Міністерство освіти і науки України

Луцький національний технічний університет

Теоретична механіка

Конспект лекцій з дисципліни Теоретична механіка для здобувачів технічних спеціальностей першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання (Статика)

ЛУЦЬК 2025

УДК 517.53/.55
К 21
До друку
Голова вченої ради факультету архітектури, будівництва та дизайну ________________ О. Андрійчук
Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки ________________ Н.Поліщук
Рекомендовано до видання вченою радою факультету архітектури, будівництва та дизайну ЛНТУ,
протокол № ____ від «____» ______________ 2025 року.
Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри прикладної математики та механіки
протокол № ____ від «____» ______________ 2025 року.
Завідувач кафедри ________________ О. Мікуліч
Укладачі: ______________О. Бондарський, кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ,
______________О. Приходько, кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Рецензент: ______________ Т. Фурс, кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ
Відповідальна за випуск: ______________О. Мікуліч, доктор технічних наук, завідувач кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Теоретична механіка: Конспект лекцій для здобувачів технічних спеціальностей першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання (Статика) / укладачі О. Бондарський, О. Приходько – Луцьк: ЛНТУ, 2025. – 75 с.

Конспект лекцій складений відповідно до діючої програми курсу Теоретична механіка для здобувачів технічних спеціальностей першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання. Наведені теоретичний матеріал курсу та приклади розв’язку задач.

Вступ. Загальні положення

Механічний рух, як один із видів руху матерії. Предмет механіки. Теоретична механіка та її місце серед природничих і механічних наук. Об'єктивний характер законів механіки. Основні історичні етапи розвитку механіки

Створення сучасної матеріально-технічної бази пов'язане з широким впровадження автоматизації і механізації виробничих процесів, оснащення підприємств найновішим устаткуванням, удосконаленням існуючих і застосуванням нових виробничих процесів.

У зв'язку з цим великого значення набуває завдання підготовки висококваліфікованих кадрів для роботи на сучасному підприємстві.

Весь світ, що оточує нас за своєю природою матеріальний.

Матерія немислима без руху. Рух – це спосіб існування матерії. Немає і не може бути матерії без руху, так само як не може бути і руху без матерії.

Отже світ – рухома матерія, рух якої відбувається закономірно в просторі і часі. Форми руху матерії незчисленні.

Механіка – наука про найпростішу форму руху матерії – механічний рух.

Механічний рух – це просте переміщення тіл у просторі відносно одне одного з бігом часу.

Теоретична механіка – наука про найбільш загальні закони механічного руху.

Основними завданнями механіки є вивчення руху матеріальних тіл під дією сил. Якщо положення одного тіла відносно іншого залишається незмінним, то кажуть, що це тіло знаходиться в стані спокою.

Звідси слідує, що спокій є окремий випадок механічного руху. Поняття спокою, так само як і поняття руху, відносне. Чи можна наприклад, стверджувати, що Земля нерухома? Для того, щоб відповісти на це запитання, необхідно уточнити по відношенню до чого висловлюється таке твердження. Це можуть бути об'єкти, розташовані на ній. Якщо так – твердження справедливе. Але не можна говорити про нерухомість Землі, наприклад, по відношенню до Сонця.

Статика твердого тіла

Основні поняття і аксіоми статики

Введення в статику. Предмет статики. Основні поняття статики: абсолютно тверде тіло, матеріальна точка, сила, еквівалентні і зрівноважені системи сил, рівнодійна, сили зовнішні і внутрішні. Аксіоми статики.
Матеріальна точка, абсолютно тверде тіло. В'язі, основні види в'язей і їх реакції.

У визначення механічного руху міститься поняття про те, що рухається. В теоретичній механіці розглядають рух фізичних тіл, які не змінюють своєї форми і розмірів. Такі тіла, відстані між будь-якими двома точками яких залишаються незмінними під час руху називаються абсолютно твердими.

Слід зазначити, що таких тіл у природі не існує.

В теоретичній механіці враховують тільки дві властивості фізичних тіл: протяжність і речовинність.

Пізніше, в опорі матеріалів, розглядають механічний рух з врахуванням деформації тіл. Однак основою методів опору матеріалів є закони теоретичної механіки.

Цю думку можна розповсюдити і на інші інженерні дисципліни, такі як деталі машин, теорія механізмів і машин, а разом з ними і суто інженерні, такі як будівельна механіка, інженерні конструкції, теорія руху автомобіля, теорія двигунів, конструювання несучих деталей в машинобудуванні, тощо. Таким чином можна розбити важливий висновок про те, що теоретична механіка виступає як наукова база ряду інженерних дисциплін. Вони користуються основними положеннями і законами механіки. Це має місце при створенні конструкцій, верстатів, машин і механізмів.

Формулювання: тіло, розмірами якого в ряді задач можна знехтувати, називають матеріальною точкою.

В деяких задачах механіки матеріальними точками умовно вважають тіла досить великих розмірів. Так, наприклад, при вивченні руху планет навколо Сонця, планети вважають матеріальними точками, тому що їх розміри надто малі порівняно з розмірами їх орбіт.

Теоретичну механіку прийнято поділяти на три розділи: статику, кінематику і динаміку.

Статика – це такий розділ механіки, в якому вивчаються: 1) закони дії сил; і 2) рівновага тіл, які знаходяться під дією сил.

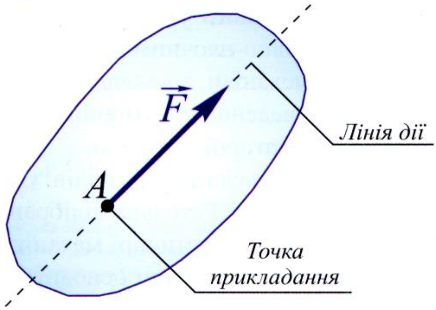
Поняття статики

Найголовнішим поняттям статики є сила.

Сила – це величина, яка є мірою механічної взаємодії двох або декількох тіл.

Ми знайомі з поняттям сили з повсякденного життя: сила м'язів людини, рушійна сила автомобіля, сила різання металу і т.д.

Сила характеризується трьома елементами: величиною, напрямком і точкою прикладання.



Величина, яка має напрям - є вектор (сила, швидкість, прискорення).

Механічна рівновага – це стан спокою даного тіла, по відношенню до інших тіл.

Механічний рух – це переміщення даного тіла по відношенню до іншого, яке відбувається в просторі з бігом часу.

Механічна взаємодія між тілами, це така взаємодія, в результаті якої відбувається зміна руху цих тіл, або зміна їх форми.

Сукупність кількох сил, які діють на одне тіло або систему тіл, називають **системою сил**.

Системи сил, які чинять на тіло однакову дію, називають **еквівалентними** системами сил.

Сила, яка чинить на тіло таку саму дію, які і вся система сил, називають рівнодіючою, або **рівнодійною**, а сила, що дорівнює рівнодійній за величиною, але направлена в протилежний бік, називають **зрівноважуючою**. Ця сила має спільну з рівнодіючою лінію дії.

Системою взаємозрівноважувальних сил називається така система сил, під дією якої тіло може знаходитись в стані спокою.

Перша класифікація сил.

Сили діляться на зовнішні і внутрішні.

Зовнішні – це такі сили, які діють на тіло з боку інших матеріальних тіл.

Внутрішніми називають сили, з якими діють одна на одну частинки даного тіла.

Аксіоми статики

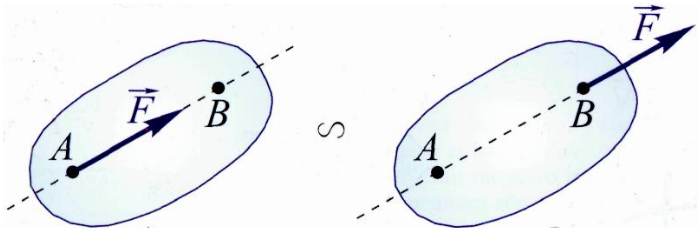
Аксіоми статики – результат багаточисленних дослідів і спостережень над рівновагою і рухом тіл, що постійно підтверджуються практикою. На аксіомах базуються всі теореми і рівняння статики.

Аксіома 1 (про дві сили). Дві сили прикладені до твердого тіла, зрівноважуються тоді і тільки тоді, коли вони рівні за величиною і діють по одній прямій в протилежні сторони.

Аксіома 2 (приєднання і виключення зрівноважених сил).

Зрівноважені сили можна прикладати до твердого тіла, або відкидати не порушуючи рівновагу. Нехай до абсолютно твердого тіла прикладені сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ під дією яких тіло знаходиться в спокої або здійснює якийсь рух. Прикладемо до тіла дві рівні протилежно направлені сили $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$, які взаємно зрівноважуються. Якщо тіло знаходиться в спокої, то він збережеться, якщо в русі, то буде рухатись так само під дією нової системи сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2$, як і під дією $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$, тобто нова система сил еквівалентна попередній. Той же наслідок буде, якщо виключити з системи взаємозрівноважуючі сили.

Наслідок. Точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії дії цієї сили, не порушуючи рівноваги тіла. Нехай до твердого тіла в т. А прикладена сила $\vec{F}$.



Прикладемо в т. В дві сили $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$ рівні по модулю силі $\vec{F}$ і направлені по лінії її дії в протилежні сторони. Потім відкинемо сили $\vec{F}$ і $\vec{F}''$, як взаємнозрівноважені. Тоді до тіла буде прикладена в точці В сила $\vec{F}' = \vec{F}$, еквівалентна силі $\vec{F}$ в т.А.

Тому в статиці твердого тіла сила розглядається як ковзний вектор.

Аксіома 3 (паралелограм сил).

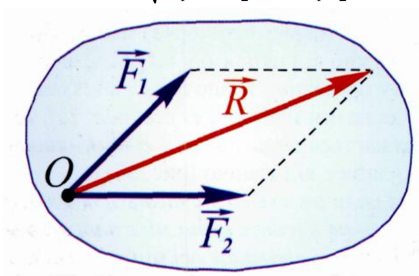
Рівнодіюча двох сил, прикладених в одній точці, прикладена в тій самій точці і зображається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах.

Це положення виражається геометричною рівністю

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1)$$

Модуль рівнодійної сили визначається за формулою:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}\,.$$

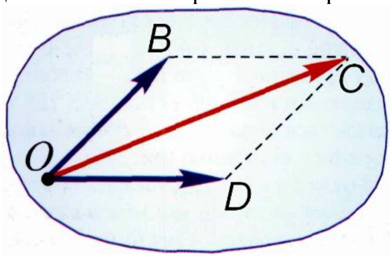


Сума виражена рівністю (1) називається векторною або геометричною, сили F_1 і F_2 - складові.

Тепер можна сказати так:

Рівнодійна двох сил, прикладених в одній точці, дорівнює векторній сумі цих сил.

Таке правило додавання двох сил називають правилом паралелограма. Від нього можна перейти і на правило трикутника.



Надамо стороні ВС напрям від В до С. Відкинемо ДС і дістанемо трикутник, який називають силовим.

Сформулюємо таке правило:

Для того, щоб додати дві сили, прикладені в одній точці, досить з кінця першої сили провести вектор, що дорівнює другій силі, а потім сполучити початок першої сили з кінцем другої відрізком прямої і надати цьому відрізку напрям від початку першої сили до кінця другої. Це і буде рівнодійна двох сил.

Аксіома 4. (рівності дії і проти дії)

Сили, з якими діють одне на одне два тіла, завжди рівні за величиною і направлені по одній прямій в протилежні боки, інакше – кожна дія має рівну за величиною і протилежну за напрямом протидію.

В'язі та їх реакції

Механіка поділяє тіла на вільні і невільні.

Вільними називають такі тіла, переміщення яких не обмежене в просторі (літак, супутник, тощо).

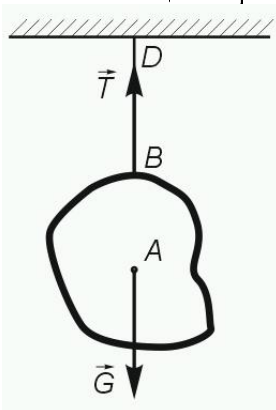
Невільні тіла – це тіла, переміщення яких обмежене (тягар, підвішений на тросі крана, шарнір, який з'єднує стержні в стержневій конструкції.

Тіла, які обмежують рух тіл, називаються **в'язями**.

В наведених прикладах в'язями є трос, стержні...

Найпростішими в'язями які розглядаються в статиці є різні опори.

Розглянемо тягар, підвішений до троса. З боку тягаря до троса прикладена сила, яка викликає натяг цього троса.



Сили, які діють з боку тіла на в’язі – називають силами тиску на в’язі. До таких сил відносяться сили, які здатні привести тіло в рух (вага тіла, рушійна сила автомобіля і т.д.)

Згідно з четвертою аксіомою з боку троса на тягар повинна діяти така ж за величиною сила $\vec{T}$, напрямлена в протилежний бік.

Сили, з якими в’язі діють на тіло – є **реакції в’язей**.

Таким чином ми познайомились з **другою класифікацією сил** і поділ їх на активні (задані) і реакції в’язей.

Принцип звільнення від в’язей.

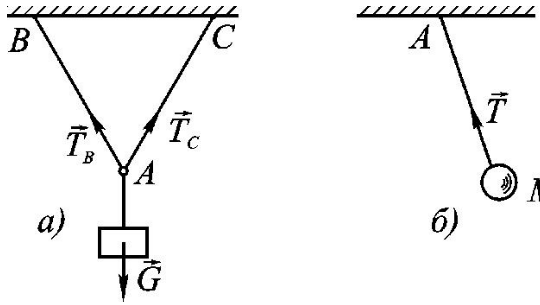
Невільне тіло можна розглядати як вільне тіло, якщо відкинути в’язі і замінити їх дію реакціями. Реакція в’язі завжди направлена в бік, протилежний тому, в який дана в’язь перешкоджає переміщенню тіла.

Правильне визначення напрямків сил реакції в’язів має велике значення при розв’язуванні задач статики.

Розглянемо деякі найбільш розповсюджені типи в’язей (без тертя)

1. Гнучка в’язь

(Трос, канат, ланцюг) не дає можливість тілу віддалятись від точки закріплення по напрямку цієї в’язі.

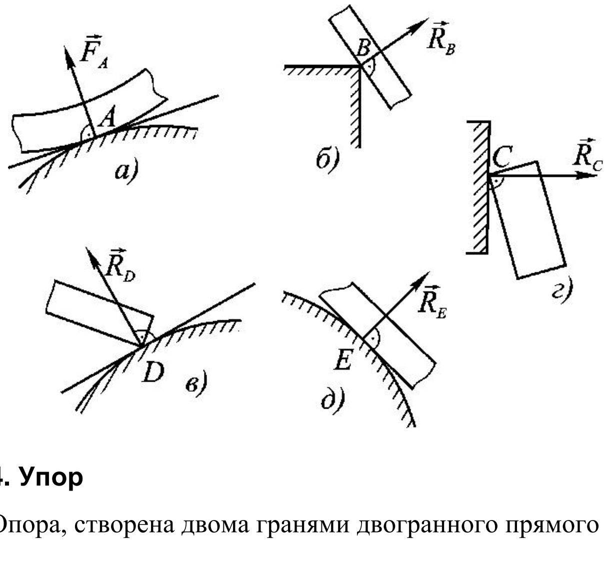


Реакція гнучкої в'язі завжди направлена вздовж цієї в'язі до точки закріплення.

2. Абсолютно гладка площина та гострий виступ.

