

Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет

(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет транспорту та механічної інженерії

(повне найменування факультету)

Кафедра прикладної механіки та мехатроніки

(повна найменування кафедри)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
ЗА СТУПЕНЕМ ВИЩОЇ ОСВІТИ «МАГІСТР»

Розробка кінематичних ланцюгів для збільшення ступенів
вільності інструменту при токарній обробці

спеціальність 131 Прикладна механіка

(шифр і назва спеціальності)

освітня програма «Прикладна механіка»

(назва освітньої програми)

Виконав: здобувач вищої освіти
групи ІМм-21

Тарасюта Олег Сергійович

(підпис)

Керівник:

к.т.н., доцент

Придальний Борис Іванович

(підпис)

Кваліфікаційну роботу
допущено до захисту
«__» _____ 2025 р.

к.т.н., доцент

Гарант освітньої програми:

Четвержук Тарас Іванович

(підпис)

Луцьк – 2025 року

Луцький національний технічний університет

Факультет Транспорту та механічної інженерії
Кафедра Прикладної механіки та мехатроніки
Другий (магістерський) рівень
освітньо-професійної програми «Прикладна механіка»
Спеціальність 131 Прикладна механіка

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач

кафедри

РЕДЬКО

2025 р.

“ _____ ”

Р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ МАГІСТРА
Тарасюти Олега
Сергійовича
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи «Розробка кінематичних ланцюгів для збільшення ступенів вільності інструменту при токарній обробці», керівник кваліфікаційної роботи магістра Придальний Борис Іванович к.т.н., доц. каф. ПМіМ затверджені наказом вищого навчального закладу від від «14» червня 2025 р. № 391/01-07
2. Строк подання студентом роботи 02.12.2025 р.
3. Вихідні дані до роботи: звіт з переддипломної практики, технічна документація токарних верстатів та оброблювальних центрів, конструкторська документація, нормативні дані.
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Аналітичний огляд і постановка задачі розширення ступенів вільності виконавчої ланки. 2. Синтез кінематичних ланцюгів для збільшення ступенів вільності інструмента на токарному верстаті 3. Модель кінематики і перетворення координат. 4. Верифікація та інженерні рекомендації.
5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація
6. Консультанти розділів роботи

| Розділ | Консультант | Підпис, дата | |
|--------|-------------|----------------|------------------|
| | | Завдання видав | Завдання прийняв |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

7. Дата видачі завдання

24.06.2025 р.

Керівник

_____ (підпис)

Завдання прийняв до виконання

_____ (підпис)

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № | Назва етапів виконання кваліфікаційної роботи магістра | Термін виконання етапів виконання кваліфікаційної роботи магістра | Примітка |
|----|---|---|----------|
| 1. | <i>Аналітичний огляд і постановка задачі розширення ступенів вільності виконавчої ланки</i> | <i>01.10.2025</i> | |
| 2. | <i>Синтез кінематичних ланцюгів для збільшення ступенів вільності інструмента на токарному верстаті</i> | <i>10.10.2025</i> | |
| 3. | <i>Модель кінематики і перетворення координат</i> | <i>30.10.2025</i> | |
| 4. | <i>Верифікація та інженерні рекомендації.</i> | <i>29.11.2025</i> | |
| 6. | <i>Електронний варіант кваліфікаційної роботи магістра</i> | <i>16.12.2025</i> | |
| 7. | <i>Представлення роботи до захисту</i> | <i>20.12.2025</i> | |

Студент

_____ (ініціали)

_____ (підпис)

Тарасюта О.С.

_____ (прізвище та

Керівник роботи

_____ (ініціали)

_____ (підпис)

Придальний Б.І.

_____ (прізвище та

АНОТАЦІЯ

Тарасюта О.С. Розробка кінематичних ланцюгів для збільшення ступенів вільності інструменту при токарній обробці. – Рукопис.

Атестаційна магістерська робота на здобуття кваліфікації другого (магістерського) рівня вищої освіти із спеціальності 131 – Прикладна механіка. – Луцький національний технічний університет. – Луцьк, 2025.

У магістерській роботі розглянуто підхід до підвищення технологічних можливостей токарної обробки шляхом збільшення ступенів вільності інструмента через розробку та обґрунтування альтернативних кінематичних ланцюгів для токарних і токарно-фрезерних компоновок (зокрема для режимів типу turn-milling). Метою роботи є покращення умов синтезу типових структур кінематик із розширеними ступенями вільності та формалізація їхнього математичного опису для подальшого керування рухом і постпроцесингу. Методично робота базується на представленні рухів за допомогою однорідних матриць перетворення та моделюванні відносного руху «інструмент–заготовка» як композиції перетворень двох кінематичних ланцюгів (інструментального та заготовкового). Запропоновано процедуру кінематичної верифікації (аудиту) через перевірку досяжності цільових положень, аналіз робочої області та ризиків сингулярностей, а також наведено інженерні рекомендації щодо вибору структури залежно від пріоритетів (компактність, динаміка, точність і керованість). Практичне значення роботи полягає у формалізованій основі для вибору та впровадження кінематик із підвищеними ступенів вільності у токарній обробці з прогнозованою кінематичною працездатністю.

Ключові слова: токарна обробка; ступені вільності; кінематичний ланцюг; turn-milling; відносна кінематика; обернена кінематика.

ANNOTATION

Tarasiuta O.S. Development of kinematic chains to increase the degrees of freedom of the tool in turning. — Manuscript.

Master's thesis for obtaining the qualification of the second (Master's) level of higher education in specialty 131 — Applied Mechanics. — Lutsk National Technical University. — Lutsk, 2025.

This master's thesis considers an approach to enhancing the technological capabilities of turning by increasing the tool degrees of freedom through the development and justification of alternative kinematic chains for turning and turn-milling machine configurations (including turn-milling modes). The aim of the work is to improve the synthesis conditions for typical kinematic structures with expanded degrees of freedom and to formalize their mathematical description for subsequent motion control and post-processing. Methodologically, the study is based on representing motions using homogeneous transformation matrices and on modeling the relative “tool–workpiece” motion as a composition of transformations of two kinematic chains (the tool chain and the workpiece chain). A procedure for kinematic verification (audit) is proposed through checking the reachability of target poses, analyzing the workspace and singularity risks, and providing engineering recommendations for selecting a structure according to priorities (compactness, dynamics, accuracy, and controllability). The practical significance of the work lies in providing a formalized basis for selecting and implementing turning kinematics with increased degrees of freedom and predictable kinematic feasibility.

