 \text{ Ом}$ .

Знайти активну і реактивну потужності несиметричного приймача, побудувати векторну діаграму.

## Розв'язання

За умовчанням вважаємо, що фази симетричного генератора з'єднані у зірку з виведеною нульовою точкою  $O$  (на рис. 6.9, а показано штриховими лініями).

Оскільки опір нульового проводу  $Z_N = 0$ , то потенціали

$$\varphi_0 = \varphi_{01} \text{ і } \underline{U}_N = \varphi_0 - \varphi_{01} = 0.$$

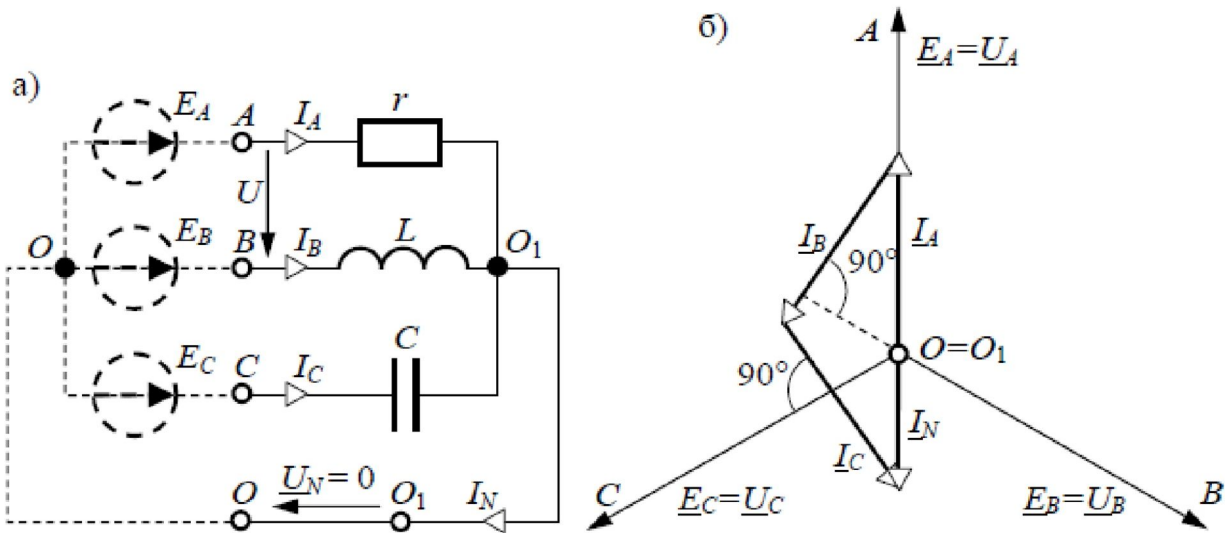


Рисунок 6.9

У цьому випадку фазні напруги несиметричного приймача дорівнюють фазним ЕРС симетричного генератора

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_N = \underline{E}_A,$$

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_N = \underline{E}_B,$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_N = \underline{E}_C,$$

Фазна ЕРС

$$E = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В.}$$

Прийнявши  $\underline{E}_A = 220 \text{ В}$ , отримаємо

$$\underline{E}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{E}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Комплексні опори фаз

$$\underline{Z}_A = r; \underline{Z}_B = j\omega L; \underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$$

За законом Ома струми

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{44} = 5 \text{ A},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{44e^{j90^\circ}} = 5e^{-j210^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{220e^{j120^\circ}}{44e^{-j90^\circ}} = 5e^{j210^\circ} \text{ A}.$$

а за першим законом Кірхгофа

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 5 \cdot (1 + e^{-j210^\circ} + e^{j210^\circ}) = 5 \cdot (1 - \sqrt{3}) = -3,64 \text{ A}.$$

Активна потужність приймача

$$P = P_A + P_B + P_C = \sum_{n=1}^3 I_m^2 r_n = I_A^2 r = 5^2 \cdot 44 = 1100 \text{ Вт}.$$

Реактивна потужність також визначається як алгебрична сума потужностей трьох фаз приймача

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = \sum_{n=1}^3 I_m^2 x_n = I_B^2 \omega L - I_C^2 \frac{1}{\omega C} = 5^2 \cdot 44 - 5^2 \cdot 44 = 0 \text{ вар}.$$

Векторна діаграма кола подана на рис. 6.9, б.

### Задача 6.6.

Розв'язати задачу 6.5 при розімкненому нульовому проводі.

#### Розв'язання

Наведемо розрахункову схему установки (рис. 6.10,а).

Розрахуємо вузлову напругу (напруга зміщення нейтралі)

$$\underline{U}_N = \frac{\frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} + \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{\frac{220}{44} + \frac{220e^{-j120^\circ}}{44e^{j90^\circ}} + \frac{220e^{j120^\circ}}{44e^{-j90^\circ}}}{\frac{1}{44} + \frac{1}{44e^{j90^\circ}} + \frac{1}{44e^{-j90^\circ}}} =$$

$$= 220 \cdot (1 + e^{-j210^\circ} + e^{j210^\circ}) = -160 \text{ B.}$$

Фазні напруги приймача

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_N = 220 + 160 = 380 \text{ B,}$$

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_N = 220e^{-j120^\circ} + 160 = 50 - j190 = 196e^{-j75,3^\circ} \text{ B,}$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_N = 220e^{j120^\circ} + 160 = 50 + j190 = 196e^{j75,3^\circ} \text{ B.}$$

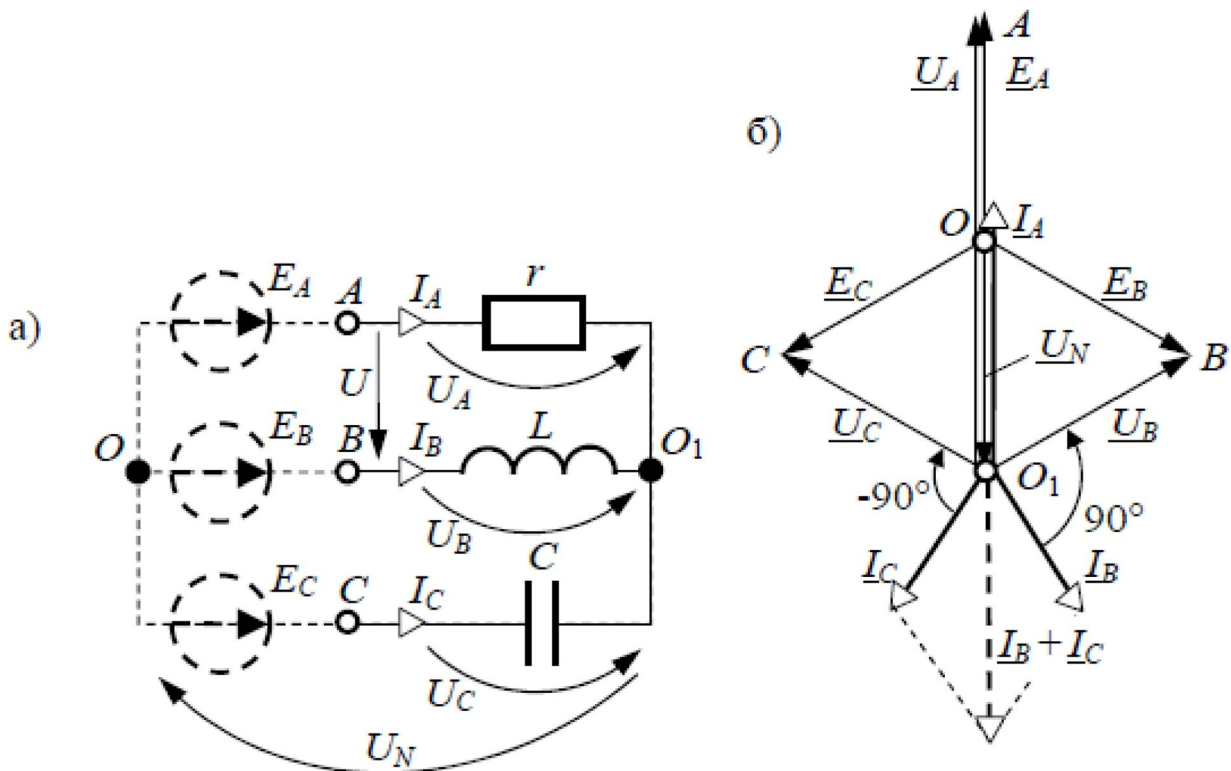


Рисунок 6.10

Фазні струми приймача дорівнюють лінійним

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{3800}{44} = 8,64 \text{ A,}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{196e^{-j75,3^\circ}}{44e^{j90^\circ}} = 4,47e^{-j165^\circ} = -4,32 - j1,14 \text{ A,}$$

$$\underline{I}_C = \frac{U_C}{Z_C} = \frac{196e^{j75,3^\circ}}{44e^{-j90^\circ}} = 4,47e^{j165^\circ} = -4,32 + j1,14 \text{ A.}$$

Перевірка здійснюється за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 8,64 + (-4,32 - j1,14) + (-4,32 + j1,14) \approx 0.$$

виконується.

Активна потужність приймача

$$P = P_A + P_B + P_C = \sum_{n=1}^3 I_m^2 r_n = I_A^2 r = 8,64^2 \cdot 44 = 3285 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = \sum_{n=1}^3 I_m^2 x_n = I_B^2 \omega L - I_B^2 \frac{1}{\omega C} = 4,47^2 \cdot 44 - 4,47^2 \cdot 44 \approx 0 \text{ вар.}$$

### Задача 6.7.

Розрахувати струми несиметричного трикутника (рис. 6.11, а), побудувати векторну діаграму, якщо  $U = 380 \text{ В}$ ,  $r = x_C = 100 \text{ Ом}$ ,  $x_L = \sqrt{2} \cdot 100 \text{ Ом}$ .

Знайти покази ватметрів, порівняти їх з активною потужністю приймача.

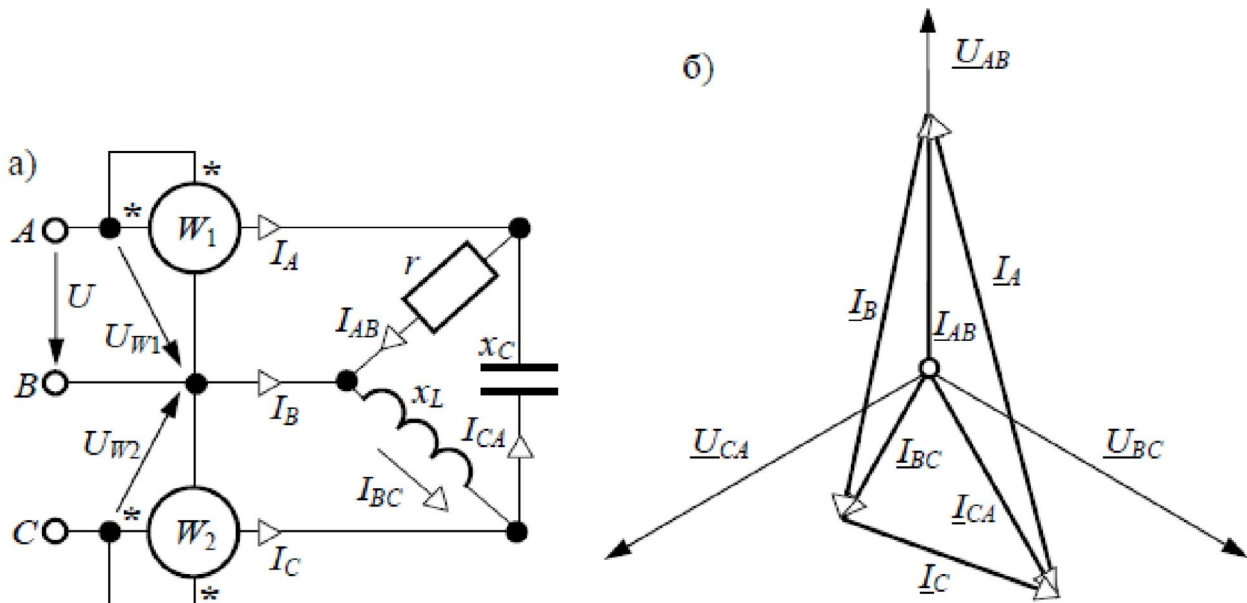


Рисунок 6.11

### Розв'язання

При увімкненні трикутника опорів до трифазного генератора лінійна

напруга генератора дорівнює фазній напрузі навантаження.

Приймемо

$$\underline{U}_{AB} = 380 \text{ В},$$

тоді

$$\underline{U}_{BC} = 380e^{-j120^\circ} \text{ В}, \underline{U}_{CA} = 380e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

За законом Ома знаходимо фазні струми трикутника

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{3800}{100} = 3,8 \text{ А},$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{380e^{-j120^\circ}}{\sqrt{2} \cdot 100e^{j90^\circ}} = 1,9e^{-j210^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{380e^{j120^\circ}}{100e^{-j90^\circ}} = 3,8e^{j210^\circ} \text{ А}.$$

Лінійні струми знаходимо за першим законом Кірхгофа

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = 3,8 - 1,9e^{j210^\circ} = 3,8 - (-3,29 - j1,9) = 7,35e^{j15^\circ} \text{ А},$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = 1,9e^{-j210^\circ} - 3,8 = (-1,65 + j0,95) - 3,8 = \\ &= -5,45 + j0,95 = -6,28e^{-j12,33^\circ} \text{ А}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = 3,8e^{j210^\circ} - 1,9e^{-j210^\circ} = (-3,29 - j1,9) - (-1,65 + j0,95) = \\ &= -1,65 - j2,85 = -3,38e^{j73,33^\circ} \text{ А}, \end{aligned}$$

Векторна діаграма трикутника опорів подана на рис. 6.11, б.

Покази ватметрів

$$P_{W1} = \text{Re} [\underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_A^*] = \text{Re}[380 \cdot 7,35e^{-j15^\circ}] = 2698 \text{ Вт},$$

$$P_{W2} = \text{Re} [\underline{U}_{CB} \cdot \underline{I}_C^*] = \text{Re}[-380e^{-j120^\circ} \cdot (-3,38e^{-j73,33^\circ})] = -1250 \text{ Вт}.$$

При визначення  $P_{W2}$  взята напруга ( $\underline{U}_{CB} = -\underline{U}_{BC}$ , оскільки початок паралельної обмотки другого ватметра, позначений на схемі (\*), під'єднаний до

точки С.

Активна потужність несиметричного приймача

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = I_{AB}^2 r = 3,8^2 \cdot 100 = 1444 \text{ Вт.}$$

Сума показів двох ватметрів схеми рис. 6.11, а

$$P_{W1} + P_{W2} = 2698 - 1250 = 1448 \text{ Вт} = P.$$

Таким чином, наведена схема увімкнення двох ватметрів є схемою вимірювання активної потужності в трифазному трипровідному колі. Розбіжність у четвертому знаку результатів є наслідком округлення чисел.

### Задача 6.8.

До трифазної мережі з лінійною напругою  $U = 220 \text{ В}$  і опорами  $R_{\text{л}} = 3 \text{ Ом}$  та  $x_{\text{л}} = 4 \text{ Ом}$  під'єднане коло з опорами  $R = x_{\text{C}} = x_{\text{L}} = 20 \text{ Ом}$  (рис. 6.12).

Розрахувати струми у колі, показів ватметрів та побудувати векторну діаграму для випадку короткого замикання між фазними точками **а-с** приймача.

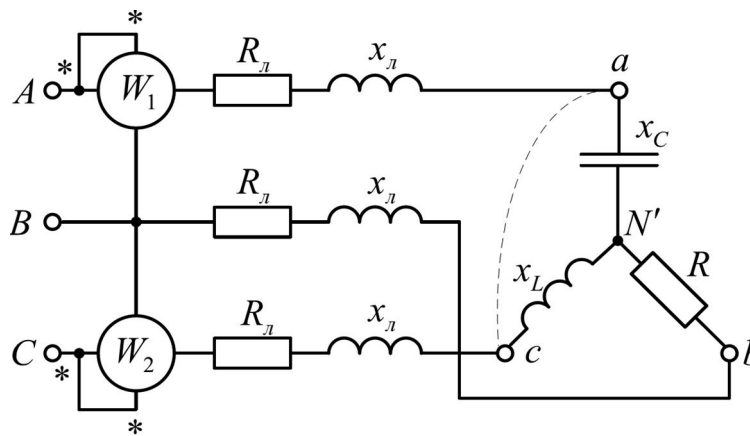


Рисунок 6.12

### Розв'язання

Фазна напруга пов'язана з лінійною співвідношенням

$$U_{\phi} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В.}$$

Прийнявши

$$\underline{U}_A = 127 \text{ В,}$$

отримаємо

$$\underline{U}_B = 127e^{-j120^\circ} \text{ В}, \quad \underline{U}_C = 127e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Тоді система комплексів лінійних напруг генератора

$$\underline{U}_{AB} = 220e^{j30^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{BC} = 220e^{-j90^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{CA} = 220e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

У результаті короткого замикання утворюється нова точка (вузол)  $N''$  і схема набуває вигляду поданого на рис. 6.13.

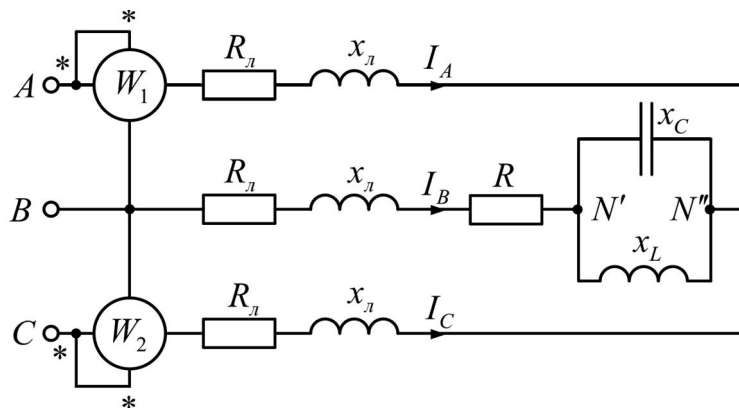


Рисунок 6.13

У коливальному контурі між точками  $N'$ - $N''$  має місце резонанс струмів, як результат рівності провідностей елементів контуру

$$b_L = b_C = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ См}.$$

Еквівалентний опір цього контуру

$$x_{екв} = \frac{1}{b_L - b_C} = \infty,$$

звідки випливає

$$\underline{I}_B = 0,$$

$$\underline{U}_{BN'} = \underline{I}_B (R_l + R + jx_l) = 0,$$

$$\Phi_B = \Phi_{N'}.$$

Оскільки струм у фазі В не протікає, то за законом Ома для замкненого контуру

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{CA}}{2 \cdot (R_l + jx_l)} = \frac{220e^{j150^\circ}}{2 \cdot (3 + j4)} = \frac{220e^{j150^\circ}}{2 \cdot 5e^{j53^\circ}} = 22e^{j97^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_A = 22e^{-j83^\circ} \text{ A}.$$

Обчислимо напругу на опорах лінійних проводів:

$$\underline{U}_{AN''} = \underline{U}_{Aa} = \underline{I}_A \cdot (R_l + jx_l) = 22e^{-j83^\circ} \cdot 5e^{j53^\circ} = 110e^{-j30^\circ} \text{ B},$$

$$\underline{U}_{BN'} = \underline{I}_B \cdot (R_l + jx_l) = 0,$$

$$\underline{U}_{CN''} = \underline{U}_{Cc} = \underline{I}_C \cdot (R_l + jx_l) = 22e^{j97^\circ} \cdot 5e^{j53^\circ} = 110e^{-j150^\circ} \text{ B},$$

Розраховуємо напругу  $\underline{U}_{N'N''}$ , яка утворюється після короткого замикання, склавши рівняння за другим законом Кірхгофа для верхнього контуру:

$$\underline{U}_{AN''} - \underline{U}_{N'N''} - \underline{U}_{AB} = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} \underline{U}_{N'N''} &= \underline{U}_{AN''} - \underline{U}_{AB} = 110e^{-j30^\circ} - 220e^{j30^\circ} = (95 - j55) - (190 + j110) = \\ &= -95 - j165 = 190e^{j240^\circ} = 190e^{-j120^\circ} \text{ B}. \end{aligned}$$

Обчислюємо струми у паралельних вітках коливального контуру:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{N'N''}}{\underline{Z}_L} = \frac{190e^{-j120^\circ}}{20e^{j90^\circ}} = 9,5e^{j150^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_L = 9,5e^{-j30^\circ} \text{ A}.$$

Покази ватметрів

$$P_{W1} = \text{Re} [\underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_A^*] = \text{Re} [220e^{j30^\circ} \cdot 22e^{j83^\circ}] = -1890 \text{ Вт},$$

$$P_{W2} = \text{Re} [\underline{U}_{CB} \cdot \underline{I}_C^*] = \text{Re} [220e^{j90^\circ} \cdot 22e^{-j97^\circ}] = 4804 \text{ Вт}.$$

При визначення  $P_{W2}$  взята напруга ( $\underline{U}_{CB} = -\underline{U}_{BC}$ , оскільки початок

паралельної обмотки другого ватметра, позначений на схемі (\*), під'єднаний до точки С.

Топографічна діаграма кола зображена на рис. 6.14.

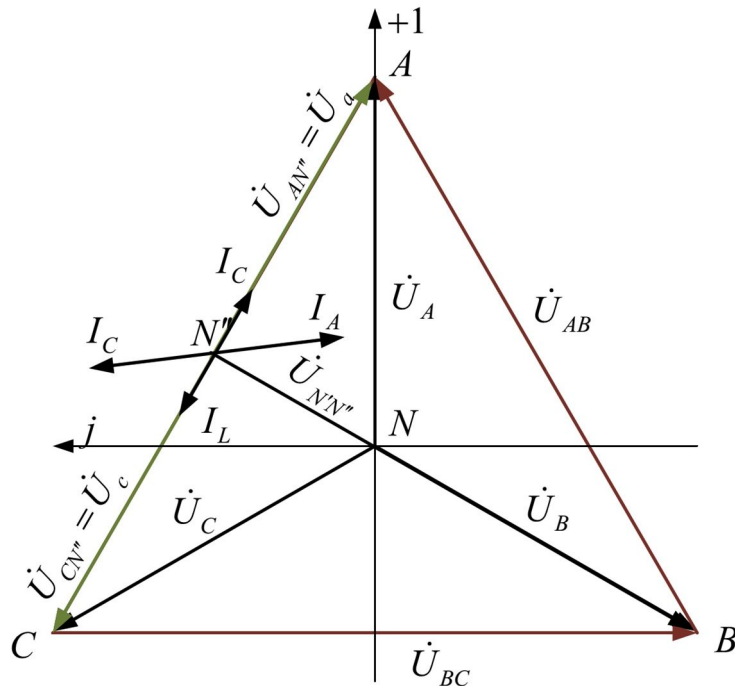


Рисунок 6.14

### 6.4 Розрахунок трифазних кіл з різними видами з'єднання фаз

#### Задача 6.9.

Трифазне коло (рис. 6.15) увімкнене до симетричного генератора з напругою  $U = 660 \text{ В}$ . Параметри кола  $r = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 10 \text{ Ом}$ ,  $r_1 = \omega L_1 = 5 \text{ Ом}$ .

Розрахувати лінійні і фазні струми всіх ділянок кола.

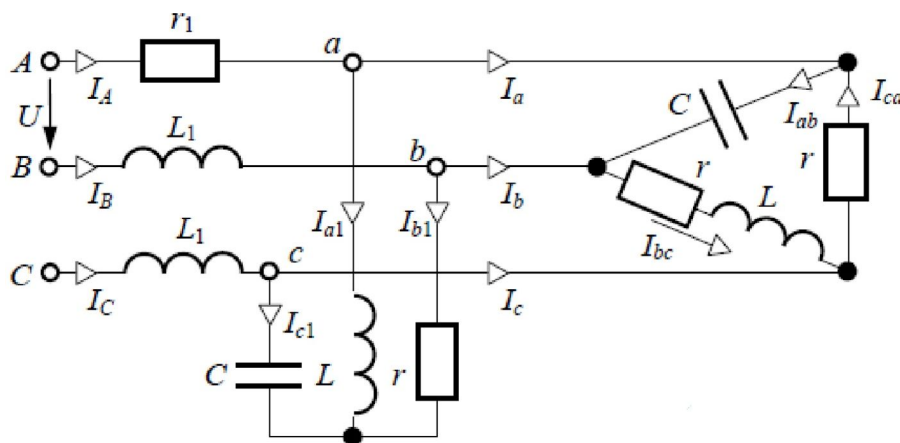


Рисунок 6.15

## Розв'язання

Спростимо схему за допомогою еквівалентних перетворень. Спочатку несиметричну зірку замінимо еквівалентним трикутником опорів:

$$\underline{Z}_{ab1} = r + j\omega L + \frac{r(j\omega L)}{-j\frac{1}{\omega C}} = 10 + j10 + \frac{10 \cdot (j10)}{-j10} = j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{bc1} = r - j\omega L + \frac{r\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L} = 10 - j10 + \frac{10 \cdot (-j10)}{j10} = -j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{ca1} = j\omega L - j\frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega L \cdot \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{r} = j10 - j10 + \frac{j10 \cdot (-j10)}{10} = 10 \text{ Ом},$$

Далі два трикутники опорів виявляються увімкненими паралельно (рис. 6.16, а).

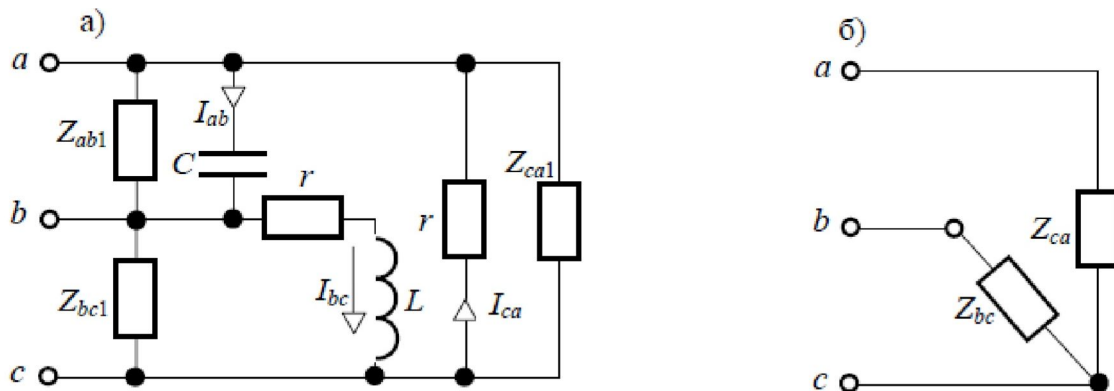


Рисунок 6.16

Ці два трикутники можна замінити одним з опорамі фаз

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_{ab1}(-j\omega L)}{\underline{Z}_{ab1} - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{j10(-j10)}{j10 - j10} = \infty,$$

таким чином в цьому паралельному контурі без втрат спостерігається резонанс струмів у результаті якого вхідний опір цього контура нескінченно великий;

$$\underline{Z}_{bc} = \frac{\underline{Z}_{bc1}(r + j\omega L)}{\underline{Z}_{bc1} + r + j\frac{1}{\omega C}} = \frac{-j10 \cdot (10 + j10)}{-j10 + 10 + j10} = 10 - j10 = \text{Ом},$$

$$\underline{Z}_{ca} = \frac{\underline{Z}_{ca1} r}{\underline{Z}_{ca1} + r} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ Ом.}$$

В результаті одержуємо схему заміщення навантаження, увімкненого на затискачі  $a-b-c$ , яка представлена на рис. 6.16,б.