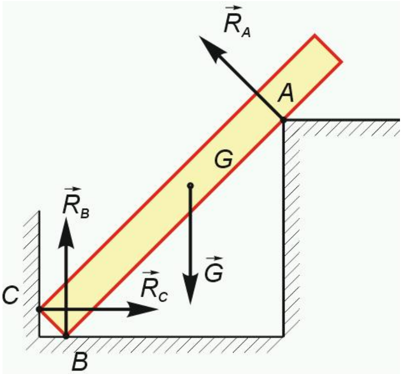
Вона перешкоджає переміщенню тіла тільки в напрямі, перпендикулярному до цієї площини. Отже її реакція направлена по перпендикуляру до неї в точці дотику з даним тілом.

Реакція гострого виступу (б) направлена перпендикулярно до поверхні тіла.



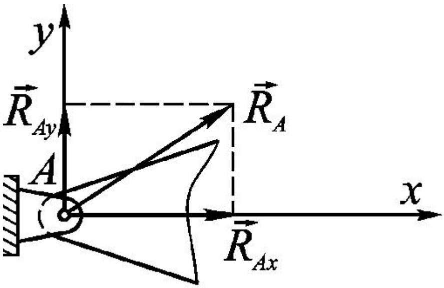
4. Упор

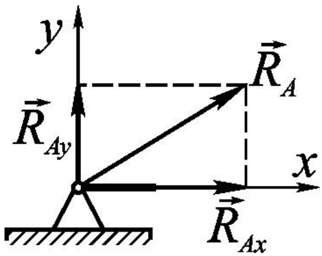
Опора, створена двома гранями двогранного прямого кута.



Такий вид в'язі перешкоджає переміщенню тіла по двох взаємо перпендикулярних напрямках незалежно від конструкції упора. Тому в даному випадку виникають дві перпендикулярні реакції $\vec{R}_B$ і $\vec{R}_C$.

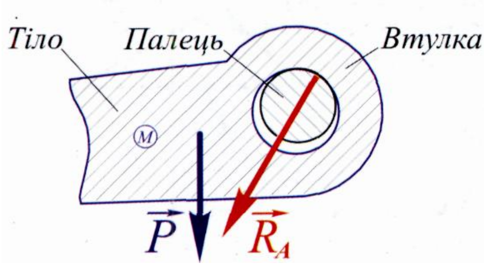
5. Шарнірно-нерухома опора.





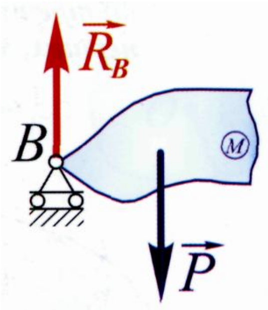
Ця опора допускає поворот тіла відносно опори, але перешкоджає лінійному переміщенню тіла у всіх напрямках.

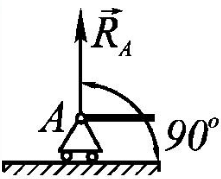
Найпростіший шарнір складається з втулки і пальця. При складанні палець входить у втулку з деяким зазором, який необхідний для забезпечення вільного обертання пальця у втулці.

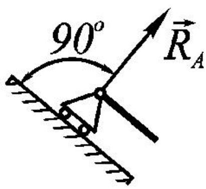


Реакція такої опори невідома ні за величиною, ні за напрямком. Це пояснюється тим, що шарнір перешкоджає переміщенню тіла в будь-якому напрямі. Тому при розв'язуванні задач реакцію шарнірно-нерухомої опори звичайно виражають у вигляді двох взаємно-перпендикулярних складових $\vec{R}_{AX}$ і $\vec{R}_{AY}$.

6. Шарнірно-рухома опора.



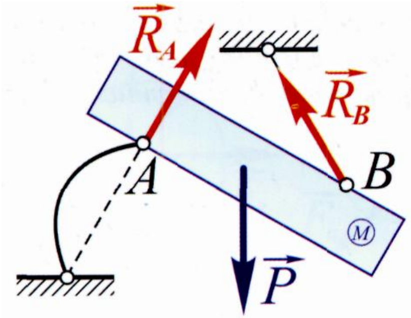




Ця опора на котках, яка застосовується в балочних системах, мостових конструкціях. На відміну від шарнірно-нерухомої опори вона допускає, крім повороту навколо осі шарніра, лінійне переміщення паралельно опорній поверхні за допомогою котків, розміщених на ній. Завдяки рухомості, ця опора зберігає цілісність конструкції при температурних змінах в оточуючому середовищі.

Реакція шарнірно-рухомої опори проходить через центр шарніра перпендикулярно до опорної поверхні.

7. Шарнірний стрижень.



Шарнірний стрижень – це такий, вагою якого нехтують, і на кінцях якого знаходяться точкові шарніри. Реакція ідеального стрижня напрямлена уздовж відрізка, що з'єднує його кінці.

Система збіжних сил

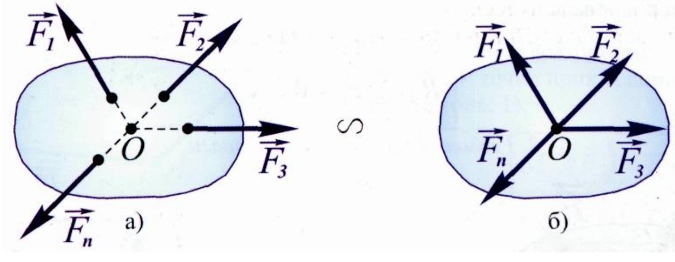
Під **збіжною системою** сил розуміють таку систему сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Якщо сили розташовані в будь-якій одній площині, тоді маємо **плоску збіжну систему** сил.

Умови рівноваги збіжної системи сил

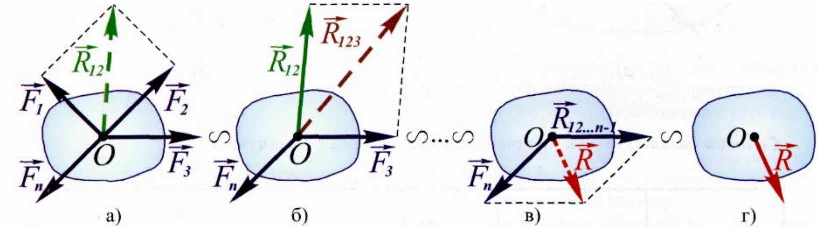
У відповідності з наслідком із аксіоми 2 перенесемо точки прикладання всіх сил вздовж їх ліній дії в точку перетину їх ліній дії.

В результаті отримали систему сил, прикладених в одній точці. Вона еквівалентна вихідній системі збіжних сил.



Виникла задача: **встановити умови рівноваги даної системи сил**. Згідно з аксіомою 3, рівнодійна двох сил, прикладених до однієї точки, визначається або за правилом паралелограма, або за правилом трикутника.

Додаємо спочатку будь-які дві сили, наприклад $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Дістанемо їх рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$, до якої додамо третю силу і т.д.



Для цієї операції, щоб не затемнювати малюнок, скористаємось правилом трикутника. Додамо на підставі цього правила $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, отримаємо рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$. Математично це запишеться:

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Застосовуючи правило трикутника до сил $\vec{R}_{1,2}$ і $\vec{F}_3$, отримаємо силу $\vec{R}_{1,2,3}$, при цьому

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Продовжуючи процес додаванні далі, знайдемо, що ця система сил дорівнює одній силі, яка визначається математично так:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n.$$

Звідси слідує висновок, що сила $\vec{R}$ є рівнодійною даної системи сил, тобто:

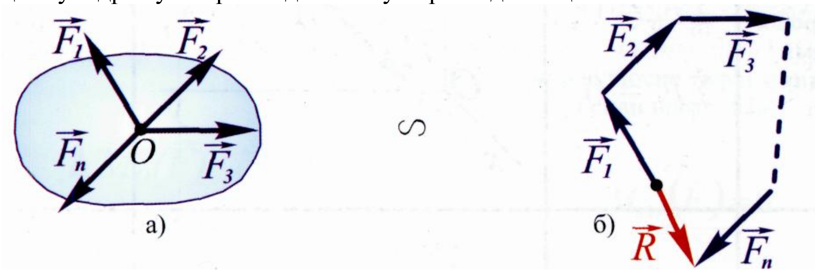
Рівнодійна збіжної системи сил дорівнює їх векторній сумі, а лінія дії рівнодійної проходить через точку, де перетинаються лінії дії сил системи.

Багатокутник OCDEKL називається силовим багатокутником. Сторона OL називається замикаючою стороною.

Отже: рівнодійна системи сил, прикладених в даній точці, зображується замикаючою стороною силового багатокутника.

Побудова силового багатокутника

З кінця першої сили провести вектор, що дорівнює другій силі, з кінця другої провести вектор третьої сили і т.д.. Потім сполучити початок першої сили з кінцем останньої відрізком прямої і надати цьому відрізку напрям від початку першої до кінця останньої сили.



Отримаємо таким чином вектор $\vec{R}$.

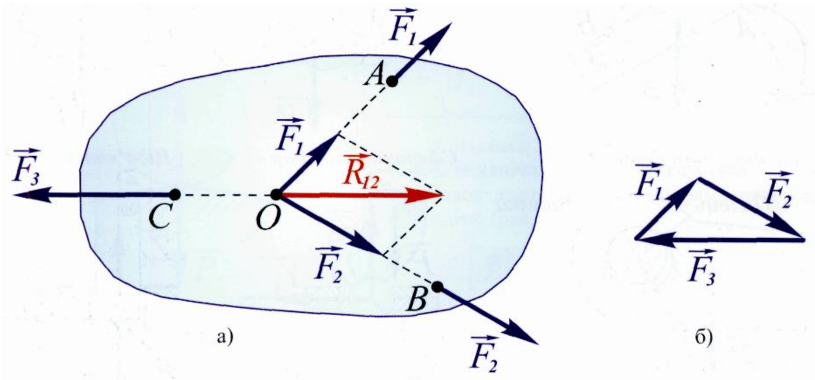
Неважко показати, що коли довільно поміняти місцями сили, що додаються, то результат геометричного додавання не зміниться.

Теорема про три непаралельні сили

Якщо під дією трьох сил тіло знаходиться в рівновазі і лінії дії двох сил перетинаються, то:

всі сили лежать в одній площині і

лінії дії цих сил перетинаються в одній точці



Нехай на тіло діє система трьох сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, причому лінії дії $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ перетинаються в т.А (рис. 1).

Згідно наслідку з аксіоми 2, сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ перенесемо в т. А і за аксіомою 3 замінимо їх однією силою $\vec{R}$, причому

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Таким чином, система сил приводиться до двох сил $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$. За умовою теореми, тіло знаходиться у рівновазі, тому за аксіомою 1 сили $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$ мають спільну лінію дії, але тоді лінії дії всіх сил повинні перетинатись в одній точці.

Геометрична умова рівноваги

Ми переконались, що збіжну систему сил можна замінити рівнодійною. Але, якщо на тіло діє сила, то тіло не буде перебувати у рівновазі. Отже для того, щоб тіло перебувало в рівновазі, рівнодійна повинна дорівнювати нулю. В цьому випадку кажуть, що всі сили зрівноважуються.

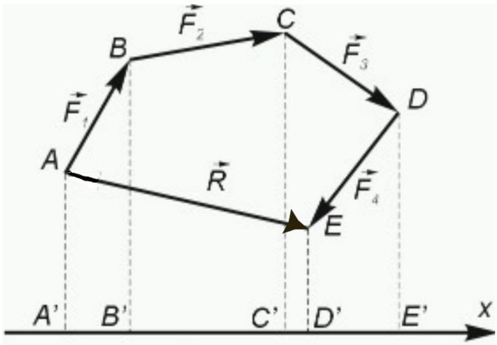
Якщо рівнодійна дорівнює нулю, то кінець останньої сили збігається з початком першої. У цьому випадку всі стрілки направлені в один бік по контуру силового багатокутника.

Отже, геометричною умовою рівноваги системи збіжних сил є замкнутість силового багатокутника.

Аналітична умова рівноваги системи збіжних сил. Рівняння рівноваги

Якщо рівнодійна $\vec{R}$ дорівнює нулю, то очевидно повинні дорівнювати нулю і її проєкції на осі координат.

Розглянемо силовий багатокутник АВСДЕ. Він є незамкнений. АЕ – замикаюча сторона багатокутника, тобто – рівнодійна системи. Спроектуємо цю рівнодійну і всі сили на будь-яку вісь, наприклад вісь Х.



$$A'E' = A'D' - D'E'$$

$$A'D' = A'B' + B'C' + C'D'$$, або

$$A'E' = A'B' + B'C' + C'D' - D'E'.$$

Звідси видно, що проєкція рівнодійної на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю ж вісь.

Тобто $R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$, $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$.

В разі, якщо $R_x = 0$, маємо $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$.

Будемо вважати, що багатокутник АВСДЕ просторовий, введемо координатну систему OXYZ і спроєктуємо всі сили на відповідні осі.

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix},\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy},\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}\ .$$

В разі рівноваги: $R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0$, а значить, що:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \end{cases}$$

- це аналітична форма умов рівноваги збіжної системи сил.

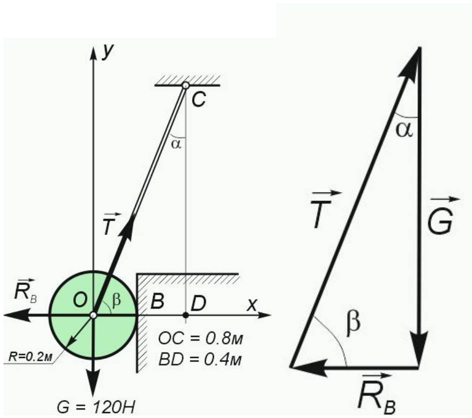
Отже, для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на взаємно перпендикулярні осі дорівнювала нулю.

В процесі розв’язку задач в ці умови входять невідомі, які потрібно визначити. В цьому разі ми говоримо, що складаємо рівняння рівноваги.

Можна відмітити, що немає значення, де вибирається початок координат. Осі направляються так, щоб були відомі кути між ними і діючими на тверде тіло силами.

Приклад

Однорідна куля, радіусом *r* = 0.2м і вагою *P* = 120 Н, дотикається в т. В до гладкої вертикальної стіни та утримується в рівновазі мотузкою АС, довжиною 0.8м. Визначити натяг мотузки і тиск кулі на стіну, якщо відстань від т.В до СД рівна 0.4м.



Розв'язок. Розглянемо рівновагу кулі. В'язями для кулі є стіна і мотузка АС. Так-як стіна гладка, то реакція $\vec{R}_B$ перпендикулярна до стіни. Реакція мотузки направлена по ній. Для рівноваги кулі необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник був замкнений.

З трикутника: $R_B = Gtg\alpha$, $T = \dfrac{G}{\cos\alpha}$.

$OD = r + BD = 0.2 + 0.4 = 0.6$ м,

$OC = r + AC = 0.2 + 0.8 = 1$ м.

$CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8$ м.