Keywords: turning; degrees of freedom; kinematic chain; turn-milling; relative kinematics; inverse kinematics.

ЗМІСТ РОБОТИ

| | |
|--|-----------|
| ВСТУП | 8 |
| РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ РОЗШИРЕННЯ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ ВИКОНАВЧОЇ ЛАНКИ | 10 |
| 1.1 Опис базової зв'язаної кінематики | 10 |
| 1.2 Розширення ступеней вільності: послідовні осі та послідовно-паралельні модулі | 13 |
| 1.2.1 Послідовне нарощування осей: ступені вільності, кінематика, накопичення похибок | 13 |
| 1.2.2 Послідовно-паралельні (гібридні) модулі: визначення, ступені вільності, рівняння зв'язків | 15 |
| 1.2.3 Порівняльна інтерпретація для задач розширення ступені вільності | 16 |
| 1.3 Точність і похибки як обмеження при збільшенні ступені вільності | 17 |
| 1.3.1 Постановка проблеми: ступені вільності та розмірність простору похибок | 17 |
| 1.3.2 Параметризація геометричних похибок | 19 |
| 1.3.3 Аналіз чутливості, ідентифікація та компенсація | 20 |
| РОЗДІЛ 2. СИНТЕЗ КІНЕМАТИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ЗБІЛЬШЕННЯ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ ІНСТРУМЕНТА НА ТОКАРНМУ ВЕРСТАТІ | 22 |
| 2.1 Вихідна база: мінімальний ланцюг токарної обробки | 22 |
| 2.1.1 Кінематична схема, координатні системи та ступені вільності. | 22 |
| 2.1.2 Формалізація мінімального ланцюга через однорідні перетворення. | 23 |
| 2.1.3 Кінематичні властивості як аргумент до розширення ступенів вільності. | 24 |
| 2.2 Цільова кінематична здатність, кінематичні вимоги | 25 |

| | |
|---|----|
| 2.2.1 Нормативна основа осей та база відліку для токарного верстата | 26 |
| 2.2.2 Формалізація вимоги через положення матриці перетворення і вектор осі інструмента | 27 |
| 2.2.3 Диференціальна кінематика як інструмент перевірки керованості | 28 |
| 2.3 Формулювання кінематичних вимог для синтезу ланцюгів | 29 |
| 2.3.1 Уніфіковані критерії оцінювання та відбору кінематичних ланцюгів | 29 |
| 2.3.2 Типові структури ланцюгів та патерни синтезу | 30 |
| 2.3.3 Мінімальна математична схема. | 31 |
| | |
| РОЗДІЛ 3. МОДЕЛЬ КІНЕМАТИКИ І ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ | 34 |
| 3.1 Припущення й область застосовності моделі | 34 |
| 3.2 Загальна формула відносного перетворення (дві кінематичні “тілки”) | 35 |
| 3.3 Модель похибок (геометрична точність) при збільшенні ступенів вільності. | 37 |
| | |
| РОЗДІЛ 4. ВЕРИФІКАЦІЯ ТА ІНЖЕНЕРНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ | 43 |
| 4.1 Верифікація кінематичної працездатності | 43 |
| 4.1.1 Вхідні дані та математична постановка | 43 |
| 4.1.2 Перевірка існування розв’язку | 44 |
| 4.1.3 Верифікація постпроцесингу, геометрія траєкторії | 47 |
| 4.2 Вибір кінематичного модуля для гібридного ланцюга за динамічними критеріями | 49 |
| 4.2.1 Базова інверсна динамічна модель та розділення поступальної/обертальної складових | 49 |
| 4.2.2 Активні індекси динамічної здатності | 50 |
| 4.2.3 Пасивні індекси динамічної здатності | 51 |
| 4.3 Чутливість точності до параметрів структури | 53 |
| 4.3.1 Загальна форма моделі чутливості | 53 |

| | |
|---|-----------|
| 4.3.2 Принципи побудови моделі через векторні контурні рівняння | 54 |
| 4.3.3 Критичні параметри, показники чутливості та перенесення на вибір ланцюга для токарної обробки | 55 |
| ВИСНОВКИ | 58 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ | 60 |

ВСТУП

Сучасне машинобудівне виробництво характеризується зростанням номенклатури деталей, скороченням партій і частими переналагодженнями обладнання. У таких умовах підвищення технологічних можливостей токарної обробки все частіше досягається не лише шляхом оптимізації режимів різання, а й шляхом кінематичного розширення: введення додаткових керованих осей та/або альтернативних компоновок, які забезпечують нові орієнтації інструмента відносно заготовки. Особливого значення це набуває для комбінованих операцій і режимів типу turn-milling, де суміщення обертання заготовки та фрези, а також керовані нахили і повороти інструмента дозволяють підвищувати продуктивність і якість обробки складних поверхонь.

Разом із тим збільшення ступенів вільності інструмента у токарних і токарно-фрезерних системах супроводжується низкою інженерних проблем. По-перше, ускладнюється синтез кінематичної структури: потрібно обґрунтовано обирати, які саме додаткові рухи (лінійні/кутові) та в якій конфігурації забезпечують потрібні технологічні траєкторії і орієнтації інструмента. По-друге, зростають вимоги до математичної формалізації кінематики для подальшого керування рухом і постпроцесингу (узгодження траєкторії в координатах верстата з траєкторією відносного руху «інструмент–заготовка»). По-третє, з'являються ризики кінематичної непрацездатності на окремих ділянках робочої області через сингулярності, обмеження ходів осей та взаємні колізії, що вимагає процедур верифікації на етапі проектування та вибору структури.

Актуальність даної роботи зумовлена потребою у формалізованому підході, який поєднує: синтез альтернативних кінематичних ланцюгів для токарних і токарно-фрезерних компоновок; уніфікований математичний опис відносного руху «інструмент–заготовка»; інженерну процедуру кінематичної перевірки досяжності цільових положень.

Предмет дослідження - кінематичні ланцюги та їх математичні моделі (пряма і обернена кінематика, робоча область) для забезпечення заданих положень інструмента при токарній обробці та turn-milling.

Методи дослідження базуються на апараті просторових перетворень і відносної кінематики з використанням однорідних матриць; на розв'язанні задач прямої та оберненої кінематики; на аналізі робочої області та сингулярностей; а також на процедурі кінематичної перевірки досяжності цільових положень у заданій робочій області.