Уявимо, що обмотки симетричного трифазного джерела ЕРС сполучені в зірку з ЕРС. Фазна ЕРС

$$E = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{660}{\sqrt{3}} = 380 \text{ В.}$$

Прийнявши

$$\underline{E}_A = 380 \text{ В,}$$

отримаємо

$$\underline{E}_B = 380 e^{-j120^\circ} = -190 - j330 \text{ В,}$$

$$\underline{E}_C = 380 e^{j120^\circ} = -190 + j330 \text{ В.}$$

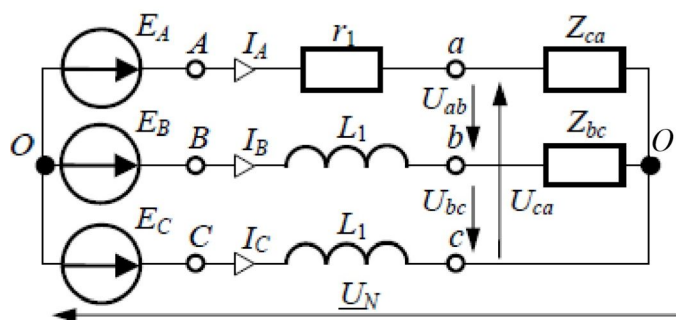


Рисунок 6.17

Отримуємо перетворену схему заміщення, зображену на рис. 6.17, для якої напруга зміщення нейтралі

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{\underline{E}_A}{r + \underline{Z}_{ca}} + \frac{\underline{E}_B}{j\omega L_1 + \underline{Z}_{bc}} + \frac{\underline{E}_C}{j\omega L_1} = \frac{380}{5 + 5} + \frac{380 e^{-j120^\circ}}{j5 + 10 - j10} + \frac{380 e^{j120^\circ}}{j5} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{r + \underline{Z}_{ca}} + \frac{1}{j\omega L_1 + \underline{Z}_{bc}} + \frac{1}{j\omega L_1}} = \frac{1}{\frac{1}{5 + 5} + \frac{1}{j5 + 10 - j10} + \frac{1}{j5}} = \\ &= 200 + j225 \text{ В.} \end{aligned}$$

Лінійні струми генератора

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_N}{r_1 + \underline{Z}_{ca}} = \frac{380 - (200 + j225)}{5 + 5} = 28,8e^{-j51,3^\circ} = 18 - j22,5 \text{ A},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_N}{j\omega L_1 + \underline{Z}_{bc}} = \frac{(-190 - j330) - (200 + j225)}{j5 + 10 - j10} = 60,6e^{-j98,6^\circ} = -9 - j55,5 \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_N}{j\omega L_1} = \frac{(-190 + j330) - (200 + j225)}{j5} = 80,7e^{j75,1^\circ} = 21 + j78 \text{ A}.$$

Лінійна напруга на затискачах приймачів на підставі схеми рис. 6.17:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_{ab} - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_{bc} = 28,8e^{-j51,3^\circ} \cdot 5 - 60,6e^{-j98,6^\circ} \cdot (10 - j10) = \\ &= 874,6 + j396 = 874e^{j27^\circ} \text{ B}, \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_{bc} = 60,6e^{-j98,6^\circ} \cdot (10 - j10) = -690 - j509 = 857,1e^{-j144^\circ} \text{ B},$$

$$\underline{U}_{ca} = -\underline{I}_A \cdot \underline{Z}_{ca} = 28,8e^{-j51,3^\circ} \cdot 5 = 144,1e^{j129^\circ} = -90 + 113 \text{ B}.$$

Повертаємося до первинної схеми рис. 6.15 і знаходимо фазні струми трикутника

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\frac{1}{-j\omega C}} = \frac{874e^{j27^\circ}}{10^{-j90^\circ}} = 87,5e^{j117^\circ} = -39,6 + j78 \text{ A},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{r + j\omega L} = \frac{857,1e^{-j144^\circ}}{10 + j10} = 60,6e^{j171^\circ} = -59,9 + j9 \text{ A},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{r} = \frac{144,1e^{j129^\circ}}{10} = 14,41e^{j129^\circ} = -9 + j11,3 \text{ A}.$$

Лінійні струми трикутника

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = (-39,6 + j78) - (-9 + j11,3) = -30,6 + j66,7 \text{ A},$$

$$\underline{I}_b = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = (-59,9 + j9) - (-39,6 + j78) = -20,3 - j69,9 \text{ A},$$

$$\underline{I}_c = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = (-9 + j11,3) - (-59,9 + j9) = 50,9 + j2,21 \text{ A}.$$

Струми приймача, з'єданого в зірку, розрахуємо за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_{a1} = \underline{I}_A - \underline{I}_a = (18 - j22,5) - (-30,6 + j66,7) = 48,6 - j89,2 \text{ A},$$

$$\underline{I}_{b1} = \underline{I}_B - \underline{I}_b = (-9 - j55,5) - (-20,3 - j69,9) = 11,3 + j9 \text{ A},$$

$$\underline{I}_{c1} = \underline{I}_C - \underline{I}_c = (21 + j78) - (50,9 + j2,21) = -30,1 + j75,8 \text{ A}.$$

## 6.5 Особливі випадки несиметрії в трифазних колах

### Задача 6.10.

Для симетричної трифазної системи «зірка-зірка без нульового проводу» (рис. 6.18, а) розрахувати режими роботи для наступних випадків:

- симетричний режим;
- обрив лінійного проводу А;
- коротке замикання фази А.

Параметри схеми:  $U = 380 \text{ В}$ ,  $r = x = 20 \text{ Ом}$ .

### Розв'язання

На рис. 5.1,б наведена векторна діаграма симетричного режиму системи У-У. При цьому напруга між нульовими точками симетричної системи  $U_N = 0$ .

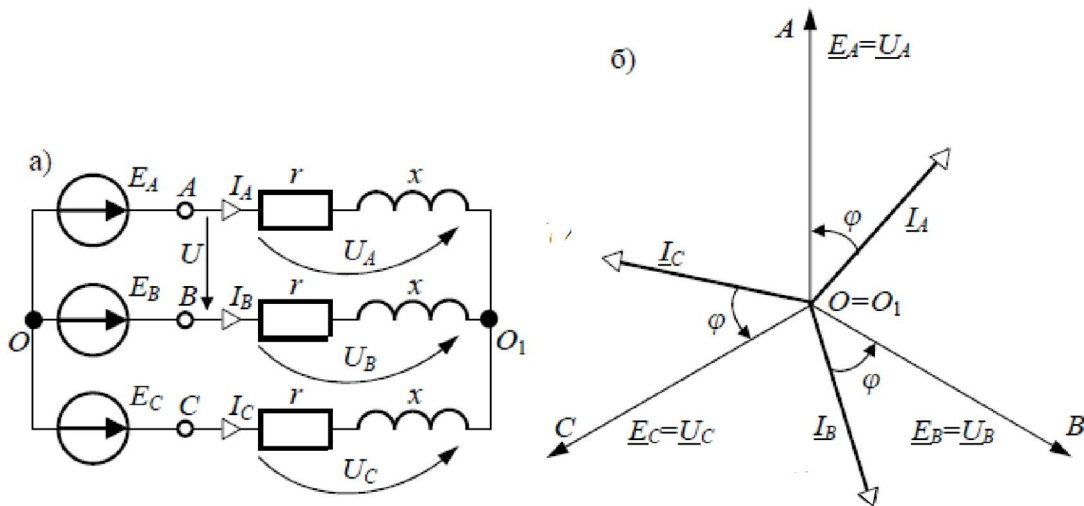


Рисунок 6.18

Фазні ЕРС генератора і фазні напруги приймача

$$\underline{E}_A = \underline{U}_A = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В},$$

$$\underline{E}_B = \underline{U}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_C = \underline{U}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В},$$

а також струми

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}} = \frac{220}{20 + j20} = 7,78e^{-j45^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}} = \underline{I}_A e^{-j120^\circ} = 7,78e^{-j165^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}} = \underline{I}_A e^{j120^\circ} = 7,78e^{j75^\circ} \text{ А}$$

утворюють симетричні системи векторів.

При **обриві лінійного проводу А** послідовно з опором цієї фази

$$\underline{Z} = r + jx = 20 + j20 \text{ Ом}$$

можна вважати увімкненим додатковий опір обриву  $Z_{обр} = \infty$ , при цьому опір вітки А стає рівним

$$\underline{Z}_A = \underline{Z} + \underline{Z}_{обр} = \infty,$$

який на схемі заміщення моделюється розривом.

Напруга зміщення нейтралі

$$\underline{U}_N = \frac{\frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}} + \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}}} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}}(\underline{E}_B + \underline{E}_C)}{\frac{2}{\underline{Z}}} = -\frac{\underline{E}_A}{2} = -\frac{220}{2} = -110 \text{ В}.$$

При підрахунку враховано, що при обриві проводу А провідність

$$\frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

тому відношення

$$\frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{E}_A}{\infty} = 0,$$

і в симетричній системі

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0,$$

звідки

$$-\underline{E}_A = \underline{E}_B + \underline{E}_C.$$

Напруга на опорі  $\underline{Z}_A$

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_N = 1,5\underline{E}_A = 330 \text{ B}$$

є напругою між точками обриву проводу  $A$ , а струм обірваного проводу

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{U}_A}{\infty} = 0,$$

Напруги неушкоджених фаз

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_N = 220e^{-j120^\circ} + 110 = -j190 \text{ B},$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_N = 220e^{j120^\circ} + 110 = j190 \text{ B}.$$

Струми неушкоджених фаз

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}} = \frac{-j190}{20 + j20} = 6,72e^{-j135^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}} = \frac{j190}{20 + j20} = 6,72e^{j45^\circ} \text{ A}.$$

При обриві лінійного проводу трифазне коло перетворюється на однофазне, тому струм неушкоджених фаз можна знайти й простіше:

$$\underline{I}_B = -\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{BC}}{2\underline{Z}} = \frac{\underline{E}_B - \underline{E}_C}{2\underline{Z}}.$$

Векторна діаграма даної системи  $Y-Y$  без нульового проводу при обриві лінійного проводу  $A$  подана на рис. 6.19, а.

Порівнюючи напруги і струми неушкоджених фаз при обриві проводу  $A$

$$U_B = U_C = 190 \text{ B}$$

і при роботі в симетричному режимі, коли усі напруги

$$U_A = U_B = U_C = 220 \text{ B},$$

відзначаємо їх зменшення на 13,7%, що неприпустимо для живлення

освітлювального навантаження.

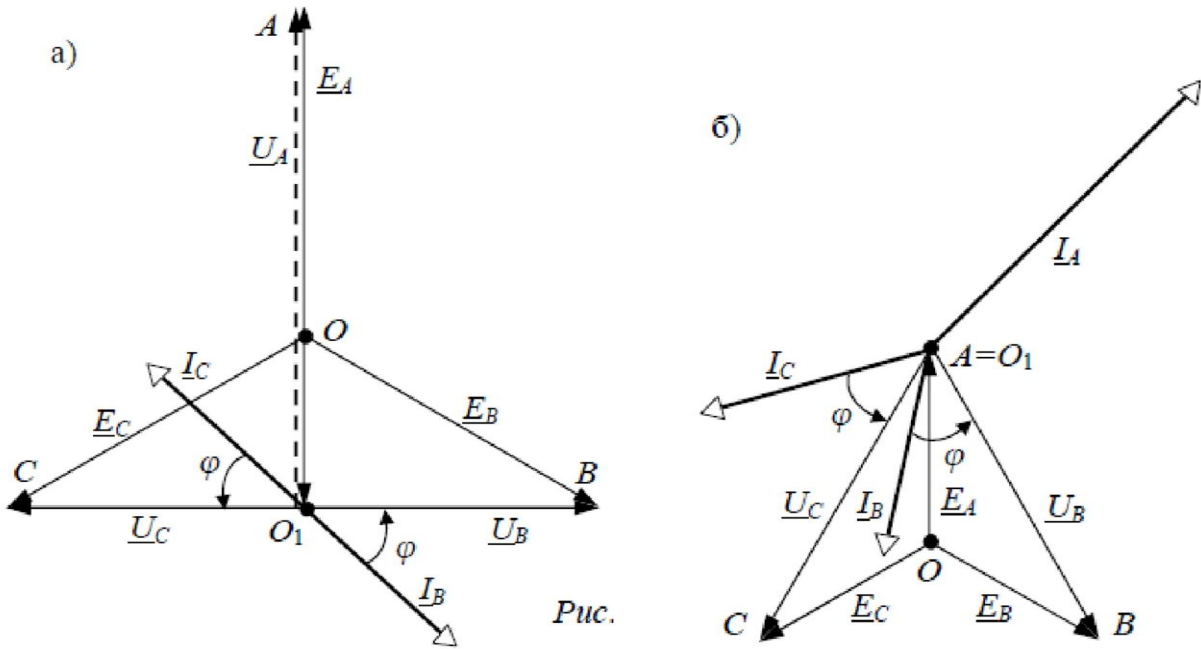


Рисунок 6.19

Розрахунок схеми при **короткому замиканні фази A** здійснюється за загальним підходом до розрахунку розгалуженого кола з виконанням граничного переходу при  $\underline{Z}_A \rightarrow 0$

$$\underline{U}_N = \frac{\frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}} + \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}}} = \lim_{\underline{Z}_A \rightarrow 0} \frac{\underline{E}_A}{\frac{\underline{Z}_A}{1}} = \underline{E}_A.$$

Напруги неушкоджених фаз

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_N = \underline{E}_B - \underline{E}_A = -\underline{U}_{AB} = -380e^{j30^\circ} = 380e^{-j150^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_N = 220e^{j120^\circ} + 110 = j190 \text{ В}.$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_N = \underline{E}_C - \underline{E}_A = \underline{U}_{BC} = 380e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Струми неушкоджених фаз

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}} = \frac{380e^{-j150^\circ}}{20 + j20} = 13,44e^{-j195^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}} = \frac{380e^{j150^\circ}}{20 + j20} = 13,44e^{j105^\circ} \text{ А}.$$

Струм короткозамкненої фази

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_N}{\underline{Z}_A} = \frac{0}{0} = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C) = -\sqrt{3}\underline{I}_C e^{j30^\circ} = -23,3e^{j135^\circ} = 23,3e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

Вираз для  $\underline{I}_A$  отримано за умови, що для трипровідної системи

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

Векторна діаграма кола при короткому замиканні фази  $A$  наведена на рис. 6.19,б.

У порівнянні з симетричним режимом струм закороченої фази зростає у три рази, а струми інших фаз – в 3 раз.

### Задача 6.11.

Для симетричної системи «зірка-зірка з нульовим проводом» ( $Z_N = 0$ ) (рис. 6.20, а) виконати розрахунки для трьох випадків:

- симетричний режим;
- обрив лінійного проводу В;
- коротке замикання фази В, якщо:  $U = 220 \text{ В}$ ,  $Z = r = 20 \text{ Ом}$ .

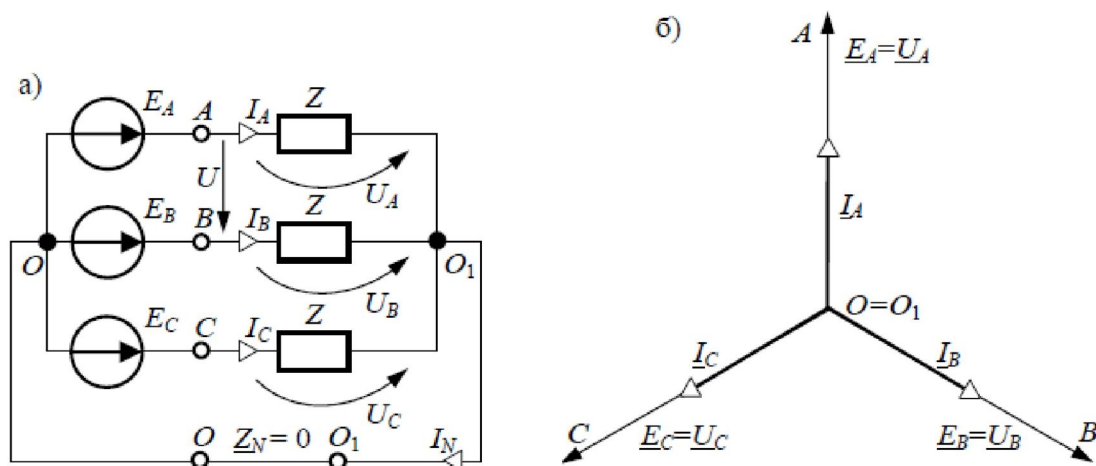


Рисунок 6.20

### Розв'язання

На рис. 6.20, б наведена векторна діаграма для симетричного режиму роботи схеми, в якій  $\underline{U}_N = 0$  через нульовий опір  $\underline{Z}_N$ .

При цьому фазні напруги генератора і навантаження однакові і у  $\sqrt{3}$  разів менші за лінійні напруги

$$\underline{U}_\phi = \underline{E} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В.}$$

Прийmemo

$$\underline{E}_A = U = 220 \text{ В,}$$

тоді

$$\underline{E}_B = 127e^{-j120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{E}_C = 127e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Струми у разі симетричного режиму роботи кола

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}} = \frac{127}{20} = 6,35 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}} = \underline{I}_A e^{-j120^\circ} = 6,35e^{-j120^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}} = \underline{I}_A e^{j120^\circ} = 6,35e^{j120^\circ} \text{ А,}$$

тобто лінійний струм симетричного режиму  $I_{\text{сим}} = 6,35 \text{ А.}$

При **обриві лінійного проводу В** можна вважати, що послідовно з опором  $\underline{Z}$  у фазу В додався опір обриву

$$\underline{Z}_{\text{обр}} = \infty$$

і повний опір вітки став

$$\underline{Z}_B = \underline{Z} + \underline{Z}_{\text{обр}} = \infty,$$

який на схемі заміщення моделюється розривом.

За другим законом Кірхгофа для контурів «вітка - нульовий провід» отримуємо при обриві проводу В:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_N}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}} = \frac{127}{20} = 6,35 \text{ А}$$

те ж значення, що і при симетричному режимі.

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_N}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{127}{\infty} = 0,$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_N}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}} = \frac{127e^{j120^\circ}}{20} = 6,35e^{j120^\circ} \text{ A}$$

те ж значення, що і при симетричному режимі.

Струм нульового проводу

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 6,35 + 0 + 6,35e^{j120^\circ} = -6,35e^{j120^\circ} = 6,35e^{j60^\circ} \text{ A}.$$

Відмітимо, що  $\underline{I}_N = I_{\text{Всим}}$ . Із цього приводу кажуть, що нульовий провід сприймає на себе струм обірваної фази. Векторна діаграма кола при обриві проводу  $B$  подана на рис. 6.21.

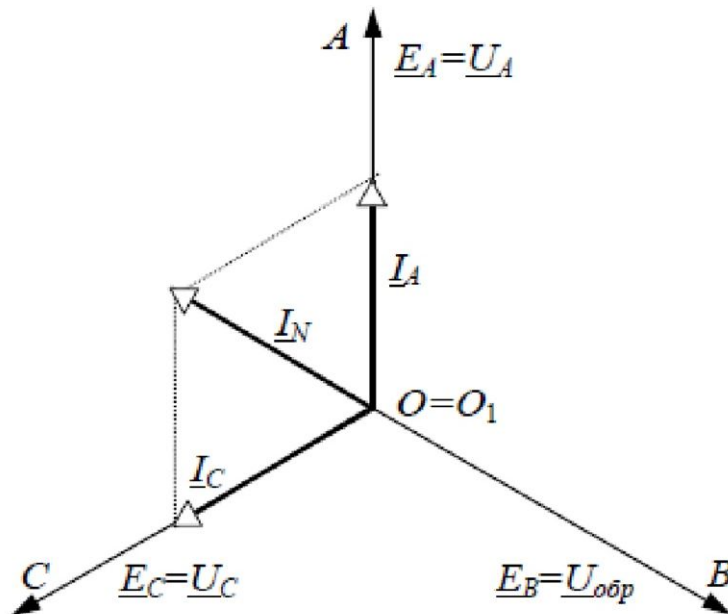


Рисунок 6.21

При короткому замиканні фази  $B$  у чотирьохпроводній системі струм короткозамкненого контуру  $E_B-Z_B-Z_N$  необмежено зростає. Такий режим стає аварійним. Для захисту від такого режиму в лінійному проводі  $B$  (і в решті лінійних проводів) застосовуються пристрої захисту (автоматичні вимикачі, плавкі запобіжники), які вимикають аварійну фазу (перегоряють), після чого схема переходить в режим роботи з обірваною фазою  $B$  (рис. 6.20, б).

### Задача 6.12.

Розрахувати режим роботи симетричного трикутника (рис. 6.22, а) при

$U = 660 \text{ В}$ ,  $x_C = 100 \text{ Ом}$  для чотирьох випадків:

- симетричний режим;
- обрив лінійного проводу С;
- обрив фази СА;
- коротке замикання фази СА.

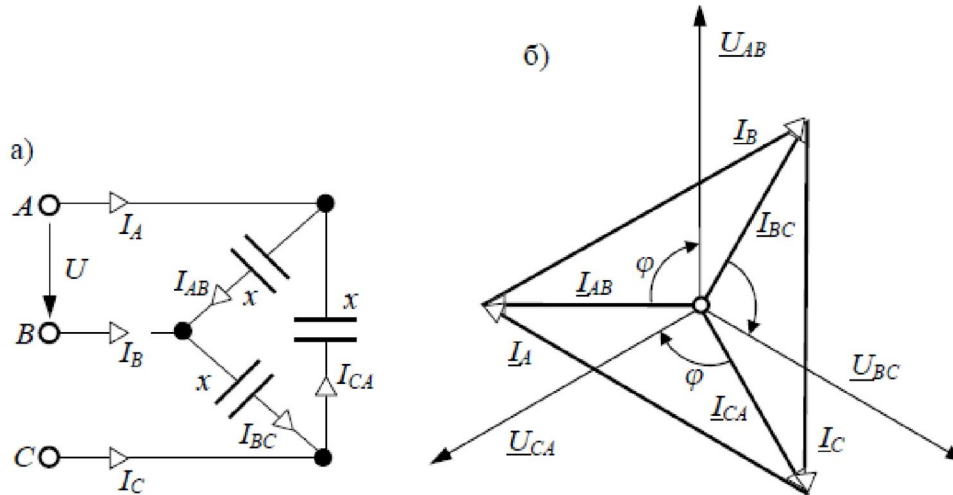


Рисунок 6.22

### Розв'язання

Приймемо

$$\underline{U}_{AB} = U = 660 \text{ В.}$$

При з'єднанні фаз навантаження в трикутник його лінійна напруга дорівнює фазній напрузі. У **симетричному режимі** отримуємо

$$\underline{U}_{AB} = 660 \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{BC} = 660e^{-j120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{CA} = 660e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Фазні струми трикутника

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}} = \frac{660}{-j100} = 6,6e^{j90^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{AB}e^{-j120^\circ} = 6,6e^{-j30^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{AB} e^{j120^\circ} = 6,6 e^{j210^\circ} \text{ A.}$$

Лінійні струми кола

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = \sqrt{3} \underline{I}_{AB} e^{j30^\circ} = 11,4 e^{j60^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = \sqrt{3} \underline{I}_A e^{-j120^\circ} = 11,4 e^{-j60^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = \sqrt{3} \underline{I}_A e^{j120^\circ} = 11,4 e^{j180^\circ} \text{ A.}$$

Векторна діаграма симетричного трикутника подана на рис. 6.22, б.

При **обриві лінійного проводу C** всі струми і напруга навантаження визначаються тільки лінійною напругою  $\underline{U}_{AB}$ .

Струм

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}} = \frac{660}{-j100} = 6,6 e^{j90^\circ} \text{ A,}$$

саме такий, як і у симетричному режимі.

Струм

$$\underline{I}_C = 0,$$

тому що провід C обірваний, струми

$$\underline{I}_{BC} = \underline{I}_{CA} = -\frac{\underline{U}_{AB}}{2\underline{Z}} = -\frac{\underline{I}_{AB}}{2\underline{Z}} = 3,3 e^{j90^\circ} \text{ A,}$$

напруги на фазах

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{CA} = \underline{I}_{BC} \cdot \underline{Z} = -\frac{\underline{U}_{AB}}{2} = -330 \text{ B.}$$

Лінійні струми

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = 1,5 \underline{I}_{AB} = j9,9 \text{ A,}$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = -1,5 \underline{I}_{AB} = -j9,9 \text{ A.}$$

Векторна діаграма трикутника опорів при обриві лінійного проводу C наведена на рис. 6.23, а.

При **обриві фази CA** її струм

$$\underline{I}_{CA} = 0,$$

а струми фаз

$$\underline{I}_{AB} = 6,6e^{j90^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{BC} = 6,6e^{-j30^\circ} \text{ A},$$

такі ж, як і в симетричному режимі.

Лінійні струми

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = \underline{I}_{AB} = j6,6 \text{ A},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = 11,4 e^{-j60^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_{BC} = -6,6e^{-j30^\circ} = 6,6e^{j150^\circ} \text{ A}.$$

Векторна діаграма кола при обриві фази  $CA$  подана на рис. 6.23, б).

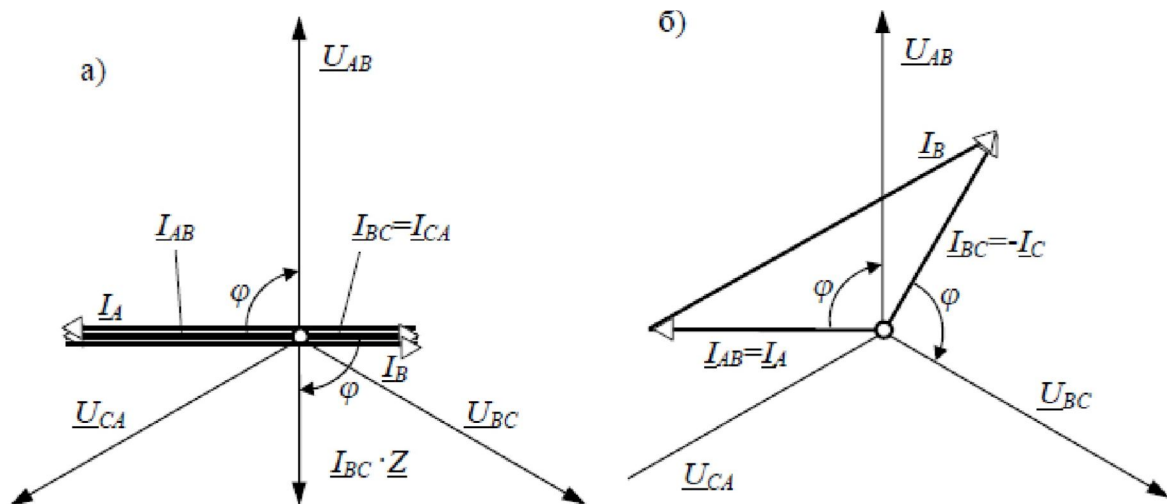


Рисунок 6.23

При **короткому замиканні фази  $CA$**  у контурі « $A$  - короткозамкнена фаза  $CA$  -  $B$  - джерело живлення» немає опорів, і струм необмежено зростає, створюючи аварійний режим роботи, що вимагає відключення від мережі проводу  $A$  або  $C$ .

### Задача 6.13.

Розрахувати покази амперметрів  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$  у лінійних проводах кола

(рис. 6.24), якщо амперметри  $A_1, A_2, A_3$  у фазах реєструють по 2 А.