$tg\alpha = \dfrac{OD}{CD} = \dfrac{0.6}{0.8} = 0.75, \cos\alpha = \dfrac{CD}{OC} = \dfrac{0.8}{1} = 0.8 \cdot$

$R_B = Gtg\alpha = 120 \cdot 0.75 = 90H$;

$T = \dfrac{G}{\cos\alpha} = \dfrac{120}{0.8} = 150H \cdot$

Розв'яжемо задачу іншим шляхом. Складемо рівняння рівноваги (алгебраїчна сума проекції всіх сил на осі координат рівна нулю)

$\sum F_{ix} = 0; -R_B + T\sin\alpha = 0;$

$\sum F_{iy} = 0; -G + T\cos\alpha = 0;$

$$R_B = T\sin\alpha = 150\cdot 0.6 = 90H \ ,$$

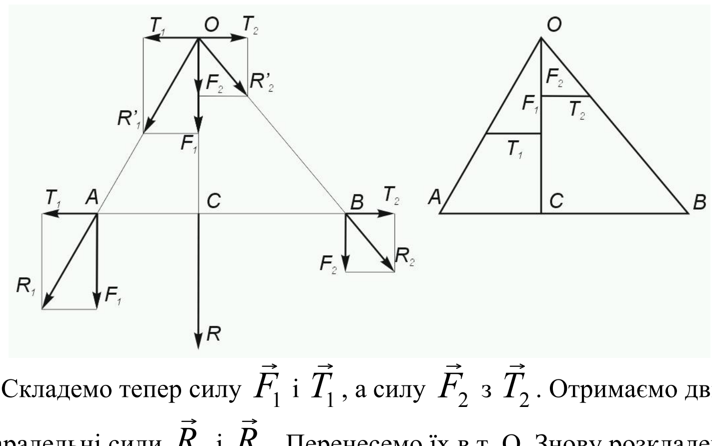
$$T = \frac{G}{\cos\alpha} = 150H \cdot$$

$$\sin\alpha = \frac{OD}{OC} = \frac{0.6}{1} = 0.6 \cdot$$

Дві паралельні сили

Розглянемо систему двох паралельних сил. Спочатку розглянемо випадок, коли дві сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ направлені в один бік. Припустимо, що ї модулі різні. Доведемо, що цю систему можна замінити однією силою. Для цього прикладемо в т.А і т.В дві рівні за модулем сили $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, направлені в протилежні сторони.

Система чотирьох сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{T}_1, \vec{T}_2$ еквівалентна даній системі сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, що слідує з аксіоми 2.



Складемо тепер силу $\vec{F}_1$ і $\vec{T}_1$, а силу $\vec{F}_2$ з $\vec{T}_2$. Отримаємо дві непаралельні сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$. Перенесемо їх в т. О. Знову розкладемо їх, на $\vec{F}_1, \vec{T}_1$ і $\vec{F}_2, \vec{T}_2$.

Рівнодійна $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ рівна нулю, тому залишається скласти дві сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, прикладені в т.О. Їх рівнодійна направлена по прямій, паралельній $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, а модуль рівний алгебраїчній сумі:

$$R = F_1 + F_2 .$$

Перенесемо цю силу в т. С і знайдемо положення цієї точки на відрізку АВ. З подібності трикутників OKL і OCB, а також OMN і OAC, маємо:

$$\frac{OC}{CB} = \frac{F_2}{T_2}; \frac{OC}{AC} = \frac{F_1}{T_1} .$$

Розділивши першу рівність на другу і врахувавши, що $T_1 = T_2$, отримаємо:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}, \text{ або } F_1 AC = F_2 BC .$$

З попередньої пропорції:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AC + BC}{F_2 + F_1} = \frac{AB}{R} .$$

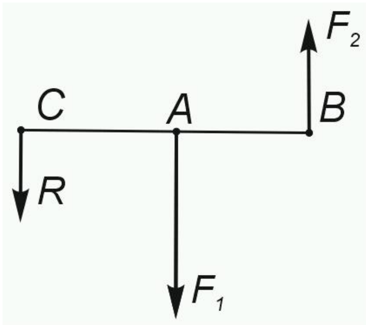
Звідси знаходимо

$$AC = \frac{AB \cdot F_2}{R} = \frac{AB \cdot F_2}{F_1 + F_2},$$

$$BC = \frac{AB \cdot F_1}{R} = \frac{AB \cdot F_1}{F_1 + F_2} .$$

Таким чином, приходимо до висновку: рівнодійна двох паралельних сил, напрямлених в одну сторону, паралельна цим силам і направлена в ту ж сторону; модуль рівнодійної рівний сумі модулів даних сил, а лінія дії рівнодійної ділить відстань між двома точками прикладання даних сил внутрішнім чином на частини, обернено пропорційні цим силам.

Розглянемо тепер дві паралельні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ прикладені в т.А і т.В і направлені в протилежні сторони. Такі сили називають антипаралельними. Нехай $F_1 > F_2$. Знайдемо рівнодійну. Замінимо силу $\vec{F}_1$ двома еквівалентними їй паралельними силами: силою $\vec{F}_2'$ прикладену в т.В, причому $F_2' = F_2$ і силою $\vec{R}$, прикладену в деякій т. С.



Так як сила $\vec{F}_1$ повинна бути еквівалентна силам $\vec{F}_1$ і $\vec{R}$, тобто є їх рівнодійною, то на основі попереднього результату будемо мати:

$$F_1 = F_2' + R = F_2 + R$$

$$R = F_1 - F_2$$

$$\text{і } \frac{AC}{AB} = \frac{F_2'}{R} = \frac{F_2}{R},$$

звідки

$$AC = \frac{AB \cdot F_2}{R} = \frac{AB \cdot F_2}{F_1 - F_2}$$

$$\frac{AC + AB}{AC} = \frac{F_2 + R}{F_2}$$

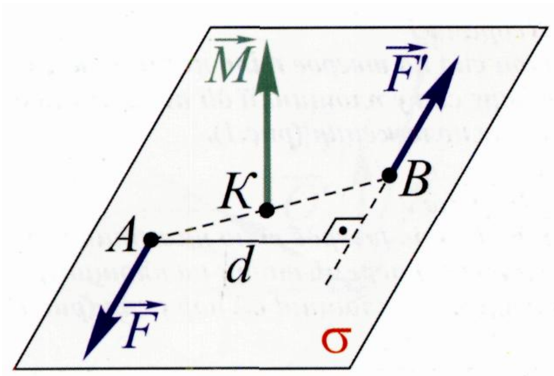
$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \text{ і } F_1 AC = F_2 BC .$$

Таким чином рівнодійна двох антипаралельних сил паралельна цим силам і направлена в сторону більшої сили; модуль рівнодійної рівний різниці модулів даних сил, а лінія дії рівнодійної ділить відстань між точками прикладених сил зовнішнім чином на частини, обернено пропорційно цим силам.

Пара сил

Загальні відомості

Система двох рівних за величиною, паралельних і протилежно направлених сил, що не лежать на одній прямій, називається **парою сил**.



Пара сил не має рівнодійної, бо геометрична сума сил, що утворюють пару, рівна нулю. Отже дію пари сил на тіло не можна замінити однією силою. Разом з тим, сили, що складають пару, не перебувають в рівновазі тому, що вони не діють на одній прямій. Дослідом встановлено, що пара сил здатна надавати тілу обертального руху (обертальний момент на ведучому колесі автомобіля).

Площина, в які діє пара сил, називається **площиною дії пари сил**.

Відстань d між лініями дії пари сил, називають плечем пари. Ні в якому разі не можна змішувати поняття плеча пари сил з відстанню між точками прикладання сил, що утворюють пару.

Зазначимо, що переносячи точку прикладання однієї з сил пари вздовж її лінії дії, можна досягти того, що пряма, яка сполучає точки прикладання сил пари, буде перпендикулярна до лінії дії цих сил.

Ефект механічної дії пари сил на тіло на площині вимірюють добутком однієї з сил пари на плече. Цей добуток взятий з відповідним знаком, називають моментом пари.

$$M = \pm Fd\ .$$

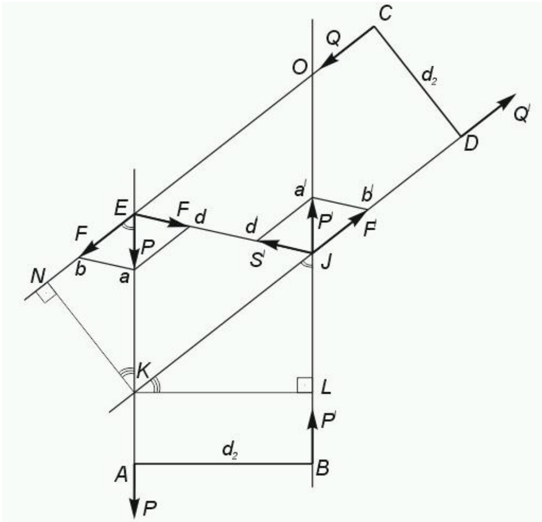
Домовимось вважати момент пари додатнім, якщо пара намагається повернути тіло в напрями проти обертання годинникової стрілки. Якщо ж пара намагається повернути його за годинниковою стрілкою – будемо вважати її від'ємною. В системі СІ момент пари вимірюється в Н·м.

Властивості пар на площині

Дві пари називаються еквівалентними, якщо вони чинять на тілу однакову механічну дію.

Для того, щоб дві пари сил, які лежать в одній площині були еквівалентні, досить, щоб моменти даних пар і їх напрями обертання збігалися.

Теорема. Пару сил, не порушуючи її дію на тіло можна переносити в будь-яке положення в площині її дії.



Доведення. Нехай задані дві пари сил $\vec{P}, \vec{P}'$ з плечем $AB = d_1$ і $\vec{Q}, \vec{Q}'$ з плечем $CD = d_2$, розміщені в одній площині і які мають чисельно рівні та однакові по знаку моменти.

Так як $M_1 = Pd_1$, $M_2 = Qd_2$ і $M_1 = M_2$, то $Pd_1 = Qd_2$, або

$$\frac{P}{Q} = \frac{d_2}{d_1} \qquad \text{(a)}$$

Продовжимо лінії дії заданих пар сил до їх пересічення в т. Е і І і перенесемо сили $\vec{P}$ і $\vec{P}'$ в ці точки. Проведемо діагональ ЕІ паралелограма ЕКІО і розкладемо кожну з цих сил на складові, направлені по діагоналі ЕІ і лініям дії сил $\vec{Q}$ і $\vec{Q}'$. Тоді отримаємо

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{S}$$

$$\vec{P}' + \vec{F}' + \vec{S}'.$$

Так як $Ea = P$, $Ia' = P'$, а відповідні сторони трикутника, а Ed і $a'Id'$ паралельні, то ці трикутники рівні. Із рівності трикутників випливає, що

$$Ed = Id', \text{ тобто } S = S'.$$

Сили $\vec{S}$ і $\vec{S}'$ направлені по діагоналі паралелограма EI в протилежні сторони, а тому $\vec{S} = -\vec{S}'$, тобто вони взаємно зрівноважуються. Виключивши із отриманої системи сил $\vec{F}, \vec{S}, \vec{F}', \vec{S}'$ взаємно зрівноважені сили $\vec{S}$ і $\vec{S}'$, отримаємо пару сил з плечем $NK = CD = d_2$, еквівалентну парі $\vec{P}, \vec{P}'$ з плечем $LK = AB = d_1$.

З подібності трикутників EaD і EKI слідує, що

$$\frac{Ea}{ad} = \frac{EK}{KI}.$$

З подібності трикутників KEN і KIL отримуємо

$$\frac{NK}{KL} = \frac{EK}{KI}.$$

Прирівняємо ліві частини рівностей з однаковими правими частинами і отримуємо:

$$\frac{Ea}{ad} = \frac{NK}{KL},$$

або

$$\frac{P}{F} = \frac{d_2}{d_1} \quad \text{(б)}$$

Співставляючи (а) і (б) встановлюємо, що сили пари $\vec{F}, \vec{F}'$ рівні по модулю силам заданої пари $\vec{Q}, \vec{Q}'$ сили якої із точок C і Д перенесені по лініям дії в точки E і I.

Таким чином, пару $\vec{P}, \vec{P}'$ можна замінити парою $\vec{Q}, \vec{Q}'$, яка має момент такої ж величини і такого ж знаку, як і момент пари $\vec{P}, \vec{P}'$.

Можна стверджувати, що отримана пара $\vec{Q},\vec{Q}'$ еквівалентна заданій $\vec{P},\vec{P}'$, що і потрібно було довести.

Із доведеної теореми випливає, що не змінюючи дію пари сил на тверде тіло можна повертати її плече на любий кут, змінювати плече і модулю сил, але так, щоб момент пари і її напрям обертання залишалися незмінними.

Додавання пар

Додати дві або декілька пар сил – це означає знайти таку пару сил, яка б чинила на тіло таку саму дію, як і вся система пар. Ця пара, еквівалентна всій системі пар сил, називається рівнодіючою парою.

Процес додавання проводять з урахуванням вище перерахованих властивостей пар. Нехай потрібно, наприклад, додати 3 пари: $\left(F_1, F_1'\right)$ з плечем d_1 і моментом M_1; $\left(F_2, F_2'\right), d_2, M_2$; $\left(F_3, F_3'\right), d_3, M_3$.

Візьмемо відрізок АВ довільної довжини d і будемо його вважати плечем рівнодіючої пари, яку потрібно відшукати. Перенесемо всі складові пари в площині їх дії так, щоб вони мали спільне плече, яке збігається з відрізком АВ.

При цьому доведеться певним чином змінити величини сил, які утворюють задані пари так, щоб моменти цих пар залишились попередніми. Нові значення сил знайдемо із співвідношень:

$$M_1 = F_1 d_1 = P_1 d;$$
$$M_2 = F_2 d_2 = P_2 d;$$
$$M_3 = -F_3 d_3 = P_3 d.$$

Додамо тепер всі сили, прикладені в т. А. Оскільки вони направлені по одній прямій, то рівнодійна дорівнює їх алгебраїчній сумі

$$R = P_1 + P_2 - P_3.$$

Нехай для визначеності $P_1 + P_2 > P_3$. Отримаємо $M = M_1 + M_2 - M_3$. Узагальнюючи цей результат, матимемо

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i ,$$

де $M_i = \pm P_i d_i$.

Тобто, момент рівнодіючої кількох пар, розміщених в одній площині, дорівнює алгебраїчній сумі моментів пар, які додаються.

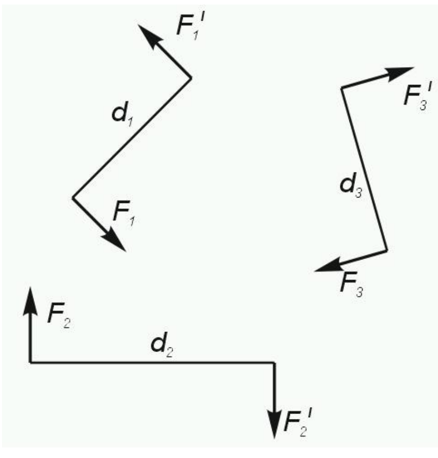
Приклад

Скласти три пари, які лежать в одній площині малюнка.

Дано: $F_1 = F_1' = 20$ кг, $d_1 = 0.25$ м;

$F_2 = F_2' = 30$ кг, $d_2 = 0.5$ м;

$F_3 = F_3' = 10$ кг, $d_3 = 0.75$ м.



Будемо вважати, що момент пари, який повертає тіло проти годинникової стрілки – додатній, а момент пари із зворотнім напрямком – від’ємний. Тоді, позначаючи алгебраїчні значення моментів пар через M_1, M_2, M_3 будемо мати

$M_1 = 20 \cdot 0.25 = 5$ кг·м;

$$M_2 = -30 \cdot 0.5 = \text{-15 кг·м;}$$

$$M_1 = -10 \cdot 0.75 = \text{-7.5 кг·м.}$$

Додаючи ці моменти, отримаємо алгебраїчне значення момент рівнодіючої пари сил

$$M = 5 - 15 - 7.5 = -17.5 \text{ кг·м.}$$

Так як M від'ємний, то рівнодійна пара обертає тіло за годинниковою стрілкою. Модуль моменту рівнодійної пари рівний 17.5 кг·м. Плече рівнодійної можна вибрати довільно, наприклад, 0.5м. Тоді кожна сила рівнодійної пари буде рівна $F = \frac{M}{d} = \frac{17.5}{0.5} = 35$ кг.