Практичне значення роботи полягає у створенні формалізованої основи для вибору та впровадження кінематик із підвищеними ступенями вільності інструмента у токарній обробці з прогнозованою кінематичною працездатністю, що може бути використано при проектуванні компонок, налаштуванні керування рухом та підготовці постпроцесорів для багатовісних операцій.

Таким чином, актуальність роботи визначається необхідністю методично цілісного підходу до синтезу й формалізації кінематичних ланцюгів із розширеними ступенями вільності інструмента для токарної та токарно-фрезерної обробки, що забезпечує керованість руху, коректний постпроцесинг і прогнозовану кінематичну працездатність у заданій робочій області.

РОЗДІЛ 1
АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ РОЗШИРЕННЯ
СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ ВИКОНАВЧОЇ ЛАНКИ

1.1 Опис базової зв'язаної кінематики

1. Turn-milling визначається як “coupling”-процес із одночасним обертанням інструмента та заготовки.

2. Для ортогонального turn-milling (вісь інструмента \perp осі заготовки) це створює комбінований відносний рух у зоні різання.

Зв'язок швидкостей обертання та подачі. Позначення:

n_1 - частота обертання інструмента (фрези), [об/с] або [об/хв];

n_2 - частота обертання заготовки, [об/с] або [об/хв];

R - радіус заготовки, [м];

a_p - глибина різання, [м];

z - число зубів фрези,.

Аналітичні залежності:

1. Тангенціальна складова швидкості подачі як швидкість поверхні заготовки на радіусі $\approx R+a_p$ визначається:

$$v_t = n_2 2\pi (R+a_p).$$

2. Діапазони подач на один оберт заготовки (feed range):

$$f_t = 2\pi (R+a_p), \quad f_a = v_{fa} / n_2,$$

де v_{fa} — осьова складова швидкості подачі.

3. Подача на зуб (feed per tooth) через модуль результуючої швидкості подачі:

$$f_z = \frac{\|v_f\|}{zn_1} = \frac{n_2 \sqrt{f_a^2 + (2\pi(R+a_p))^2}}{zn_1}$$

Це прямо показує залежність f_z від n_1 , n_2 , f_a , R , a_p , z .

Кінематичний висновок із цих формул: щоб керувати f_z (а отже, товщиною зрізу режимом різання) незалежно, верстат має забезпечити незалежне керування принаймні n_1 , n_2 , v_{fa} та позиціонуванням, яке задає a_p

(через радіальне підведення/зміщення). Це вже мінімальний набір незалежних керованих “рухових параметрів”, які фактично вимагають додаткових ступенів вільності у структурі “інструмент–заготовка”.

Для синтезу кінематичного ланцюга зручно перейти від переліку осей до задачної постановки:

1. Вводимо відносну швидкість між системами координат інструмента T і заготовки W :

$$\xi_{WT} = \begin{bmatrix} v_{WT} \\ \omega_{WT} \end{bmatrix} \in R^6.$$

2. Для процесу turn-milling компонента ω_{WT} має щонайменше дві суттєві складові, пов’язані з n_1 (шпindelь інструмента) та n_2 (обертання заготовки).

3. Компонента v_{WT} включає осьову подачу v_{fs} і складову, що визначається $R+a_p$ та n_2 (через v_t).

4. Критерій мінімально достатнього рівня степенів вільності:

$$DOF_{machine} \geq rank J(q) \geq dim(\xi_{WT}^{task}),$$

де $J(q)$ - Якобiан механiзму, що вiдображає швидкостi осей у поворотi математичної моделi для опису траєкторiй та кiнематики. (Ця формула — загальна, але саме вона перетворює “потрiбнi рухи” на вимогу до структури.)

Розширення степенів вільності: послідовні осі та послідовно-паралельні модулі. Послідовне нарощування осей (узагальнена модель).

1. Для послідовної структури пряма кінематика математичної моделі для опису траєкторій та кінематики (ММТК) задається добутком однорідних перетворень:

$$T_{TCP}(q) = \prod_{i=1}^m T_i(q_i),$$

де m - кількість керованих осей (формально це i є ступені вільності за відсутності залежностей).

2. Для turn-milling ключовим є включення осі обертання заготовки C та осей позиціонування орієнтації інструмента; як існування двох кінематичних ланцюгів “заготовка–...–інструмент” у комбінованому верстаті.

Мінімальна практична інтерпретація (без прив'язки до конкретної компоновки):

Мінімальна практична інтерпретація (без прив'язки до конкретної компоновки):

| Функція відносного руху | Керований параметр | Тип ступеня вільності |
|---|--------------------|-----------------------|
| Обертання інструмента | n_1 | 1 обертальний |
| Обертання заготовки | n_2 | 1 обертальний |
| Осьова подача | v_{fa} | 1 поступальний |
| Радіальне підведення/керування (a_p) | $a_p(t)$ | 1 поступальний |
| Орієнтація осі інструмента (для складних поверхонь) | напр. $B(t)$ | +1 обертальний |

Цей перелік впливає з того, що в комбінованих верстатах присутні поступальні та обертальні осі, а поворотні осі змінюють напрямок вектора інструмента під час руху.

Послідовно-паралельний підхід.

1. Паралельний модуль визначається тим, що рухома платформа з'єднана з основою кількома кінематичними гілками (limbs).
2. Для послідовно-паралельної верстатної структури можливе явне додавання ступені вільності: у прикладі 3-PRS платформа дає 3 ступені вільності, а XY-стіл додає 2 ступені вільності (разом 5). Далі задача синтезу ступенів вільності зводиться до забезпечення потрібного рангу для заданої множини робочих режимів.

Похибки двох гілок рухів (заготовки та інструмент).

1. Для комбінованого turn-milling верстата описується наявність двох кінематичних ланцюгів у координатній постановці (ланцюг заготовки та ланцюг інструмента).
2. Така машина розглядається як multibody system, і геометричні похибки накопичуються в реальному русі, впливаючи на теоретичну траєкторію інструмента.

Модель та параметризація геометричних похибок.

Підхід: будують ідеальну та реальну кінематичні моделі; похибки вводять

через однорідні перетворення та опис, після чого виконують аналіз чутливості.

Аналітична схема поширення похибок (лінійаризована)

Для кожної осі ланки:

1. Ідеальне перетворення: $T_i(q_i)$.

2. Реальне (з похибкою):

$$T_i(q_i, \delta_i) = T_i(q_i) \Delta T_i(\delta_i),$$

3. Для математичних моделей:

$$T_{TCP} = i \prod T_i \Delta T_i \approx (\prod T_i) \left(I + \sum_i Ad_i \delta \eta_i \right)$$

$\delta \eta_i = [\delta p_i \ \varepsilon_i]$, Ad_i відповідний оператор переносу (adjoint) у базис математичної моделі.