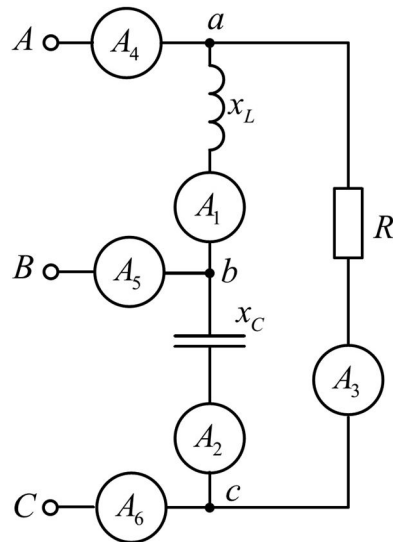


Рисунок 6.24

### 6.6 Розрахунок трифазного кола методом симетричних складових

Суть методу полягає в представленні несиметричної системи векторів  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$  у вигляді суми трьох симетричних систем: прямої  $\underline{A}_1, \underline{B}_1, \underline{C}_1$ , що має таку ж послідовність, як і первинні вектори, зворотної  $\underline{A}_2, \underline{B}_2, \underline{C}_2$ , що має протилежну послідовність, і нульової послідовності, що складається з трьох однакових за величиною і напрямом векторів  $\underline{A}_0, \underline{B}_0, \underline{C}_0$ .

Визначення симетричних складових проводиться за формулами:

$$\underline{A}_0 = \frac{\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}}{3},$$

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{A} + a\underline{B} + a^2\underline{C}}{3},$$

$$\underline{A}_2 = \frac{\underline{A} + a^2\underline{B} + a\underline{C}}{3},$$

де  $a = e^{j120^\circ}$  – поворотний (фазний) множник.

Опори приймача струмам різних послідовностей називаються опорами прямої  $\underline{Z}_1$ , зворотної  $\underline{Z}_2$  та нульової  $\underline{Z}_0$  послідовностей. Для симетричної схеми  $Y-Y$  вони мають значення

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z},$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z} + 3\underline{Z}_N,$$

де  $\underline{Z}$  – опір фази приймача,  $\underline{Z}_N$  – опір нейтралі.

Для асинхронного двигуна характерне таке співвідношення:

$$\underline{Z}_1 \gg \underline{Z}_2 \gg \underline{Z}_0.$$

Розрахунок симетричних кіл з несиметричним джерелом складається з трьох етапів:

- 1) розкладання заданої несиметричної системи на симетричні складові;
- 2) розрахунок струмів кожної з послідовностей окремо;
- 3) підсумовування струмів всіх послідовностей.

Розрахунок аварійних режимів (к.з., обрив фази) симетричних кіл проводиться таким чином:

1) у місці аварії вводяться системи трьох несиметричних напруг  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_C$  і трьох несиметричних струмів  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$ ,  $\underline{I}_C$ . Кожна з цих систем розкладається на симетричні складові  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_0$  та  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_0$ .

2) розглядаються схеми прямої, зворотної і нульової послідовностей, для кожної з яких складаються рівняння, що зв'язують  $\underline{U}_1$  з  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{U}_2$  з  $\underline{I}_2$  і  $\underline{U}_0$  з  $\underline{I}_0$ . Ще три рівняння складаються для аварійної ділянки, тож їх вигляд визначається типом аварії.

3) розв'язання цих рівнянь дає  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_0$  та  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_0$ , через які визначаються всі величини, що цікавлять.

#### **Задача 6.14.**

Під час з'єднання вторинних обмоток силового трифазного трансформатора невірно були визначені початок і кінець обмотки В-У. В результаті з'єднання обмоток у зірку (рис. 6.25, а) система ЕРС набула вигляду рис. 6.25, б.

Знайти симетричні складові представленої несиметричної системи, якщо  $E_A = E_B = E_C = 220\text{В}$ .

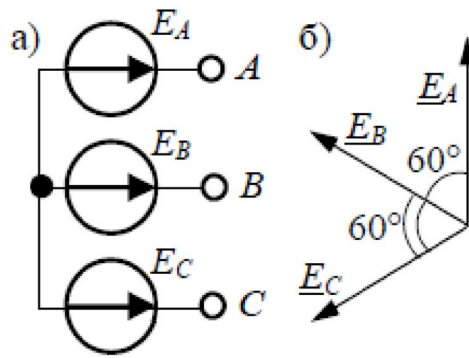


Рисунок 6.25

### Розв'язання

Приймемо

$$\underline{E}_A = 220 \text{ В},$$

тоді

$$\underline{E}_B = 220e^{j60^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Складова нульової послідовності

$$\underline{E}_0 = \frac{\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C}{3} = \frac{220 + 220e^{j60^\circ} + 220e^{j120^\circ}}{3} = 146,7e^{j60^\circ} \text{ В}.$$

Складова прямої послідовності

$$\underline{E}_1 = \frac{\underline{E}_A + a\underline{E}_B + a^2\underline{E}_C}{3} = \frac{220 + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{j60^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 220e^{j120^\circ}}{3} = 73,33 \text{ В},$$

Складова зворотної послідовності

$$\underline{E}_2 = \frac{\underline{E}_A + a^2\underline{E}_B + a\underline{E}_C}{3} = \frac{220 + e^{-j120^\circ} \cdot 220e^{j60^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{j120^\circ}}{3} = 146,7e^{-j60^\circ} \text{ В}.$$

Перевіримо результат розкладання векторів на симетричні складові:

$$\underline{E}_A = \underline{E}_0 + \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = 146,7e^{j60^\circ} + 73,33 + 146,7e^{-j60^\circ} = 220 \text{ В},$$

$$\underline{E}_B = \underline{E}_0 + a^2\underline{E}_1 + a\underline{E}_2 = 146,7e^{j60^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 73,33 + e^{j120^\circ} \cdot 146,7e^{-j60^\circ} = 220e^{j60^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_C = \underline{E}_0 + a\underline{E}_1 + a^2\underline{E}_2 = 146,7e^{j60^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 73,33 + e^{-j120^\circ} \cdot 146,7e^{-j60^\circ} = 220e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Оскільки сталося так, що  $E_2 > E_1$ , то це означає, що позитивний напрям

обертання векторів на комплексній площині змінюється на протилежний, тобто фактично зворотна послідовність стає прямою, а пряма – зворотною. На практиці це означає, що зміниться напрям обертання двигунів.

### Задача 6.15.

Через нерівномірне навантаження в кінці трифазної трипровідної лінії (рис. 6.26, а) напруга утворює прямокутний трикутник (рис. 6.26, б), катети якого  $U_{AB} = U_{BC} = 360 \text{ В}$ , причому синусоїда лінійної напруги  $U_{AB}$  має початкову фазу на  $90^\circ$  більшу ніж синусоїда напруги  $U_{BC}$ .

Визначити симетричні складові несиметричної системи лінійних напруг. Знайти коефіцієнт несиметрії.

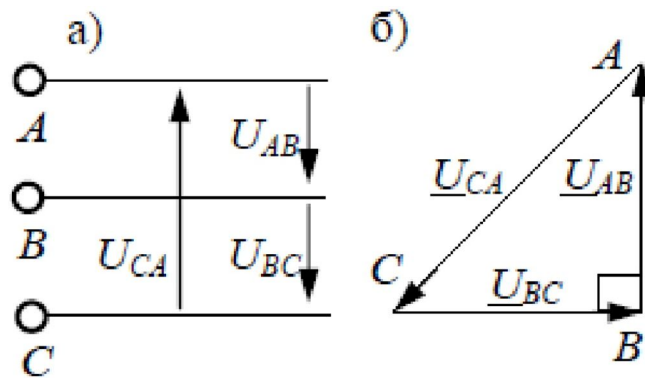


Рисунок 6.26

### Розв'язання

Приймемо

$$\underline{U}_{AB} = U_{AB} = 360 \text{ В},$$

тоді на підставі рис. 6.26, б

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{AB} e^{-j90^\circ} = 360 e^{-j90^\circ} \text{ В}.$$

Оскільки лінійні напруги утворюють замкнений контур, то

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0.$$

Звідки

$$\underline{U}_{CA} = -(\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC}) = -(360 + 360 e^{-j90^\circ}) = \sqrt{2} \cdot 360 e^{j135^\circ} \text{ В}.$$

Оскільки

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}}{3} = \frac{360 + 360e^{-j60^\circ} + \sqrt{2} \cdot 360e^{j135^\circ}}{3} = \frac{0}{3} = 0,$$

то складова нульової послідовності в лінійних напругах відсутня.

Складова прямої послідовності

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{\underline{U}_{AB} + a\underline{U}_{BC} + a^2\underline{U}_{CA}}{3} = \\ &= \frac{360 + e^{j120^\circ} \cdot 360e^{-j60^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot 360e^{j135^\circ}}{3} = 402e^{j120^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Складова зворотної послідовності

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \frac{\underline{U}_{AB} + a^2\underline{U}_{BC} + a\underline{U}_{CA}}{3} = \\ &= \frac{360 + e^{-j120^\circ} \cdot 360e^{-j60^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot 360e^{j135^\circ}}{3} = 108e^{-j105^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Коефіцієнт несиметрії

$$k_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{108}{402} = 0,269$$

або

$$k_U = 26,9\%.$$

Згідно з Правилами технічної експлуатації установок споживачів (ПТЕ) величина несиметрії лінійних напруг (коефіцієнт несиметрії) не повинна перевищувати 4%.

### Задача 6.16.

До системи напруги задачі 6.15 увімкнений з'єднаний зіркою асинхронний трифазний двигун, кожна фаза якого має опори: при прямому порядку чергування фаз  $\underline{Z}_1 = 8 + j6$  Ом, для зворотної послідовності  $\underline{Z}_2 = 4,5 + j1$  Ом. Знайти струми у фазах двигуна.

### Розв'язання

Уявимо, що двигун увімкнений до несиметричного генератора, а

обмотки останнього з'єднані в зірку (рис. 6.27, а).

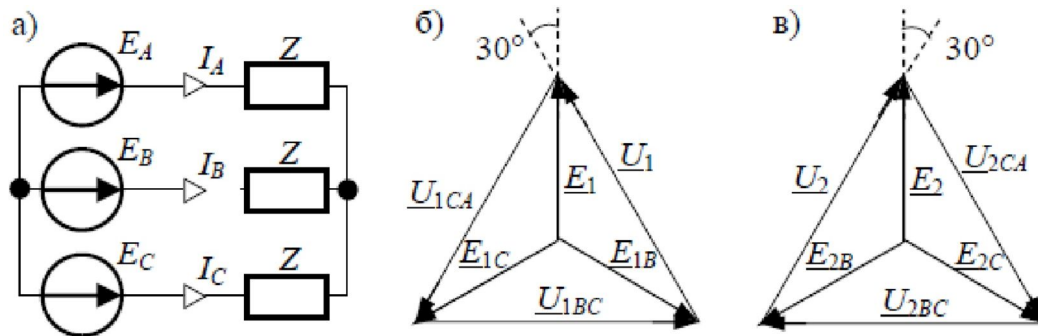


Рисунок 6.27

Розрахуємо симетричні складові фазних ЕРС несиметричного генератора, використовуючи раніше знайдені симетричні складові лінійної напруги  $\underline{U}_1$  і  $\underline{U}_2$  та їх співвідношення, представлені на векторних діаграмах рис. 6.27, б-в.

$$\underline{E}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j30^\circ} = \frac{402e^{j15^\circ}}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j30^\circ} = 232e^{-j15^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30^\circ} = \frac{108e^{-j105^\circ}}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30^\circ} = 62,4e^{-j75^\circ} \text{ В},$$

ЕРС несиметричного генератора виражаються через їх симетричні складові:

$$\underline{E}_A = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = 232e^{-j15^\circ} + 62,4e^{-j75^\circ} = 238e^{-j26,60^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_B = a^2 \underline{E}_1 + a \underline{E}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 232e^{-j15^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 62,4e^{-j75^\circ} = 169,6e^{-j135^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_C = a \underline{E}_1 + a^2 \underline{E}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 232e^{-j15^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 62,4e^{-j75^\circ} = 238,7e^{j126,6^\circ} \text{ В}.$$

У результаті проведеного перетворення джерела ЕРС (послідовне з'єднання двох симетричних систем ЕРС – прямої та зворотної послідовностей) схема відносно симетричних складових симетрична і розраховується методом накладання.

Розрахунок струму прямої послідовності:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{232e^{-j15^\circ}}{8 + j6} = 23,2e^{-j51,87^\circ} \text{ А}.$$

Розрахунок струму зворотної послідовності:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{62,4e^{-j75^\circ}}{4,5 + j1} = 13,54e^{-j87,53^\circ} \text{ A.}$$

Струми у фазах двигуна розрахуємо з урахуванням того, що у трифазній трипровідній системі складові струмів нульової послідовності відсутні

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 23,2e^{-j51,87^\circ} + 13,54e^{-j87,53^\circ} = 35,1e^{-j64,86^\circ} \text{ B,}$$

$$\underline{I}_B = a^2\underline{I}_1 + a\underline{I}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 23,2e^{-j51,87^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 13,54e^{-j87,53^\circ} = 12,22e^{j160,95^\circ} \text{ B,}$$

$$\underline{I}_C = a\underline{I}_1 + a^2\underline{I}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 23,2e^{-j51,87^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 13,54e^{-j87,53^\circ} = 27,99e^{j196,90^\circ} \text{ B.}$$

### Задача 6.17.

Двигун задачі 6.16 був увімкнений до симетричного трифазного кола з лінійною напругою  $U = 380 \text{ B}$ . У колі стався обрив лінійного проводу С.

Виконати той же розрахунок, що і в задачі 6.16 **Ошибка!** Источник ссылки не найден. для нових умов роботи двигуна.

### Розв'язання

У симетричному трифазному колі сталося подовжнє порушення симетрії, що може трактуватися як послідовне увімкнення несиметричного приймача з доки невідомими напругами  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  та струмами  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ .

Розрахункова схема нових умов роботи двигуна наведена на рис. 6.28.

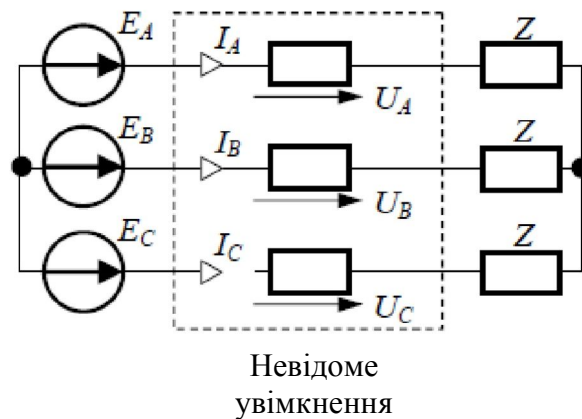


Рисунок 6.28

Відзначимо, що у фазах невідомого доки підключення можуть міститися як пасивні, так і активні елементи кола.

Виконаємо формальне розкладання несиметричних систем напруг і струмів підключення на симетричні складові.

$$\begin{cases} \underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C}{3} \\ \underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_A + a\underline{U}_B + a^2\underline{U}_C}{3} \\ \underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_A + a^2\underline{U}_B + a\underline{U}_C}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} \underline{I}_0 = \frac{\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C}{3} \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{I}_A + a\underline{I}_B + a^2\underline{I}_C}{3} \\ \underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_A + a^2\underline{I}_B + a\underline{I}_C}{3} \end{cases}. \quad (1)$$

Визначимо симетричні складові заданої системи ЕРС генератора: за умовами задачі вона залишається симетричною, містить тільки складові прямої послідовності при порушенні симетричного стану кола. Симетрична система ЕРС не містить складових зворотної і нульової послідовності, тобто для ЕРС  $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C$  отримуємо:

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_0 = 0;$$

$$\underline{E}_1 = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В.}$$

Відносно симетричних складових вся схема стає симетричною і її розрахунок можна вести за схемами заміщення для однієї фази стосовно кожної системи.

Схема заміщення для струму прямої послідовності наведена на рис. 6.29,а, для струму зворотної послідовності – на рис. 6.29,б, для струму нульової послідовності – на рис. 6.29,в.

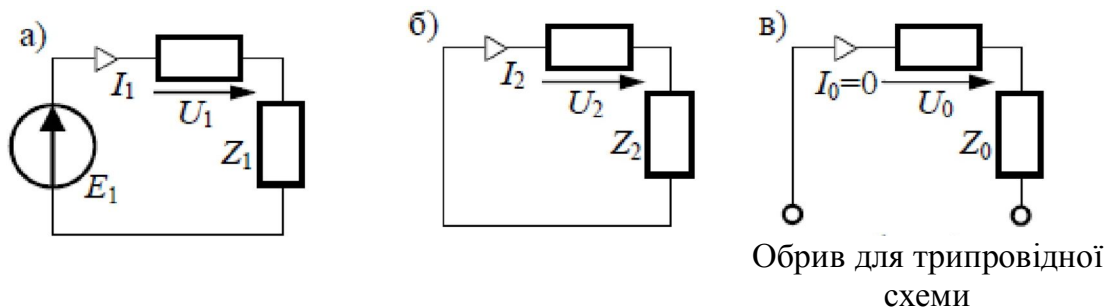


Рисунок 6.29

Відповідно до законів Кірхгофа для схем заміщення отримуємо 3 рівняння для визначення шести невідомих симетричних складових напруг і

струмів:

$$\underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{U}_1 = \underline{E}_1,$$

$$\underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 = 0,$$

$$\underline{I}_0 = 0.$$

Рівняння, яких бракує, отримаємо, виходячи з характеристики несиметричної ділянки у відповідності до рис. 6.30 при обриванні лінійного проводу  $C$

$$\underline{U}_A = 0;$$

$$\underline{U}_B = 0;$$

$$\underline{U}_C \neq 0; \quad (2)$$

$$\underline{I}_A \neq 0;$$

$$\underline{I}_B \neq 0;$$

$$\underline{I}_C = 0.$$

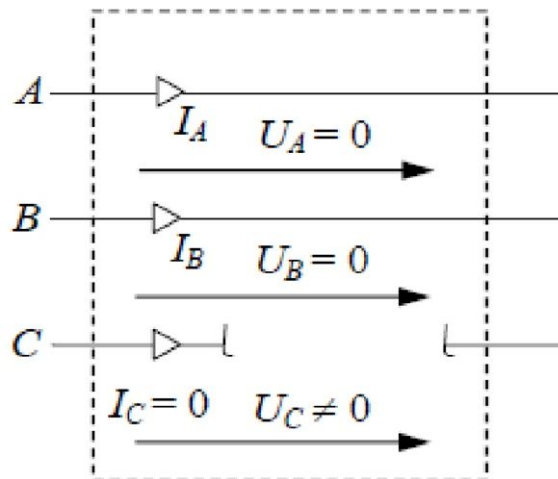


Рисунок 6.30

Три рівняння, які дорівнюють нулю ( $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{I}_C$ ), запишемо через їх симетричні складові (поки невідомі):

$$\begin{cases} \underline{U}_A = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 0 \\ \underline{U}_B = \underline{U}_0 + a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 = 0 \\ \underline{I}_C = \underline{I}_0 + a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

З системи (1) з урахуванням того, що

$$\underline{U}_A = 0,$$

$$\underline{U}_B = 0$$

отримуємо

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_C}{3}, \underline{U}_1 = \frac{a^2 \underline{U}_C}{3}, \underline{U}_2 = \frac{a \underline{U}_C}{3}, \text{ звідси } \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = a. \quad (4)$$

Врахуємо, що

$$\underline{I}_0 = 0$$

на підставі (3) отримуємо

$$a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 = 0, \text{ звідси } \underline{I}_2 = -a^{-1} \underline{I}_1. \quad (5)$$

Рівняння (2), що залишились, представимо у вигляді

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1,$$

$$\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 \underline{Z}_2,$$

звідки з урахуванням (4) маємо

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{E}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1}{-\underline{I}_2 \underline{Z}_2} = a,$$

а з урахуванням (5)

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{E}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1}{a^{-1} \underline{I}_1 \underline{Z}_2} = a;$$

$$\frac{\underline{E}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1}{\underline{I}_1 \underline{Z}_2} = a \cdot a^{-1};$$

$$\frac{\underline{E}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1}{\underline{I}_1 \underline{Z}_2} = 1.$$

Одержуємо

$$\underline{E}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_2$$

звідси

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{220}{(8 + j6) + (4,5 + j1)} = 15,4e^{-j29,25^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = -a^{-1} \underline{I}_1 = -e^{-j120^\circ} \cdot 15,4e^{-j29,25^\circ} = 15,4e^{j30,75^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_0 = 0.$$

Струми у фазах двигуна:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 15,4e^{-j29,25^\circ} + 15,4e^{j30,75^\circ} = 26,6e^{j0,75^\circ} \text{ B},$$

$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 15,4e^{-j29,25^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 15,4e^{j30,75^\circ} = 26,6e^{-j179,25^\circ} \text{ B},$$

$$\underline{I}_C = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 15,4e^{-j29,25^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 15,4e^{j30,75^\circ} = 0.$$

## 7 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

### 7.1 Розрахунок однофазного лінійного кола з несинусоїдною ЕРС

#### Задача 7.1.

Виконати розрахунок струмів у вітках кола та показів приладів електромагнітної системи у колі (рис. 7.1), якщо  $u_1 = 60 + 30\sin(\omega t + 60^\circ) + 30\sin(2\omega t - 20^\circ)$  В,  $E_2 = 30$  В,  $E_3 = 40$  В,  $R_1 = 30$  Ом,  $\omega L_2 = 30$  Ом,  $\omega L_3 = 10$  Ом,  $\frac{1}{\omega C} = 40$  Ом.

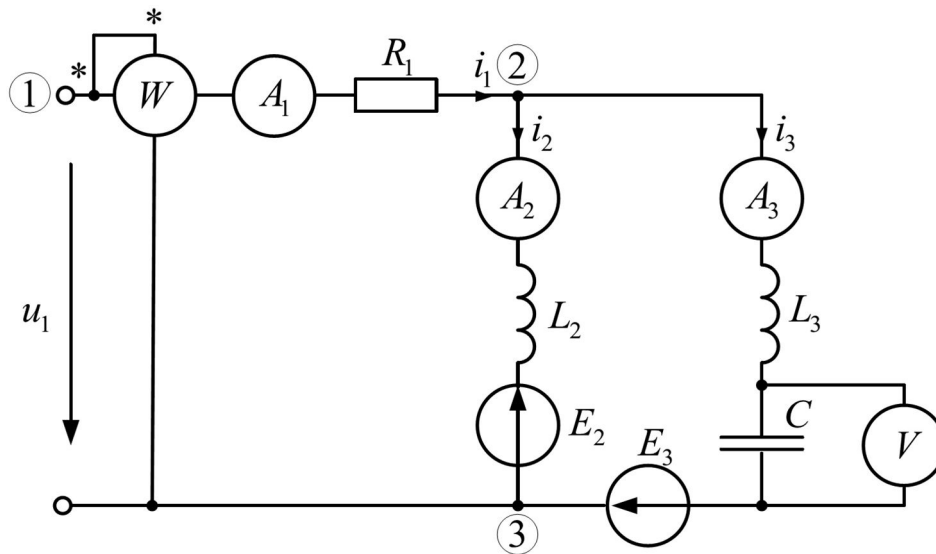


Рисунок 7.1

#### Розв'язання

Коло містить джерело несинусоїдної напруги  $u_1$ , дію якого еквівалентно можна подати як дію трьох послідовно ввімкнених джерел:

- постійного  $U_{1(0)} = 60$ В;
- синусоїдного основної частоти  $u_{1(1)} = 30 \sin(\omega t + 60^\circ)$  В;
- синусоїдного подвоєної частоти  $u_{1(2)} = 30\sin(2\omega t - 20^\circ)$ В.

Оскільки коло розгалужене і кожна гілка має свій індекс, номер гармонік вказуємо у дужках.

Для аналізу кола застосовуємо метод накладання дії джерел.

#### 1. Аналіз кола при дії нульової гармоніки.

Приводимо коло до вигляду кола постійного струму, де мають місце лише джерела постійної напруги та ЕРС, а опори реактивних елементів

$$x_{2(0)} = \omega L_{2(0)} = 0,$$

$$x_{3(0)} = \omega L_{3(0)} = 0,$$

$$x_{C(0)} = \left( \frac{1}{\omega C} \right)_{(0)} = \infty.$$

Часткова схема набуває вигляду, показаного на рис. 7.2.

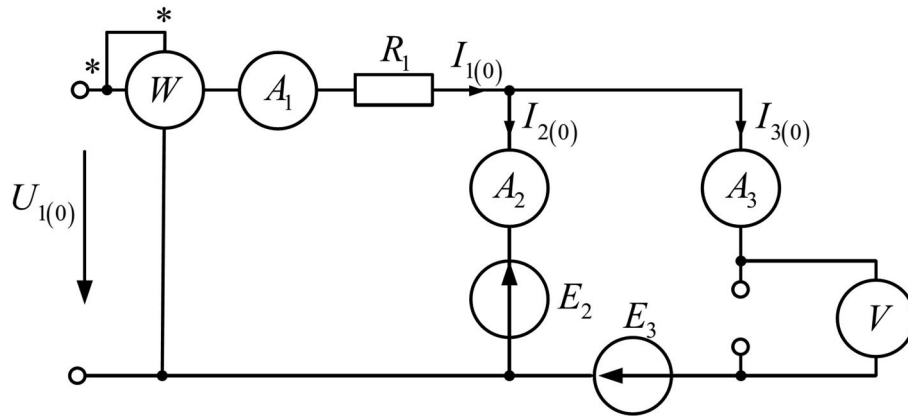


Рисунок 7.2

Зі схеми видно, що

$$I_{3(0)} = 0,$$

тому

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = \frac{U_{1(0)} - E_2}{R_1} = \frac{60 - 30}{30} = 1 \text{ A},$$

$$U_{C(0)} = E_3 - E_2 = 40 - 30 = 10 \text{ B}.$$

Покази приладів при дії нульової гармоніки:

$$I_{A1(0)} = I_{A2(0)} = 1 \text{ A},$$

$$I_{A3(0)} = 0 \text{ A},$$

$$U_{V(0)} = 10 \text{ B},$$

$$P_{W(0)} = I_{A1(0)}^2 R_1 = 1^2 \cdot 30 = 30 \text{ Вт}.$$

2. Аналіз кола при дії основної (першої) гармоніки.

Залишаємо у колі синусоїдну складову джерела

$$u_{1(1)} = 30\sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В}$$

і проводимо аналіз кола при дії першої гармонічної складової застосовуючи символічний метод.

Записуємо комплекси амплітуди джерела

$$U_{1(1)} = 30e^{j60^\circ} \text{ В}$$

та опорів елементів основної частоти

$$\underline{Z}_{2(1)} = \omega L_2 = j30 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{3(1)} = \omega L_3 = j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = -j40 \text{ Ом}.$$

Комплексні опори ділянок кола

$$\underline{Z}_{3(1)} = \underline{Z}_{L3(1)} + \underline{Z}_{C(1)} = j(10 - 40) = -j30 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{23(1)} = \frac{\underline{Z}_{2(1)} \cdot \underline{Z}_{3(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = \frac{(j30) \cdot (-j30)}{j30 - j30} = \infty,$$

що свідчить про резонанс струмів між вузлами 2-3.

Відповідно цьому явищу, еквівалентний опір кола

$$\underline{Z}_{екв(1)} = R_1 + \underline{Z}_{23(1)} = \infty,$$

а отже струм на вході кола

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{\underline{U}_{1m(1)}}{\underline{Z}_{екв(1)}} = 0,$$

$$\underline{U}_{12m(1)} = \underline{I}_{1m(1)} R_1 = 0,$$

$$\underline{U}_{23m(1)} = \underline{U}_{1m(1)} - \underline{U}_{12m(1)} = 30e^{j60^\circ} \text{ В}.$$

Струм у паралельних вітках коливального контуру

$$\underline{I}_{2m(1)} = \frac{\underline{U}_{23m(1)}}{\underline{Z}_{2(1)}} = \frac{30e^{j60^\circ}}{30e^{j90^\circ}} = 1e^{-j30^\circ},$$

$$\underline{I}_{3m(1)} = -\underline{I}_{2m(1)} = -1e^{-j30^\circ} = 1e^{j150^\circ},$$

$$\underline{U}_{Cm(1)} = \underline{I}_{3m(1)}\underline{Z}_{C(1)} = 1e^{j150^\circ} \cdot 40e^{-j90^\circ} = 40e^{j60^\circ} \text{ B.}$$

Переходимо від комплексів до миттєвих значень

$$i_{1(1)} = 0,$$

$$i_{2(1)} = 1\sin(\omega t - 30^\circ) \text{ A,}$$

$$i_{3(1)} = 1\sin(\omega t + 150^\circ) \text{ A,}$$

$$u_{C(1)} = 40\sin(\omega t + 60^\circ) \text{ B.}$$

Покази приладів при дії першої гармоніки:

$$I_{A1(1)} = 0 \text{ A,}$$

$$I_{A2(1)} = I_{A3(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ A,}$$

$$U_{V(1)} = 40 \text{ B,}$$

$$P_{W(1)} = \operatorname{Re} \left\{ \underline{U}_{1(1)} \cdot \underline{I}_{1(1)}^* \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{30}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} \cdot 0 \right\} = 0 \text{ Вт.}$$

3. Аналіз кола при дії другої гармоніки.