Умова рівноваги системи пар на площині

Встановимо тепер умову рівноваги тіла, що перебуває під дією системи пар сил, розміщених в одній площині.

Враховуючи, що момент рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів пар, що додаються, то умову рівноваги системи пар сил на площині можна сформулювати так:

Система пар сил, розміщений в одній площині зрівноважується, якщо алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнює нулю.

$$M = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i = 0.$$

Пару сил може зрівноважити тільки пара сил.

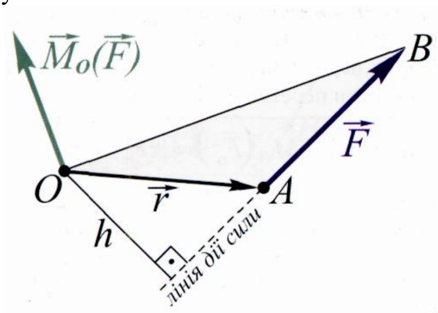
Довільна плоска система сил

Розглянемо систему сил, як завгодно розміщених на площині.

Момент сили відносно точки

Нехай дано силу $\vec{F}$ і точку О. Опустимо з цієї точки перпендикуляр h на лінію дії сили $\vec{F}$. Цей перпендикуляр називають плечем сили $\vec{F}$ відносно т. О.

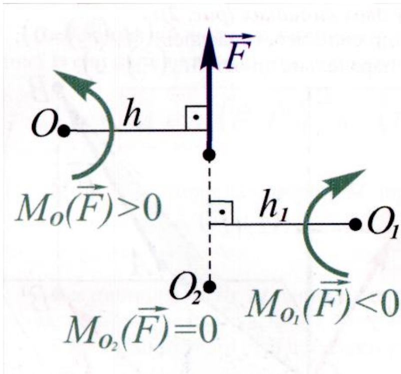
Обертальну дію сили на тіло вимірюють добутком даної сили на плече. Цей добуток, взятий з відповідним знаком „+” чи „–” називають моментом сили відносно т.О. Сама точка О називається центром моменту.



$$M_0\left(\vec{F}\right) = \pm F \cdot h\,.$$

Домовимось вважати момент сили відносно точки додатнім тоді, коли сила намагається обертати тіло відносно цієї точки проти напряму обертання годинникової стрілки; якщо протилежно – від’ємним.

Зауважимо, що знак моменту залежить від вибору центру моменту. Наприклад:



Момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії проходить через задану точку, бо в такому випадку плече сили дорівнює нулю.

Поняття про момент сили відносно точки – одне із основних понять механіки – широко використовують і при практичних розрахунках.

Теорема про паралельне перенесення сили в дану точку. Приєднана пара

Ми вже знаємо, що точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії дії цієї сили, не порушуючи механічного стану (наприклад, рівноваги) тіла.

Встановимо тепер, чи можна точку прикладання сили не змінюючи напрямку останньої, переносити в будь-яку іншу точку, не порушуючи дії даної сили на тіло.

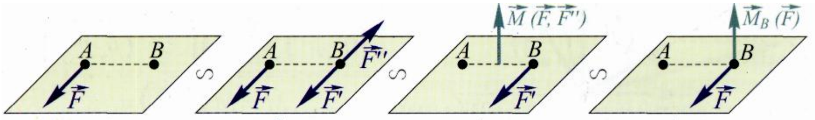
Нехай в т.*A* на тіло діє сила $\vec{F}$. Прикладемо в довільній точці *B*, яка називається центром зведення дві рівних за величиною і протилежних за напрямком сили $-\vec{F}$ і $\vec{F}'$. Механічний стан тіла не порушиться.

Будемо трактувати це так, що система сил $\left(\vec{F}, \vec{F}', -\vec{F}'\right)$ складається з сили $\vec{F}'$ і пари сил $\left(\vec{F}, -\vec{F}'\right)$, яку назвемо приєднаною парою.

З’ясуємо, чому дорівнює момент приєднаної пари. Як видно з рисунка, плече і знак моменту цієї пари збігається відповідно з плечем і знаком моменту сили $\vec{F}$ відносно центру зведення. Отже:

Момент приєднаної пари М дорівнює моменту сили $\vec{F}$ відносно центра зведення *B*.

$$M = M_C\left(\vec{F}\right)$$

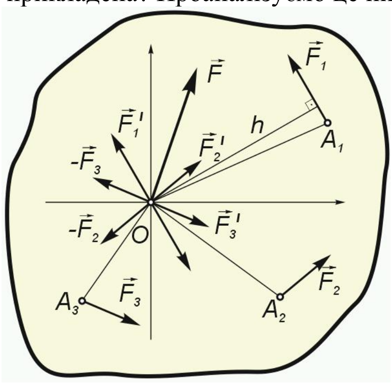


Із сказаного випливає:

Силу можна перенести паралельно самій собі в будь-яку точку, приєднавши при цьому пару сил, момент якої дорівнює моменту сили відносно центра зведення.

Зведення сил, як завгодно розміщених на площині, до вибраного центру. Головний вектор, головний момент відносно центру зведення

Нехай дано систему сил, довільно розміщених на площині $\left(\vec{F}_1,...\vec{F}_n\right)$. Поставимо задачу: як впливає ця система на окремі точки тіла, до якого вона прикладена? Проаналізуємо це питання. Для цього:



Виберемо довільну точку О і будемо вважати її центром зведення для даних сил. Приведемо всі сили до цієї точки. Будемо користуватись теоремою про паралельне перенесення сили. Спочатку перенесемо в ц. О силу $\vec{F}_1$. Отримаємо прикладену в т. О силу $\vec{F}_1'$ і приєднану пару сил $\left(\vec{F}_1, -\vec{F}_1\right)$. Продовжимо цю операцію і перенесемо в т.О всі сили. В результаті отримаємо систему сил, прикладену в т.О і систему приєднаних пар.

Складемо векторно всі сили, прикладені в т.О. Додавши векторно всі сили, ми отримаємо вектор $\vec{F}$, який називається головним вектором.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Тепер додамо всі приєднані пари, які утворилися. Як було з'ясовано, в результаті цього отримаємо рівнодіючу пару, момент якої позначимо M_0. Він дорівнює алгебраїчній сумі всіх приєднаних пар, тобто

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 .$$

Але момент кожної приєднаної пари дорівнює моменту сили відносно центра зведення.

Отже, момент рівнодіючої пари дорівнюватиме алгебраїчній сумі моментів всіх сил відносно точки О

$$M_0 = M_0\left(\vec{F}_1\right) + \ldots + M_0\left(\vec{F}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} M_0\left(\vec{F}_i\right).$$

Цей момент називається **головним моментом**.

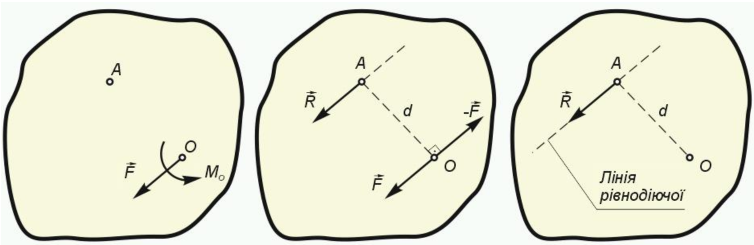
Отже: довільну плоску систему сил можна звести до однієї сили – головного вектору і до однієї пари з моментом, що дорівнює головному моменту відносно центра зведення.

Силу $\vec{F}$ не можна назвати рівнодіючою, так як вона діє спільно з головним моментом відносно центра зведення. Разом вони – сила $\vec{F}$ і ця пара – еквівалентні всій системі сил.

Виникає запитання: чи існує рівнодіюча для плоскої системи довільно розміщених сил? Для того, щоб відповісти на нього, розглянемо окремі випадки.

1. Нехай в результаті зведення сил до центра зведення О конкретної системи сил ми отримали: $\vec{F} \neq 0$, а M_0 . Отже ця довільна плоска система сил звелася до рівнодіючої, лінія дії якої проходить через точку О.

2. Нехай в результаті зведення сил до центра зведення отримали: $\vec{F} \neq 0$ і $M_0 \neq 0$. Розглянемо схему



Дана система приведена до сили $\vec{F} = \sum F_i$, прикладеній в центрі приведення О і до пари з моментом $M_0 = \sum M_0\left(\vec{F}_i\right)$.

Перетворимо пару сил так, щоб сили, які утворюють пару за величиною дорівнювали б силі $\vec{F}$. Тоді плече цієї пари доведеться взяти рівним $d = \frac{M_0}{F}$. Повернемо пару таким чином, щоб одна із її сил $\left(-\vec{F}\right)$ була направлена протилежно головному вектору. Відкидаємо сили $\vec{F}$ і $-\vec{F}$ як взаємо зрівноважені. Ми пересвідчуємось в тому, що сила $\vec{F}$, прикладена в т.А, тепер вже одна діє на тіло, так само, як і вся система сил, отже вона є рівнодіючою.

Лінія дії рівнодіючої проходить на відстані

$$d = \frac{M_0}{F}$$

через т. А від центра зведення.

Теорема Варіньйона

Знайдемо момент цієї рівнодіючої сили відносно центра О:

$$M_0\left(\vec{R}\right) = R \cdot d = R\frac{M_0}{F} = M_0 .$$

Але згідно з означенням, головний момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил відносно центра зведення, тобто

$$M_0 = M_0\left(\vec{F}_1\right) + \ldots + M_0\left(\vec{F}_i\right) + \ldots + M_0\left(\vec{F}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} M_0\left(\vec{F}_i\right)$$

.

Отже, $$M_0\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} M_0\left(\vec{F}_i\right).$$

Формулювання: Момент рівнодійної відносно будь-якої точки дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї ж точки.

Теорема Варіньйона справедлива і для моментів відносно осі, тобто

$$M_Z\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{F}_i\right).$$

Припустимо, що при зведенні плоскої системи сил до центра О, отримали $\vec{F} = 0, M_0 \neq 0$.

Ця система сил зводиться до пари сил з сталим моментом, який не залежить від центру зведення.

Існує формула, по якій можна визначити головний момент в довільній точці зведення O_1:

$$M_{O1} = M_0 + M_{O1}\left(\vec{F}\right)$$

Головний момент в довільній точці зведення O_1 , рівний головному моменту відносно попереднього центру О, плюс момент головного вектору, прикладеного в попередньому центрі зведення, відносно нового центру.

Умови рівноваги

Припустимо, що в центрі зведення О одержали:

$$\vec{F} = 0, M_0 = 0.$$

Система сил знаходиться в рівновазі, що легко можна довести.

Дійсно, із рівняння $\vec{F} = 0$ випливає, що всі сили, прикладені в центрі зведення О, зрівноважуються.

Далі, з рівності $M_0 = 0$ випливає, що сума моментів приєднаних пар $\left(\mathrm{F}_1', -F_1\right), \ldots, \left(F_n', -F_n\right)$ рівна нулю, а це значить, що ці пари також зрівноважуються.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи і її головний момент відносно довільної точки зведення, розташованої на площині, в якій діють сили системи, дорівнювали нулю.

Аналітичний вигляд умов рівноваги довільної плоскої системи сил

Ми бачили, що для рівноваги тіла під дією плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи і її головний момент відносно будь-якої точки на площині дорівнювали нулю

$$\vec{F} = 0, M_0 = 0.$$

Розглянемо головний вектор. Введемо осі ОХУ

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Проєкції цього вектора на осі координат відповідно дорівнюють

$$F_x = \sum_{i=0}^{n} F_{ix}\,,\; F_y = \sum_{i=0}^{n} F_{iy}\,.$$

При $\vec{F} = 0$ ясно, що $F_x = F_y = 0$ і ми отримаємо:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0$$

Головний момент $M_0 = \sum_{i=0}^{m} M_0\left(F_i\right)$. При $M_0 = 0$, отримаємо: $\sum_{i=0}^{m} M_0\left(F_i\right) = 0$.

Таким чином, ми приходимо до таких умов рівноваги в аналітичній формі:

Для того, щоб тіло під дією плоскої системи довільно розміщених сил перебувала у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі дорівнювала нулю, і щоб алгебраїчна сума моментів всі сил відносно будь-якої точки в площині дії цих сил також дорівнювала нулю.

При розв’язуванні задач в ці умови рівноваги входять невідомі величини, тому вони називаються рівняннями рівноваги.

Рівновага системи тіл

Системою твердих тіл називається конструкція, яка складається із декількох твердих тіл, що вільно спираються одне на одне, або з’єднані між собою деякими не жорсткими в’язями (шарнірами, гнучкою ниткою).

Задачі на рівновагу системи тіл, як правило, розв’язуються шляхом розгляду рівноваги кожного тіла окремо.

При цьому інші тіла розглядаються як в’язі і їх дія на тіло заміняється реакціями. Тут необхідно враховувати, що сили взаємодії двох тіл рівні по модулю і направлені по одній прямій в протилежні сторони.

В деякий випадках буває вигідніше розглянути рівновагу всієї системи в цілому, а пізніше – рівновагу окремого тіла.

Рівновага плоскої системи паралельних сил

З умов рівноваги довільної плоскої системи сил можна отримати і умови рівноваги плоскої системи паралельних сил.

Для цього одну із осей потрібно направити перпендикулярно до лінії дії сил. Тоді, для рівноваги паралельних сил на площині необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки і алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на паралельну їм вісь дорівнювали нулю.

Перевіряємо розв’язання, упевнюючись в тому, що задовольняється будь-яке з рівнянь, яке не використане в ході розв’язання задачі.

Центром моментів доцільно прийняти точку опори конструкції.

Інші форми аналітичного вигляду умов рівноваги довільної плоскої системи сил.

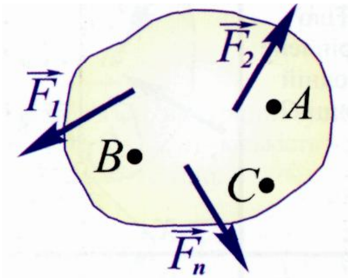
Друга форма умов рівноваги

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно будь-яких трьох точок, які не лежать на одній прямій дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_C\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$



Доведення: припустимо, що в т.А, В, С сума моментів всіх сил системи дорівнює нулю. Нехай т. А є центром зведення. Доведемо, що система сил знаходиться в рівновазі.

$$M_B = M_A + M_B\left(\vec{F}\right).$$

Так як $M_A = \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right)$ і $M_B = \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right)$, то

$$M_B\left(\vec{F}\right) = 0.$$

Ця рівність виконується в двох випадках:

1) $\vec{F} = 0$, або 2) лінія дії $\vec{F}$ співпадає з АВ.

Доведення.

1.) Якщо $\vec{F} = 0$, то умови рівноваги виконуються, тобто в т. А маємо $M_A = 0$ і $\vec{F} = 0$.

2.) Якщо $\vec{F} \neq 0$, то момент сили $\vec{F}$ відносно т.С не дорівнює нулю. Але з умов

$$M_C = M_A + M_C\left(\vec{F}\right),\ M_A = 0,\ M_C = \sum_{i=1}^{n} M_C\left(\vec{F}_i\right)$$

маємо $M_C\left(\vec{F}\right) = 0$, а це можливо тільки тоді, якщо $\vec{F} = 0$, а значить система знаходиться в рівновазі.