4. Просторова похибка точки різання (перший порядок):

$$\delta p_{TCP} \approx \sum S_{p,i} \delta \eta_i,$$

де $S_{p,i}$ - матриця чутливості (обчислюється з НСТ та структури ланцюга). Це аналізує чутливість джерел геометричних похибок до просторової похибки.

1.2. Розширення ступенів вільності: послідовні осі та послідовно-паралельні модулі

1.2.1. Послідовне нарощування осей: ступені вільності, кінематика, накопичення похибок

Кінематична ідея. Більшість “класичних” верстатів із 4–5(+) осями можна інтерпретувати як механізми з послідовно з’єднаними ланками та поступальними/обертальними парами; для опису руху інструмента відносно заготовки будують прямі кінематичні рівняння через матриці однорідних перетворень.

(А) Ступені вільності послідовного ланцюга (відкрита кінематика).

За відсутності замкнених контурів та при незалежному керуванні осями,

мобільність ступені вільності відкритого ланцюга наближено дорівнює сумі ступені вільності пар:

$$M \approx \sum_{i=1}^j f_i$$

де ($f_i \in \{1\}$) для типової поступальної або обертальної керованої осі, j - кількість осей у ланцюзі. Практично “додати ступені вільності” означає додати незалежну вісь (наприклад, Y , B , C) у кінематичний ланцюг “база - TCP”.

(B) модель-опис послідовного верстата.

Однорідне перетворення інструмента (моделі перетворення) відносно системи заготовки подають як добуток матриць:

$${}^wT_{TCP}(q) = \prod_{k=1} T_k(q_k), \quad T_k = \begin{bmatrix} R_k & P_k \\ 0T & 1 \end{bmatrix}$$

У роботі з моделювання 5-осьових верстатів прямо вводяться базові матриці переносу $Trans(a,b,c)$ (4×4) та обертання ($RotW, \phi$) навколо довільної осі W .

(C) “Формоутворювальна функція” як послідовне множення перетворень.

Для конкретної неортогональної 5-осьової конфігурації (із двома поворотними осями) відносно положення орієнтація моделі визначається послідовно від заготовки до інструмента і прямо записується як добуток ($Trans$) та (Rot) (у статті це названо *form-shaping function*). Це важливо методологічно: послідовне нарощування ступені вільності майже завжди зводиться до додавання ще одного множника $T_k(q_k)$ у ланцюг НСТ.

(D) Накопичення геометричних похибок у послідовному ланцюгу (аналітична лінеаризація). Нехай $x \in R^6$ - малий поворот (похибка положення+орієнтації TCP), q - координати осей, p - геометричні параметри (зміщення, неперпендикулярності тощо). Тоді для малих відхилень:

$$\delta_x \approx J(q)\delta q + Sp(q,p)\delta p,$$

де Jq - геометричний Якобіан (чутливість TCP до команд осей), S_p - матриця чутливості до геометричних параметрів. У послідовній архітектурі похибки

ланок/пар, як правило, накладаються уздовж ланцюга, бо кожна наступна ланка “переносить” попередні відхилення на ТСР.

1.2.2. Послідовно-паралельні (гібридні) модулі: визначення, ступені вільності, рівняння зв’язків

Ключове визначення. Паралельний маніпулятор (parallel kinematic machine) визначається як механізм, у якому робочий орган/платформа зв’язаний з основою кількома незалежними кінематичними ланцюгами (limbs) ; при цьому загальна кількість приводів дорівнює ступені вільності платформи, а при “заблокованих” приводах платформа має бути повністю закріплена.

(А) Узагальнена постановка кінематики паралельного модуля (loop-closure). Позначимо x - узагальнені координати платформи (положення), q - координати приводів у гілках. Тоді кінематика задається системою рівнянь замикання контурів:

$$f(x,q)=0.$$

Диференціювання дає:

$$A(x,q) \dot{x} + B(x,q) \dot{q} = 0,$$

звідки (за умови невиродженості A):

де J_p - “паралельний” Якобіан, що принципово відрізняється від послідовного тим, що з’являється через обмеження замкнених контурів (і саме тому в паралельних системах критичними стають питання сингулярностей та калібрування, які в огляді винесені як окремі ключові теми).

(В) Переваги/обмеження з позиції ступені вільності-розширення. Паралельні структури можуть давати приріст кінематичної та динамічної ефективності (зокрема жорсткості/швидкодії) порівняно із послідовним, але їхня промислова “проникність” лишається обмеженою.

Два практично важливі бар’єри, прямо підкреслені в огляді: (і) підвищена конструктивна/експлуатаційна складність (вартість розробки/виготовлення/обслуговування) і (ii) малий робочий простір

відносно габаритів, що звужує застосування.

(С) Послідовно-паралельна гібридизація як спосіб одати ступені вільності без втрати працездатності.

Сучасна тенденція - гібридні архітектури, де послідовні ланцюги/напрявні вводяться для розширення робочого простору паралельних модулів; у висновковій частині огляду прямо зазначено, що нові дисруптивні структури часто є гібридними (serial-parallel / parallel-serial тощо).

1.2.3. Порівняльна інтерпретація для задач розширення ступені вільності

Практично придатна “формула вибору” між послідовним нарощуванням і послідовно-паралельною гібридизацією в задачі збільшення ступені вільності для turn-milling/складних траєкторій.

1. Керованість і “модульність” моделі.

Послідовні моделі є модульними: кінематика збирається автоматично як добуток матриць ланок; це спрощує адаптацію під задачу.

Паралельні/гібридні системи зазвичай потребують індивідуальних моделей, що відрізняються від конструкції до конструкції, і тому дорожчі в інженерному супроводі.

2. Помилки та чутливість (скелет для подальшого розділу про точність).

Послідовна структура:

$\delta x \approx J \delta q + S_p \delta p$ - типово з наростанням впливу похибок уздовж ланцюга.

Паралельна структура: замкнена кінематика може частково “розподіляти” навантаження деформації між гілками і зменшувати чутливість до деяких похибок приводів ланок; це прямо концептуалізовано як відмінність serial vs parallel, де для serial похибки приводів/переміщень “поширюються” (propagate), а в closed-loop паралельній кінематиці можливе часткове внутрішнє компенсування.

3. Робочий простір vs продуктивність.