Залишаємо у колі синусоїдну складову джерела з подвоєною частотою

$$u_{1(2)} = 30\sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ B}$$

і проводимо аналіз кола при дії другої гармонічної складової також застосовуючи символічний метод.

Записуємо комплекси амплітуди джерела

$$\underline{U}_{1m(2)} = 30e^{-j20^\circ} \text{ B}$$

та опорів елементів за умови подвоєної частоти

$$\underline{Z}_{2(2)} = 2\omega L_2 = j60 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_{3(2)} = 2\omega L_3 = j20 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_{C(2)} = \frac{1}{2\omega C} = -j20 \text{ Ом.}$$

Комплексні опори ділянок кола

$$\underline{Z}_{3(2)} = \underline{Z}_{L3(2)} + \underline{Z}_{C(2)} = j(20 - 20) = 0,$$

що свідчить про резонанс напруг у третій вітці.

Відповідно

$$\underline{Z}_{23(2)} = \frac{\underline{Z}_{2(2)} \cdot \underline{Z}_{3(2)}}{\underline{Z}_{2(2)} + \underline{Z}_{3(2)}} = \frac{(j60) \cdot (0)}{j60 - 0} = 0,$$

друга гілка закорочена, а еквівалентний опір кола

$$\underline{Z}_{екв(2)} = R_1 + \underline{Z}_{23(2)} = R_1 = 30 \text{ Ом.}$$

Вхідний струм

$$\underline{I}_{1m(2)} = \frac{\underline{U}_{1m(2)}}{\underline{Z}_{екв(2)}} = \frac{30e^{-j20^\circ}}{30} = 1e^{-j20^\circ} \text{ А.}$$

Оскільки друга гілка закорочена, то

$$\underline{I}_{2m(2)} = 0,$$

$$\underline{I}_{3m(2)} = \underline{I}_{1m(2)} = 1e^{-j20^\circ} \text{ А.,}$$

Напруга на конденсаторі

$$\underline{U}_{Cm(2)} = \underline{I}_{3m(2)} \underline{Z}_{C(2)} = 1e^{-j20^\circ} \cdot 20e^{-j90^\circ} = 20e^{-j110^\circ} \text{ В.}$$

Переходимо від комплексів до миттєвих значень

$$i_{1(2)} = 1\sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А,}$$

$$i_{2(2)} = 0,$$

$$i_{3(2)} = 1\sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А,}$$

$$u_{C(2)} = 20\sin(2\omega t - 110^\circ) \text{ В.}$$

Покази приладів при дії першої гармоніки:

$$I_{A1(2)} = I_{A3(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} A,$$

$$I_{A2(2)} = 0,$$

$$U_{V(2)} = 20 B,$$

$$P_{W(2)} = \operatorname{Re} \left\{ \underline{U}_{1(2)} \cdot \underline{I}_{1(2)}^* \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{30}{\sqrt{2}} e^{-j20^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j20^\circ} \right\} = 15 \text{ Вт}.$$

Вирази миттєвих значень струмів у вітках кола та напруги на конденсаторі при дії несинусоїдного джерела:

$$i_1 = I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(2)} = 1 + 1\sin(2\omega t - 20^\circ) A,$$

$$i_2 = I_{2(0)} + i_{2(1)} + i_{2(2)} = 1 + 1\sin(\omega t - 30^\circ) A,$$

$$i_3 = I_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(2)} = 1\sin(\omega t + 150^\circ) + 1\sin(2\omega t - 20^\circ) A,$$

$$u_C = U_{C(0)} + u_{C(1)} + u_{C(2)} = 10 + 40\sin(\omega t + 60^\circ) + 20\sin(2\omega t - 110^\circ) B.$$

*Покази приладів.*

Прилади електромагнітної системи реагують на діючі значення несинусоїдної величини, тому

$$I_{A1} = \sqrt{I_{A1(0)}^2 + I_{A1(1)}^2 + I_{A1(2)}^2} = \sqrt{1^2 + 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,23 A,$$

$$I_{A2} = \sqrt{I_{A2(0)}^2 + I_{A2(1)}^2 + I_{A2(2)}^2} = \sqrt{1^2 + 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,23 A,$$

$$I_{A3} = \sqrt{I_{A3(0)}^2 + I_{A3(1)}^2 + I_{A3(2)}^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 A,$$

$$U_V = \sqrt{U_{V(0)}^2 + U_{V(1)}^2 + U_{V(2)}^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^2} = 33 B,$$

$$P_W = P_{W(0)} + P_{W(1)} + P_{W(2)} = 30 + 0 + 15 = 45 \text{ Вт}.$$

### Задача 7.2.

Напругу  $u = 50 + 200\sin(\omega t + 45^\circ) + 100\sin(3\omega t + 60^\circ)$  В подано на вхід кола рис. 7.3. Опори елементів кола струмам основної гармоніки становлять  $R_1 = R_2 = R_3 = 8$  Ом,  $\frac{1}{\omega C_1} = 15$  Ом,  $\omega L_2 = 3$  Ом,  $\frac{1}{\omega C_3} = 15$  Ом.

Визначити миттєві і діючі значення всіх струмів, а також напруг  $u_{12}$  і  $u_{23}$ . Розрахувати коефіцієнт потужності кола і побудувати графік струму  $i_1(t)$ , якщо основна частота  $f = 50$  Гц.

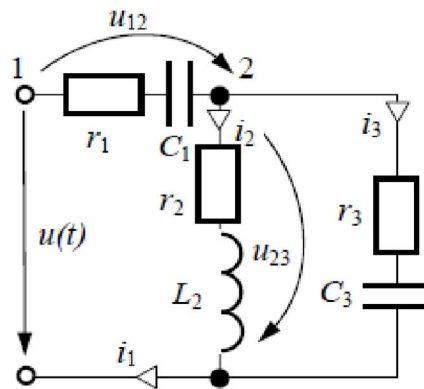


Рисунок 7.3

### Розв'язання

Розрахунок проведемо методом накладання окремих гармоніках.

1. Розрахунок нульової гармоніки (постійної складової).

Оскільки для нульової гармоніки  $\frac{1}{\omega C} = \infty$ , то струми цієї гармоніки не можуть замикатися в колі, а вся напруга живлення буде прикладена до конденсатора  $C_1$ :

$$I_{1(0)} = 0,$$

$$I_{2(0)} = 0,$$

$$I_{3(0)} = 0,$$

$$U_{12(0)} = 50 \text{ В},$$

$$U_{23(0)} = 0.$$

2. Розрахунок першої (основної) гармоніки.

Визначаємо комплексні опори віток і вхідний комплексний опір кола

$$\underline{Z}_{1(1)} = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = 8 - j15 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2(1)} = R_2 + j\omega L_2 = 8 + j3 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{3(1)} = R_3 - j\frac{1}{\omega C_3} = 8 - j15 \text{ Ом},$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(1)} &= \underline{Z}_{1(1)} + \frac{\underline{Z}_{2(1)} \cdot \underline{Z}_{3(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = (8 - j15) + \frac{(8 + j3) \cdot (8 - j15)}{(8 + j3) + (8 - j15)} = \\ &= 15,24 - j15,57 = 21,79e^{-j45,6^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Комплексні амплітуди струмів і напруг

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{200e^{j45^\circ}}{21,79e^{-j45,6^\circ}} = 9,18e^{j90,6^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{2m(1)} = \underline{I}_{1m(1)} \frac{\underline{Z}_{3(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = 9,18e^{j90,6^\circ} \cdot \frac{(8 - j15)}{(8 + j3) + (8 - j15)} = 9,8e^{j65,6^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{3m(1)} = \underline{I}_{1m(1)} \frac{\underline{Z}_{2(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = 9,18e^{j90,6^\circ} \cdot \frac{(8 + j3)}{(8 + j3) + (8 - j15)} = 3,92e^{j148^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{U}_{12m(1)} = \underline{I}_{1m(1)} \underline{Z}_{1(1)} = 9,18e^{j90,6^\circ} \cdot (8 - j15) = 159,1e^{j28,7^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{23m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} \underline{Z}_{2(1)} = 9,8e^{j65,6^\circ} \cdot (8 + j3) = 66,7e^{j86,1^\circ} \text{ В}.$$

3. Розрахунок третьої гармоніки.

Визначаємо комплексні опори віток і вхідний комплексний опір кола

$$\underline{Z}_{1(3)} = R_1 - j\frac{1}{3\omega C_1} = 8 - j5 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2(3)} = R_2 + j3\omega L_2 = 8 + j9 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = R_3 - j\frac{1}{3\omega C_3} = 8 - j5 \text{ Ом},$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{(3)} &= \underline{Z}_{1(3)} + \frac{\underline{Z}_{2(3)} \cdot \underline{Z}_{3(3)}}{\underline{Z}_{2(3)} + \underline{Z}_{3(3)}} = (8 - j5) + \frac{(8 + j9) \cdot (8 - j5)}{(8 + j9) + (8 - j5)} = \\ &= 14,9 - j4,72 = 15,61e^{-j17,6^\circ} \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Комплексні амплітуди струмів і напруг

$$\underline{I}_{1m(3)} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{100e^{j60}}{15,61e^{-j17,6^\circ}} = 6,41e^{j77,6^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_{2m(3)} = \underline{I}_{1m(3)} \frac{\underline{Z}_{3(3)}}{\underline{Z}_{2(3)} + \underline{Z}_{3(3)}} = 6,41e^{j77,6^\circ} \cdot \frac{(8 - j5)}{(8 + j9) + (8 - j5)} = 3,66e^{j31,6^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_{3m(3)} = \underline{I}_{1m(3)} \frac{\underline{Z}_{2(3)}}{\underline{Z}_{2(3)} + \underline{Z}_{3(3)}} = 6,41e^{j77,6^\circ} \cdot \frac{(8 + j9)}{(8 + j9) + (8 - j5)} = 4,68e^{j111,9^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{U}_{12m(3)} = \underline{I}_{1m(3)} \underline{Z}_{1(3)} = 6,41e^{j77,6^\circ} \cdot (8 - j5) = 60,42e^{j45,6^\circ} \text{ B,}$$

$$\underline{U}_{23m(3)} = \underline{I}_{2m(3)} \underline{Z}_{2(3)} = 3,66e^{j31,6^\circ} \cdot (8 + j9) = 44,12e^{j79,9^\circ} \text{ B.}$$

4. Розрахуємо діючі значення струмів і напруг

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + \left(\frac{I_{1m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{1m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{9,18}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{6,41}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7,92 \text{ A,}$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + \left(\frac{I_{2m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{2m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{9,8}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3,66}{\sqrt{2}}\right)^2} = 6,1 \text{ A,}$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(0)}^2 + \left(\frac{I_{3m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{3m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{3,92}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4,68}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4,32 \text{ A,}$$

$$U_{12} = \sqrt{U_{12(0)}^2 + \left(\frac{U_{12m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{12m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{50^2 + \left(\frac{159,1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60,42}{\sqrt{2}}\right)^2} = 128,5 \text{ B,}$$

$$U_{23} = \sqrt{U_{23(0)}^2 + \left(\frac{U_{23m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{23m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{66,7}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{44,12}{\sqrt{2}}\right)^2} = 56,5 \text{ B,}$$

$$U = \sqrt{U_{(0)}^2 + \left(\frac{U_{m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{50^2 + \left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2} = 165,83 \text{ В.}$$

Миттєві значення струмів і напруг

$$i_1 = I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(3)} = 0 + 9,18\sin(314t + 90,6^\circ) + 6,41\sin(942t + 77,6^\circ) \text{ А,}$$

$$i_2 = I_{2(0)} + i_{2(1)} + i_{2(3)} = 0 + 7,8\sin(314t + 65,5^\circ) + 3,66\sin(942t + 31,6^\circ) \text{ А,}$$

$$i_3 = I_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(3)} = 0 + 3,92\sin(314t + 148^\circ) + 4,68\sin(942t + 111,9^\circ) \text{ А,}$$

$$u_{12} = U_{12(0)} + u_{12(1)} + u_{12(3)} =$$

$$= 50 + 156,1\sin(314t + 28,7^\circ) + 60,42\sin(942t + 45,6^\circ) \text{ В,}$$

$$u_{23} = U_{23(0)} + u_{23(1)} + u_{23(3)} =$$

$$= 66,7\sin(314t + 86,1^\circ) + 44,12\sin(942t + 79,9^\circ) \text{ В.}$$

5. Розрахуємо активну і повну потужності кола

$$P = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(3)} = U_{(0)} \cdot I_{1(0)} + \operatorname{Re} \left\{ \underline{U}_{1(1)} \cdot \underline{I}_{1(1)}^* \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \underline{U}_{1(3)} \cdot \underline{I}_{1(3)}^* \right\} =$$

$$= 50 \cdot 0 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} \cdot 9,18 e^{-j90,6^\circ} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} \cdot 6,41 e^{-j77,6^\circ} \right\} =$$

$$= 0 + 642,1 + 305,3 = 947,4 \text{ В}$$

$$S = U \cdot I_1 = 165,83 \cdot 7,92 = 1313 \text{ ВА.}$$

Визначимо коефіцієнт потужності кола

$$\cos(\theta) = \frac{P}{S} = \frac{947,4}{1313} = 0,722.$$

6. Графік струму  $i_1(t)$  побудований на рис. 7.4.

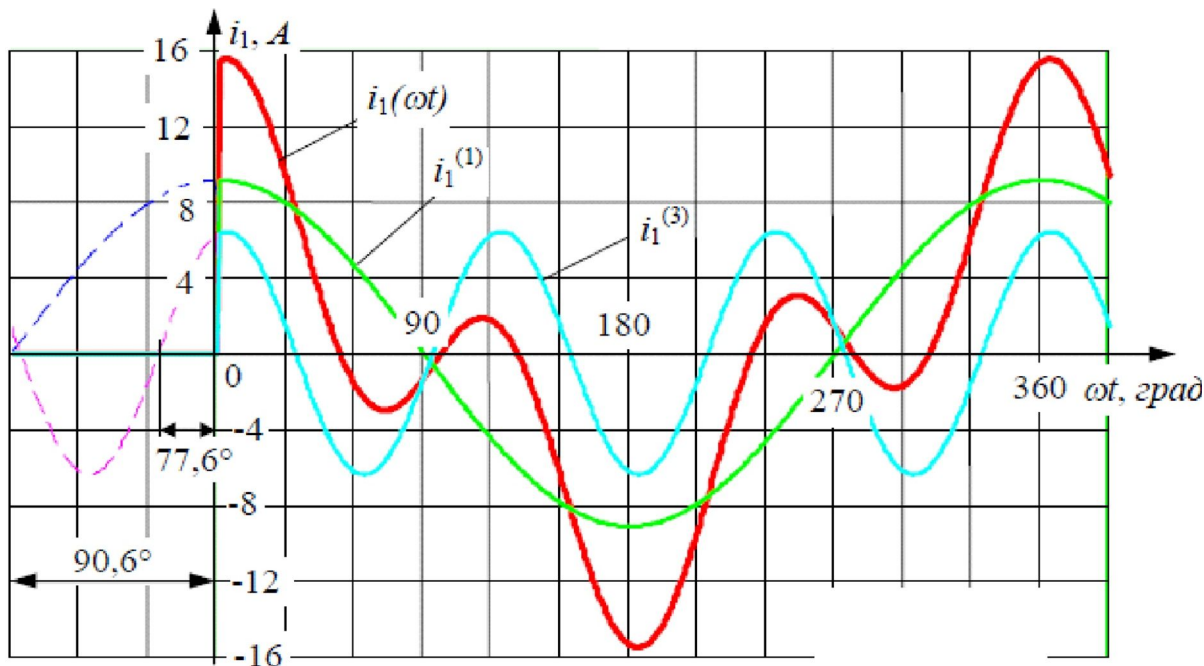


Рисунок 7.4

## 7.2 Вищі гармоніки в трифазному колі

Фазні ЕРС та напруги у трифазних колах можуть містити різні гармоніки за виключенням постійної складової. Кут зсуву фаз між фазами  $A, B, C$  для  $k$ -ої гармоніки дорівнює  $\varphi = 120\%$ . Тому усі гармоніки від  $k = 1$  до  $k = \infty$  можна поділити на три характерні групи:

$$1, 4, 7 \dots (3N+1);$$

$$2, 5, 8 \dots (3N+2);$$

$$3, 6, 9 \dots (3N+3),$$

де  $N$  – натуральне число або 0. У трифазних колах вони формують системи прямої, зворотної та нульової послідовностей фаз.

Гармоніки прямої та зворотної послідовностей аналізуються у традиційний спосіб. Гармоніки нульової послідовності відсутні у лінійних напругах генератора. У зв'язку з цим при з'єднанні в зірку

$$U_L = \sqrt{U_{L(1)}^2 + U_{L(2)}^2 + U_{L(3)}^2 + \dots} < \sqrt{3}U_\phi,$$

де

$$U_{\Phi} = \sqrt{U_{\Phi(1)}^2 + U_{\Phi(2)}^2 + U_{\Phi(3)}^2 + \dots}$$

За умови з'єднання приймачів зіркою навіть під час симетричного навантаження в нейтральному проводі протікає струм, причому він дорівнює потроєному струму нульової послідовності.

За умови з'єднання зіркою без нейтралі струми нульової послідовності не протікають, а напруга зміщення нейтралі під час симетричного навантаження:

$$u_{N'N} = U_{m(3)}\sin(3\omega t + \psi_{(3)}) + U_{m(6)}\sin(6\omega t + \psi_{(6)}),$$

його діюче значення

$$U_{N'N} = \sqrt{\left(\frac{U_{m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m(6)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots}$$

### Задача 7.3.

Фазна напруга генератора, обмотки якого з'єднані зіркою, у режимі неробочого ходу містить першу  $U_{(1)}$  і третю  $U_{(3)}$  гармоніки.

1. Знайти діючі значення напруг цих гармонік за відомими показами вольтметрів фазної  $U_{\Phi} = 125 \text{ В}$  та лінійної напруг  $U_{Л} = 210 \text{ В}$ .

2. Яка похибка розрахунку, якщо у напрузі міститься ще й п'ята гармоніка, яка складає не більше 10% основної?

### Розв'язання

1. Покази вольтметрів, виражені через діючі значення двох гармонійних складових, визначаються рівняннями

$$U_{\Phi} = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2},$$

$$U_{Л} = \sqrt{3}U_{(1)}$$

– лінійні напруги генератора не містять гармоніки кратні трьом.

Розв'язавши систему з цих рівнянь, отримаємо

$$U_{(1)} = 121,2 \text{ В},$$

$$U_{(3)} = 30,4 \text{ В}.$$

2. Покази вольтметрів, виражені через діючі значення трьох гармонійних складових:

$$U_{\Phi} = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2 + 0,1^2 \cdot U_{(1)}^2},$$

$$U_{\mathcal{L}} = \sqrt{3} \sqrt{U_{(1)}^2 + 0,1^2 \cdot U_{(1)}^2},$$

розв'язавши які, отримаємо

$$U_{(1)} = 120,6 \text{ В},$$

$$U_{(3)} = 30,4 \text{ В}.$$

З порівняння цього результату з попереднім визначаємо, що похибка виміру першої гармоніки не перевищує 0,5 % (за третьою гармонікою похибка виміру взагалі відсутня).

#### **Задача 7.4.**

Симетричний генератор з фазною напругою

$$u_A(\omega t) = 310 \sin(\omega t - 30^\circ) + 93 \sin(3\omega t + 45^\circ) \text{ В}$$

живить з'єднане зіркою несиметричне навантаження (рис. 7.5) з опором фаз для струмів основної гармоніки  $\underline{Z}_{A(1)} = 15 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{B(1)} = j15 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{C(1)} = -j15 \text{ Ом}$ , опір нейтралі  $\underline{Z}_{N(1)} = 2 + j2 \text{ Ом}$ .

Визначити покази приладів електромагнітної системи для випадків:

- 1) рубильники  $S1$  і  $S2$  увімкнені (увімкнений нульовий провід);
- 2) рубильник  $S1$  вимкнений, а  $S2$  увімкнений (у нульовому проводі знаходиться опір  $\underline{Z}_N$ );
- 3) обидва рубильники вимкнені (без нульового проводу).

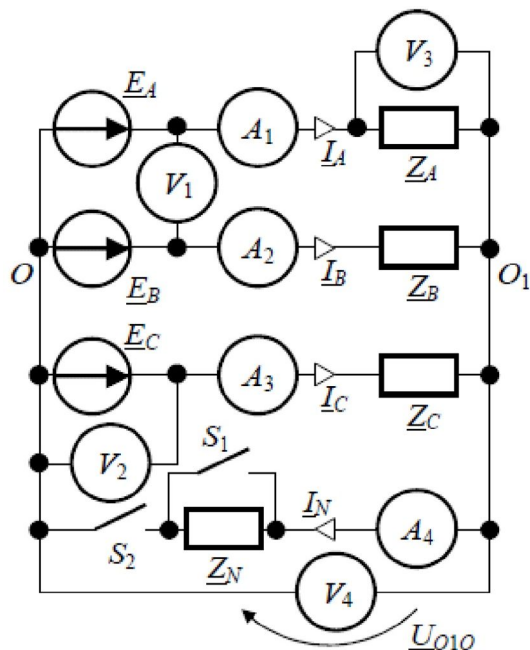


Рисунок 7.5

### Розв'язання

1. Рубильники увімкнені (увімкнений нульовий провід).

1.1. Виконаємо розрахунок струмів і напруг першої гармоніки.

Діючі значення комплексів фазних напруг генератора

$$\underline{U}_{A(1)} = \frac{\underline{U}_{Am(1)} e^{j\varphi(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{310 e^{-j30^\circ}}{\sqrt{2}} = 220 e^{-j30^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{B(1)} = 220 e^{-j150^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{C(1)} = 220 e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

При увімкненому нульовому провіді напруга зміщення нейтралі  $\underline{U}_{N'N(1)}$  відсутня, тому фазні напруги споживача дорівнюють фазним напругам джерела живлення; струми у проводах лінії визначаємо згідно із законом Ома

$$\underline{I}_{A(1)} = \frac{\underline{U}_{A(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} = \frac{220 e^{-j30^\circ}}{15} = 14,67 e^{-j30^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{B(1)} = \frac{\underline{U}_{B(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} = \frac{220 e^{-j150^\circ}}{15 e^{j90^\circ}} = 14,67 e^{j120^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{C(1)} = \frac{\underline{U}_{C(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}} = \frac{220 e^{j90^\circ}}{15 e^{-j90^\circ}} = -14,67 \text{ А},$$

Струм основної гармоніки в нульовому проводі

$$\underline{I}_{N(1)} = \underline{I}_{A(1)} + \underline{I}_{B(1)} + \underline{I}_{C(1)} = 14,67e^{-j30^\circ} + 14,67e^{j120^\circ} + (-14,67) = 10,74e^{j150^\circ} \text{ A.}$$

1.2. Виконуємо розрахунок напруг і струмів третьої гармоніки. Комплекси фазних напруг генератора з урахуванням того, що третя гармоніка утворює систему нульової послідовності

$$\underline{U}_{A(3)} = \underline{U}_{B(3)} = \underline{U}_{C(3)} = \frac{\underline{U}_{Am(3)} e^{j\nu(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{93e^{j45^\circ}}{\sqrt{2}} = 65,76e^{j45^\circ} \text{ B.}$$

Напряга зміщення нейтралі відсутня.

Струми визначаємо за законом Ома:

$$\underline{I}_{A(3)} = \frac{\underline{U}_{A(3)}}{\underline{Z}_{A(3)}} = \frac{65,76e^{j45^\circ}}{15} = 4,38e^{j45^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_{B(3)} = \frac{\underline{U}_{B(3)}}{\underline{Z}_{B(3)}} = \frac{65,76e^{j45^\circ}}{3 \cdot 15e^{j90^\circ}} = 1,46e^{-j45^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_{C(3)} = \frac{\underline{U}_{C(3)}}{\underline{Z}_{C(3)}} = \frac{65,76e^{j45^\circ}}{\frac{15}{3}e^{-j90^\circ}} = 13,2e^{j135^\circ} \text{ A,}$$

Струм третьої гармоніки в нульовому проводі

$$\underline{I}_{N(3)} = \underline{I}_{A(3)} + \underline{I}_{B(3)} + \underline{I}_{C(3)} = 4,38e^{j45^\circ} + 1,46e^{-j45^\circ} + 13,2e^{j135^\circ} = 12,49e^{j114,4^\circ} \text{ A.}$$

1.3. Визначаємо покази приладів.

У лінійній напрузі відсутні складові гармонік, кратних трьом. Тому лінійна напруга генератора (показ вольметра  $V_1$ ):

$$U_{AB} = U_{AB(1)} = \sqrt{3}U_{A(1)} = \sqrt{3} \cdot 220 = 380 \text{ B.}$$

Фазна напруга  $U_C$  генератора (показ вольметра  $V_2$ ) містить всі наявні гармоніки

$$U_C = \sqrt{U_{C(1)}^2 + U_{C(3)}^2} = \sqrt{220^2 + 65,76^2} = 229,6 \text{ B.}$$

Фазна напруга  $U'_A$  приймача (показ вольметра  $V_3$ )

$$U'_A = \sqrt{\left(I_{A(1)}Z_{A(1)}\right)^2 + \left(I_{A(3)}Z_{A(3)}\right)^2} = \sqrt{(14,67 \cdot 15)^2 + (4,38 \cdot 15)^2} = 229,6 \text{ В.}$$

Напруга зміщення нейтралі (показ вольтметра  $V_4$ )

$$U_{NN} = 0.$$

Діючі значення струмів в проводах

показ амперметра  $A_1$

$$I_A = \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(3)}^2} = \sqrt{14,67^2 + 4,38^2} = 15,31 \text{ А};$$

показ амперметра  $A_2$

$$I_B = \sqrt{I_{B(1)}^2 + I_{B(3)}^2} = \sqrt{14,67^2 + 1,46^2} = 14,74 \text{ А};$$

показ амперметра  $A_3$

$$I_C = \sqrt{I_{C(1)}^2 + I_{C(3)}^2} = \sqrt{14,67^2 + 13,2^2} = 19,7 \text{ А};$$

показ амперметра  $A_4$

$$I_N = \sqrt{I_{N(1)}^2 + I_{N(3)}^2} = \sqrt{10,74^2 + 12,49^2} = 16,47 \text{ А},$$

2. У нульовому проводі знаходиться опір  $\underline{Z}_N$ .

2.1. Розрахунок напруг і струмів першої гармоніки.