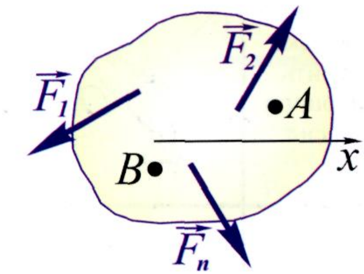
Третя форма рівноваги

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб сума моментів всіх сил системи відносно двох точок на площині дорівнювали нулю і сума проєкцій на будь-яку вісь не перпендикулярну лінії, яка сполучає вищезгадані точки дорівнювала нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0.$$



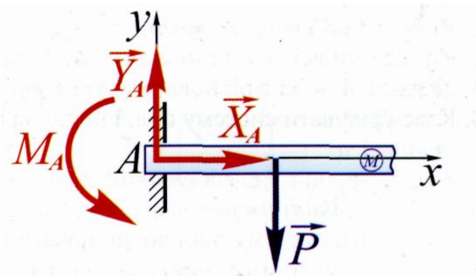
Як і в попередньому випадку, запишемо:

$M_B = M_A + M_B\left(\vec{F}\right),\ M_B = 0, M_A = 0$, звідси згідно з умовою $M_B\left(\vec{F}\right) = 0$.

Це можливо, якщо $\vec{F} = 0$, або $\vec{F}$ знаходиться на лінії дії АВ. Спроєктуємо всі сили системи на вісь Х, яка не перпендикулярна до АВ, враховуючи, що $F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$. Якщо отримаємо, що $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$, то $\vec{F}$ на вісь Х не проєктується, а значить його модуль дорівнює нулю, тобто в т. А маємо $M_A = 0$, $\vec{F} = 0$, тобто система знаходиться у рівновазі.

Тип в'язі – защемлення.

Реакція защемлення представляє собою сили, розподілені по всій опорній поверхні. На нижню поверхню діють сили, направлені вверх, а на верхню – вниз. Із цієї системи сил виникають реакції опори: вертикальна $\vec{Y}_B$, і реактивна пара сил, яка не дає балці повертатися відносно закріпленого кінця M_B. Цей момент називають опорним моментом. Якщо сили, що діють на балку не тільки вертикальні, виникає ще горизонтальна реакція $\vec{X}_B$.

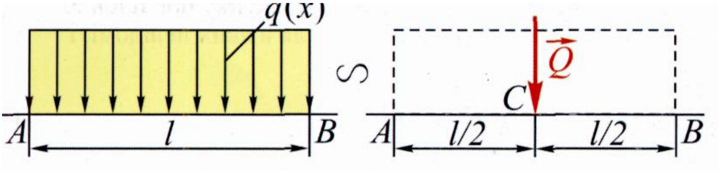


Розподілене навантаження.

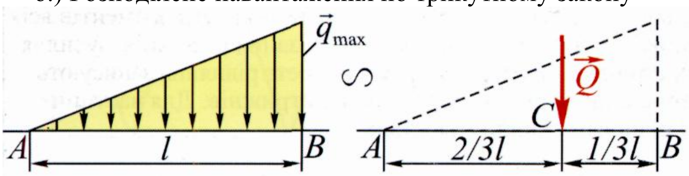
а.) Рівномірно-розподілене навантаження.

Навантаження q можна замінити зосередженою силою Q - рівнодійною всіх паралельних сил, яка прикладена посередині балки.

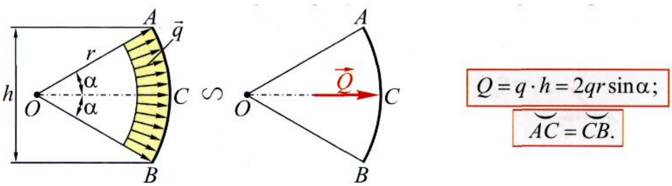
Модуль цієї сили рівний $Q = ql$.



б.) Розподілене навантаження по трикутному закону



в.) Рівномірно розподілене навантаження уздовж дуги кола



Тертя

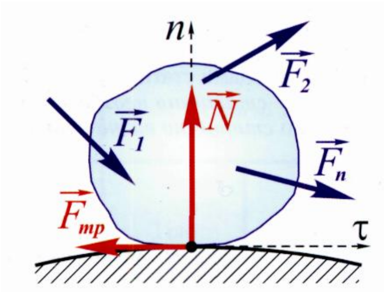
1. Тертя ковзання.

Ряд задач механіки, деталей машин і спеціальних технічних дисциплін не можуть бути розв'язані без знання законів тертя. На використанні сили тертя ґрунтується робота багатьох машин і механізмів (пасові і фрикційні передачі, похилі транспортери, гальмівні пристрої, фрикційні муфти і т.д.). Дуже велика сила тертя між різцем і заготовкою при обробці металів різанням.

Виникнення тертя при ковзанні тіл одне відносно одного, обумовлене насамперед, шорсткістю тертьових поверхонь, а також наявністю молекулярного зачеплення притиснутих одне до одного тіл.

Якщо поверхня шорстка, то її реакція складається з нормальної складової $\vec{N}$ і сили тертя $\vec{F}_{TP}$.

Розглянемо тверде тіло, розміщене на горизонтальній нерухомій площині. Це тіло перебуває в рівновазі. Прикладемо до тіла горизонтальну силу $\vec{T}$ і будемо поступово її збільшувати. Якщо поверхня шорстка, то сила $\vec{T}$ зрівноважується протилежно напрямленою силою $\vec{F}_{TP}$, яка називається статичною силою тертя. Ця реакція направлена по дотичні до поверхні. Вона зростає одночасно з силою $\vec{T}$ до певної межі. Після цього тіло почне ковзати. В цей момент сила тертя $\vec{F}_{TP}$ досягає максимального значення. Саме цю силу називають граничною. Під час руху сила тертя дещо зменшується. Причина в електростатичних силах.



Силу тертя під час руху називають динамічною. Між граничною силою тертя і нормальним тиском на поверхню існує залежність

$$F_{TP} = fN,$$

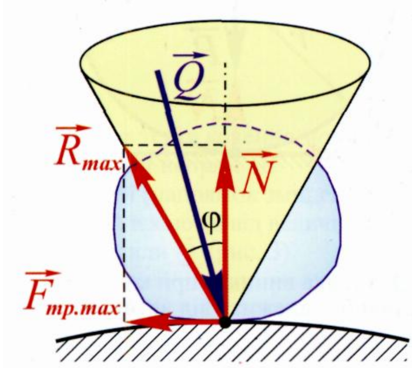
де f - коефіцієнт статичного тертя.

Сила тертя не залежить від розмірів тертьових поверхонь.

Коефіцієнт тертя залежить від матеріалу тіл, що стикаються і стану тертьових поверхонь (ступеня їх обробки).

Нормальна реакція $\vec{N}$ і сила тертя $\vec{F}_{TP}$ в сумі визначать повну реакцію $\vec{R}$, відхилену від нормалі на кут φ.

Найбільший кут, на який повна реакція шорсткої поверхні відхиляється від перпендикуляра до цієї поверхні називають кутом тертя.



$$\frac{F_{TP}}{N} = tg\varphi = f$$

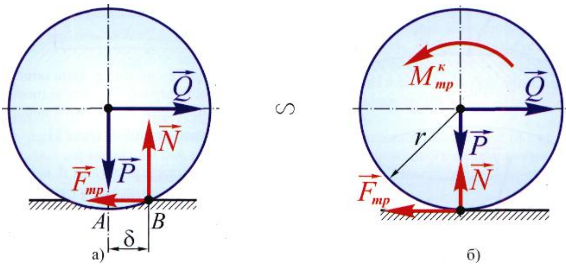
$$tg\varphi = f\ .$$

Тангенс кута тертя чисельно дорівнює коефіцієнту статичного тертя.

2. Тертя кочення

Ми розглядаємо тільки абсолютно тверді тіла. Але є одне виключення з цього правила. Це стосується поверхні по якій котиться тіло. Властивості поверхні такі, що вона прогинається, тобто деформується під дією тиску тіла. Ми бачимо таке явище при прокатці асфальтового покриття, при їзді автомобіля по піску і т.д. Опір руху при цьому значно збільшується порівняно з твердою поверхнею. Це можна пояснити тим, що в результаті прогину поверхні в зоні контакту, рівнодіюча вертикальної реакції зміщається в напрямку руху тіла і створює з силою тиску пару сил опору. Плече цієї пари і є коефіцієнт тертя кочення. Вимірюється в см.

$$M_{\max} = f_k \cdot N$$



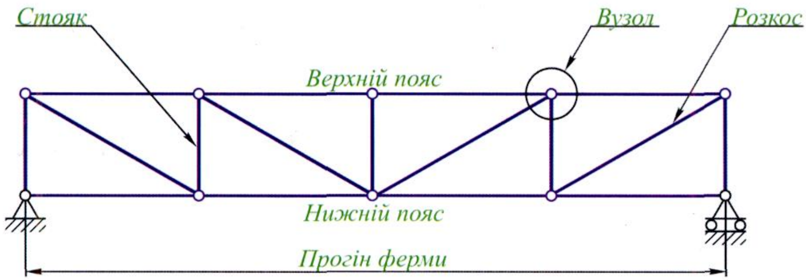
Розрахунок плоских ферм

Загальні відомості

Фермою називається геометрично незмінна шарнірно-стрижнева конструкція.

Ферма називається **плоскою**, якщо осі усіх її стрижнів лежать в одній площині.

Вузлами ферми називаються точки в яких сходяться осі стрижнів.



Для силового розрахунку ферм приймаються **наступні припущення**:

1. Стрижні між собою з'єднуються ідеальними шарнірами;
2. Усі зовнішні навантаження прикладаються до ферми тільки в її вузлах;
3. Вагою стрижнів (у порівнянні із зовнішнім навантаженням) нехтують, або розподіляють вагу стрижнів по вузлах.

Дані припущення дозволяють зробити висновок, що стрижні ферми працюють тільки на розтяг або стиск.

Ідеалізація реальних ферм дає можливість спростити їх силовий розрахунок, а результати розрахунку стають придатними для практики.

Розглянемо способи силового розрахунку плоских ферм без зайвих стрижнів (статично означених ферм), утворених із трикутників. У таких фермах число стрижнів ***N*** і число вузлів ***n*** пов'язані співвідношенням.

$$N = 2n - 3$$

Розрахунок ферми полягає у визначенні опорних реакцій і зусиль в її стрижнях.

Опорні реакції визначаються звичайними методами статики, розглядаючи ферму в цілому як тверде тіло.

Спосіб вирізування вузлів

Для визначення зусиль у стрижнях ферми необхідно:

1) визначити реакції опор ферми, склавши рівняння рівноваги ферми в цілому;

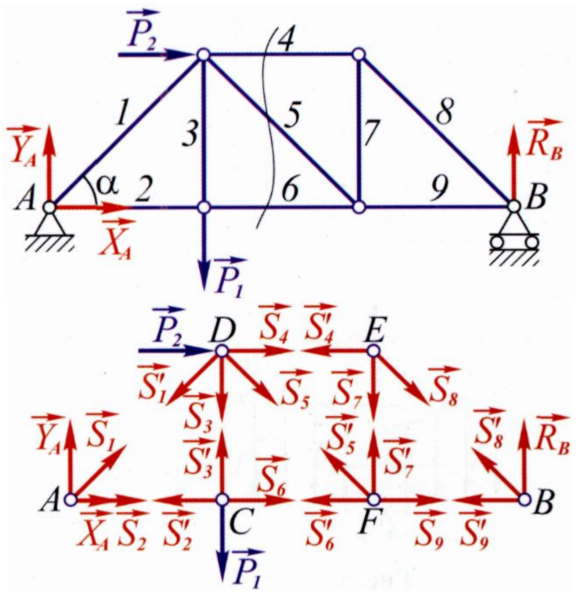
2) пронумерувати вузли і стрижні ферми, невідомі зусилля в стрижнях позначити відповідно

3) вирізати уявно усі вузли разом із стрижнями, які збігаються у них. Дію відкинутих стрижнів на даний вузол замінити силами, які будуть напрямлені уздовж відповідних стрижнів кількісно дорівнюють невідомим зусиллям Sк ($k=1,\overline{n}$). Зусилля у стрижнях Sк потрібно напрямити від вузлів, тобто вважати, що усі стрижні розтягнуті. Якщо у результаті розрахунку значення зусилля в будь-якому, стрижні буде від'ємним, то це буде означати, що даний стрижень стиснутий;

4) записати рівняння рівноваги збіжної системи сил, яка діє на кожний вузол. Рівновагу вузлів потрібно розглядати в такому порядку, щоб у рівняннях рівноваги було не більше двох невідомих зусиль у стрижнях ферми;

5) з даних рівнянь рівноваги визначити невідомі зусилля у стрижнях ферми.

Цим способом зручно користуватися, якщо необхідно визначити зусилля в усіх стрижнях ферми.



Спосіб перерізів (спосіб Ріттера)

Для визначення зусиль у стрижнях ферми необхідно:

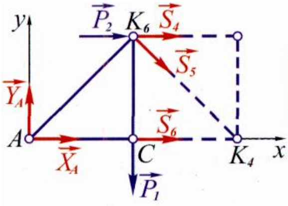
1) визначити реакції опор ферм ;

2) розрізати ферму на дві частини таким чином, щоб у перерізі було не більше трьох розрізаних стрижнів з невідомими зусиллями у них;

3) відкинути одну з частин розрізаної ферми, а дію відкинутої частини ферми на розглядувану частину ферми замінити зусиллями у розрізаних стрижнях, напрямляючи їх уздовж осей розрізаних стрижнів від вузлів, тобто вважаючи стрижні розтягнутими;

4) скласти рівняння моментів відносно трьох точок Ріттера і з них визначити зусилля в розрізаних стрижнях ферми.

Точками Ріттера називаються точки попарного перетину осей розрізаних стрижнів. Якщо осі двох стрижнів паралельні, то одна точка Ріттера знаходиться на нескінченості. Тоді замість рівняння моментів складається рівняння проекцій усіх сил на вісь, яка перпендикулярна до осей паралельних розрізаних стрижнів. У даному випадку одержують такого виду рівняння, що у кожне з них буде входити тільки одне невідоме зусилля.



$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;} \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} M_{R_4}\left(\vec{F_i}\right) = 0;} \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} M_{R_6}\left(\vec{F_i}\right) = 0.} \quad (3)$$

K_4 - точка Ріттера для стрижня 4;
K_6 - точка Ріттера для стрижня 6.
У стрижня 5 точки Ріттера немає.

Способом Ріттера зручно користуватися для визначення зусиль в окремих стрижнях ферми, а також для перевірки правильності розрахунків.

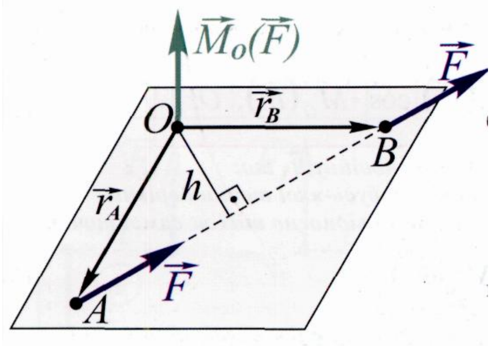
Довільна просторова система

Вектор – момент сили відносно точки в просторі

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки О в просторі називається вектор, прикладений в т. О, модуль якого дорівнює добутку модуля сили на її плече відносно точки О. Направлений вектор-момент сили відносно т. О перпендикулярно площині ОАВ в якій розташовано вектор $\vec{F}$ і т. О, в бік, звідки обертання тіла силою $\vec{F}$ уявляється проти годинникової стрілки.