Паралельні модулі часто програють у робочому просторі та виграють у

жорсткості/динаміці в нішевих сценаріях; їхній недолік “small workspace” названо основним і саме тому гібриди застосовують послідовні осі для розширення області досяжності.

4. Формалізація для магістерської задачі синтезу ступені вільності.

Для подальших розділів зручно фіксувати узагальнену структуру моделі як:

$${}^wT_{TCP}(q_s, q_p) = {}^wT_B(q_s) \cdot {}^BT_{TCP}(q_p)$$

де q_s - послідовні осі (позиціонування подачі), q_p — координати приводів паралельного модуля (орієнтація тонкі переміщення). Тоді аналіз точності зводиться до єдиної лінеаризованої схеми:

$$\delta x \approx J_s(q_s)\delta q_s + J_p(q_p)\delta q_p + S_{p,s}\delta p_s + S_{p,p}\delta p_p,$$

що дає “місток” до математичних моделей похибок та процедур ідентифікації компенсації.

Збільшення ступені вільності у turn-milling неминуче розширює кількість геометричних параметрів і каналів передавання похибок до TCP, тому розділ точності має спиратися на НСТ+MBS-модель, дволанцюгову структуру «заготовка–інструмент» і аналіз чутливості, придатний для калібрування та компенсації.

1.3. Точність і похибки як обмеження при збільшенні ступені вільності

1.3.1. Постановка проблеми: ступені вільності та розмірність простору похибок

1. Для багатовісних систем (мінімально: три поступальні + дві поворотні осі) зміна орієнтації інструмента під час руху робить траєкторію TCP неочевидною у базовій СК, тому потрібна формальна кінематична модель та модель похибок.

2. Кожна додаткова керована вісь додає: кінематичний множник у ланцюгу перетворень (новий ступінь свободи у формоутворенні);

нові геометричні похибки (зсуви, прямолінійність, кутові похибки, неперпендикулярності), які накопичуються у реальному русі та спотворюють

теоретичний шлях інструмента.

Формальний базис модельного подання кінематики та формоутворюючої функції.

1. Багатовісний верстат розглядається як механізм із послідовно з'єднаними ланками; для опису положення/орієнтації інструмента відносно заготовки будують прямі кінематичні рівняння через базові перетворення переносу *Trans* та обертання *Rot*.

2. Матриця переносу (НСТ) має стандартний вигляд:

$$Trans(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

що прямо наведено в джерелі.

3. Для загального обертання навколо довільного вектора використовується загальна матриця $Rot(W, \varphi)$ (не лише для ортогональних осей), що принципово важливо при наявності неортогональних конфігурацій.

4. Відносне положення/орієнтація інструмента щодо заготовки визначається послідовним перемноженням матриць від заготовки до інструмента; у класичній термінології це подається як *form-shaping function*, що обчислюється послідовно “starting from the workpiece and ending at the cutting tool”. Модель є базовою «мовою» як для кінематики, так і для похибок; з ростом ступені вільності зростає довжина ланцюга і кількість параметрів, що повинні бути ідентифіковані.

Специфіка *turn-milling*: дві кінематичні гілки «заготовка–інструмент»

1. Для *turn-milling* комбінованої машини характерна наявність двох кінематичних ланцюгів. Це прямо зазначено в моделі, де наведено першу та другу гілки (через С-вісь патрон та через задню бабку/вісь *W*), а також розподіл за “bed boundary” на *workpiece chain* і *tool chain*.

2. Наслідок: позиція TCP у СК заготовки визначається не одним серійним ланцюгом, а композицією перетворень, у яких частина рухів належить «ланцюгу заготовки», а частина - «ланцюгу інструмента». Це підвищує

чутливість моделі до взаємного положення СК, установчих зсувів та неперпендикулярностей між осями.

1.3.2. Параметризація геометричних похибок

1. У розглянутій структурі turn-milling машини виконано топологічний опис, після чого проаналізовано та визначено 45 термів геометричних похибок; модель похибок виведено на базі НСТ та теорії багатотіл (MBS).

2. Логіка формування набору похибок така:

неперпендикулярності між осями (наприклад, $\beta_X, \alpha_Y, \gamma_Y, \alpha_B, \gamma_B$, тощо);

позиційні похибки (три компоненти зсуву) та кутові похибки (yaw pitch roll) для кожної осі, які трактуються як позиційно-залежні δ_{ij} та ϵ_{ij} .

3. Приклад повної номенклатури для осей (X, Y, Z, B, C, W) наведено у таблиці термів (перпендикулярність позиційні кутові), що фактично задає параметричний простір моделі.

Побудова «ідеальна реальна» модель та правило порядку перетворень

1. Реальний рух відрізняється від ідеального на матриці похибок ΔT , які вводять у НСТ-ланцюг. У моделі зазначено ключове правило: порядок переносів не впливає на результат композиції перенесень, але порядок обертань впливає на координати (тобто обертання не комутують).

2. Формально (узагальнено) для будь-якого ланцюга:

$$T_{ideal} = \prod_{k=1} T_k(q_k), T_{actual} = \prod_{k=1} (T_k(q_k) \Delta T_k(\delta_k))$$

де δ_k - набір геометричних похибок осі ланки k .

3. Для turn-milling у режимі фрезерування в джерелі наведено приклад обчислення реального вектора положення точки різання як композиції ідеальних матриць та матриць похибок (із наявним інвертуванням частини ланцюга, що відображає дволанцюгову структуру). Метрики точності: похибка положення та похибка орієнтації інструмента

1. Похибка положення точки (у СК заготовки) може бути введена як різниця між реальним та ідеальним векторами:

$$E_p = P_{actual} - P_{ideal},$$

що відповідає наведеному означенню.

2. Похибка орієнтації (напряму осі інструмента) у джерелі подана через кут між векторами (через \arccos від нормованого скалярного добутку).

3. Практично це дає дві групи вихідних показників:

$E_p = [E_x, E_y, E_z]^T$ у мм/мкм;

E_u у градусах/радіанах (кутова невідповідність осі інструмента).

1.3.3. Аналіз чутливості, ідентифікація та компенсація

1. Для керованої компенсації потрібна чутливість вихідних похибок до джерел. У моделі визначено чутливість (для позиційних похибок) та окрему обробку кутових похибок з урахуванням похибки.