Визначаємо напругу зміщення нейтралі

$$\begin{aligned} \underline{U}_{N'N(1)} &= \frac{\frac{\underline{U}_{A(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} + \frac{\underline{U}_{B(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} + \frac{\underline{U}_{C(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{A(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{B(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{N(1)}}} = \frac{\frac{220e^{-j30^\circ}}{15} + \frac{220e^{-j150^\circ}}{15e^{j90^\circ}} + \frac{220e^{j90^\circ}}{15e^{-j90^\circ}}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{15e^{j90^\circ}} + \frac{1}{15e^{-j90^\circ}} + \frac{1}{2+j2}} = \\ &= 26,15e^{-j171,71^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Струми в проводах лінії розрахуємо за законом Ома

$$I_{A(1)} = \frac{\underline{U}_{A(1)} - \underline{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} = \frac{220e^{-j30^\circ} - 26,15e^{-j171,71^\circ}}{15} = 16,4e^{-j26,08^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{B(1)} = \frac{\underline{U}_{B(1)} - \underline{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} = \frac{220e^{-j150^\circ} - 26,15e^{-j171,71^\circ}}{15e^{j90^\circ}} = 12,99e^{j122,9^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{C(1)} = \frac{\underline{U}_{C(1)} - \underline{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}} = \frac{220e^{j90^\circ} - 26,15e^{-j171,71^\circ}}{15e^{-j90^\circ}} = 14,97e^{-j173,29^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{N(1)} = \frac{\underline{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{N(1)}} = \frac{26,15e^{-j171,71^\circ}}{2,828e^{j45^\circ}} = 9,38e^{-j216,71^\circ} \text{ A}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{N(1)} &= \underline{I}_{A(1)} + \underline{I}_{B(1)} + \underline{I}_{C(1)} = \\ &= 16,4e^{-j26,08^\circ} + 12,99e^{-j237,11^\circ} + 14,97e^{-j173,29^\circ} = 9,38e^{-j216,71^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

2. 2. Розрахунок напруг і струмів третьої гармоніки.

Визначаємо напругу зміщення нейтралі

$$\begin{aligned} \underline{U}_{N'N(3)} &= \frac{\frac{\underline{U}_{A(3)}}{\underline{Z}_{A(3)}} + \frac{\underline{U}_{B(3)}}{\underline{Z}_{B(3)}} + \frac{\underline{U}_{C(3)}}{\underline{Z}_{C(3)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{A(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{B(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{N(3)}}} = \frac{\frac{65,76e^{j45^\circ}}{15} + \frac{65,76e^{j45^\circ}}{3 \cdot 15e^{j90^\circ}} + \frac{65,76e^{j45^\circ}}{\frac{15}{3}e^{-j90^\circ}}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{15e^{j90^\circ}} + \frac{1}{\frac{15}{3}e^{-j90^\circ}} + \frac{1}{2 + 3 \cdot j2}} = \\ &= 104,1e^{j101,05^\circ} \text{ B}. \end{aligned}$$

Струми в проводах лінії розрахуємо за законом Ома

$$\underline{I}_{A(3)} = \frac{\underline{U}_{A(3)} - \underline{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{A(3)}} = \frac{65,76e^{j45^\circ} - 104,1e^{j101,05^\circ}}{15} = 5,78e^{-j39,96^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{B(3)} = \frac{\underline{U}_{B(3)} - \underline{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{B(3)}} = \frac{65,76e^{j45^\circ} - 104,1e^{j101,05^\circ}}{3 \cdot 15e^{j90^\circ}} = 1,93e^{-j129,96^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{C(3)} = \frac{\underline{U}_{C(3)} - \underline{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{C(3)}} = \frac{65,76e^{j45^\circ} - 104,1e^{j101,05^\circ}}{\frac{15}{3}e^{-j90^\circ}} = 17,34e^{j50,04^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{N(3)} = \frac{\underline{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{N(3)}} = \frac{104,1e^{j101,05^\circ}}{2 + j6} = 16,46e^{j29,49^\circ} \text{ A}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{N(3)} &= \underline{I}_{A(3)} + \underline{I}_{B(3)} + \underline{I}_{C(3)} = \\ &5,78e^{-j39,96^\circ} + 1,93e^{-j129,96^\circ} + 17,34e^{j50,04^\circ} = 16,46e^{j29,49^\circ} \text{ A.} \end{aligned}$$

2.3. Визначаємо покази приладів.

Лінійна і фазна напруга генератора (покази вольтметрів  $V_1$  і  $V_2$ , відповідно) залишаються такими ж, як і у попередньому випадку.

Фазна напруга  $U'_A$  приймача (показ вольтметра  $V_3$ )

$$\begin{aligned} U'_A &= \sqrt{\left(\underline{U}_{A(1)} - \underline{U}_{NN(1)}\right)^2 + \left(\underline{U}_{A(3)} - \underline{U}_{NN(3)}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(220e^{-j30^\circ} - 26,15e^{-j171,71^\circ}\right)^2 + \left(65,76e^{j45^\circ} - 104,1e^{j101,05^\circ}\right)^2} = \\ &= \sqrt{240,6^2 + 86,7^2} = 255,7 \text{ B.} \end{aligned}$$

Напруга зміщення нейтралі (показ вольтметра  $V_4$ )

$$U'_{NN} = \sqrt{\left(\underline{U}_{NN(1)}\right)^2 + \left(\underline{U}_{NN(3)}\right)^2} = \sqrt{26,15^2 + 104,1^2} = 107,4 \text{ B.}$$

Діючі значення струмів в проводах

показ амперметра  $A_1$

$$I_A = \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(3)}^2} = \sqrt{16,4^2 + 5,78^2} = 17,05 \text{ A};$$

показ амперметра  $A_2$

$$I_B = \sqrt{I_{B(1)}^2 + I_{B(3)}^2} = \sqrt{12,99^2 + 1,93^2} = 13,13 \text{ A};$$

показ амперметра  $A_3$

$$I_C = \sqrt{I_{C(1)}^2 + I_{C(3)}^2} = \sqrt{14,97^2 + 17,34^2} = 22,91 \text{ A};$$

показ амперметра  $A_4$

$$I_N = \sqrt{I_{N(1)}^2 + I_{N(3)}^2} = \sqrt{9,38^2 + 16,46^2} = 18,94 \text{ A.}$$

### 3. Нульовий провід вимкнений.

#### 3.1. Розрахунок напруг і струмів першої гармоніки.

Визначаємо напругу зміщення нейтралі

$$\underline{U}_{N'N(1)} = \frac{\frac{\underline{U}_{A(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} + \frac{\underline{U}_{B(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} + \frac{\underline{U}_{C(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{A(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{B(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C(1)}}} = \frac{\frac{220e^{-j30^\circ}}{15} + \frac{220e^{-j150^\circ}}{15e^{j90^\circ}} + \frac{220e^{j90^\circ}}{15e^{-j90^\circ}}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{15e^{j90^\circ}} + \frac{1}{15e^{-j90^\circ}}} = 161e^{j150^\circ} \text{ В.}$$

Струми в проводах лінії розрахуємо за законом Ома

$$\underline{I}_{A(1)} = \frac{\underline{U}_{A(1)} - \underline{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} = \frac{220e^{-j30^\circ} - 161e^{j150^\circ}}{15} = 25,4e^{-j30^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{B(1)} = \frac{\underline{U}_{B(1)} - \underline{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} = \frac{220e^{-j150^\circ} - 161e^{j150^\circ}}{15e^{j90^\circ}} = 13,15e^{j165^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{C(1)} = \frac{\underline{U}_{C(1)} - \underline{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}} = \frac{220e^{j90^\circ} - 161e^{j150^\circ}}{15e^{-j90^\circ}} = 13,1e^{j135^\circ} \text{ А.}$$

Перевірка:

$$\underline{I}_{A(1)} + \underline{I}_{B(1)} + \underline{I}_{C(1)} = 25,4e^{-j30^\circ} + 13,15e^{j165^\circ} + 13,1e^{j135^\circ} = 0.$$

#### 3.2. Розрахунок напруг і струмів третьої гармоніки.

Струми в лінійних проводах відсутні, оскільки для замикання струмів нульової послідовності (струмів гармонік, кратних трьом) необхідний нульовий провід:

$$\underline{I}_{A(3)} + \underline{I}_{B(3)} + \underline{I}_{C(3)} = 0.$$

Напруга зміщення нейтралі дорівнює фазній напрузі генератора

$$\underline{U}_{N'N(3)} = \underline{U}_{A(3)} = 65,76e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

#### 3.3. Визначаємо покази приладів.

Лінійна і фазна напруга генератора (покази вольтметрів  $V_1$  і  $V_2$ , відповідно) залишаться такими ж, як і у попередньому випадку.

Фазна напруга  $U'_A$  приймача (показ вольтметра  $V_3$ )

$$U'_A = I_{A1} Z_{A(1)} = 25,4 \cdot 15 = 380 \text{ B.}$$

Напруга зміщення нейтралі (показ вольтметра  $V_4$ )

$$U'_{NN} = \sqrt{(U'_{NN(1)})^2 + (U'_{NN(3)})^2} = \sqrt{161^2 + 65,76^2} = 174 \text{ B.}$$

Діючі значення струмів в проводах

показ амперметра  $A_1$

$$I_A = I_{A(1)} = 25,4 \text{ A};$$

показ амперметра  $A_2$

$$I_B = I_{B(1)} = 13,15 \text{ A};$$

показ амперметра  $A_3$

$$I_C = I_{C(1)} = 13,1 \text{ A.}$$

Струм в нульовому проводі відсутній (показ амперметра  $A_4$ )

$$I_N = 0.$$

## 8 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 8.1 Розрахунок перехідного процесу у колі з одним накопичувачем енергії при дії постійних джерел енергії

#### Задача 8.1.

У колі рис. 8.1 розрахувати напругу на конденсаторі та струми перехідного процесу, якщо параметри кола  $U=100$  В,  $R_1=60$  Ом,  $R_2=40$  Ом,  $C=10$  мкФ. Розрахувати час за який напруга на конденсаторі буде становити 50 % від усталеного значення.

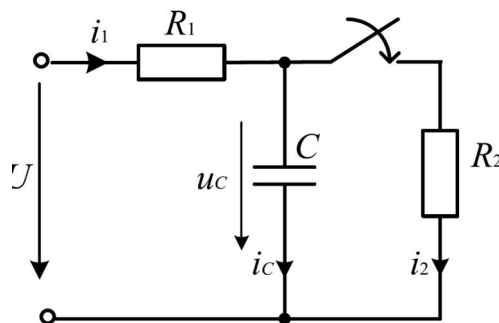


Рисунок 8.1

#### Розв'язання

У післякомутаційному режимі коло описується наступною системою рівнянь за законами Кірхгофа відносно миттєвих значень струмів і напруги на конденсаторі:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_c(t) = 0 \\ R_1 i_1(t) + u_c(t) = U \\ R_2 i_2(t) - u_c(t) = 0 \end{cases} .$$

Додаткове рівняння – рівняння зв'язку між струмом та напругою конденсатора:

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} .$$

Систему рівнянь розв'язуємо способом підстановки – всі струми виражаємо через напругу на конденсаторі і підставляємо в перше рівняння

системи. В результаті система рівнянь зводиться до одного лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. У даній задачі є лише один накопичувач – конденсатор, тому і рівняння першого порядку.

$$\begin{cases} \frac{U - u_C(t)}{R_1} - \frac{u_C(t)}{R_2} - C \frac{du_C(t)}{dt} = 0 \\ i_1(t) = \frac{U - u_C(t)}{R_1} \\ i_2(t) = \frac{u_C(t)}{R_2} \end{cases} ;$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{CR_1}.$$

Розв'язок рівняння згідно з класичним методом розрахунку перехідних процесів знаходиться у вигляді суми усталеної (усталеної) і вільної складових:

$$u_C(t) = u_{Cy} + u_{Cv}.$$

Вимушена складова визначається видом правої частини рівняння, тобто характером джерела. У даному випадку, оскільки джерело постійне, усталена складова напруги на конденсаторі також буде постійною, а  $\frac{du_{Cy}}{dt} = 0$

$$\frac{du_{Cy}}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} u_{Cy} = \frac{U}{CR_1};$$

$$\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} u_{Cy} = \frac{U}{CR_1};$$

$$u_{Cy} = \frac{U}{CR_1} \frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2} = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 100 \cdot \frac{40}{60 + 40} = 40 \text{ В.}$$

Вимушені складові струмів у колі можна визначити аналізуючи коло після комутації в усталеному режимі:

$$i_{1y} = \frac{U - u_{Cy}}{R_1} = \frac{100 - 40}{60} = 1 \text{ А,}$$

$$i_{2y} = \frac{u_{Cy}}{R_2} = \frac{40}{40} = 1A,$$

$$i_{Cy} = 0.$$

Вигляд вільної складової залежить від кількості та виду коренів характеристичного рівняння складеного для однорідного диференційного рівняння відносно напруги на конденсаторі. Тому складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння за наявним диференціальним рівнянням:

$$p + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} = 0;$$

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} = -\frac{60 + 40}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 40} = -4167^{c^{-1}}.$$

При одному корені характеристичного рівняння вільна складова напруги на конденсаторі має вигляд:

$$u_C(t) = Ae^{pt}.$$

Аналогічно знаходимо вигляд вільних складових струмів у колі:

$$i_1(t) = A_1e^{pt}; i_2(t) = A_2e^{pt}; i_C(t) = A_3e^{pt}.$$

Постійні інтегрування знаходимо з використанням початкових умов. Напруга на конденсаторі до комутації:

$$u_C(0_-) = U = 100 \text{ B}.$$

Згідно з другим законом комутації

$$u_C(0) = u_C(0_-) = U = 100 \text{ B}.$$

Користуючись схемою заміщення для моменту комутації (рис. 8.2), знаходимо струми у колі:

$$i_1(0) = 0;$$

$$i_2(0) = -i_C(0) = \frac{u_C(0)}{R_2} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ A}.$$

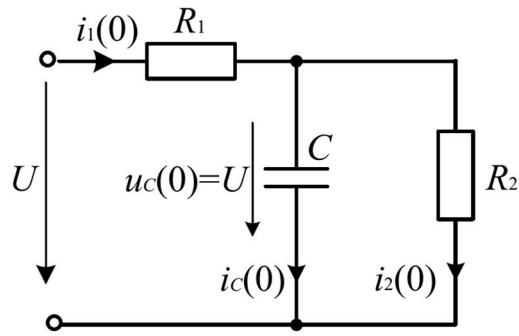


Рисунок 8.2

Запишемо загальні вирази для перехідних величин та розрахуємо постійні інтегрування згідно початкових умов:

для струму  $i_1$

$$i_1(t) = i_{1y} + i_{1\delta} = 1 + A_1 e^{pt}$$

при  $t = 0$

$$0 = 1 + A_1,$$

$$A_1 = -1;$$

для струму  $i_2$

$$i_2(t) = i_{2y} + i_{2\delta} = 1 + A_2 e^{pt}$$

при  $t = 0$

$$2,5 = 1 + A_2,$$

$$A_2 = -1,5;$$

для струму  $i_C$

$$i_C(t) = i_{Cy} + i_{C\delta} = A_C e^{pt}$$

при  $t = 0$

$$-2,5 = A_C,$$

$$A_C = -2,5;$$

для напруги  $u_C$

$$u_C(t) = u_{Cy} + u_{C6} = 40 + Ae^{pt}$$

при  $t = 0$

$$100 = 40 + A,$$

$$A = 60.$$

Отже, кінцевими виразами перехідних функції є:

$$i_1(t) = 1 - 1e^{-4167t},$$

$$i_2(t) = 1 + 1,5e^{-4167t},$$

$$i_C(t) = -2,5e^{-4167t},$$

$$u_C(t) = 40 + 60e^{-4167t}.$$

Перевірку правильності проведення розрахунків здійснюємо за законами Кірхгофа:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_C(t),$$

$$1 + 1,5e^{-4167t} + (-2,5e^{-4167t}) = 1 - 1e^{-4167t};$$

$$U = i_1(t)R_1 + u_C(t),$$

$$(1 - 1e^{-4167t}) \cdot 60 + (40 + 60e^{-4167t}) = 100;$$

$$0 = i_2(t)R_2 - u_C(t),$$

$$(1 + 1,5e^{-4167t}) \cdot 40 - (40 + 60e^{-4167t}) = 0;$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_{Cy}}{dt},$$

$$10 \cdot 10^{-6} \cdot 60e^{-4167t} \cdot (-4167) = -2,5e^{-4167t}.$$

Для побудови графіка  $u_C(t)$  додатково обчислимо:

- стала часу кола

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right| = \left| \frac{1}{-4167} \right| = 0,24 \text{ мс},$$

- тривалість перехідного процесу

$$T_{III} = (3... 5) \tau. \text{ Прийmemo } T_{III} = 4 \tau = 0,96 \text{ мс}.$$

Графік  $u_C(t)$  будуємо за складовими: окремо подаємо усталену та вільну складові, а потім їх графічно підсумовуємо. Графік поданий на рис. 8.310.3.

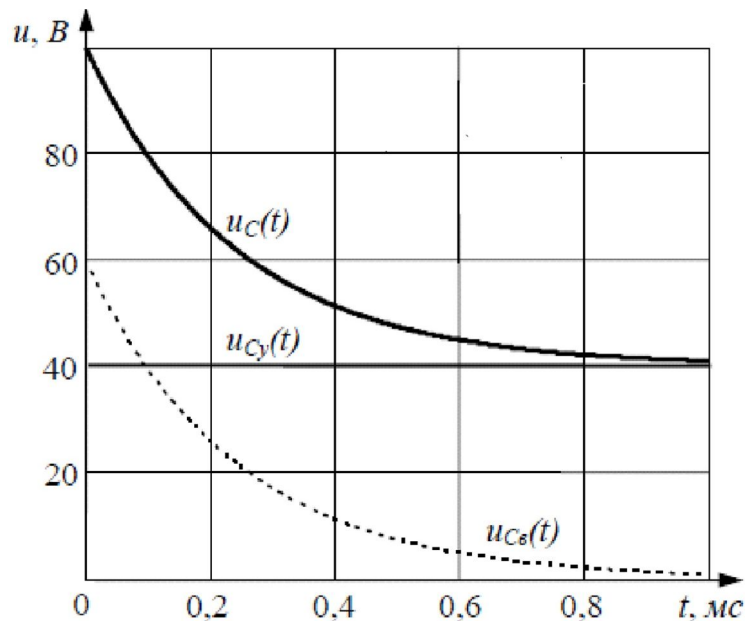


Рисунок 8.3

Для розрахунок часу при якому напруга на конденсаторі буде становити 50% від усталеного значення необхідно розв'язати рівняння

$$u_C(t_1) = 0,5u_{Cу}$$

$$0,5 \cdot 40 = 0,5 \cdot (40 + 60e^{-4167t})$$

з якого визначити час  $t_1$ .

### Задача 8.2.

Виконати розрахунок перехідних струму через котушку індуктивності (рис. 8.4) при зміні положення ключа кожні 2 секунди: спершу ключ розмикається, а потім замикається. Параметри кола  $U=30 \text{ В}$ ;  $t_1=2 \text{ с}$ ;  $R = 1 \text{ Ом}$ ;  $R_1=2 \text{ Ом}$ ;  $L=2 \text{ Гн}$ .

### Розв'язання

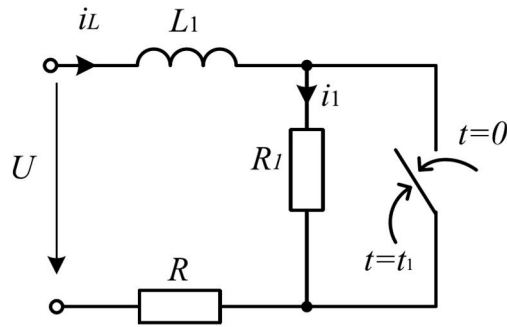


Рисунок 8.4

Для визначення закону зміни струму через індуктивність необхідно провести аналіз перехідного процесу в колі (рис. 8.4) для двох випадків:

- ключ розімкнений  $0 \leq t \leq t_1$ ;
- ключ замкнений  $t_1 \leq t \leq \infty$ .

*Випадок I. Ключ розмикається.*

Диференційне рівняння для даного електричного кола (після першої комутації) за II законом Кірхгофа має вигляд

$$u = i_I(R_1 + R) + L_1 \frac{di_I}{dt}.$$

Розв'язок цього рівняння знаходимо у вигляді:

$$i_I(t) = i_{Iy} + i_{Ie}.$$

Для визначення усталеної складової струму проведемо розрахунок усталеного режиму після комутації ( $t \rightarrow \infty$ )

$$i_{Iy} = \frac{U}{R + R_1} = \frac{30}{1 + 2} = 10 \text{ A}.$$

Визначимо вільну складову перехідної функції. Вільний процес являє собою умовний процес, який протікає при відсутності джерел енергії за рахунок накопиченої до комутації енергії на реактивних елементах. Рівняння енергетичного балансу в колі, яке описує вільний процес (рис. 8.5, а) – це однорідне диференційне рівняння:

$$0 = i_{Ie}(R_1 + R) + L_1 \frac{di_{Ie}}{dt}.$$

Існують два способи визначення коренів характеристичного рівняння.

Перший спосіб полягає у виконання заміни  $\frac{d}{dt}$  на  $p$  у однорідному диференційному рівнянні

$$L_1 \frac{di_{I_6}}{dt} + i_{I_6} (R_1 + R) = 0.$$

$$L_1 p + (R_1 + R) = 0.$$

Отже, шукані корені

$$p = -\frac{R_1 + R}{L_1}.$$

Другий спосіб називається методом “вхідного опору”. Для цього в після комутаційній схемі вилучаємо всі джерела енергії (вільний режим) та заміняємо  $j\omega$  на  $p$  – отримаємо операторну схему заміщення. Розриваємо коло у точках  $a$ - $b$  (рис. 8.5, б) та записуємо вираз для вхідного опору відносно точок розриву.

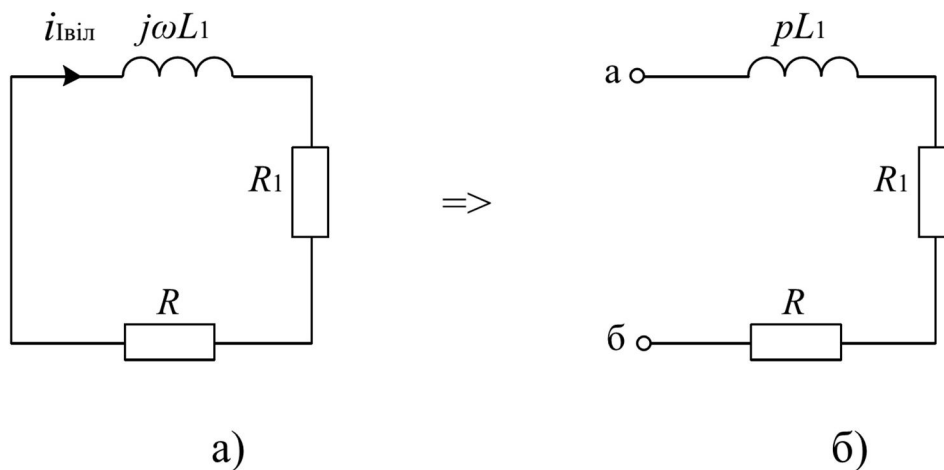


Рисунок 8.5

$$Z_{\text{вх}}(p_1) = p_1 L_1 + R_1 + R,$$

$$p_1 L_1 + R_1 + R = 0,$$

$$p_1 = -\frac{R_1 + R}{L_1} = -\frac{2 + 1}{2} = -1,5 \text{ c}^{-1},$$

тоді

$$\tau_I = \frac{1}{|p_1|} = \frac{1}{|-1,5|} = 0,667 \text{ c},$$

Порівнюючи вирази характеристичного рівняння та його корені, отримані двома способами, приходимо до висновку, що вони ідентичні. Отже, вільна складова струму записуємо у вигляді

$$i_{Ie} = A e^{p_1 t}.$$

Для розрахунку сталої інтегрування визначимо початкові умови. Струм через котушку до комутації

$$i_I(0_-) = \frac{U}{R} = \frac{30}{1} = 30 \text{ A}.$$

Згідно першого закону комутації

$$i_I(0_-) = i_I(0) = 30 \text{ A}.$$

Визначимо постійну інтегрування  $A$ , для цього запишемо вираз перехідного струму для першого випадку у загальній формі:

$$i_I(t) = i_{Iy} + i_{Ie} = 10 + A e^{p_1 t}.$$

Для момент комутації ( $t = 0$ ):

$$i_I(0) = i_{Iy}(0) + i_{Ie}(0),$$

$$30 = 10 + A,$$

$$A = 30 - 10 = 20.$$

Перехідний струм через індуктивність для випадку розмикання ключа:

$$i_I(t) = 10 + 20e^{-1,5t} = 10 \cdot (1 + 2e^{-1,5t}) \text{ A}.$$

*Випадок II. Ключ замикається.*

Згідно умови, через 2 с після розмикання, ключ замикається. Після замикання ключа змінюється опір схеми. Диференціальне рівняння для новоутвореного електричного кола (після другої комутації) за II законом Кірхгофа має вигляд

$$u = i_{II}R + L_1 \frac{di_{II}}{dt}.$$

Розв'язок диференційного рівняння знаходимо у вигляді:

$$i_{II}(t) = i_{IIy} + i_{II6}.$$

Усталену складову знаходимо з розрахунку усталеного режиму після комутації

$$i_{IIy} = \frac{U}{R} = \frac{30}{1} = 30 \text{ A}.$$

Однорідне диференційне рівняння, для визначення вільної складової струму, має вигляд:

$$0 = i_{II6} R + L_1 \frac{di_{II6}}{dt}.$$

Електричне коло, якому відповідає дане рівняння зображене на рис. 8.6,а.

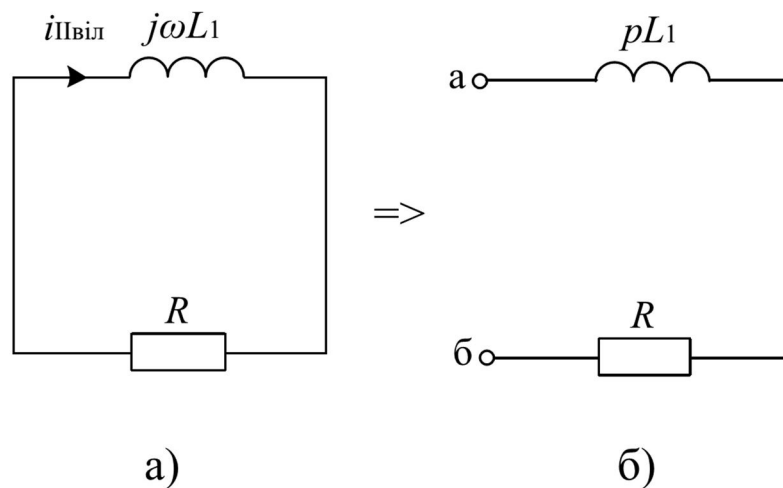


Рисунок 8.6

На рис. 8.5, б зображена операторна схема заміщення для одержання характеристичного рівняння та визначення його коренів  $p$

$$Z_{\text{ex}}(p_{11}) = p_{11}L_1 + R,$$

$$p_{11}L_1 + R = 0,$$

$$p_{11} = -\frac{R}{L_1} = -\frac{1}{2} = -0,5 \text{ c}^{-1},$$

$$\tau_{II} = \frac{1}{|p_{II}|} = \frac{1}{|-0,5|} = 2 \text{ с.}$$

Отже, вільна складова струму

$$i_{II\epsilon} = A e^{p_{II}t}.$$

Знаходимо усталену складову перехідного струму до комутації для розрахунку сталої інтегрування:

$$i_{II(t \leq t_1)} = i_I = 10 \cdot (1 + 2e^{-1,5t}) \text{ A.}$$

В момент другої комутації ( $t = t_1$ ) через індуктивність протікає струм

$$i_{II(t = t_1)} = 10 \cdot (1 + 2e^{-1,5 \cdot 2t}) = 11 \text{ A.}$$

Перехідний струм після другої комутації:

$$i_{II}(t) = i_{IIy} + i_{II\epsilon} = 30 + A_{II} e^{p_{II}(t-t_1)}.$$

Визначимо постійну інтегрування  $A$  для моменту комутації ( $t = 0$ ):

$$i_{II}(0) = i_{IIy}(0) + i_{II\epsilon}(0),$$

$$11 = 30 + A_{II},$$

$$A_{II} = 11 - 30 = -19.$$

Перехідний струм через індуктивність у випадку замикання ключа:

$$i_{II}(t) = 30 - 19e^{-0,5(=2)t} \text{ A.}$$

Графік зміни струму через індуктивність з урахуванням одного циклу перемикачів показано на рис. 8.7.