Позначається $\overrightarrow{M_0}(\vec{F})$

Модуль $\left|\overrightarrow{M_0}(\vec{F})\right| = F \cdot h$



Вектор-момент $\overrightarrow{M_0}(\vec{F})$ виражається за допомогою векторного добутку $\vec{r} \cdot \vec{F}$, де $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ називається радіус-вектор точки А прикладання сили:

$$\overrightarrow{M_0}\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Модуль

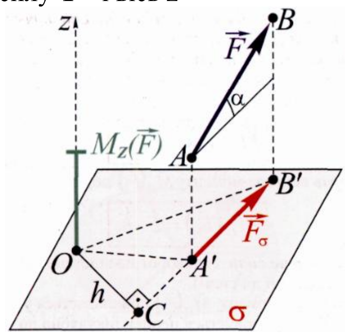
$$\left|\overrightarrow{M_0}\left(\vec{F}\right)\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = 2пл.\,\Delta OAB$$

Вектор-момент сили відносно точки дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки прикладання сили на вектор сили.

Момент сили відносно осі в просторі

При вивченні системи сил, яка довільно розташована в просторі важливим являється поняття моменту сили відносно осі

Нехай дано силу $\vec{F}$ і вісь z



Виберемо на осі довільну точку O і проведемо через неї площину P перпендикулярну осі z. Розкладемо силу $\vec{F}$ на 2 складові одну паралельну до осі z, другу – перпендикулярну до осі z ($\vec{F_z}$ і $\vec{F'}$)

F_z зсовує тіло вздовж осі обертання і тому обертального ефекту не має.

F' впливає на обертальний ефект.

Спроектуємо $\vec{F'}$ на площину P. З точки O проведемо перпендикуляр на лінію дії цієї проекції. Позначимо його через h

$$h = OC$$

Моментом сили відносно осі називається момент проекцій цієї сили на площину, перпендикулярну до цієї осі, відносно точки, де перетинаються вісь і площина.

Позначення: $M_{oz}(\vec{F})$, або $M_z(\vec{F})$

В даному прикладі $M_{oz}(\vec{F}) = F' \cdot h$

Властивості моменту сили відносно осі

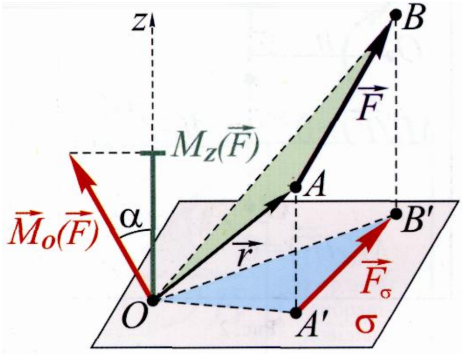
1) Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила паралельна до осі.

2) Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо лінія дії сили перетинає вісь.

Залежність між моментом сили відносно точки і відносно осі.

Момент сили відносно точки в просторі дорівнює

$$\overrightarrow{M_0}\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$



Проведемо через точку O вісь OZ і знайдемо момент сили $\vec{F}$ відносно цієї осі

$$M_{oz}(\vec{F}) = F' \cdot h$$

З схеми видно, що: $\overrightarrow{M_o}\left(\vec{F}\right) = 2пл.\,\Delta OAB$

$$M_{oz}\left(F\right) = 2пл.\,\Delta OA'B'$$

Спроектуємо вектор $\overrightarrow{M_o}(\vec{F})$ на вісь oz:

$$np_{oz}\left[M_o\left(F\right)\right] = \left[M_o\left(F\right)\right] \cdot \cos\alpha$$
$$= 2пл.\,\Delta OAB \cdot \cos\alpha$$

Враховуючи, що кут між перпендикулярами до двох площин дорівнює куту між площинами отримаємо:

$$пл.\,\Delta OAB \cdot \cos\alpha = пл.\,\Delta OA'B'$$

Звідси:

$$np_{oz}\left[\overrightarrow{M_o}\left(\vec{F}\right)\right] = 2пл.\,\Delta OA'B' = M_{oz}\left(\vec{F}\right)$$

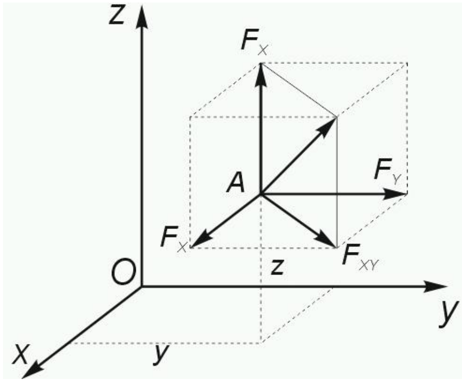
$$M_{oz}\left(\vec{F}\right) = np_{oz}\left[\overrightarrow{M_o}\left(\vec{F}\right)\right]$$

Момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь моменту тієї ж сили відносно довільної точки, яка взята на осі

Формули для моментів сили відносно координатних осей

Нехай дана сила $\overrightarrow{F}$. Через будь-яку точку простору проведено систему прямокутних координатних осей. Координати т. А відповідно позначимо x,y,z.

Знайдемо спочатку момент сили відносно осі z. Для цього спроектуємо силу $\overrightarrow{F}$ на площину оху і розкладемо її на складові вздовж осей $\overrightarrow{F}_x$, $\overrightarrow{F}_y$



Тоді: $$m_{oz}(\overrightarrow{F}) = m_{oz}(\overrightarrow{F_{xy}}) = m_{oz}(\overrightarrow{F_x}) + m_{oz}(\overrightarrow{F_y})$$

(теорема Варіньйона: момент рівнодійної площини системи сил відносно центра, який лежить в площині цих сил, дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил цієї системи відносно цього ж центру)

З схеми видно:

$$m_{oz}(\overrightarrow{F_x}) = -y \cdot F_x$$

$$m_{oz}(F_y) = x \cdot F_y$$

$$m_{oz}(\overrightarrow{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

$$m_{ox}(\overrightarrow{F}) = y \cdot F_z - z \cdot F_y$$

$$m_{oy}(\overrightarrow{F}) = z \cdot F_x - x \cdot F_z$$

Це аналітичний вигляд виразів для моментів сил відносно координатних осей.

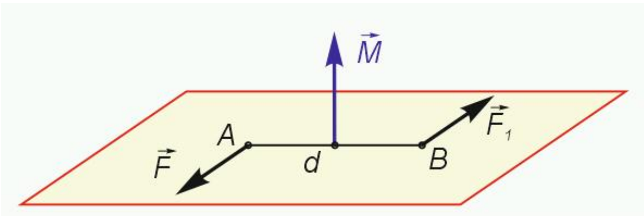
Пара сил в просторі

Розглянемо систему пар сил в просторі. Кожна пара сил має свою площину дії, в якій здійснює обертальний ефект. Для повної характеристики дії на тіло просторової системи пар сил необхідно знайти, як розташовані площини, в яких діють пари. Для цього вводиться поняття про момент пари як вектор (вектор-момент пари)

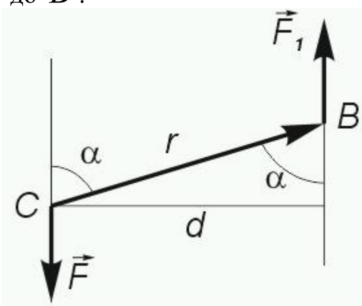
Вектор-момент пари

Вектором-моментом пари називають вектор, напрямлений перпендикулярно до площини дії пари в бік, звідки обертання тіла даною парою сил, уявляється проти годинникової стрілки. Модуль вектора - момента пари дорівнює добутку однієї з сил пари на плече пари

$$M = F \cdot d$$



Нехай дана пара ($\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F}$). Сили пари прикладені відповідно в точках A і B . Введені радіус-вектор $\vec{r}$, який сполучає ці точки і направлений від A до B .



Вектор-момент пари сил виражається векторним добутком

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

Легко можна довести, що $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot d$

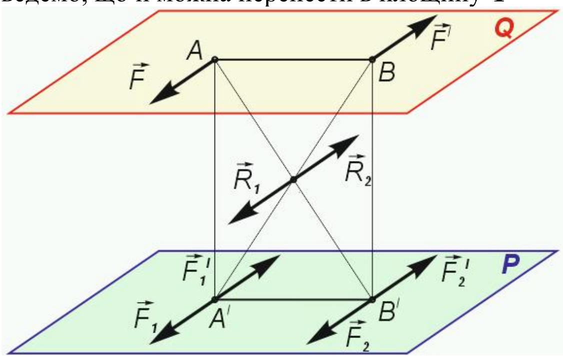
Зауважимо, що $\overrightarrow{M}$ перпендикулярна до площини, а прикладають його в будь-якій точці цієї площини, так як пару можна переміщати в площині як завгодно.

Теорема про перенос пари в площину, паралельну площини її дії

Дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо її перемістити в будь-яку іншу площину, паралельну площині дії пари

Нехай дана пара сил ($\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{F'}$), розташована в площині Q

Доведемо, що її можна перенести в площину P



Припустимо, Що AB – плече пари. В площині Р проведемо пряму лінію $A'B'$, яка паралельна AB і дорівнює їй по довжині, В точках A' і B' прикладено по дві взаємозрівноважені сили F_1, F_1' в т. A' і F_2, F_2' в т. B. Ці сили паралельні силам F і F', модулі їх дорівнюють модулям цих сил.

Складемо силу F_2 прикладену в т. B' з силою F, прикладеною в т. A, отримаємо рівнодіючу з модулем R_1

$$R_1 = F + F_2$$

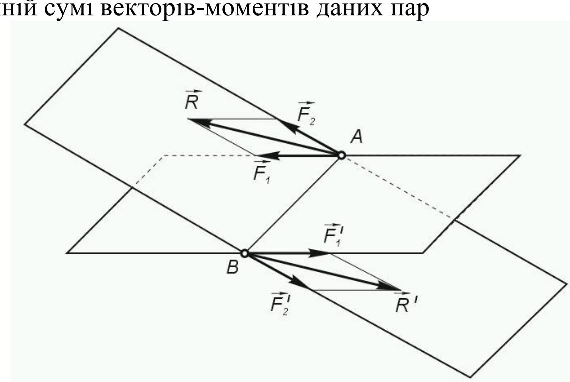
Складемо F' з F_1', отримаємо R_2

$$R_2 = F' + F_1'$$

Сили прикладені в т. K, як рівні по модулю і направлені по одній прямій в протилежні сторони, взаємозрівноважуються. Залишаються сили F_1 і F_2', які складають пару сил з плечем $A'B'$ в площині P.

Так як пара сил F_1, F_2' має модуль моменту той же що і пара F, F' і намагається повертати площину в тому ж напрямку, вони еквівалентні що і потрібно було довести

Теорема. Дві пари сил, розташовані в площинах, які перетинаються, еквівалентні одній парі, вектор-момент якої дорівнює геометричній сумі векторів-моментів даних пар



Доведення: Нехай дано 2 пари сил, розташованих в площинах, які перетинаються по лінії AB. Перетворимо пари так, щоб вони мали однакові плечі, довжину яких приймемо рівною AB. Отримаємо пари (F_1, F_1') і (F_2, F_2'). Перемістимо пари так, щоб їхні плечі лежали на лінії, по якій перетинаються площини. Складемо по 2 сили, прикладені відповідно в т. A і B

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R},\ \vec{F'}_1 + \vec{F'}_2 = \vec{R'}$$

Це буде пара сил. Це видно з того, що ми одержали одинакові суми. З схеми видно, що ці сили паралельні і протилежно направлені. Вектор-момент пари, яку назвемо рівнодіючою, дорівнює:

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{R} = \vec{AB} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) = \vec{AB} \times \vec{F}_1 + \vec{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Теорему доведено.

Якщо до тіла прикладено декілька пар сил, то використовуючи теорему послідовно, маємо:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_1 + \overrightarrow{M}_2 + \ldots + \overrightarrow{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_i$$

Можна розглянути і обернену задачу: розкласти вектор-момент пари сил на дві складових так, щоб їх геометрична сума дорівнювала нулю.

Зауважимо: якщо пари сил знаходяться в одній площині, то геометрична сума заміняється алгебраїчною.

Теорема: Для того щоб система пар зрівноважувалась, необхідно і досить, щоб момент $\overrightarrow{M}$ рівнодіючої пари (R , R') дорівнював нулю.

Доведення. Справді, якщо позначимо плече рівнодійної через d , то з рівності

$$M = R \cdot d = 0$$

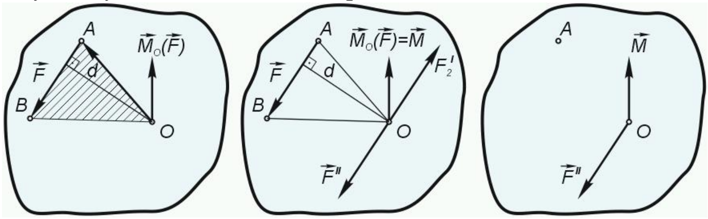
Випливає, що або $R = R' = 0$, або $d = 0$; в останньому випадку система пар зводиться до двох рівних по модулю сил, направлених по одній прямій в протилежні сторони. Ясно, що в обох випадках існує рівновага. Тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_i = 0$$

Теорема про паралельний перенос сил в просторі

Силу можна переносити в будь-яку точку простору паралельно самій собі, якщо при цьому приєднати пару сил вектор-момент якої дорівнює вектор-моменту даної сили відносно цієї точки, в яку сила переноситься.

Доведення. Нехай сила $\vec{F}$ прикладена в т. A. Виберемо довільну точку O; назвемо її центром зведення.



Проведемо з т. O в т. A радіус-вектор r і визначимо момент сили $\vec{F}$ відносно центра зведення

$$\overrightarrow{M_o}(\vec{F}) = \vec{r} \cdot \vec{F}$$

Прикладемо в т. O дві зрівноважуючі сили $\vec{F'}, \vec{F''}$ які рівні і паралельні силі F. Отримаємо еквівалентну силі систему трьох сил: $\vec{F}, \vec{F'}, \vec{F''}$.

Цю систему можна розглядати як сукупність сили $\vec{F}$, що прикладена в центрі зведення $(\vec{F''} = \vec{F})$ і приєднаної пари $\vec{F}, \vec{F'}$

Модуль моменту цієї пари

$$M = F \cdot d = M_o(\vec{F})$$

рівний модулю сили $\vec{F}$ відносно т. O

Вектор $\vec{M}$ приєднаної пари направлений перпендикулярно до площини $\vec{F}, \vec{F'}$ яка співпадає з площиною ΔAOB, в ту сторону з якої пара $\vec{F}, \vec{F'}$ уявляється так, що хоче повертати цю площину проти годинникової стрілки

Як вільний вектор прикладемо в т. O і бачимо, що напрямки $\vec{M}$ і $\overrightarrow{M_o}(F)$ співпадають

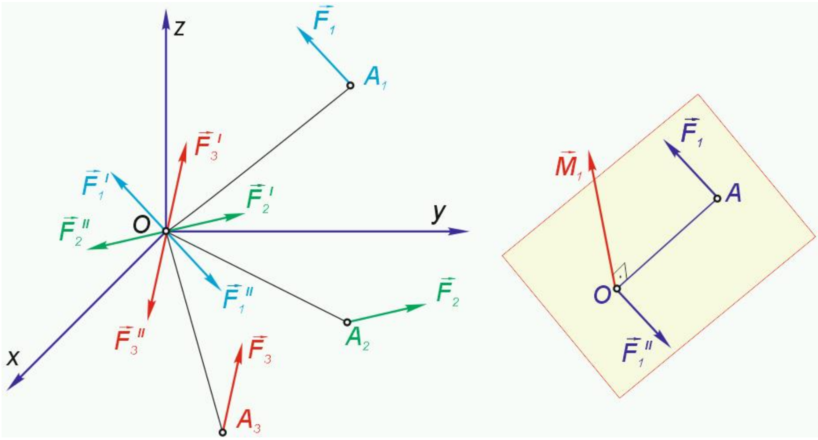
Так як ці вектори рівні по модулю і направлені в одну сторону, то вони геометрично рівні тобто

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F}) = \vec{r} \cdot \overrightarrow{F}$$

Теорему доведено.