2. Приклад аналітичного (спрощеного) рівняння просторових похибок ΔX , ΔY , ΔZ як функцій термів геометричних похибок наведено у вигляді формули, що безпосередньо демонструє лінійно-афінну залежність виходу від набору Δ_{x^*} , Δ_{y^*} , Δ_{z^*} , ε^* , α^* , β^* , γ^*

3. Загальний інженерний алгоритм (відтворюваний) для ідентифікації/компенсації при зростанні ступені вільності:

сформувати вектор параметрів $\delta \in \mathbb{R}^N$ (у прикладі ($N=45$));

отримати виміряні похибки E_p (і за потреби E_u) у множині позицій;

побудувати матрицю чутливості $S = \partial E_p / \partial \delta$ на основі НСТ-ланцюга та лінеаризації;

оцінити δ методом найменших квадратів:

$$\delta = \arg \min \|E - S\delta\|_2^2;$$

реалізувати компенсацію в CNC як корекції (офсетів таблиць компенсації) за ключовими найбільш чутливими термами, що прямо передбачено як практичне застосування.

Практичні наслідки для задачі розширення ступені вільності

1. Ідентифікація геометрії стає обов'язковою частиною синтезу ступені вільності: кожен новий ступені вільності додає групу похибок, які необхідно

або жорстко нормувати конструктивно, або вимірювати й компенсувати.

2. Калібрування та компенсація ускладнюються не лише кількісно (N-параметрів), а й якісно через некомутативність обертань і дволанцюговість; без НСТ-моделі отримати коректну компенсацію неможливо.

3. Для раннього етапу структурного синтезу це означає: варіанти розширення ступені вільності слід порівнювати не лише за досяжністю та кінематичною здатністю, а й за очікуваною розмірністю та чутливістю простору похибок (наприклад, через оцінку S у типовій області робочих положень).

Висновки до розділу 1 і постановка задачі. Turn-milling є процесом із багатокомпонентною кінематикою (дві обертальні + подачі), що робить розширення степеней вільності конструктивно неминучим. Розширення степеней вільності досягається або серійним нарощуванням осей, або введенням серійно-паралельних модулів; приклад 3-PRS платформи + XY-столу демонструє архітектуру степеней вільності «3 + 2». Зі збільшенням степеней вільності різко зростає розмірність задачі точності: моделі подання-подання та MBS-моделі показують приклади десятків геометричних похибок (зокрема 45), що повинні бути враховані у формалізованому аналізі. Постановка задачі (для подальших розділів роботи): розробити (синтезувати) кінематичні ланцюги розширення степеней вільності для токарної токарно-фрезерної обробки, визначивши мінімально достатню структуру степеней вільності для заданих технологічних режимів; варіанти серійної та серійно-паралельної реалізації; НСТ-орієнтовану модель похибок і критерії оцінювання точності/чутливості при виборі структури.

Збільшення ступенем вільності у turn-milling неминуче розширює кількість геометричних параметрів і каналів передавання похибок до TCP, тому розділ точності має спиратися на НСТ+MBS-модель, дволанцюгову структуру «заготовка–інструмент» і аналіз чутливості, придатний для калібрування та компенсації.

РОЗДІЛ 2

СИНТЕЗ КІНЕМАТИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ ДЛЯ ЗБІЛЬШЕННЯ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ ІНСТРУМЕНТА НА ТОКАРНОМУ ВЕРСТАТІ

2.1. Вихідна база: мінімальний ланцюг токарної обробки

2.1.1. Кінематична схема, координатні системи та степені вільності.

Кінематична база токарного верстата (мінімальна постановка). Розглядається система з керованими координатами.

$$q_{\min} = [x, z, \varphi_w]^T$$

де x - переміщення по осі X , z - переміщення по осі Z , φ_w - кут повороту шпинделя заготовки C_w . Такий набір степенем вільності відповідає класичному точінню (поздовжнє/поперечне точіння, підрізання торця тощо).

Вибір систем координат (узгоджений для подальшого синтезу).

Вводяться: $\{0\}$ - базова система верстата (станина/напрямні); $\{W\}$ - система заготовки (зв'язана зі шпинделем); $\{T\}$ - система інструмента (зв'язана з державкою/інструментальною головкою).

Кінцева мета - синтезувати такий набір осей, щоб забезпечити керовані: положення TCP (tool center point) відносно заготовки; орієнтацію осі інструмента відносно заготовки.

2.1.2. Формалізація мінімального ланцюга через однорідні перетворення.

Загальний принцип: форму визначає відносний рух $\{T\}$ відносно $\{W\}$.

Ключова матриця:

$${}^W T_T = ({}^0 T_W)^{-1} \cdot {}^0 T_T,$$

де ${}^0 T_T$ - перетворення від бази верстата до інструмента, ${}^0 T_W$ - від бази до заготовки.

Мінімальний токарний випадок (структура перетворень). За типовим припущенням, що вісь шпинделя збігається з Z базової системи:

$${}^0T_w = R_z(\varphi_w)T_{0w}, \quad {}^0T_T = T_X(x)T_Z(z)T_{0T}$$

де T_{0w} , T_{0T} - постійні калібрувальні перетворення (положення нульових точок, установочні зсуви).

Явний вигляд елементарних матриць (для відтворюваності).

Перенос по X:

$$T_X(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

перенос по Z:

$$T_Z(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

обертання шпинделя (навколо Z):

$$R_z(\varphi_w) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_w & -\sin \varphi_w & 0 & 0 \\ \sin \varphi_w & \cos \varphi_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Критичний висновок щодо орієнтації інструмента. У мінімальному ланцюзі орієнтація $\{T\}$ відносно $\{0\}$ є сталою (обумовлена T_{0T} і конструкцією супорта), а отже у wT_T кутова частина, пов'язана з керуванням напрямком осі інструмента, не має двох незалежних керованих параметрів. Це і є формальна причина, чому $(X,Z)+C_w$ достатньо для класичного точіння, але недостатньо для "повної" 5-осьовості.

2.1.3. Кінематичні властивості як аргумент до розширення ступенів вільності.

Orthogonal turn-milling: одночасне обертання інструмента і заготовки та складена подача. Для orthogonal turn-milling в оглядовій роботі наведено базові параметри та співвідношення для швидкостей і подач, зокрема швидкість різання виражена як

$$v_c = r \cdot 2\pi \cdot n_1,$$

де r - радіус фрези, n_1 - частота обертання фрези (в джерелі задана як rotational speed).

Складена швидкість подачі. Подача в orthogonal turn-milling описується як композиція осьової та дотичної складових (відносно заготовки),

$$\|v_f\| = \sqrt{v_{fa}^2 + v_t^2}, \quad v_t = n_2 \cdot 2\pi \cdot (R + a_p),$$

де v_{fa} - осьова складова подачі, v_t - дотична складова (пов'язана з обертанням заготовки), R — радіус заготовки, a_p — глибина різання, n_2 - частота обертання заготовки.