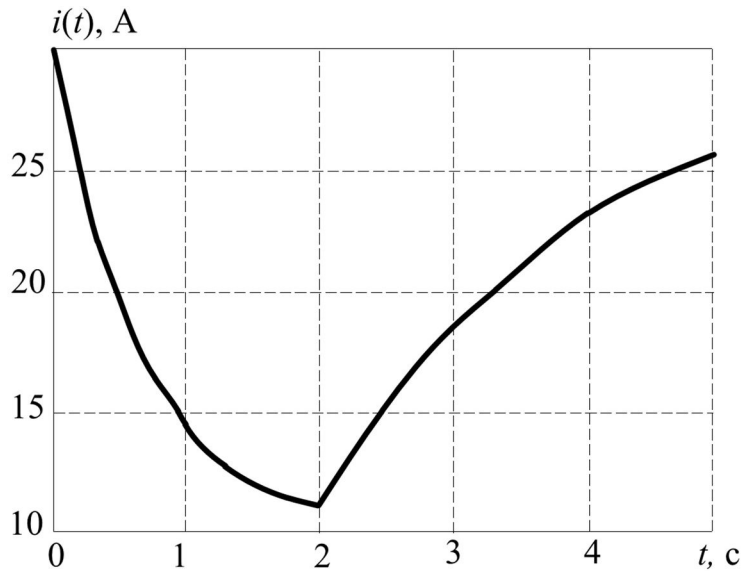


Рисунок 8.7

## 8.2 Розрахунок перехідного процесу у колі з одним накопичувачем енергії при дії джерела синусоїдної напруги

### Задача 8.3.

На вхід кола (рис. 8.8) з параметрами  $x_1 = x_2 = 20$  Ом;  $R_1 = 11,5$  Ом;  $R_2 = 58$  Ом подається синусоїдна напруга  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , амплітудне значення якої  $U_m = 170$  В, а частота  $f = 400$  Гц. В момент комутації величина вхідної напруги дорівнює діючому значенню:  $u(0) = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = U$ .

Визначити струми через індуктивності.

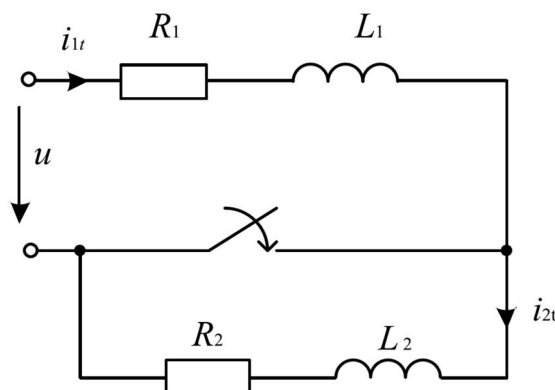


Рисунок 8.8

### Розв'язання

Визначимо початкову фазу вхідної напруги  $\psi$  та величини

індуктивностей  $L$ .

Оскільки

$$u(0) = U_m \sin \psi_u = U,$$

то

$$\psi_u = \arcsin\left(\frac{u(0)}{U_m}\right) = \arcsin\left(\frac{U}{U_m}\right) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже,

$$\psi'_u = 45^\circ, \psi''_u = 135^\circ.$$

Таким чином, у колі (рис. 8.8) діє вхідна напруга

$$u(t) = 170 \sin(2\pi \cdot 400 \cdot t + 45^\circ) = 170 \sin(2510t + 45^\circ) \text{ В.}$$

Величину індуктивності визначимо, як:

$$L = \frac{x}{\omega} = \frac{20}{2\pi \cdot 400} = 0,0796 \text{ Гн} = 7,96 \text{ мГн.}$$

Задаємо довільні додатні напрями струмів та записуємо систему рівнянь за II законом Кірхгофа

$$i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = u,$$

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0.$$

Перехідні функції струмів шукаємо як суми відповідних усталених та вільних складових:

$$i_1(t) = i_{1y} + i_{1e}.$$

$$i_2(t) = i_{2y} + i_{2e}.$$

Проведемо розрахунок усталеного режиму після комутації та визначимо усталені складові перехідних струмів. Оскільки після замикання ключа вітка  $R_2$ - $L_2$  закорочується, усталені струми визначаються незалежно один від одного.

$$\underline{I}_{m1y} = \frac{U_m}{R_1 + jx} = \frac{170e^{j45^\circ}}{11,5 + j20} = 7,37e^{-j15,1^\circ} \text{ A},$$

$$i_{1y} = 7,37\sin(2510t - 15,1^\circ) \text{ A},$$

$$i_{2y} = 0.$$

Визначимо вільні складові перехідного струму. Для цього в після комутаційній схемі вилучаємо всі джерела енергії, замінивши їх внутрішніми опорами, утворивши коло для розрахунку вільного процесу. В ньому (рис. 8.9) є два незалежні контури в кожному з яких циркулює струм. Отже, характеристичне рівняння складаємо для кожного з контурів і визначаємо сталу часу

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} = \frac{7,96 \cdot 10^{-3}}{11,5} = 0,692 \cdot 10^{-3} \text{ с},$$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_2} = \frac{7,96 \cdot 10^{-3}}{58} = 0,1372 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

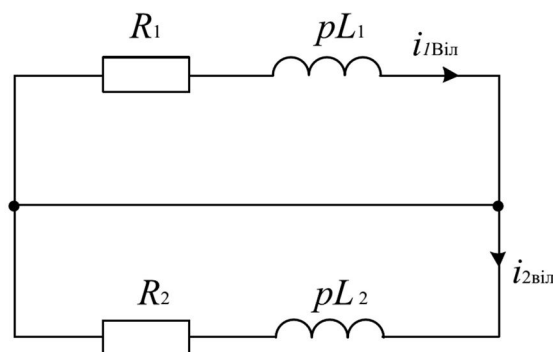


Рисунок 8.9

Запишемо загальні вирази для шуканих струмів відповідно до виду коренів характеристичного рівняння:

$$i_1(t) = i_{1y} + i_{1\epsilon} = 7,37\sin(2510t - 15,1^\circ) + A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}},$$

$$i_2(t) = i_{2y} + i_{2\epsilon} = A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

Для розрахунку сталих інтегрування проведемо розрахунок початкових умов з усталеного режиму до комутації

$$\underline{\text{Im}}_{1(0-)} = \underline{\text{Im}}_{2(0-)} = \frac{U_m}{R_1 + R_2 + 2 \cdot jx} = \frac{170e^{j45^\circ}}{11,5 + 58 + 2 \cdot j20} = 2,12e^{j15,08^\circ} \text{ A},$$

$$i_{1(0-)} = i_{2(0-)} = 2,12\sin(2510t + 15,08^\circ) \text{ A}.$$

Отже, згідно з першим законом комутації, незалежними початковими умовами є:

$$i_1(0) = i_2(0) = i_{1(0-)} = 2,12\sin(15,08^\circ) = 0,552 \text{ A}.$$

Знайдемо сталі інтегрування. Для цього запишемо загальні вирази для шуканих перехідних струмів  $i_1(t)$  та  $i_2(t)$  в момент  $t = 0$ :

$$i_1(0) = 7,37\sin(-15,1^\circ) + A_1 = 0,552,$$

$$A_1 = 2,47;$$

$$i_2(0) = A_2 = 0,552,$$

$$A_2 = 0,552.$$

Запишемо кінцеві вирази законів змінення струмів в колі:

$$i_1(t) = 7,37\sin(\omega t - 15,1^\circ) + 2,47e^{-1445t} \text{ A},$$

$$i_2(t) = 0,552e^{-7290t} \text{ A}.$$

Визначимо момент, при якому перехідний процес відсутній.

Оскільки характер перехідного процесу залежить від моменту вмикання кола, необхідно визначити початкову фазу вхідної напруги:

$$A_1 = \text{Im}_{1(0-)} \sin(\psi_u - \varphi) - \text{Im}_{1y(0-)} \sin(\psi_u - \varphi_1) = 0,$$

$$\text{Im}_{1(0-)} \sin(\psi_u - \varphi) = \text{Im}_{1y(0-)} \sin(\psi_u - \varphi_1),$$

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{x}{R_1}\right) = \arctg\left(\frac{20}{11,5}\right) = 60,1^\circ,$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(\frac{x}{R_2}\right) = \arctg\left(\frac{20}{58}\right) = 19,03^\circ,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{R_1 + R_2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot 20}{11,5 + 58}\right) = 29,9^\circ,$$

$$2,12\sin(\psi_u - 29,9^\circ) = 7,37\sin(\psi_u - 60,1^\circ),$$

$$5,33\cos\psi_u = 1,836\sin\psi_u,$$

$$\psi_u = \operatorname{arctg}\left(\frac{5,33}{1,836}\right) \approx 71^\circ.$$

#### Задача 8.4.

В колі (рис. 8.10) з параметрами  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом,  $C = 125$  мкФ, протікав струм  $i(t)_- = 5\sin\omega t$  А з кутовою частотою  $\omega = 1000^{-1}$  с. В перший момент після комутації струм через  $R_1$  не протікає  $i_1(0) = 0$ . Виконати розрахунок перехідного струму  $i_2(t)$  та напруги на конденсаторі  $u_C(t)$ .

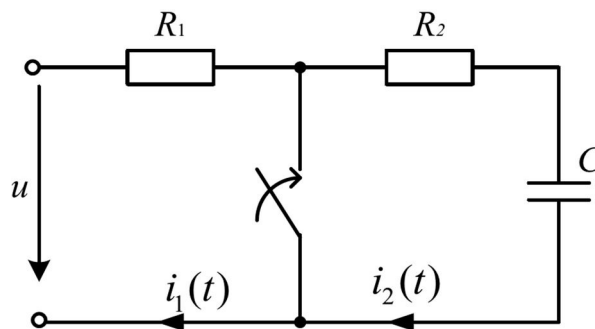


Рисунок 8.10

#### Розв'язання

Визначимо комплекс амплітуди вхідної напругу

$$U_m = \operatorname{Im}(0_-) = \left(R_1 + R_2 - \frac{j1}{\omega C}\right) = 5 \cdot \left(2 + 4 - \frac{j1}{1000 \cdot 125 \cdot 10^{-6}}\right) = 50e^{-j53,1^\circ} \text{ В}$$

та її миттєве значення

$$u = 50\sin(1000t - 53,1^\circ) \text{ В.}$$

Задаємо довільні додатні напрями струмів та записуємо систему рівнянь за II законом Кірхгофа

$$i_1 R_1 = u,$$

$$i_2 R_2 + u_C \frac{di_2}{dt} = 0,$$

$$i_2 = C \frac{du_C}{dt}.$$

Перехідні функції струмів шукаємо як суми відповідних усталених та вільних складових:

$$i_1(t) = i_{1y} + i_{1\epsilon};$$

$$i_2(t) = i_{2y} + i_{2\epsilon};$$

$$u_C(t) = u_{Cy} + u_{C\epsilon}.$$

Проведемо розрахунок усталеного режиму після комутації та визначимо усталені складові перехідних величин:

$$i_1(t) = i_{1y} = \frac{U}{R_1} = 50 \sin(1000t - 53,1^\circ) = 25 \sin(1000t - 53,1^\circ) \text{ A};$$

$$i_{2y} = 0;$$

$$u_{C\epsilon} = 0.$$

Вільному режиму відповідає схема, зображена на рис. 8.11.

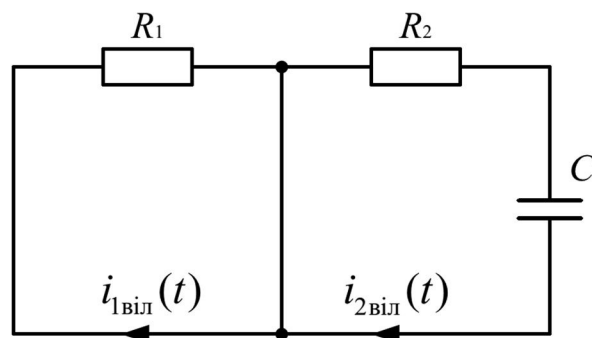


Рисунок 8.11

Диференціальне рівняння кола:

$$i_{2\epsilon} R_2 + \frac{1}{C} \int i_{1\epsilon} dt = 0,$$

$$\frac{di_{2\epsilon}}{dt} R_2 + \frac{1}{C} i_{2\epsilon} = 0.$$

Розв'язавши дане рівняння отримаємо сталу інтегрування

$$\tau_2 = R_2 C = 4 \cdot 125 \cdot 10^{-6} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 0,5 \text{ мс.}$$

Вираз перехідного струму у загальному вигляді має вигляд:

$$i_2(t) = i_{2y} + i_{2\epsilon} = A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

Проведемо розрахунок усталеного режиму до комутації та визначимо незалежні початкові умови.

$$U_{mC}(0_-) = \text{Im}(0_-) \cdot \left( -\frac{j1}{\omega C} \right) = 5 \cdot \left( \frac{j1}{1000 \cdot 125 \cdot 10^{-6}} \right) = -j40 \text{ В},$$

звідки

$$u_C(0_-) = 40 \sin(1000t - 90^\circ) \text{ В.}$$

Отже, напруга на конденсаторі, згідно другого закону комутації, та струм, як залежна початкова умова, в момент комутації дорівнюють

$$u_C(0) = 40 \sin(-90^\circ) = -40 \text{ В},$$

$$i_2(0) = -\frac{u_C(0)}{R_2} = -\frac{40}{4} = -10 \text{ А.}$$

Знак “-” показує, що струм протікає у зворотному напрямку, отже конденсатор розряджається на резистор.

Враховуючи початкові умови, розрахуємо сталу інтегрування:

$$i_2(0) = i_{2y}(0) + i_{2\epsilon}(0),$$

звідки

$$A_2 = 10.$$

Перехідний струм та напруга на конденсаторі:

$$i_2(t) = 10 e^{\frac{-t}{0,510^{-3}}} = 10 e^{-2000t} \text{ А},$$

$$u_C(t) = -40 e^{-2000t} \text{ В.}$$

### 8.3 Розрахунок перехідного процесу у колі з двома накопичувачами енергії при дії постійних джерел енергії

#### Задача 8.5.

Виконати розрахунок початкових умов у колі другого порядку (рис. 8.12) за відомих параметрів кола:  $E_1 = 200 \text{ В}$ ,  $e_2 = 100\sqrt{2}\sin(3141t - 30^\circ) \text{ В}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ ,  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 120 \text{ Ом}$ ,  $L_3 = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $L_4 = 0,2 \text{ Гн}$ .

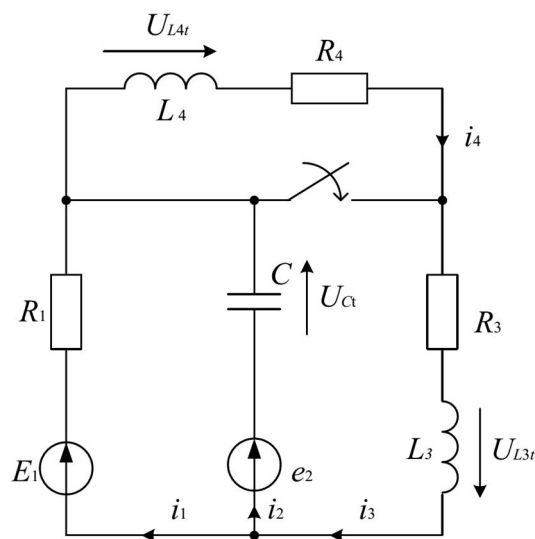


Рисунок 8.12

#### Розв'язання

У даній задачі невідомими величинами є значення струмів у всіх вітках та пруги на реактивних елементах в момент комутації:

$$i_1(0), i_2(0), i_3(0), i_4(0), u_C(0), u_{L3}(0), u_{L4}(0).$$

Оскільки у колі одночасно діють джерела постійної та синусоїдної напруг, для виконання поставленої задачі скористаємось методом накладання.

1. Проведемо розрахунок усталеного режиму до комутації ( $t < 0$ )

**Перший режим**, коли у колі діє лише джерело постійної напруги (див. рис. 8.13)

$$E \neq 0; e_2 = 0.$$

$$i_{1.1}(0_-) = i_{3.1}(0_-) = i_{4.1}(0_-) = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{200}{200 + 30 + 120} = 0,8 \text{ А},$$

$$u_{C.1}(0_-) = i_{3.1}(0_-)(R_3 + R_4) = 0,8 \cdot (30 + 120) = 120 \text{ В}.$$

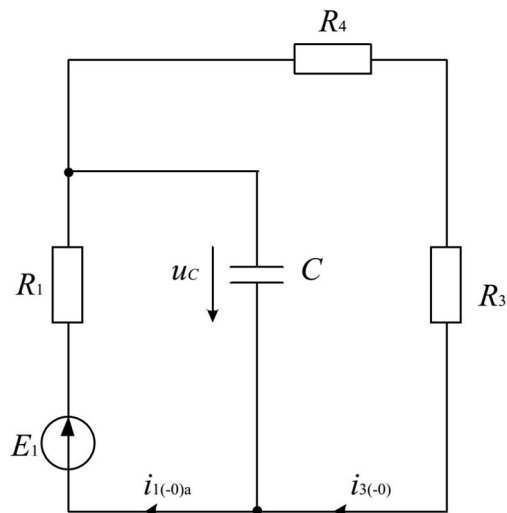


Рисунок 8.13

**Другий режим**, коли у колі діє лише джерело змінної напруги.

$$E = 0; e \neq 0.$$

Проведемо розрахунки у комплексному вигляді.

$$\underline{E}_2 = 100 e^{-j30^\circ},$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2(0_-) &= -j\frac{1}{\omega C} + \frac{R_1 \cdot (R_3 + j\omega L_3 + R_4 + j\omega L_4)}{R_1 + (R_3 + j\omega L_3 + R_4 + j\omega L_4)} = \\ &= -j\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} + \frac{100 \cdot (30 + j2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 + 120 + j2\pi \cdot 50 \cdot 0,2)}{100 + (30 + j2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 + 120 + j2\pi \cdot 50 \cdot 0,2)} = \\ &= 67,6 e^{-j16,02^\circ} = 65 - j18,65 \text{ Ом}, \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{2.2}(0_-) = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2(0_-)} = \frac{100 e^{-j30^\circ}}{67,6 e^{-j16,02^\circ}} = 1,479 e^{-j13,98^\circ} = 1,435 - j0,357 \text{ A},$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{3.2}(0_-) &= \underline{I}_{2.2}(0_-) \frac{R_1}{R_1 + (R_3 + j\omega L_3 + R_4 + j\omega L_4)} = \\ &= 1,479 e^{-j13,98^\circ} \cdot \frac{100}{100 + (30 + j2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 + 120 + j2\pi \cdot 50 \cdot 0,2)} = \\ &= 0,554 e^{-j34,6^\circ} \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{C.2}(0_-) = \underline{I}_{2.2}(0_-) \cdot j\frac{-1}{\omega C} = 1,479 e^{-j13,98^\circ} \cdot j\frac{-1}{2\pi \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 47,1 e^{-j104^\circ} \text{ B}.$$

Таким чином, миттєві значення для струму та напруги на конденсаторі матимуть вигляд:

$$i_{3,2}(0_-) = i_{4,2}(0_-) = 0,554 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t - 34,6^\circ) \text{ A},$$

$$u_{C,2}(0_-) = 47,1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t - j104^\circ) \text{ B}.$$

**Третій режим**, коли у колі діють джерела постійної та змінної напруг

$$E \neq 0; e \neq 0.$$

$$i_3(0_-) = i_4(0_-) = i_{3,1}(0_-) + i_{3,2}(0_-) = 0,8 + 0,554 \sqrt{2} \sin(314t - 34,6^\circ) \text{ A},$$

$$u_C(0_-) = u_{C,1}(0_-) + u_{C,2}(0_-) = -120 + 47,1 \sqrt{2} \sin(314t - 104^\circ) \text{ B}.$$

2. Проведемо розрахунок в момент комутації та визначимо залежні початкові умови.

Згідно до першого та другого законів комутації, струм у вітці з індуктивністю та напруга на конденсаторі не можуть змінитися стрибком.

$$i_3(0) = i_4(0) = 0,8 + 0,554 \sqrt{2} \sin(-34,6^\circ) = 0,355 \text{ A},$$

$$u_C(0) = -120 + 47,1 \sqrt{2} \sin(-104^\circ) = -184,6 \text{ B}.$$

У момент  $t = 0$  значення змінної ЕРС набуває вигляду:

$$e_2(0) = E_2 \sqrt{2} \sin \psi = 100 \cdot \sqrt{2} \sin(-30^\circ) = -70,7 \text{ B}.$$

Складемо за законами Кірхгофа систему рівнянь для післякомутаційної схеми з урахуванням незалежних початкових умов (згідно законів комутації):

$$\begin{cases} i_1(0) + i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ i_1(0) R_1 - u_C(0) = E_1 - e_2(0) \\ u_C(0) - i_3(0) R_3 + u_{L3}(0) = e_2(0) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} i_1(0) + i_2(0) - 0,355 = 0 \\ 100 i_1(0) + 184,6 = 200 + 70,7 \\ -184,6 + 0,355 \cdot 30 + u_{L3}(0) = -70,7 \end{cases} .$$

Розв'язавши систему будь-яким методом, отримаємо:

$$i_1(0) = 0,861 \text{ A},$$

$$i_2(0) = -0,506 \text{ A},$$

$$i_3(0) = 0,355 \text{ A},$$

$$u_C(0) = -184,6 \text{ В},$$

$$u_{L3}(0) = 103,3 \text{ В},$$

$$u_{L4}(0) = -42,6 \text{ В}.$$

### Задача 8.6.

Виконати розрахунок перехідних вхідного струму та напруги на конденсаторі (рис. 8.14) за заданих параметрів кола:  $U = 125 \text{ В}$ ,  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $L_2 = 40 \text{ мГн}$ ,  $C_3 = 5 \text{ мкФ}$ .

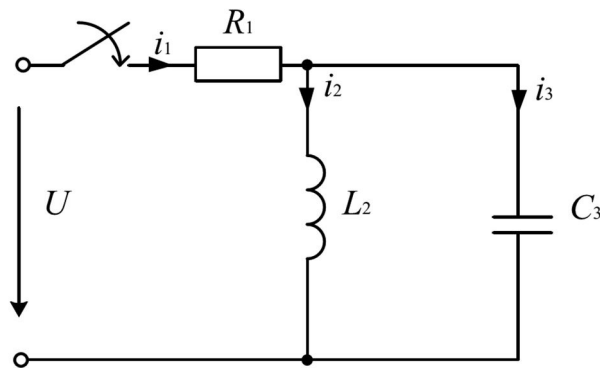


Рисунок 8.14

### Розв'язання

1. Електрична рівновага кола після комутації може бути подана системою рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + C \frac{du_C(t)}{dt} \\ R_1 i_1(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} = U \\ R_1 i_1(t) + u_C(t) = U \end{cases} .$$

В утворені системі кожна з перехідних функцій є сумою усталеної та вільної складових

$$i_1(t) = I_{1y} + i_{1\epsilon}(t);$$

$$i_2(t) = I_{2y} + i_{2\epsilon}(t);$$

$$i_3(t) = I_{3y} + i_{3\epsilon}(t);$$

$$u_L(t) = U_{Ly} + u_{L\epsilon}(t).$$

$$u_C(t) = U_{Cy} + u_{C\epsilon}(t).$$

2. З аналізу усталеного режиму роботи кола після комутації розрахуємо усталені складові перехідних функцій

$$I_{3y} = 0,$$

$$I_{1y} = I_{2y} = \frac{U}{R_1} = \frac{125}{100} = 1,25 \text{ A},$$

$$U_{Ly} = 0,$$

$$U_{Cy} = 0.$$

3. Аналіз вільного режиму роботи кола, який утворюється шляхом заміни джерел енергії у колі після комутації їх внутрішніми опорами, дозволяє встановити закон зміни перехідної функції.

Запишемо систему рівнянь відносно вільних складових перехідних функцій та перепишемо її відносно однієї змінної.

$$\begin{cases} i_{1\epsilon}(t) = i_{2\epsilon}(t) + C \frac{du_{C\epsilon}(t)}{dt} \\ R_1 i_{1\epsilon}(t) + L \frac{di_{2\epsilon}(t)}{dt} = 0 \\ R_1 i_{1\epsilon}(t) + u_{C\epsilon}(t) = 0 \\ i_{3\epsilon}(t) = C \frac{du_{C\epsilon}(t)}{dt} \end{cases} ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{i_{1\epsilon}(t)}{dt} = \frac{i_{2\epsilon}(t)}{dt} + \frac{i_{3\epsilon}(t)}{dt} \\ \frac{di_{2\epsilon}(t)}{dt} = -\frac{R_1 i_{1\epsilon}(t)}{L} \\ i_{1\epsilon}(t) = -\frac{du_{C\epsilon}(t)}{R_1} \\ \frac{i_{3\epsilon}(t)}{dt} = C \frac{d^2 u_{C\epsilon}(t)}{dt^2} \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{i_{1\epsilon}(t)}{dt} = \frac{i_{2\epsilon}(t)}{dt} + \frac{i_{3\epsilon}(t)}{dt} \\ \frac{di_{2\epsilon}(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L} \left( -\frac{u_{C\epsilon}(t)}{R_1} \right) \\ \frac{di_{1\epsilon}(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1} \frac{du_{C\epsilon}(t)}{dt} \\ \frac{i_{3\epsilon}(t)}{dt} = C \frac{d^2 u_{C\epsilon}(t)}{dt^2} \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{i_{1\epsilon}(t)}{dt} = \frac{i_{2\epsilon}(t)}{dt} + \frac{i_{3\epsilon}(t)}{dt} \\ \frac{di_{2\epsilon}(t)}{dt} = \frac{u_{C\epsilon}(t)}{L} \\ \frac{di_{1\epsilon}(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1} \frac{du_{C\epsilon}(t)}{dt} \\ \frac{i_{3\epsilon}(t)}{dt} = C \frac{d^2 u_{C\epsilon}(t)}{dt^2} \end{array} \right. .$$

Від утвореного диференційного рівняння другого порядку перейдемо до його характеристичного та розрахуємо корені:

$$-\frac{1}{R_1} \frac{du_{C\epsilon}(t)}{dt} = \frac{u_{C\epsilon}(t)}{L} + C \frac{d^2 u_{C\epsilon}(t)}{dt^2},$$

$$C \frac{d^2 u_{C\epsilon}(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \frac{du_{C\epsilon}(t)}{dt} + \frac{u_{C\epsilon}(t)}{L} = 0,$$

$$Cp^2 + \frac{1}{R_1}p + \frac{1}{L} = 0,$$

$$p_{1,2} = -1000 \pm j2000.$$

Для розрахунку коренів характеристичного рівняння можливе застосування методу вхідного опору (рис. 8.15):

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{R_1 p L_2}{R_1 + p L_2} + \frac{1}{p C_3} = 0,$$

$$\frac{40 \cdot 100 \cdot 10^{-3} p}{100 + 10^{-3} p} + \frac{10^6}{5p} = 0,$$

$$\frac{4p^2 + 8000p + 2 \cdot 10^7}{(100 + 10^{-3} p)p} = 0;$$

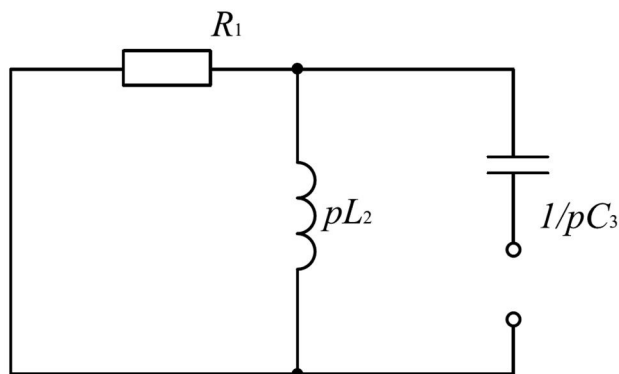


Рисунок 8.15

$$4p^2 + 8000p + 2 \cdot 10^7 = 0,$$

$$p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6 = 0,$$

$$p_{1,2} = -1000 \pm j2000 = -\delta \pm \omega',$$

$$\delta = 1000, \omega' = 2000.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, то вільні складові перехідних функцій буде змінюватись за законом затухаючої синусоїди

$$f_s(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega' t + \alpha).$$

$$i_1(t) = I_{1e} + A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \alpha_1),$$

$$i_1(t) = I_{2e} + A_2 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \alpha_2),$$

$$i_1(t) = I_{3e} + A_3 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \alpha_3),$$

$$u_L(t) = u_{Le} + B_2 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \beta_2),$$

$$u_C(t) = u_{Ce} + B_1 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \beta_1).$$

4. Для розрахунку невідомих сталих інтегрування та початкових фаз кожної із синусоїд виконаємо розрахунок початкових умов та диференціалів перехідних функцій у момент комутації.