Зведення довільної просторової системи сил до будь-якого центру в просторі

Розглянемо тверде тіло на яке діє довільна просторова система сил $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$



Виберемо точку O простору і приймемо її за центр зведення. Зведемо всі сили в цей центр. При цьому користуємось теоремою про паралельний перенос сили в просторі.

В результаті зведення системи сил до т. O ми зможемо оцінити дію просторової системи сил на будь-яку точку тіла. Одночасно розв'язується ще одна задача, а саме відбувається заміна первісної системи сил на іншу, еквівалентну їй. При цьому нова система виглядає значно простіше. Вона складається з сил

$$\overrightarrow{F'}_1, \overrightarrow{F'}_2, \ldots, \overrightarrow{F'_n}$$

прикладених в т. O і системи приєднаних пар з векторами-моментами $\overrightarrow{M}_1, \overrightarrow{M}_2, \ldots, \overrightarrow{M}_n$. Легко побачити, що систему сил з штрихами можна скласти геометрично, тоді вона заміниться їх рівнодіючого $\overrightarrow{F}$, яку назвемо головним вектором первісної системи сил

$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F_1'}+\overrightarrow{F_2'}+\ldots+\overrightarrow{F_n'}$ Заміняючи $\overrightarrow{F_1'}$ на $\overrightarrow{F_1}$ і т.д. отримуємо

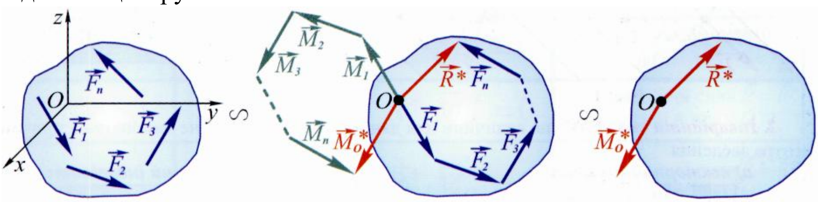
$$\overrightarrow{F}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_i}$$

Складемо геометрично вектори-моменти пар. В результаті система пар замінюється рівнодіючою парою, моменти якої

$$\overrightarrow{M_o}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M_i}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_i})$$

Головний вектор. Головний момент

Будь-яка просторова система сил, яка діє на абсолютно тверде тіло, при зведені до довільного центру O в просторі замінюється однією силою $\overrightarrow{F}$, яка називається головним вектором, і однією парою сил з моментом $\overrightarrow{M_o}$, який називається головним моментом системи, відносно центру O.



Статичні інваріанти

Ми з'ясували , що при зведенні довільної просторової системи сил до будь-якого центру, система замінюється головним вектором $\overrightarrow{F}$ і головним вектором-моментом $\overrightarrow{M_o}$ відносно цього центру.

З рівності $\overrightarrow{F}=\sum\overrightarrow{F_i}$ випливає, що як модуль, так і напрямок головного вектора не залежить від вибору центру зведення. Звідси висновок:

Головний вектор – інваріантний по відношенню до центру зведення

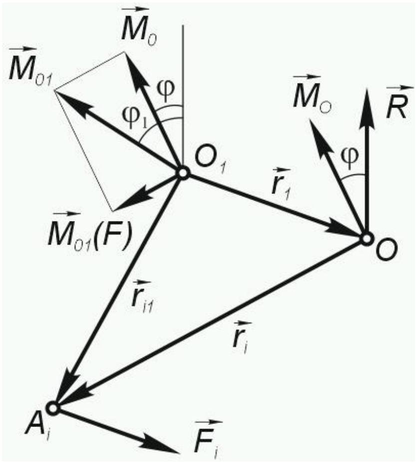
З рівності $\overrightarrow{M_o} = \sum \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F})$ випливає, що головний момент системи властивості інваріантності по відношенню до центру зведення не має, тому що при зміні центру зведення, моменти сил системи відносно цього центру міняються, а значить їх сума, взагалі буду мінятися.

Знайдемо, як міняється головний момент системи при переносі центру зведення.

Для цього розглянемо довільну просторову систему сил

$$(\overrightarrow{F'}_1, \overrightarrow{F'}_2, ..., \overrightarrow{F'_n})$$

В результаті зведення даної системи сил до будь-якого центру O ми одержимо вектори $\vec{F}$ і $\overrightarrow{M_o}$, кут між якими позначимо ϕ.



Приймемо тепер за центр зведення т. O_1 і подивимося як зміниться головний момент системи при переході до цієї точки. Для цього візьмемо будь-яку силу $\overrightarrow{F_i}$ системи і проаналізуємо, як міняється момент цієї сили при переході до центру O_1

Нехай сила F_i прикладена в т. A_i. Позначимо радіус-вектори точки прикладання цієї сили, які проведемо з центрів O і O_1 відповідно $\vec{r_i}$ і $\overrightarrow{r_{i1}}$. Вектор OO_1 позначимо $\vec{r_1}$. Тоді

$$\overrightarrow{r_{i1}} = \vec{r_i} + \vec{r_1}$$

Складемо моменти сили $\overrightarrow{F_i}$ відносно центрів зведення O і O_1

$$\overrightarrow{M_o}(F_i) = r_i \cdot F_i$$

$$\overrightarrow{M_{o1}}(F_i) = \overrightarrow{r_{i1}} \cdot \overrightarrow{F_i} = (\vec{r_1} + \vec{r_i}) \cdot \overrightarrow{F_i} = \vec{r_1} \cdot \overrightarrow{F_i} + \vec{r_i} \cdot \overrightarrow{F_i} = \vec{r_1} \cdot \overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_i})$$

Додаючи моменти всіх сил $\overrightarrow{F_i}(i = 1,2,3,...n)$ відносно першого центру зведення O_1, одержимо $\overrightarrow{M_{o1}}$

$$\overrightarrow{M_{o1}} = \sum_{i=1}^{n} M_{o1}(F_i) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{(r_1 \cdot F_i)} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_i}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{(r_1 \cdot F_i)} + \overrightarrow{M_o}$$

В першому доданку спільний множник $\vec{r_1}$ можна винести за знак суми

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{(r_1} \cdot \overrightarrow{F_i}) = \vec{r_1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \vec{r_1} \cdot \vec{F}$$

Це є момент головного вектора $\overrightarrow{F_i}$ прикладеного в т. O відносно т. O_1

$$\vec{r_1} \cdot \vec{F} = \overrightarrow{M_{o1}}(\vec{F})$$

Проводимо зведення і отримуємо

$$\overrightarrow{M_{o1}} = \overrightarrow{M_o} + \overrightarrow{M_{o1}}(\vec{F}) \quad (1)$$

Кількісна зміна головного вектора-моменту системи сил при зміні центру зведення дорівнює моменту головного вектор цієї системи, прикладеного в попередньому центрі зведення, відносно нового центру

Спроектуємо (1) на напрямок головного вектора $\vec{F}$. Враховуємо, що проекція $\overrightarrow{M_{o1}}(\vec{F})$ на цей напрямок дорівнює нулю, так як

$\overrightarrow{M_{o1}}(\vec{F})$ перпендикулярна до $\vec{F}$

Одержимо

$$M_{o1} \cdot \cos\phi_1 = M_o \cdot \cos\phi$$

$$\text{де, } \phi_1 = \left(\overrightarrow{m_{o1}}, \vec{F}\right) \ \phi = \left(\overrightarrow{m_o}, \vec{F}\right)$$

Тобто: Проекція головного моменту даної системи на напрям головного вектора є стала величина, вона не міняється при зміні центру зведення.

Зведення просторової системи сил до найпростішого вигляду

Рівнодіюча система сил, довільно розміщених в просторі

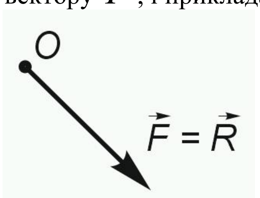
Ми бачили, що в результаті зведення довільної просторової системи сил до будь-якого центру в загальному випадку одержуємо

$$\vec{F} = \sum F_i \ , \ \overrightarrow{M_o} = \sum \overrightarrow{M_o}(\vec{F_i})$$

Ці вектори направлені один до одного під кутом ϕ , який може мінятися в діапазоні від 0° до 360°

Сила $\vec{F}$ не являється рівнодіючою для даної системи сил. З'ясуємо при яких умовах довільна просторова система сил зводиться тільки до однієї сили, тобто має рівнодіючу

а) Якщо головний вектор-момент довільної системи сил відносно даного центру дорівнює $\overrightarrow{M_o} = 0$, система зводиться до рівнодіючої, яка дорівнює головному вектору $\vec{F}$, і прикладається в цьому ж центрі



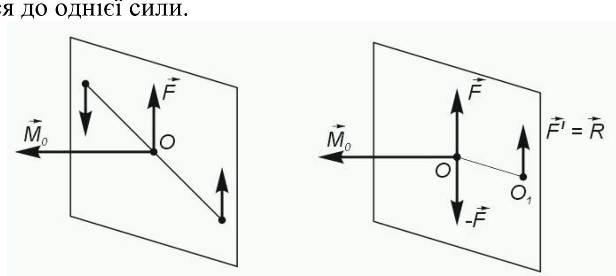
б) Нехай при зведені до даного центру одержали:

$\overrightarrow{F} \neq 0$, $\overrightarrow{M_o} \neq 0$, $\overrightarrow{F}$ перпендикулярна до $\overrightarrow{M_o}$

В цьому випадку система сил також зводиться до рівнодіючої, що можна легко довести.

Перенесемо пару сил в площину в якій знаходяться $\overrightarrow{F}$

Нам вже відомо, що сила і пара сил, які розташовані в одній площині зводяться до однієї сили.



Для цього потрібно перетворити пару так, щоб її сили дорівнювали за модулем силі $\overrightarrow{F}$. Далі треба змістить цю пару в площині так, щоб одна з її сил була б прикладена до точки O і направлена протилежно до сили $\overrightarrow{F}$

Тоді $\overrightarrow{F}$ і $-\overrightarrow{F}$ зрівноважаться і система зведеться до сили $\overrightarrow{F'} = \overrightarrow{R}$, яка прикладена в т. O_1

Відрізок $OO_1 = \dfrac{M_o}{F}$ знаходиться як плече пари ($\overrightarrow{F}, -\overrightarrow{F}$)

Якщо головний момент M_o системи сил відносно даного центру O є перпендикулярний до головного вектора $\overrightarrow{F}$,то ця система зводиться до рівнодійної сили, яка дорівнює головному вектору $\overrightarrow{F}$. Лінія дії цієї рівнодійної проходить через т. O_1 , яка лежить на відстані

$OO_1 = \dfrac{M_o}{F}$ від т. O , відкладеній перпендикулярно до площини, в якій знаходяться $\overrightarrow{M_o}$ і $\overrightarrow{F}$

Теорема Варіньйона

Це теорема має місце для довільної просторової системи сил, яка зводиться до рівнодійної. Вектор-момент рівнодіючої відносно будь-якого центру у просторі дорівнює геометричній сумі моментів сил, які складають систему, відносно того ж центру

Нехай в т. O система зводиться до сили $\overrightarrow{F}$ і пари $\overrightarrow{M_o}$, $\overrightarrow{F}$ перпендикулярно $\overrightarrow{M_o}$, при чому: $\overrightarrow{M_o} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F_i})$

Припустимо, що в центрі O_1 система звелася до $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F}$

Значить $\overrightarrow{M_{o1}} = 0$

З іншого боку: $\overrightarrow{M_{o1}} = \overrightarrow{M_o} + \overrightarrow{m_{o1}}(\overrightarrow{F})$, де $\overrightarrow{m_{o1}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{F}$

Підставимо сюди $\overrightarrow{M_{o1}}$: $0 = \overrightarrow{M_o} + \overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{F}$ або

$$\overrightarrow{M_o} = -\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{F}$$

Змінимо напрям відрізку який сполучає точки O і O_1

Маємо: $\overrightarrow{OO_1} = -\overrightarrow{OO_1}$, звідки після підстановки

$\overrightarrow{M_o} = -\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{F} = \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F})$ - а це є момент сили $\overrightarrow{F}$, прикладеної в т. O_1 відносно т. O . Пам'ятаючи, що в цій точці $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{R}$, можна записати

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{R})$$

З другого боку $\overrightarrow{M_o} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F_i})$ і ми одержимо:

$$\overrightarrow{m_o}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{m_o}(\vec{F_i})$$

Розглянемо наступний випадок: Нехай при зведені системи сил до центру O одержали:

$$\vec{F} = 0\,,\ \overrightarrow{M_o} \neq 0$$

Первісна система сил еквівалентна одній парі з сталим моментом, що видно із наступного:

При зведені сили до т. O одержимо $F = 0$ $M_{o1} = 0$

$$\overrightarrow{M_{o1}} = \overrightarrow{M_o} + \underbrace{\overrightarrow{m_{o1}}(\vec{F})}_{=0} = \overrightarrow{M}$$

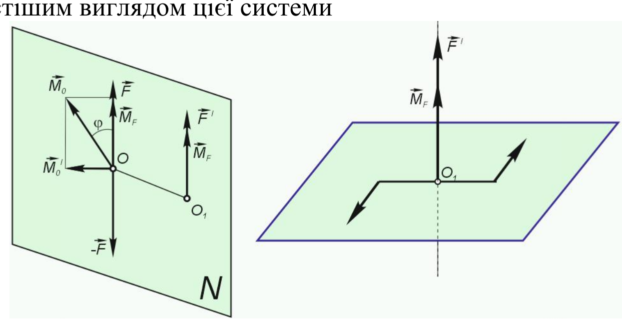
Головний момент системи при зміні центру зведення не міняється

Динама

Розглянемо найбільш загальний випадок: нехай в ц. O

$$\vec{F} \neq 0 \qquad \overrightarrow{M_o} \neq 0 \qquad \phi \neq 90^\circ$$

Це показує, що первісна система зводиться до динами яка є найпростішим виглядом цієї системи



В площині векторів $\overrightarrow{M_o}$ і $\vec{F}$ через т. O проведемо пряму, перпендикулярну до $\vec{F}$. Розкладемо $\overrightarrow{M_o}$ на напрямок головного вектор і цієї прямої

Отримані складові позначимо:

$$M_F = M_o \cdot \cos\phi$$

$$M_o' = M_o \cdot \sin\phi$$

Тепер пара сил з моментом $\overrightarrow{M_o}$ заміниться двома парами M_F і M_o'

Перетворимо пару з моментом $\overrightarrow{M_o}$ так, щоб вона складалася з сил ($\vec{F}, -\vec{F}$), тоді

$$OO_1 = P = \frac{M_o'}{F} = \frac{M_o \cdot \sin(\vec{F}, \overrightarrow{M_o})}{F}$$

Сили ($\vec{F}, -\vec{F}$) помістимо в площині N

Вектор $\overrightarrow{M_F}$ вільний, перенесемо його в т. O_1. Тоді в т. O_1, будемо мати сукупність сили $\vec{F'}$ і вектор-момента $\overrightarrow{M_F}$.

Висновок: Сукупність сили і пари, площина якої перпендикулярна до сили є найпростіший, або канонічний вигляд системи сил. Така сукупність називається динамою.