Подача на зуб як функція двох обертань та осьової подачі.

Для orthogonal turn-milling подача на зуб визначається через $\|v_f\|$, число зубів z і швидкість фрези n_f

$$f_z = \frac{\|v_f\|}{zn_1} = \frac{n_2}{zn_1} \sqrt{f_a^2 + (2\pi(R + a_p))^2}$$

де f_a - осьова подача за оберт заготовки (у джерелі пов'язана з v_{fa} та n_2)

Розмірнісна перевірка (SI). Якщо n_1, n_2 задані в об/с, тоді v_c і v_t мають розмірність м/с. Якщо ж n у об/хв потрібний перехід: $\omega = 2\pi n/60$, $v = \omega r$, і всі швидкості автоматично переходять у м/с.

Зв'язок цих залежностей із синтезом степеней вільності. Наведені співвідношення прямо показують, що процесова кінематика включає: два незалежні обертання (n_1 - інструмент, n_2 - заготовка) та керовану подачу з принаймні однією поступальною складовою v_{fa} плюс дотичну складову, індуковану обертанням заготовки.

Однак для повноцінного turn-milling у 5-осьовому сенсі потрібно не лише "складати подачу", а й керувати орієнтацією осі інструмента (дві кутові координати), тобто забезпечити керовану зміну кутової частини wT_T . Мінімальний токарний ланцюг цього не робить, звідси й необхідність синтезу додаткових осей.

Мінімальна структура $(X,Z)+C_w$ забезпечує кероване положення TCP у меридіанній площині та обертання заготовки, але не забезпечує двох незалежних кутових степеней вільності для орієнтації осі інструмента (тобто

не забезпечує 5-осьову кінематичну здатність у строгому сенсі). Для orthogonal turn-milling процесові параметри однозначно залежать від двох частот обертання та складеної подачі; зокрема $\|v_f\| v_t$ та f_z виражаються аналітично через $n_1, n_2, R, a_p, v_{fa}, z$, що створює прямі вимоги до наявності окремих керованих приводів обертання інструмента/заготовки і до розширення осей подачі.

При цьому прийнято типове припущення, що шпindel збігається з віссю Z базової системи; для іншої домовленості (наприклад, Z - вісь супорта, а шпindel - C навколо іншої осі) матриці $R_z(\cdot)$ та порядок множення треба переназначити. Позначення n_1, n_2 у джерелі подані як rotational speed; для коректних SI-розрахунків у конкретному прикладі потрібно явно зафіксувати одиниці (об/с або об/хв) і застосувати перехід через /60 при потребі. Питання орієнтаційних степеней вільності (які саме осі додавати: A/B/C, rotating, РКМ-модуль тощо) є предметом наступних досліджень; тут сформовано лише строгий “дефіцит” степені вільності і процесові кінематичні вимоги на основі аналітичних залежностей.

2.2. Цільова кінематична здатність, кінематичні вимоги

2.2.1. Нормативна основа осей та база відліку для токарного верстата

Позначення осей і напрямків доцільно узгоджувати з ISO 841: координатна система верстата — прямокутна права X, Y, Z з обертальними осями A, B, C навколо X, Y, Z відповідно. Для токарних машин вісь Z пов’язується з головним шпинделем (який обертає заготовку), а X - радіальна, паралельна поперечному супорту.

Це важливо для подальшої формалізації: «мінімальний токарний ланцюг» $\{X, Z\}+C_w$ задає трансляційний підпростір (позиціонування різця) та обертання заготовки як технологічну ступінь (шпindel), але не забезпечує довільної орієнтації осі фрези/інструмента для повного turn-milling.

Вимога «5-осьовості» як 3T + 2R

1. Мінімальний набір керованих геометричних змінних для 5-осьової обробки зазвичай включає:

3 трансляції для позиціонування точки контакту (TCP): $x(t), y(t), z(t)$;

2 ротації для орієнтації осі інструмента (напрямок a_T) - наприклад, у параметризації «tilt-swivel» або «pitch-yaw».

У відкритому описі 5-осьових систем прямо фіксується «три осі лінійного руху та дві осі обертального руху» як сутність 5-осьової технології.

2. Вибір 2R чи 3R для орієнтації

Напрямок осі інструмента в просторі - це одиничний вектор $a_T \in \mathbb{R}^3$ з умовою $a_T = 1$, тобто 2 незалежні параметри.

Третя «обертальна» координата (roll навколо власної осі інструмента) часто є технологічно байдужою для осесиметричного інструмента (кінцева фреза тощо) і реалізується окремо як обертання шпинделя (C_1) (технологічна швидкість), а не як геометрична DOF траєкторії.

2.2.2. Формалізація вимоги через положення матриці перетворення і вектор осі інструмента

1. Положення TCP (позиція + орієнтація) зручно описується однорідною матрицею перетворення

$${}^W T_T(t) = \begin{bmatrix} {}^W R_T(t) & {}^W p_{TCP}(t) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

де ${}^W p_{TCP}(t) \in \mathbb{R}^3$ — вектор TCP у системі заготовки W, ${}^W R_T(t) \in SO(3)$ - орієнтація інструментальної системи координат.

2. Вісь інструмента як одиничний вектор:

$${}^W a_T(t) = {}^W R_T(t) e_z, \quad e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тоді кінематична вимога зводиться до керування двома функціями часу:

$${}^W_{P_{TCP}}(t), {}^W_{a_T}(t)$$

3. Практичний зв'язок із CAM/CL-даними та постпроцесингом.

У 5-осьовій підготовці траєкторії ключовою є конвертація даних траєкторії (у т.ч. положення та орієнтації) у команди осей конкретної компоновки верстата; постпроцесинг прямо трактується як критична процедура перетворення «tool document / CL» у NC-код, а RTCP-контроль - як базова функція, що утримує TCP при зміні орієнтації.