Незалежні початкові умови розраховуються для кола до комутації

$$i_2(0_-) = 0, u_C(0_-) = 0.$$

Залежні початкові умови розраховуються в момент комутації ( $t = 0$ ).

Для визначення струмів та напруг в момент комутації, запишемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для після комутаційної схеми (рис. 8.16). Врахуємо, що згідно законів комутації мають місце наступні незалежні початкові умови:

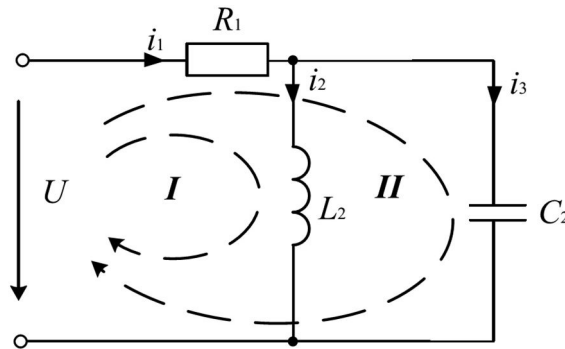


Рисунок 8.16

$$\begin{cases} i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) \\ R_1 i_1(0) + u_L(0) = U ; \\ R_1 i_1(0) + u_C(0) = U \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1(0) = \frac{U - u_C(0)}{R_1} \\ i_3(0) = i_1(0) - i_2(0); \\ u_L(0) = U - R_1 i_1(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1(0) = \frac{125 - 0}{100} \\ i_3(0) = 1,25 - 0 \quad ; \\ u_L(0) = 125 - 100 \cdot 1,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1(0) = 1,25 \\ i_3(0) = 1,25. \\ u_L(0) = 0 \end{cases}$$

Для визначення сталих інтегрування, знайдемо диференціали всіх струмів та напруг на реактивних елементах за напругою на індуктивності  $L_2$

$$u_L = L_2 \frac{di_2}{dt},$$

при  $t = 0$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{u_L(0)}{L_2} = 0;$$

за струмом на конденсаторі  $C_3$

$$i_3 = C_3 \frac{du_C}{dt},$$

при  $t = 0$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i_3(0)}{C_3} = 25 \cdot 10^4;$$

для контура II при  $t = 0$

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0,$$

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{R_1} \frac{du_C}{dt} = \frac{25 \cdot 10^4}{100} = -2500;$$

для контура I при  $t = 0$

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{du_L}{dt} = 0,$$

$$\frac{du_L}{dt} = -R_1 \frac{di_1}{dt} = -25 \cdot 10^4;$$

за першим правилом Кірхгофа при  $t = 0$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt},$$

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} = -2500.$$

5. Запишемо загальні вирази для шуканих напруг і струмів відповідно до виду коренів характеристичного рівняння

$$\begin{cases} i_1(t) = i_{1y} + i_{1e} = i_{1y} + A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \alpha_1) \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{di_{1y}}{dt} - \delta A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \alpha_1) + \omega' A_1 e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \alpha_1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C(t) = u_{Cy} + u_{Ce} = u_{Cy} + B_1 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \beta_1) \\ \frac{du_C}{dt} = \frac{u_{Cy}}{dt} - \delta B_1 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \beta_1) + \omega' B_1 e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \beta_1). \end{cases}$$

6. Знайдемо сталі інтегрування. Для цього запишемо загальні вирази для шуканих напруг і струмів в момент  $t = 0$ .

Для струму  $i_1(t)$

$$\begin{cases} i_1(0) = i_{1y}(0) + i_{1e}(0) = i_{1y}(0) + A_1 \sin(\alpha_1) \\ \frac{di_1}{dt} = -\delta A_1 \sin(\alpha_1) + \omega' \cos(\alpha_1) \end{cases},$$

$$\begin{cases} 1,25 = 1,25 + A_1 \sin(\alpha_1) \\ -2500 = -1000A_1 \sin(\alpha_1) + 2000 \cos(\alpha_1) \end{cases}'$$

$$A_1 \sin \alpha_1 = 0,$$

звідки

$$\begin{cases} A_1 \neq 0 \\ \alpha_1 = \{0; \pi\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \neq \frac{-2500}{2000 \cos(\alpha_1)} = \frac{-2500}{2000 \cos(\pi)} = 1,25 \\ \alpha_1 = \{0; \pi\} \end{cases}.$$

Для напруги на конденсаторі  $u_C(t)$

$$\begin{cases} u_C(0) = u_{Cy}(0) + u_{Cs}(0) = u_{Cy}(0) + B_1 \sin(\beta_1) \\ \frac{du_C}{dt} = -\delta B_1 \sin(\beta_1) + \omega' B_1 \cos(\beta_1) \end{cases},$$

$$\begin{cases} 0 = 0 + B_1 \sin(\beta_1) \\ 25 \cdot 10^4 = -1000 B_1 \sin(\beta_1) + 2000 B_1 \cos(\beta_1) \end{cases}'$$

$$B_1 \sin \beta_1 = 0,$$

звідки

$$\begin{cases} B_1 \neq 0 \\ \sin(\beta_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 125 \\ \beta_1 = 0 \end{cases}.$$

Результуючі перехідні функції:

$$i_1(t) = 1,25 + 1,25e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \pi),$$

$$u_C(t) = 125e^{-\delta t} \sin(\omega' t).$$

Графік  $u_C(t)$  (рис. 8.17) будується за даними

$t \cdot 10^{-3}$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$u_C(t)$	0	63,8	41,8	3,94	-12,8	-9,84	-1,74	2,48	2,26	0,57	-0,46

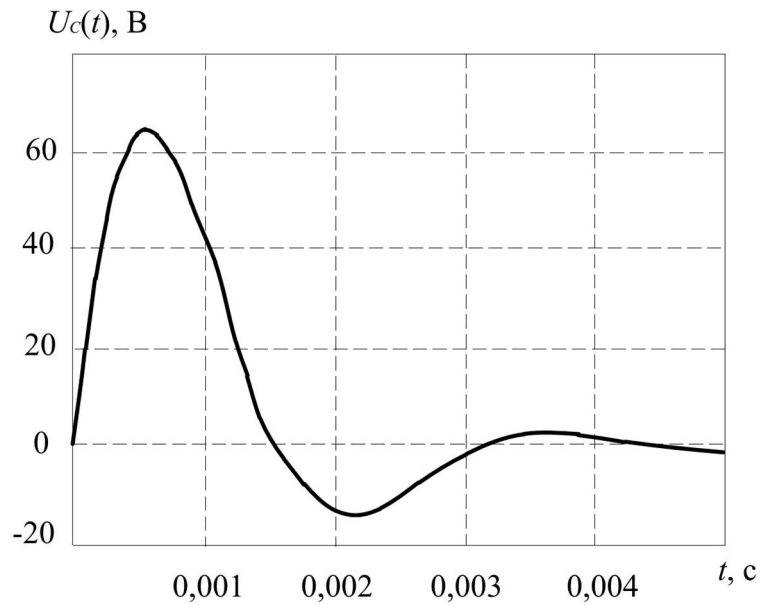


Рисунок 8.17

#### 8.4 Розрахунок перехідного процесу у колі з двома накопичувачами енергії при дії синусоїдних джерел енергії

##### Задача 8.7.

Виконати розрахунок перехідних струму на вході кола (рис. 8.18) за заданих параметрів кола  $u(t) = 100\sqrt{2}\sin(10^3t + 45^\circ)$  В,  $R = 4$  кОм;  $L_1 = L_2 = 1$  Гн;  $C_1 = 0,5$  мкФ;  $C_3 = 1$  мкФ.

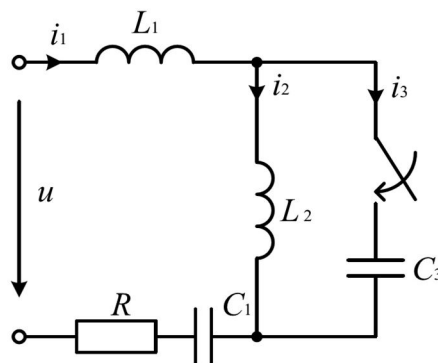


Рисунок 8.18

##### Розв'язання

Запишемо значення реактивних опорів:

$$X_{L1} = X_{L2} = \omega L_1 = 1000 \cdot 1 = 1000 \text{ Ом},$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = 2000 \text{ Ом},$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 1000 \text{ Ом}.$$

Оскільки  $B_{L2} = B_{C3}$ , то в паралельному контурі має місце резонанс струмів.

Отже, до комутації

$$i_1(0_-) = 0;$$

$$u_{C1}(0_-) = 0;$$

$$i_2(0_-) = -0,1 \text{ А};$$

$$\begin{aligned} i_2(0_-) &= \frac{U_m}{\omega L} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{100_m \sqrt{2}}{1000 \cdot 1} \sin(10^3 t + 45^\circ - 90^\circ) = \\ &= 0,1 \sqrt{2} \sin(10^3 t - 45^\circ) \text{ А}. \end{aligned}$$

Оскільки енергія електричного та магнітного полів не може змінюватись стрибком, то струм через індуктивності

$$L(i_1(0_-) + i_2(0_-)) = 2Li_1(0)$$

звідки

$$i_1(0) = \frac{1}{2} (i_1(0_-) + i_2(0_-)) = -0,05 \text{ А}$$

та напруги на ємності  $u_{C1}(0) = u_{C1}(0_-) = 0$  мають значення, яке вони мали безпосередньо до комутації.

Обійдемо контур за II законом Кірхгофа в момент комутації та визначимо

$$u(0) = i_1(0)R + u_{C1}(0) + 2L \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0},$$

$$100\sqrt{2}\sin 45^\circ = -0,05 \cdot 10^3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$$

звідси

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \left( 100\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 0,05 \cdot 10^3 \cdot 4 \right) = 150 \frac{A}{c}.$$

Розглянемо усталений режим після комутації ( $t \rightarrow \infty$ ). Оскільки  $2X_L = X_{C1}$ , то в післякомутаційному колі має місце резонанс навантажень, отже повний опір кола суто активний. Визначимо усталену складову вхідного струму, її похідну та їх значення в момент  $t=0$

$$i_{1y} = \frac{U}{R} = \frac{100\sqrt{2}\sin(10^3t + 45^\circ)}{4 \cdot 10^3} = 0,025\sqrt{2}\sin(10^3t + 45^\circ),$$

$$i_{1y}(0) = 0,025\sqrt{2}\sin(45^\circ) = 0,025 A;$$

$$\frac{di_{1y}}{dt} = 0,025\sqrt{2} \cdot 10^3 \cos(10^3t + 45^\circ) = 25\sqrt{2}\cos(10^3t + 45^\circ),$$

$$\left. \frac{di_{1y}}{dt} \right|_{t=0} = 25\sqrt{2}\cos(45^\circ) = 25 \frac{A}{c}.$$

Запишемо характеристичне рівняння та розрахуємо його корені

$$p^2 + \frac{pR}{2L} + \frac{1}{2LC_1} = 0;$$

$$p^2 + \frac{p \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = 0;$$

$$p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 10^6 = 0;$$

$$p_{1,2} = -10^3 \pm \sqrt{10^6 + 10^6} = -10^3 - \text{корені дійсні та кратні.}$$

Враховуючи значення коренів характеристичного рівняння запишемо загальний вираз для перехідного струму та його диференціал:

$$i_1(t) = i_{1y} + i_{1e} = i_{1y} + (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t},$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_{1y}}{dt} + e^{-\delta t} [-\delta (A_1 + A_2 t) + A_2].$$

Складемо систему рівнянь для моменту  $t = 0$  та визначимо сталі інтегрування.

$$\begin{cases} i_1(0) = i_{1y}(0) + A_1 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{1y}}{dt} \right|_{t=0} - \delta (A_1 + A_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0,05 = 0,025 + A_1 \\ 150 = 25 - 1000(A_1 + A_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = -0,075 \\ 150 = 25 - 1000(-0,075 + A_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = -0,075 \\ A_2 = 50 \end{cases}.$$

Вираз закону змінення вхідного струму має вигляд:

$$i_1(t) = 0,025\sqrt{2}\sin(10^3 t + 45^\circ) + (-0,075 + 50t) e^{-1000t} \text{ А.}$$

## 8.5 Операторний метод розрахунку перехідного процесу в електричному колі

### Задача 8.8.

Виконати розрахунок перехідного струму  $i(t)$  за заданих параметрів кола (рис. 8.19):  $e(t) = 200\sin(100t + 30^\circ) \text{ В}$ ,  $R = 75 \text{ Ом}$ ,  $R_0 = 125 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ .

### Розв'язання

Розрахунок перехідного процесу в колі будемо проводити символічним методом.

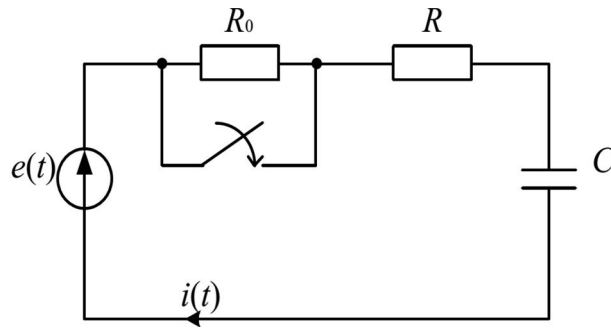


Рисунок 8.19

На вході діє синусоїдна ЕРС, її комплексне амплітудне значення має вигляд:

$$\underline{E}_m = 200e^{j30^\circ} \text{ В.}$$

Визначимо значення струму та напруги на ємності до комутації:

$$\underline{I}_m(0_-) = \frac{\underline{E}_m}{R_0 + R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{200e^{j30^\circ}}{125 + 75 - \frac{j}{100 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = 0,894e^{j56,6^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{U}_{Cm}(0_-) = \underline{I}_m(0_-) \cdot \left( \frac{-j}{\omega C} \right) = 0,894e^{j56,6^\circ} \cdot \left( \frac{-j}{100 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \right) = 0,84e^{-j33,4^\circ} \text{ В.}$$

Перейдемо від комплексу до миттєвого значення напруги на ємності:

$$u_C(0_-) = 89,4\sin(100t - 33,4^\circ) \text{ В.}$$

За II законом комутації:

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 89,4\sin(-33,4^\circ) = -49,2 \text{ В.}$$

Для зручності визначення перехідного струму (напруги) його умовно поділяють на усталену та вільну складові. Усталену складову розраховуємо з усталеного режиму після комутації

$$\underline{I}_{m,y} = \frac{\underline{E}_m}{R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{200e^{j30^\circ}}{75 - \frac{j}{100 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = 1,6e^{j83,13^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{U}_{Cmy} = \underline{I}_{m,y} \cdot \left( \frac{-j}{\omega C} \right) = 1,6e^{j83,13^\circ} \cdot \left( \frac{-j}{100 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \right) = 160e^{-j6,87^\circ} \text{ В.}$$

Перейдемо до миттєвих значень:

$$i_y(t) = 1,6\sin(100t + 83,13^\circ) \text{ A},$$

$$u_{Cy}(t) = 160\sin(100t - 6,87^\circ) \text{ B}.$$

Розрахуємо величини усталених складових струму та напруги в момент комутації ( $t = 0$ ):

$$i_y(0) = 1,6\sin(83,13^\circ) = 1,58 \text{ A},$$

$$u_{Cy}(0) = 160\sin(-6,87^\circ) = -19,14 \text{ B}.$$

Вільні складові перехідних функцій протікають в після комутаційному колі лише за рахунок енергії, накопиченої на реактивних елементах до комутації (при відсутності зовнішніх джерел енергії). Для визначення  $i_v$  та  $u_{Cv}$  скористаємось операторним методом. Операторна схема заміщення представлена на рис. 8.20.

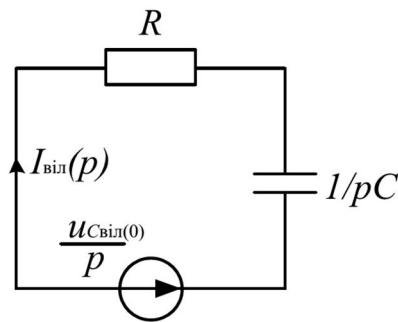


Рисунок 8.20

Визначимо значення вільної складової при  $t = 0$ :

$$u_{Cv}(0) = u_C(0) - u_{Cy}(0) = -49,2 + 19,14 = -30,1 \text{ B}.$$

Відповідно до схеми заміщення, розрахуємо операторний струм за законом Ома:

$$I_v = \frac{\frac{-u_{Cv}(0)}{p}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{30,1}{p}}{75 + \frac{1}{p \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = \frac{0,4}{p + 133,3}$$

Перейдемо від зображення до оригіналу:

$$i_v(t) = 0,4e^{-j133,3^\circ} \text{ A}.$$

Запишемо закон зміни перехідного струму в колі:

$$i(t) = i_y(t) + i_e(t) = 1,6\sin(100t + 83,13^\circ) + 0,4e^{-j133,3^\circ} \text{ A.}$$

### Задача 8.9.

Виконати розрахунок перехідного струму через індуктивність та напругу (рис. 8.21) на ній за заданих параметрів кола:  $E_2 = 120 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L_3 = 50 \text{ мГн}$ ,  $J = 6 \text{ А}$ .

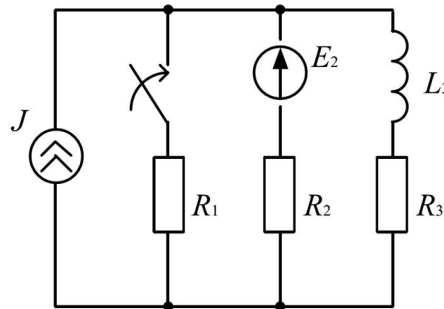


Рисунок 8.21

### Розв'язання

Виконаємо розрахунок усталеного режиму до комутації, скориставшись методом контурних струмів (рис. 8.22)

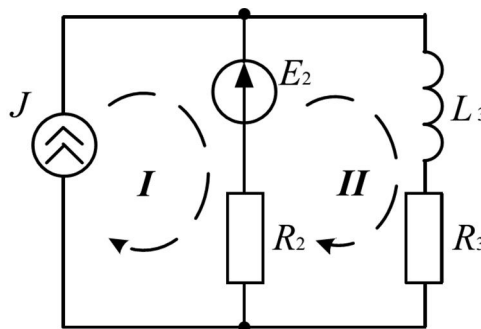


Рисунок 8.22

$$\begin{cases} (R_2 + R_3)I_I(0_-) - R_3I_{II}(0_-) = E_2 \\ I_{II}(0_-) = J \end{cases};$$

$$I_I(0_-) = \frac{E_2 + JR_3}{R_1 + R_3} = \frac{120 + 6 \cdot 10}{10 + 10} = 9 \text{ А,}$$

$$i_3(0_-) = I_I(0_-) = 9 \text{ А.}$$

Отже, згідно першого закону комутації

$$i_3(0) = i_3(0_-) = 9 \text{ А.}$$

Представимо після комутаційну схему у вигляді операторної схеми заміщення (рис. 8.23) та визначимо операторні зображення струмів.

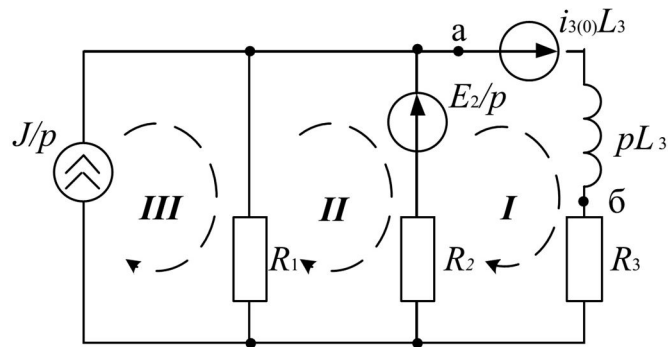


Рисунок 8.23

На схемі заміщення окремою ЕРС зображена внутрішня ЕРС індуктивності напрямком якої збігається із напрямком початкового струму:

$$i_3(0)L_3 = 9 \cdot 0,05 = 0,45 \text{ A.}$$

Складемо систему рівнянь за методом контурних струмів для їх операторних зображень:

$$\begin{cases} (R_2 + R_3 + pL_3)I_I(p) - R_2I_{II}(p) = \frac{E_2}{p} + i_3(0)L_3 \\ -R_2I_I(p) + (R_1 + R_2)I_{II}(p) - R_1I_{III}(p) = -\frac{E_2}{p} ; \\ I_{III}(p) = \frac{J}{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (10 + 10 + 0,05p)I_I(p) - 10I_{II}(p) = \frac{120}{p} + 9 \cdot 50 \cdot 10^3 \\ -10I_I(p) + (10 + 10)I_{II}(p) = -\frac{120}{p} + 10 \frac{6}{p} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} (20 + 0,05p)I_I(p) - 10I_{II}(p) = \frac{120}{p} + 0,45 \\ -10I_I(p) + 20I_{II}(p) = -\frac{60}{p} \end{cases} ;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 + 0,05p & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix} = 300 + p;$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} 120 + 0,45 & -10 \\ -\frac{60}{p} & 20 \end{vmatrix} = \frac{9p + 1800}{p};$$

$$I_L(p) = I_3(p) = \frac{\Delta 1}{\Delta} = \frac{9p + 1800}{p(300 + p)} = \frac{H(p)}{F(p)}.$$

Для отримання оригіналу скористаємось теоремою розкладання:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{H(p)}{F'(p)} e^{p_k t}.$$

Знайдемо корені рівняння:

$$F(p) = 0,$$

$$p(300 + p) = 0,$$

$$p_1 = 0; p_2 = -300;$$

$$H(p_1) = 9 \cdot 0 + 1800 = 1800,$$

$$F'(p_1) = 300 + 2p = 300 + 2 \cdot 0 = 300,$$

$$H(p_2) = 9 \cdot (-300) + 1800 = -900,$$

$$F'(p_2) = 300 + 2p = 2 \cdot (-300) + 300 = -300.$$

Запишемо вираз для перехідного струму через індуктивність

$$i_3(t) = \frac{H(p_1)}{F'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{H(p_2)}{F'(p_2)} e^{p_2 t} = 6e^{0 \cdot t} + 3e^{-300t} = 6 + 3e^{-300t}.$$

Для знаходження напруги на індуктивності запишемо її зображення, що відповідає напрузі між точками *a-b*.

$$U_L(p) = U_{a\delta}(p) = -i_3(0_-)L_3 + pL_3 \cdot I_3(p) = -0,45 + 0,05p \cdot \frac{9p + 1800}{p(300 + p)},$$

$$U_L(p) = \frac{-45}{300 + p}$$

Для визначення оригіналу операторного зображення  $U_L(p)$  скористаємось таблицею оригіналів.

Оскільки  $e^{at} = \frac{1}{p - a}$ , то оригінал знаходимо у вигляді

$$u(t) = -45e^{-300t}$$

## 8.6 Використання інтеграла Дюамеля для розрахунку перехідного процесу

### Задача 8.10.

На вхід кола рис. 8.24 подана напруга  $u(t) = 80e^{-100t}$  В. Параметри схеми:  $R = 10$  Ом,  $L = 0,05$  Гн. Розрахувати напруги на елементах.

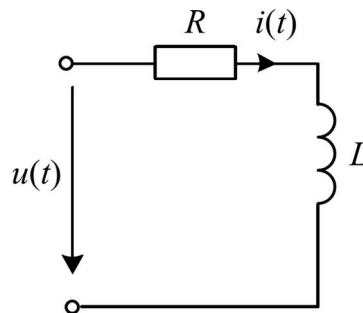


Рисунок 8.24

### Розв'язання

Коли коло  $RL$  вмикається під дію постійної напруги, то струм в ньому змінюється за законом

$$i(t) = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Отже, перехідна провідність

$$y(t) = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{1}{10} \left( 1 - e^{-\frac{10}{0,05}t} \right) = 0,1 \left( 1 - e^{-200t} \right),$$

$$y(t-x) = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}(t-x)} \right) = 0,1 \left( 1 - e^{-200t} e^{200x} \right).$$

Напруга при  $t = 0$ :

$$u(0) = 80e^{-100 \cdot 0} = 80 \text{ В.}$$

Вхідна напруга

$$u(t) = 80e^{-100t} \text{ В,}$$

а її похідна

$$u'(x) = -100 \cdot 80e^{-100x} = -8000e^{-100x}.$$

Підставимо всі знайдені вирази загальну формулу Дюамеля:

$$\begin{aligned} i(t) &= u(0)y(t) + \int_0^t u'(x)y(t-x)dx = \\ &= 80 \cdot 0,1(1 - e^{-200t}) - \int_0^t 8000e^{-100x} \cdot 0,1(1 - e^{-200(t-x)})e^{200x}dx = \\ &= 8(1 - e^{-200t}) - 800 \int_0^t e^{-100x} dx + 800e^{-200t} \int_0^t e^{100x} dx. \end{aligned}$$

Інтегрування проводимо по часу  $x$ . Час  $t$  розглядається як постійна величина, тому співмножники, які містять  $t$  і не містять  $x$ , можуть бути винесені з під знаку інтеграла

$$\begin{aligned} i(t) &= 8 - 8e^{-200t} + 8e^{-100x} \Big|_0^t + 8e^{-200t} e^{100x} \Big|_0^t = \\ &= 8 - 8e^{-200t} + 8e^{-100t} - 8 + 8e^{-100t} - 8e^{-200t} = 16e^{-100t} - 16e^{-200t} \text{ А.} \end{aligned}$$

Напруга на активному опорі:

$$u_R(t) = iR = (16e^{-100t} - 16e^{-200t}) \cdot 10 = 160e^{-100t} - 160e^{-200t} \text{ В.}$$

Напруга на індуктивності:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 0,05 (-100 \cdot 16e^{-100t} + 200 \cdot 16e^{-200t}) = -80e^{-100t} + 160e^{-200t} \text{ В.}$$

Згідного з другим законом Кірхгофа

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t).$$

Побудуємо графіки напруги, для цього виділимо особливі точки.