Пряма, яка паралельна до $\vec{F}$ і проходить через т. O_1 називають центральною гвинтовою віссю системи. Це вісь мінімальних моментів.

Елементи динами:

головний вектор системи

проекція головного моменту на напрямок головного вектора

центральна гвинтова вісь системи

Рівняння центральної гвинтової осі системи

$$\frac{M_{ox} - (y \cdot F_z - z \cdot F_y)}{F_x} = \frac{M_{oy} - (z \cdot F_x - x \cdot F_z)}{F_y} = \frac{M_{oz} - (x \cdot F_y - y \cdot F_x)}{F_z}$$

x, y, z – біжучі координати центральної осі.

Система паралельних сил

Центр системи паралельних сил

Випадок двох паралельних сил нами було розглянуто раніше. Ми з'ясували, що система двох паралельних сил може бути зведена до рівнодійної, лінія дії якої паралельна силам і ділить відстань між точками прикладання сил на частини, обернено пропорційні цим силам. При цьому якщо напрям сил протилежний, то лінія дії проходить з боку більшої сили за межами відрізку, який сполучає точки прикладання сил. В разі однакових модулів протилежно направлених сил система зводиться до пари сил.

Розглянемо просторову систему сил, яка має рівнодіючу ($\overrightarrow{F}$ перпендикулярна до $\overrightarrow{M_o}$). Використовуючи правило додавання двох сил, можна знайти рівнодіючу системи, яка нараховує скільки завгодно паралельних сил.

Нехай дана довільна паралельних сил ($\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, ..., \overrightarrow{F_n}$), яка зводиться до рівнодіючої

$\vec{e}$ - одиничний вектор, розташований в початку координат, який паралельний силам. Напрям вектора $\vec{e}$ будемо використовувати при визначенні знаку проекції сил на вісь OE , для якої вектор $\vec{e}$ буде ортом. Позначимо:

F_{ie} - проекція будь-якої сили на вісь OE .

Можна записати

$$\overrightarrow{F_i} = \vec{e} \cdot \overrightarrow{F_{ie}} \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

Головний вектор даної системи сил

$$\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \vec{e} \cdot \sum_{i=1}^{n} F_{ie}$$

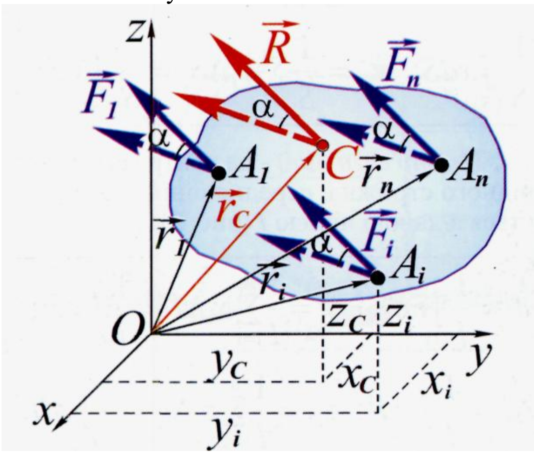
Головний момент даної системи сил відносно початку координат

$$\overrightarrow{M_o} = \sum_{i=1}^{n} m_o(\overrightarrow{F_i}) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \cdot \overrightarrow{F_i}) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \cdot \vec{e} \cdot \overrightarrow{F_{ie}}) = (\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \cdot \overrightarrow{F_{ie}}) \cdot \vec{e} \tag{2}$$

Введемо поняття центр паралельних сил (позначимо т. C)

Центром паралельних сил називається точка, яка знаходиться на лінії дії рівнодіючої системи паралельних сил, яка не міняє свого положення в просторі при яких завгодно поворотах сил системи навколо точок їх прикладання в один бік і на одинаків кут.

Доведемо що так точка існує.



Складемо спочатку сили $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, одержимо силу $\overrightarrow{R_{1,2}}$, яка прикладена в т. C_1 на відрізку який сполучає точку прикладення сил $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ $\left(A_1A_2\right)$ і ділить цей відрізок в співвідношенні

$$AC = \frac{F_2 \cdot A_1A_2}{R_{1,2}}$$

Далі сполучаємо точку прикладання сил $\overrightarrow{F_3}$ і $\overrightarrow{R_{1,2}}$. Знаходимо положення т. C

$$C_1C = \frac{A_3C_1 \cdot F_3}{F}$$

Точку C називають центром паралельних сил.

Приймаємо т. C за центр моментів. Ця точка знаходиться на лінії дії рівнодіючої, значить $\overrightarrow{M_c} = 0$

З другого боку $\overrightarrow{M_c} = \sum \overrightarrow{m_c}(\overrightarrow{F_i})$. Звідки

$$\sum \overrightarrow{m_c}(\overrightarrow{F_i}) = 0$$

Можна записати для $\overrightarrow{M_c}$ і наступну формулу, враховуючи, що $\overrightarrow{M_o}$ і $\overrightarrow{F}$ відомі

$$\overrightarrow{M_c} = \overrightarrow{M_o} + \overrightarrow{m_c}(\overrightarrow{F}); \text{ Звідки } \overrightarrow{M_o} + \overrightarrow{m_c}(\overrightarrow{F}) = 0 \qquad (3)$$

Розглянемо

$$\overrightarrow{m_c}(\overrightarrow{F}) = \vec{r_1} \cdot \overrightarrow{F} = \vec{r_1} \cdot \sum \overrightarrow{F_i} = -\vec{r_c} \cdot \sum \overrightarrow{F_i}$$

Де $\vec{r_c} = -\vec{r_1}$ - радіус-вектор, проведений з т. O в т. C

$$\overrightarrow{m_c}(\overrightarrow{F}) = -\vec{r_c} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = -\vec{r_c} \cdot \underbrace{\vec{e}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{ie}}}_{(1)} = (-\vec{r_c} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{ie}}) \cdot \vec{e} \qquad (4)$$

Враховуючи (2) і підставляючи в (3) формули (2) і (4)

$$(\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \cdot F_{ie}) \cdot \vec{e} - (\vec{r_c} \cdot \sum_{i=1}^{n} F_{ie}) \cdot e = (\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \cdot F_{ie} - \vec{r_c} \cdot \sum_{i=1}^{n} F_{ie}) \cdot \vec{e} = 0 \qquad (5)$$

Векторний добуток дорівнює нулю, якщо вектори паралельні, або один з них дорівнює нулю. Виключивши перший варіант тому, що вектори-множники в загальному випадку не паралельні. Тоді:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \cdot F_{ie} - \vec{r_c} \cdot \sum_{i=1}^{n} F_{ie} = 0 \qquad (6)$$

Звідси
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot F_{ie}}{\sum_{i=1}^{n} F_{ie}} \qquad (7)$$

Запишемо вектори $\vec{r}_c$ і $\vec{r}_i$ через складові вздовж координатних осей

$$\vec{r}_c = \vec{i} \cdot x_c + \vec{j} \cdot y_c + \vec{k} \cdot z_c$$

$$\vec{r}_i = \vec{i} \cdot x_i + \vec{j} \cdot y_i + \vec{k} \cdot z_i$$

Спроектуємо (7) на координатні осі

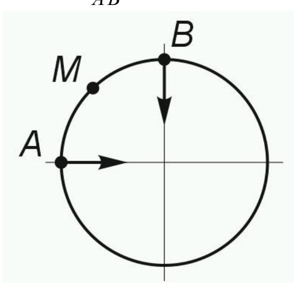
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_{ie}}{\sum_{i=1}^{n} F_{ie}}; \; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot F_{ie}}{\sum_{i=1}^{n} F_{ie}}; z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot F_{ie}}{\sum_{i=1}^{n} F_{ie}}.$$

Центр ваги

Можна вважати, що тверде тіло складається з сукупності найдрібніших частинок – матеріальних точок. На кожну таку частинку тіла діє сила ваги – сила притягання її до Землі. Ці сили направлені приблизно до центру Землі.

Подивимось, як змінюється напрям сили тяжіння частинки при переміщенні її по поверхні Землі.

$$L_{AB} = 10^7 \, м$$



При переміщенні частинки M з A до B сила притягання міняє свій напрям на 90°

Подивимося скільки метрів потрібно пройти точці для того, щоб напрям сили ваги змінився на $1''$?

$$l = \frac{L_{\cup AB}}{90 \cdot 60 \cdot 60} = 30.9\,м$$

Враховуючи, що розміри тіла на практиці не часто перевищують, наприклад 1000м (корпус цеха), можна вважати, що сили притягання частинок таких тіл паралельні. Тобто вони наближено являють собою систему паралельних сил, направлених в один бік.

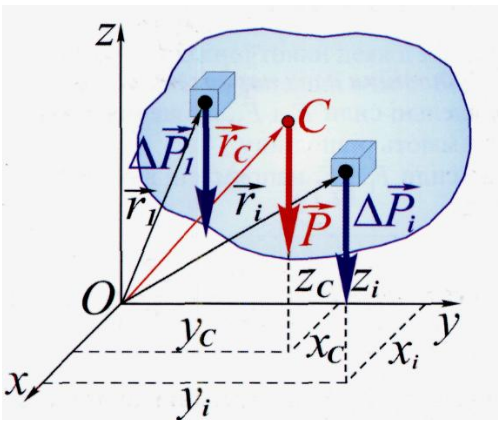
Відомо, що така система має рівнодіючу. Рівнодіюча паралельних сил тяжіння всіх матеріальних частинок з яких складається тіло, називається силою ваги, або вагою тіла

При будь-якому повороті тіла сила ваги буде направлена приблизно до центру Землі і завжди вертикальна. При цьому лінія дії сили ваги приходить через точку C - центр системи паралельних сил притягання. Положення цієї точки відносно тіла не змінюється.

Це точка є **центр ваги тіла.** Прикладемо силу ваги до цієї точки. Тоді можна сказати:

Точка прикладання сили ваги тіла називається центром ваги цього тіла

Нехай: $\vec{r}_i$ - радіус-вектор точки прикладання сили $\vec{P}_i$ ваги іншої частинки тіла, P_i- вага i-ї частинки ; $\vec{r}_c$ - радіус-вектор центру ваги



Для визначення положення центру ваги скористаємось формулами для координат центра паралельних сил:

$$\vec{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \cdot P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

(1)

Позначимо $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ - вага тіла

Центр ваги являє собою геометричну точку, яка може лежати і поза тілом (наприклад, центр ваги кільця, порожнистого вала і т.д.)

Формула (1) дозволяє визначити центр ваги будь-якого неоднорідного тіла, тобто являється найбільш загальною

Спроектуємо її на координатні осі

$$x_c = \frac{\sum x_i P_i}{P}\ ;\ y_c = \frac{\sum y_i P_i}{P}\ ;\ z_c = \frac{\sum z_i P_i}{P} \qquad (2)$$

Розглянемо однорідні тіла

Однорідне об’ємне тіло

Для однорідного тіла об’ємна маса всіх частинок однакова, тобто

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n$$

Тому для однорідного тіла можна записати, що

$P_i = \gamma \cdot V_i$, де V_i - об’єм i-ї частинки

Формулу (1) можна записати так:

$$\vec{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \cdot P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} = \frac{\sum \vec{r_i} \cdot \gamma \cdot V_i}{\sum \gamma \cdot V_i} = \frac{\sum \vec{r_i} \cdot V_i}{V} \qquad (3)$$

В формулі (3) $V = \sum V_i$ - об’єм всього тіла

Цю формулу можна записати в інтегральному вигляді якщо зменшимо розміри частинок і перейдемо до границі

$$\vec{r_c} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\sum \vec{r_i} \cdot \Delta V_i}{V} = \frac{1}{V} \int_{(V)} r dV \qquad (4)$$

Спроектуємо (3) на координатні осі

$$x_c = \frac{\sum x_i \cdot \Delta V_i}{V};\ y_c = \frac{\sum y_i \cdot \Delta V_i}{V};\ z_c = \frac{\sum z_i \cdot \Delta V_i}{V} \qquad (5)$$

Спроектуємо (4) на координатні осі

$$x_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV;\ y_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV;\ z_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} r dV \qquad (6)$$

Однорідна пластинка

Товщина її порівняно з іншими розмірами. Можна сказати, що задача визначення центра ваги зводиться до геометричної задачі визначення центра ваги площі цієї пластинки.

Нехай площа i-ї частинки ΔS_i

З формули (3)

$$\vec{r_c} = \frac{\sum r_i \cdot \omega \cdot \Delta S_i}{\sum \omega \cdot \Delta S_i} = \frac{\sum r_i \cdot \Delta S_i}{S} \qquad (7)$$

де, $S = \sum \Delta S_i$ - площа всієї пластинки

Сумістимо координатну систему ОХУ з площиною пластинки і спроектуємо (7) на координатні осі

$$x_c = \frac{\sum x_i \cdot \Delta S_i}{S} \quad y_c = \frac{\sum y_i \cdot \Delta S_i}{S} \tag{8}$$

Якщо фігура складається з двох (наприклад) простих, то формула (8) запишеться

$$x_c = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}; y_c = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}.$$

Рекомендована література

1. Омаров М.А. Основи теоретичної механіки. Ч.1: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2018. – 184 с.
2. Пирогов В.В. Практикум з технічної механіки. Теоретична механіка: Навч. посібник. – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – 68 с.
3. Романюк О.Д. Теоретична та прикладна механіка: Навч. посібник. – Дніпро: ДДТУ, 2021. -283 с.
4. Черниш О.М. Теоретична механіка: Навч. посібник – Центр учбової літератури, 2022. – 760 с.
5. Цвіркун Л.О., Омельченко О.В. Теоретична механіка. Методичні рекомендації для вивчення дисципліни. – Кривий Ріг: Дон. НУЕТ, 2019. – 100 с.
6. Штанько П.К., Шевченко В.Г. та інші. Теоретична механіка: Навч. посібник. – Запоріжжя: НУ Запорізька політехніка, 2021, - 464 с.
7. Штефан Н.І., Гнатейко Н.В. та інші. Теоретична механіка: Конспект лекцій. Навч. посібник. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 143 с.
8. Янгулова О.Л. Теоретична механіка. Аналітична механіка: Навч. посібник. – Дніпро: Дніпров. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2019. – 75 с.
9. Alex Maas. Theoretical Mechanics. Lecture in WS 2016/17 at the KFU Graz. – 181 p.

Інформаційні ресурси

1. UMass Boston Open Courseware: http://ocw.umb.edu/
2. Khan Academy: https://www.khanacademy.org/
3. MIT Open Courseware: http://ocw.mit.edu/index.htm
4. Free-Ed: http://www.free-ed.net/free-ed/
5. Learning Space: The Open University: http://openlearn.open.ac.uk/
6. Carnegie Mellon Open Learning Initiative: http://oli.cmu.edu/
7. Tufts Open Courseware: http://ocw.tufts.edu/
8. Stanford iTunes U: http://itunes.stanford.edu/

http://www.mechmat.univ.kiev.ua/dload/pos/dif_rivn.pdf

http://www.mif.pu.if.ua/attachments/article/14/deinf_el.pdf

Теоретична механіка: Конспект лекцій для здобувачів технічних спеціальностей першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання (Статика)/ укладачі О. Бондарський, О. Приходько – Луцьк: ЛНТУ, 2025. – 75 с.

Комп'ютерний набір О. Приходько
Редактор О. Бондарський

Підп. до друку «___»________2025 р.
Формат 60x84/16.Папір офс.
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 1,0.
Тираж 50 прим.

Відділ іміджу та промоцій
Луцького національного технічного університету
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – відділ іміджу та промоцій ЛНТУ