Визначимо момент часу, коли напруга на індуктивності проходить через нуль

$$u_L(t) = 0$$

$$-80e^{-100t_1} + 160e^{-200t_1} = 0,$$

$$80e^{-100t_1} = 160e^{-200t_1},$$

$$\frac{e^{-100t_1}}{e^{-200t_1}} = \frac{160}{80},$$

$$e^{100t_1} = 2,$$

$$100t_1 = \ln 2 = 0,693,$$

$$t_1 = \frac{0,693}{100} = 0,00693 \text{ с.}$$

В цей час струм та пропорційна струму напруга на активному опорів досягає максимуму. З іншого боку  $u(t) = 0$ , тому

$$u_R(t_1) = u(t_1) = 80e^{-100t_1} = 80e^{-0,693} = 80 \cdot 0,65 = 40 \text{ В.}$$

При  $t > t_1$ , струм та напруга на активному опорі падають, напруга на індуктивності – від'ємна. Визначимо момент часу  $t_2$  в який напруга на індуктивності досягає від'ємного максимуму.

$$\frac{du_L}{dt} = -100 \cdot (-80e^{-100t_2}) - 200 \cdot 160e^{-200t_2} = 8000e^{-100t_2} - 32000e^{-200t_2};$$

$$8000e^{-100t_2} - 32000e^{-200t_2} = 0,$$

$$8000e^{-100t_2} = 32000e^{-200t_2},$$

$$\frac{e^{-100t_2}}{e^{-200t_2}} = \frac{32000}{8000},$$

$$e^{100t_2} = 4,$$

$$100t_2 = \ln 4 = 1,386,$$

$$t_2 = \frac{1,386}{100} = 0,013863 \text{ с.}$$

В цей момент часу напруга на індуктивності

$$u_L(t) = -80e^{-1,386} + 160e^{-2,773} = -10 \text{ В.}$$

При  $t = t_2$  крива напруги на активному опорі має точку перегину.

На рис. 8.25 зображені криві напруг.

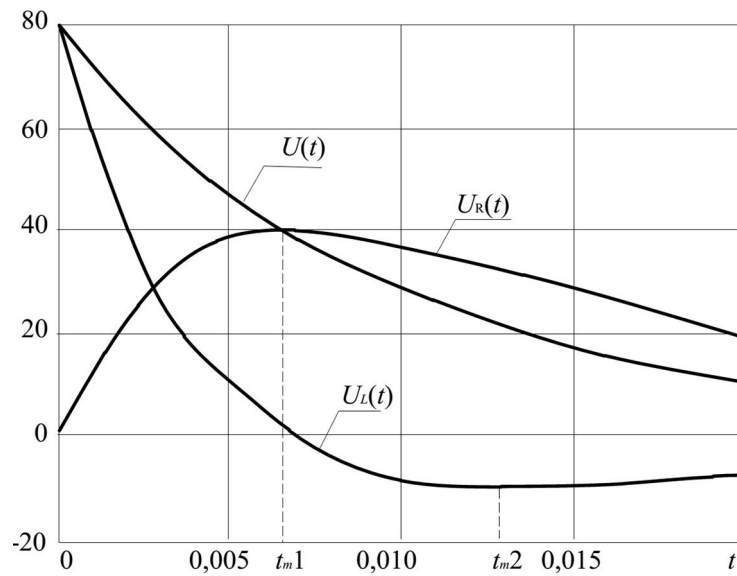


Рисунок 8.25

## 9 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 9.1 Визначення параметрів однорідної довгої лінії.

#### Задача 9.1.

Трифазна сталевалюмінієва повітряна лінія електропередачі завдовжки  $l=300$  км має наступні параметри (на фазу):

$$R_0=0,08 \text{ Ом/км}, G_0 = 3,75 \cdot 10^{-8} \text{ См/км}, \omega L_0 = 0,42 \text{ Ом/км}, \omega C_0 = 2,7 \text{ мкСм/км}.$$

Обчислити вторинні параметри лінії, фазову швидкість і довжину хвилі. Визначити фазну напругу, струм і активну потужність на початку лінії, її ККД, якщо на приймальному кінці лінійна напруга 330 кВ, активна потужність 300 МВт і коефіцієнт потужності навантаження дорівнює 0,92 ( $\varphi_2 > 0$ ).

Обчислити комплекси напруги падаючої та відбитої хвиль на початку і в кінці ЛЕП.

#### Розв'язання

Прийmemo, що навантаження лінії симетричне, з'єднане зіркою, а розрахунок виконаємо для однієї фази. Вторинні параметри лінії:

- характеристичний опір

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{0,08 + j0,42}{3,75 \cdot 10^{-8} + j2,7 \cdot 10^{-6}}} = 398 e^{-j5^\circ} \text{ Ом},$$

коефіцієнт поширення

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \cdot (G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(0,08 + j0,42) \cdot (3,75 \cdot 10^{-8} + j2,7 \cdot 10^{-6})} = (0,108 + j1,069) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}. \end{aligned}$$

Звідси коефіцієнт згасання

$$\alpha = \text{Re}\{\gamma\} = 0,108 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км},$$

коефіцієнт фази

$$\beta = \text{Im}\{\gamma\} = 1,069 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}.$$

Фазова швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{314}{1,069 \cdot 10^{-3}} = 294000 \text{ км/с};$$

довжина хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1,069 \cdot 10^{-3}} = 5880 \text{ км.}$$

Обчислюємо гіперболічні функції:

$$\gamma l = (0,108 + j1,069) \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 0,033 + j0,326;$$

$$e^{\gamma l} = e^{0,033 + j0,326} = 0,98 + j0,326 = 1,033e^{j18,4^\circ},$$

$$e^{-\gamma l} = e^{-(0,033 + j0,326)} = 0,919 - j0,305 = 0,968e^{-j18,4^\circ};$$

$$\operatorname{sh} \gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} = 0,317e^{j84,4^\circ},$$

$$\operatorname{ch} \gamma l = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = 0,95e^{j0,62^\circ}.$$

Комплекси фазної напруги і струму в кінці лінії:

$$\underline{U}_{2\phi} = \frac{U_{2л}}{\sqrt{3}} = \frac{330}{\sqrt{3}} = 190,5 \text{ кВ};$$

$$\cos \varphi_2 = 0,92 \text{ тому } \varphi_2 = 23,1^\circ;$$

$$I_{2\phi} = \frac{P_2}{3 \underline{U}_{2\phi} \cos \varphi_2} = \frac{300}{3 \cdot 190,5 \cdot 0,92} = 0,571 \text{ кА};$$

$$\Psi_{i2} = \Psi_{u2} - \varphi_2 = -\varphi_2 = -23,1^\circ;$$

$$\underline{I}_{2\phi} = I_{2\phi} e^{j\Psi_{i2}} = 0,571e^{-j23,1^\circ}.$$

За основними рівняннями довгої лінії в гіперболічних функціях розрахуємо комплекси фазної напруги і струму на початку лінії

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1\phi} &= \underline{U}_{2\phi} \operatorname{ch} \gamma l + \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_{2\phi} \operatorname{sh} \gamma l = \\ &= 190,5 \cdot 0,95e^{j0,62^\circ} + 398e^{-j5^\circ} \cdot 0,571e^{-j23,1^\circ} \cdot 0,317e^{j84,4^\circ} = 229,3e^{j15,6^\circ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1\phi} &= \underline{I}_{2\phi} \operatorname{ch}\gamma l + \frac{\underline{U}_{2\phi}}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}\gamma l = \\ &= 0,571e^{-j23,1^\circ} \cdot 0,95e^{j0,62^\circ} + \frac{190,5}{398e^{-j5^\circ}} \cdot 0,317e^{j84,4^\circ} = 0,505e^{-j6,3^\circ}. \end{aligned}$$

Активна потужність на початку лінії

$$P_1 = 3 \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U}_{1\phi} \cdot \underline{I}_{1\phi}^*\} = 3 \cdot \operatorname{Re}\{229,3e^{j15,6^\circ} \cdot 0,505e^{-j6,3^\circ}\} = 322 \text{ MBm}.$$

Коефіцієнт корисної дії лінії

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{300}{322} = 0,93.$$

Електромагнітні процеси в довгій лінії розглядаються як результат накладання падаючої (прямої) та відбитої (зворотної) хвиль:

$$\underline{U} = \underline{U}_s + \underline{U}_n = \underline{A}_1 e^{2x} + \underline{A}_2 e^{-2x};$$

$$\underline{I} = -\underline{I}_s + \underline{I}_n = -\frac{\underline{A}_1 e^{2x}}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{A}_2 e^{-2x}}{\underline{Z}_C},$$

де  $\underline{A}_1$  і  $\underline{A}_2$  – постійні інтегрування, які визначаються, наприклад, через напругу і струм в кінці лінії:

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \frac{1}{2} (\underline{U}_{2\phi} - \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_{2\phi}) e^{-2l} = \\ &= \frac{1}{2} (190,5 - 398e^{-j5^\circ} \cdot 0,571e^{-j23,1^\circ}) \cdot 0,968e^{-j18,4^\circ} = 51,9e^{j76,8^\circ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_2 &= \frac{1}{2} (\underline{U}_{2\phi} + \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_{2\phi}) e^{2l} = \\ &= \frac{1}{2} (190,5 + 398e^{-j5^\circ} \cdot 0,571e^{-j23,1^\circ}) \cdot 0,968e^{j18,4^\circ} = 209,3e^{j3,1^\circ}. \end{aligned}$$

На початку лінії  $x = 0$ , тому

$$\underline{U}_n = \underline{A}_2 = 209,3e^{j3,1^\circ},$$

$$\underline{U}_s = \underline{A}_1 = 51,9e^{j76,8^\circ},$$

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{U}_n}{\underline{Z}_C} = \frac{209,3 e^{j3,1^\circ}}{398 e^{-j5^\circ}} = 0,526 e^{j8,1^\circ},$$

$$\underline{I}_s = \frac{\underline{U}_s}{\underline{Z}_C} = \frac{51,9 e^{j76,8^\circ}}{398 e^{-j5^\circ}} = 0,13 e^{j81,8^\circ}.$$

В кінці лінії  $x = l$ , тому

$$\begin{aligned} \underline{U}_n &= \underline{A}_2 e^{-2x} = \frac{1}{2} (\underline{U}_{2\phi} + \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_{2\phi}) = \\ &= \frac{1}{2} (190,5 + 398 e^{-j5^\circ} \cdot 0,571 e^{-j23,1^\circ}) = 202,6 e^{-j15,3^\circ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= \underline{A}_1 e^{-2x} = \frac{1}{2} (\underline{U}_{2\phi} - \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_{2\phi}) = \\ &= \frac{1}{2} (190,5 - 398 e^{-j5^\circ} \cdot 0,571 e^{-j23,1^\circ}) = 53,6 e^{j95,2^\circ}, \end{aligned}$$

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{U}_n}{\underline{Z}_C} = \frac{202,6 e^{-j15,3^\circ}}{398 e^{-j5^\circ}} = 0,509 e^{-j10,3^\circ},$$

$$\underline{I}_s = \frac{\underline{U}_s}{\underline{Z}_C} = \frac{53,6 e^{j95,2^\circ}}{398 e^{-j5^\circ}} = 0,135 e^{j100,2^\circ}.$$

Внаслідок втрат в лінії падаюча хвиля зменшується в напрямі від початку до кінця лінії, а відбита – в напрямі від кінця лінії до початку.

### Задача 9.2.

В кінці лінії задачі 9.1 сталося:

- 1) вимкнення навантаження;
- 2) трифазне коротке замикання.

Для кожного випадку визначити лінійні напруги і струми на початку і в кінці лінії, якщо фазна напруга на вході залишилася такою, як розраховано в задачі 9.1. Визначити також значення напруги і струму падаючої і відбитої хвиль в кінці лінії.

### Розв'язання

При розв'язанні задачі скористаємося основними рівняннями довгої лінії в гіперболічних функціях:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x;$$

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma y;$$

$$\underline{I}(x) = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \gamma x - \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x;$$

$$\underline{I}(y) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \gamma y + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y.$$

1. Вимкнення навантаження (режим неробочого ходу).

Струм в кінці лінії

$$\underline{I}_{2\phi} = 0,$$

тому

$$\underline{U}_{2\phi} = \frac{\underline{U}_{1\phi}}{\operatorname{ch} \gamma l} = \frac{229,3 e^{j15,6^\circ}}{0,95 e^{j0,62^\circ}} = 241 e^{j15^\circ} \text{ кВ},$$

$$U_{2Л} = \sqrt{3} U_{2\phi} = \sqrt{3} \cdot 241 = 418 \text{ кВ};$$

$$\underline{I}_{1\phi} = \frac{\underline{U}_{2\phi}}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \gamma l = \frac{241 e^{j15^\circ}}{398 e^{-j5^\circ}} = 0,317 e^{j84,4^\circ} = 0,192 e^{j104,4^\circ} \text{ кА},$$

$$I_{1Л} = I_{1\phi} = 0,192 \text{ кА}.$$

У режимі неробочого ходу коефіцієнт відбиття «+1», тобто падаюча хвиля відбивається повністю, причому без зміни знаку. Тому

$$\underline{U}_{n(x=l)} = \underline{U}_{s(x=l)}.$$

Зважаючи на це,

$$\underline{U}_{2\phi} = \underline{U}_{n(x=l)} + \underline{U}_{s(x=l)} = 2 \underline{U}_{n(x=l)} = 241 e^{j15^\circ} \text{ кВ},$$

звідки

$$\underline{U}_{n(x=l)} = \underline{U}_{s(x=l)} = \frac{\underline{U}_{2\phi}}{2} = \frac{241 e^{j15^\circ}}{2} = 120,5 e^{j15^\circ} \text{ кВ},$$

$$\underline{I}_{n(x=l)} = \underline{I}_{\phi(x=l)} = \frac{\underline{U}_{n(x=l)}}{\underline{Z}_C} = \frac{120,5e^{j15^\circ}}{398e^{-j5^\circ}} = 0,303e^{j10^\circ} \text{ кА.}$$

## 2. Трифазне коротке замикання

При короткому замиканні напруга в кінці лінії

$$\underline{U}_{2\phi} = 0,$$

тому

$$\underline{I}_{2\phi} = \frac{\underline{U}_{1\phi}}{\underline{Z}_C \operatorname{ch} \gamma l} = \frac{229,3e^{j15,6^\circ}}{398e^{-j5^\circ} \cdot 0,317e^{j84,4^\circ}} = 1,817e^{-j63,8^\circ} \text{ кА,}$$

$$I_{2Л} = I_{2\phi} = 1,817 \text{ кА;}$$

$$\underline{I}_{1\phi} = \underline{I}_{2\phi} \operatorname{ch} \gamma l = 1,817e^{-j63,8^\circ} \cdot 0,95e^{j0,62^\circ} = 1,726e^{-j63,2^\circ} \text{ кА,}$$

$$I_{1Л} = I_{1\phi} = 1,726 \text{ кА.}$$

У режимі короткого замикання коефіцієнт відбиття дорівнює «-1». Тому

$$\underline{I}_{n(x=l)} = -\underline{I}_{\phi(x=l)}.$$

З урахуванням цього

$$\underline{I}_{2\phi} = \underline{I}_{n(x=l)} - \underline{I}_{\phi(x=l)} = 2\underline{I}_{n(x=l)} = 1,817e^{-j63,8^\circ} \text{ кА.}$$

Звідки

$$\underline{I}_{\phi(x=l)} = -\underline{I}_{n(x=l)} = \frac{\underline{I}_{2\phi}}{2} = \frac{1,817e^{-j63,8^\circ}}{2} = 0,909e^{-j63,8^\circ} \text{ кА,}$$

$$\underline{U}_{n(x=l)} = -\underline{U}_{\phi(x=l)} = \underline{I}_{n(x=l)} \cdot \underline{Z}_C = 1,817e^{-j63,8^\circ} \cdot 398e^{-j5^\circ} = 362e^{-j58,8^\circ} \text{ кВ.}$$

## 9.2 Лінії, узгоджені з навантаженням

### Задача 9.3.

Для трифазної ЛЕП, узгодженої з навантаженням, відомі комплекси фазної напруги на початку лінії  $\underline{U}_1 = 100 \text{ кВ}$  і фазного струму в кінці лінії  $\underline{I}_2 = 190e^{-j90^\circ} \text{ А}$ . Визначити ККД лінії, якщо її характеристичний опір  $\underline{Z}_C = 500e^{-j10^\circ} \text{ Ом}$ .

### Розв'язання

Оскільки лінія узгоджена з навантаженням, опір навантаження дорівнює характеристичному, і тоді напруга в кінці лінії

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_C = 190e^{-j90^\circ} \cdot 500e^{-j10^\circ} = 95e^{-j100^\circ} \text{ кВ.}$$

Оскільки при узгодженому навантаженні

$$U_2 = U_1 e^{-al},$$

то

$$e^{-al} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{95}{100} = 0,95.$$

ККД лінії

$$\eta = e^{-2al} = 0,95^2 = 0,903.$$

### Задача 9.4.

Повітряна двопровідна лінія завдовжки 100 км навантажена на опір  $\underline{Z}_C = 410e^{j35^\circ}$  Ом.

Напруга на вході лінії  $u_1(t) = 220\sqrt{2}\sin(314t + 120^\circ)$  В, на виході  $u_2(t) = 188,7\sqrt{2}\sin(314t + 79,9^\circ)$  В.

Визначити струм і напругу, записати їх миттєві значення в точці  $A$ , яка розташована в 20 км від кінця лінії.

### Розв'язання

Рівняння лінії в узгодженому режимі:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{2l} = \underline{U}_2 e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l},$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 e^{2l} = \underline{I}_2 e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}.$$

Для розрахунку струму і напруги в точці  $A$  необхідно знати параметри лінії: коефіцієнт згасання  $\alpha$  і коефіцієнт фази  $\beta$ . Знаходимо їх з першого рівняння лінії:

$$e^{2l} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{220e^{j120^\circ}}{188,7e^{j79,9^\circ}} = 1,166e^{j40,1^\circ},$$

$$e^{\alpha l} = 1,166,$$

$$\alpha l = \ln(1,166) = 0,153,$$

$$a = 0,00153 \text{ Нп/км},$$

$$\beta l = 40,1^\circ + k360^\circ = 0,7 + 2\pi k \text{ рад.}$$

Орієнтовне значення коефіцієнта фази

$$\beta_{op} = \frac{\omega}{v} = \frac{314}{3 \cdot 10^5} \approx 10^{-3} \text{ рад/км};$$

$$\beta_{op} l = 10^{-3} \cdot 100 = 0,1 \text{ рад},$$

де  $v = c = 300000$  (фазова швидкість у повітряній лінії практично рівна швидкості світла);

таким чином,

$$k = 0,$$

$$\beta = 0,007 \text{ рад/км.}$$

Тоді напруга в точці А:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_2 e^{2\gamma} = 188,7e^{j79,9^\circ} \cdot e^{j0,00153 \cdot 20} \cdot e^{j0,007 \cdot 20} = 188,7e^{j79,9^\circ} \cdot e^{j0,14 \text{ рад}} = 194,6e^{j87,92^\circ} \text{ В.}$$

Співвідношення  $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_C$  справедливе для будь-якого перерізу лінії, тому струм в точці А можна обчислити як

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_C} = \frac{194,6e^{j87,92^\circ}}{410e^{j35^\circ}} = 0,475e^{j117,92^\circ} \text{ кА.}$$

Миттєві значення напруги і струму:

$$u_A(t) = 194,6\sqrt{2}\sin(314t + 87,92^\circ) \text{ В,}$$

$$i_A(t) = 0,475\sqrt{2}\sin(314t + 117,92^\circ).$$

### 9.3 Лінії без спотворень

#### Задача 9.5.

Повітряна двопровідна лінія зв'язку завдовжки 100 км має параметри:  $r_0 = 2,8$  Ом/км,  $g_0 = 0,7$  мкСм/км,  $L_0 = 2$  мГн/км і працює в узгодженому режимі при частоті  $\omega = 5000$  рад/с. Яку додаткову індуктивність  $L'_0$  необхідно увімкнути на кожен кілометр довжини лінії, щоб в ній не було спотворень, а вихідна напруга відставала від вхідного на  $100^\circ$  за фазою?

#### Розв'язання

За умовою зсув фаз в лінії складає

$$\beta l = 100^\circ + 360^\circ k = 1,745 + 2\pi k \text{ рад},$$

тобто

$$\beta = (1,745 + 2\pi k) 10^{-2} \text{ рад/км}.$$

Оцінімо значення  $\beta$ . Фазова швидкість у повітряній лінії практично дорівнює швидкості світла, тому

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{5000}{300000} = 1,667 \cdot 10^{-2} \text{ рад/км}.$$

З порівняння двох отриманих відповідей приходимо до висновку, що

$$k = 0.$$

Остаточно маємо

$$\beta = 0,01745 \text{ рад/км}.$$

Для лінії без спотворень справедливі наступні співвідношення

$$\beta = \omega \sqrt{(L_0 + L'_0) C_0}$$

i

$$\frac{R_0}{L_0 + L'_0} = \frac{G_0}{C_0},$$

$$\frac{\beta}{\omega} = \sqrt{(L_0 + L'_0) C_0}$$

$$\sqrt{\frac{L_0 + L'_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}.$$

Перемножуючи дві останні рівності, знаходимо

$$L_0 + L'_0 = \frac{\beta}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \frac{0,01745}{5000} \cdot \sqrt{\frac{2,5}{0,7 \cdot 10^{-6}}} = 0,00698 \text{ Гн/км.}$$

І тоді

$$L'_0 = 6,98 - 2 = 4,98 \text{ мГн/км.}$$

#### 9.4 Лінії без втрат

##### Задача 9.6.

В кінці повітряної лінії без втрат увімкнений вольтметр, який показує 100 В. Визначити показ амперметра на відстані 2 м від кінця лінії, якщо частота генератора  $f = 3 \cdot 10^7$  Гц, а хвильовий опір лінії  $Z_C = 1000$  Ом.

##### Розв'язання

В кінці лінії увімкнений вольтметр з великим опором. Отже, лінія працює у режимі неробочого ходу, струм в кінці лінії  $I_2 = 0$ , тому одне з основних рівнянь лінії без втрат

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos \beta y + j Z_C \cdot \underline{I}_2 \sin \beta y;$$

$$\underline{I}(y) = j \frac{\underline{U}_2}{Z_C} \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos \beta y.$$

приймає вигляд:

$$\underline{I}(y) = j \frac{\underline{U}_2}{Z_C} \sin \beta y.$$

Фазова швидкість в повітряній лінії практично дорівнює швидкості світла  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Тоді коефіцієнт фази лінії:

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 0,2\pi \text{ рад/м.}$$

Таким чином, показ амперметра

$$I_A = \left| I_{(y=0)} \right| = \frac{U_2}{Z_C} \sin \beta y = \frac{100}{1000} \sin(0,2 \pi \cdot 2) = 0,0951 \text{ А.}$$

### Задача 9.7.

Повітряна лінія без втрат з параметрами:  $l = 30$  м,  $f = 15$  МГц,  $Z_C = 600$  Ом працює на навантаження:  $U_2 = 120$  В,  $r_H = 300$  Ом. Визначити положення мінімумів і максимумів напруги уздовж лінії.

### Розв'язання

Відомо, що у режимі неробочого ходу або при короткому замиканні в лініях без втрат виникають стоячі хвилі. Оскільки при цьому коефіцієнт відбиття  $n = \pm 1$ , пряма і зворотна хвилі однакові за величиною, їх накладання дає вузли і пучності напруги, які розподілені уздовж лінії при НХ (КЗ) відповідно до виразів:

$$y_{\text{вузлів(пучностей)}} = \frac{2k+1}{4} \lambda;$$

$$y_{\text{пучностей(вузлів)}} = \frac{k\lambda}{2},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

При довільному неузгодженому навантаженні  $|K| < 1$ , пряма і зворотна хвилі не рівні між собою. В результаті накладання цих хвиль в лінії виникають мінімуми і максимуми напруги. Очевидно, що вони будуть в тих точках, де пряма і зворотна хвилі або збігаються за фазою (максимуми), або відрізняються на  $180^\circ$  (мінімуми).

1. Визначимо коефіцієнт відбиття  $K$  хвилі від навантаження і оцінимо напругу прямої і зворотної хвиль  $U_{np}$ ,  $U_{зв}$ .

$$n = \frac{r_H - Z_C}{r_H + Z_C} = \frac{300 - 600}{300 + 600} = -0,333,$$

тобто

$$U_{зв} = -0,333U_{np}.$$

Напруга в кінці лінії

$$U_2 = U_{np} + U_{зв} = U_{np} - 0,333U_{np} = 0,667U_{np} = 120 \text{ В}.$$

Оскільки  $K < 0$ , то в кінці лінії має місце мінімум напруги, тобто

$$U_{min} = 120 \text{ В},$$

причому:

$$U_{np} = \frac{U_{min}}{0,667} = \frac{120}{0,667} = 180 \text{ В},$$

$$U_{зв} = -0,333U_{np} = -0,333 \cdot 180 = -60 \text{ В}.$$

Максимальне значення напруги

$$U_{max} = 180 + 60 = 240 \text{ В}.$$

2. Отже, перший мінімум напруги знаходиться в кінці лінії. Далі мінімуми напруги слідує через  $\lambda/2$ . Оцінимо довжину хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f} = \frac{300 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^6} = 20 \text{ м}.$$

Максимуми напруги зсувені відносно мінімумів на  $\lambda/4 = 5$  м і далі по лінії також йдуть через  $\lambda/2$ .

## Рекомендована література

1. Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки. Львів : Львівська політехніка, 2018. 416 с.

2. Хілов В.С. Теоретичні основи електротехніки: підручник. Д.: Національний технічний університет “Дніпровська політехніка”, 2021 р. 433 с.

3. Попова І.О., Курашкін С.Ф., Вовк О.Ю., Попрядухін В.С. Теоретичні основи електротехніки: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти закладів вищої освіти. Мелітополь: Видавничополіграфічний центр «Люкс», 2020. 221 с.

4. Теоретичні основи електротехніки: Частина 1. Електричні кола постійного та змінного струму. Чотиріполюсники [Електронний ресурс]: навч. посіб. Для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю. В. Перетятко, А. А. Щерба. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 115 с.

5. Теоретичні основи електротехніки: Нелінійні системи. Перехідні процеси. [Електронний ресурс]: практикум. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю. В. Перетятко. А. А. Щерба. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 140 с.

6. Теоретичні основи електротехніки. Нелінійні електричні і магнітні кола: [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Л.Ю. Спінул, М.П.Бурик. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 59 с.

7. Воробкевич А.Ю., Маляр В.С., Совин Р.Я., Соколовський М.О., Стахів П.Г., Шегедин О.І. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки : Навч. посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Львів: “Новий Світ2000”, 2020. 224 с.

8. Карпов Ю.О., Каців С.Ш., Кухарчук В.В. Теоретичні основи

електротехніки. Комп'ютерні розрахунки та моделювання лінійних електричних кіл. Одеса : Гельветика, 2019. 210 с.

9. Каців С.Ш., Ведміцький Ю.Г., Кухарчук В.В. Теоретичні основи електротехніки. Комп'ютерні розрахунки та моделювання нелінійних електричних кіл та кіл з розподіленими параметрами. Одеса : Гельветика, 2019. 148 с.

10. Карпов Ю.О., Ведміцький Ю.Г., Кухарчук В.В. Теоретичні основи електротехніки. Задачі та приклади розрахунку лінійних електричних кіл. Одеса : Гельветика, 2019. 346 с.

E50

Електротехніка в електроенергетиці [Текст] : методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 6 Інженерія, виробництво та будівництво спеціальності 63 Електрична інженерія денної та заочної форм навчання / уклад. А.В. Гадай. Луцьк : ЛНТУ. 2025. 255 с.

Комп'ютерний набір та верстка: А. Гадай

Підп. до друку \_\_.\_\_\_\_. 2025р.  
Формат 60×84/16. Папір офс. Гарн. Таймс.  
Ум. друк.арк. 10,9. Обл.-вид.арк. 11,15.  
Наклад 50 прим.

Відділ іміджу та промоції  
Луцького національного технічного університету  
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75  
Друк Відділ іміджу та промоції ЛНТУ