Критерій синтезу: досяжність ${}^W_{P_{TCP}}(t)$, ${}^W_{a_T}(t)$ і узгодження з осями верстата

1. Позначимо вектор узагальнених координат осей (лінійних і поворотних) $q(t)$. Тоді пряма кінематика задає відображення:

$${}^W_{T_T}(t) = F(q(t)),$$

звідки випливає, що

$$({}^W_{P_{TCP}}(t), {}^W_{R_T}(t)) = f(q(t))$$

2. Кінематична вимога синтезу формулюється як існування керованого розв'язку оберненої кінематики для заданих «профілів обробки»:

$${}^W_{P_{TCP}}(t) = f_p(q(t)), \quad {}^W_{a_T}(t) = f_a(q(t))$$

з урахуванням обмежень осей:

$$q_{\min} \leq q(t) \leq q_{\max}, \quad |\dot{q}(t)| \leq \dot{q}_{\max}, \quad |\ddot{q}(t)| \leq \ddot{q}_{\max}.$$

3. Зручна 2-параметрична орієнтація через a_T .

Введемо кути «нахил-поворот» (θ, ψ) :

$${}^W_{a_T} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \theta = \arccos(a_z), \quad \psi = \text{atan2}(a_y, a_x)$$

Це дає прямий аналітичний міст від геометричного завдання a_T до керованих кутових DOF (які реалізуються або серійними осями В/С, або «rotating-вузлом», або гібридним модулем).

2.2.3 Диференціальна кінематика як інструмент перевірки керованості та «ціни» рухів

1. Для аналізу швидкостей використовується якобіан:

$$\dot{x} = J(q)\dot{q}$$

де x - вектор керованих змінних задачі (наприклад, $x=[p_x, p_y, p_z, \theta, \psi]^T$) або $([p^T, \omega^T]^T)$ у 6-вимірному представленні). Формально зв'язок «швидкість задачі — швидкість суглобів/осей» через J є стандартним інструментом, а втрата рангу (J) відповідає сингулярним станам.

2. Критерій близькості до сингулярності якості керованості часто оцінюють через числа обумовленості або через міру маніпулябельності. У класичному означенні Йошікави:

$$w(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))},$$

а зменшення (w прямує до 0) відповідає деградації керованості (наближенню до сингулярності).

3. Для синтезу кінематичного ланцюга це дає практичне правило: обрана структура має забезпечити прийнятні ($w(q)$) та/або $k(J)$ на всій робочій траєкторії, інакше навіть «формально 5-осьова» система буде технологічно обмеженою (локальні зони недосяжності, різкі стрибки осей, погане RTCР-відпрацювання).

Чому серійно-паралельні рішення «природні» для реалізації 3Т-модуля.

1. У багатьох гібридних компоновках паралельні механізми використовують як позиціювальні модулі завдяки властивостям замкнених контурів: у відкритих оглядах підкреслюють їх потенціал щодо вищої жорсткості вантажопідйомності точності, але також вказують бар'єри - складність моделювання і порівняно малу робочу зону, що прямо веде до необхідності аналізу сингулярностей та досяжності.

2. У прикладних роботах з гібридними 5-осьовими системами також підкреслюють, що паралельні механізми придатні для верстатних застосувань через високу жорсткість, точність, низьку інерційність, а

інтеграція з «класичними» осями ускладнює постпроцесинг через різну кінематику.

3. З позиції синтезу це означає:

3T через РКМ як паралельний модуль: мета отримати легкий у русі та жорсткий позиціювальний блок (TCP-позиціонування).

2R через серійний вузол: мета - спростити орієнтацію a_T (нахил поворот) і зробити обернену кінематику керованою/стабільною.

Узгодження обох частин перевіряється через $J(q)$, робочу зону та обмеження осей.

2.3 Формулювання кінематичних вимог для синтезу ланцюгів

2.3.1 Уніфіковані критерії оцінювання та відбору кінематичних ланцюгів

Для подальшого дослідження кожен варіант ланцюга доцільно оцінювати за єдиним набором вимог:

1. досяжність заданих $W_{P_{TCP}}(t)$, $W_{a_T}(t)$;
2. відсутність небезпечних сингулярностей на технологічних траєкторіях (ранг J , міра w);
3. придатність до постпроцесингу RTCP (існування стабільного перетворення CL до осей);
4. узгодження з ISO-нормованими осями знаками та конструктивними обмеженнями токарної бази.

Узагальнений висновок

Цільова «5-осьова» кінематична здатність для turn-milling формалізується як керування траєкторією TCP (3 поступальні компоненти) та напрямом осі інструмента (2 кутові компоненти), що зручно задається як $W_{P_{TCP}}(t)$, $W_{a_T}(t)$. Серійно-паралельні архітектури є природними, коли потрібно отримати «сильний» (жорсткий/динамічний) 3T-модуль, але це

вимагає контролю робочої зони та сингулярностей.

При цьому треба зважати на наступні обмеження підходу.

1. Формула «5-осьовості = 3T+2R» коректна для більшості задач, де орієнтація визначається напрямом осі інструмента; якщо потрібен контроль «coll» (наприклад, неосесиметричний інструмент орієнтований різець), тоді геометрично може знадобитися 3R (тобто 6D-положення).
2. Оцінювання «переваг РКМ» є конструктивно-залежним: фактичні жорсткість/робоча зона/сингулярності визначаються конкретною топологією й параметрами, тому наведені критерії - це рамка для подальшого розрахунку.

2.3.2 Типові структури ланцюгів та патерни синтезу

Загальна формалізація для всіх патернів через рамки та позначення. Вводимо базову СК {0}, СК інструмента TCP {T} та СК заготовки {W}.

Пряма кінематика (FK) двох ланцюгів. Для будь-якої компоновки:

$${}^0T_T = \prod_k T_k(q_k), \quad {}^0T_W = \prod_m T_m(q_m)$$

де q_k - координати осей (лінійні/кутові).

Відносне перетворення “інструмент у СК заготовки”.

$${}^WT_T = ({}^0T_W)^{-1} \cdot {}^0T_T.$$

Саме WT_T є природною базою і для постпроцесора (розклад на осі), і для моделювання сумарних похибок як композиції похибок двох ланцюгів.

Лінеаризована оцінка чутливості (для розділу “наслідки”). У першому наближенні:

$$\delta p \approx J(q) \delta q,$$

де J - якобіан TCP (для серійних ланцюгів простіший; для РКМ гібридів - складніший через множинність розв'язків ІК). Узагальнено MBS+HTM підхід є типовим для таких моделей.

Патерн А - серійне нарощування осей на супорті головці

Структура (типова для turn-milling компаундів із “прозорою” ЧПК).

Схема: $\{Z, X\} + Y + B + C_1$ (інструментальний ланцюг) + C_w (обертання заготовки).

Матричний запис (як у модулі).

$${}^0T_T = T_Z(z)T_X(x)T_Y(y)R_B(\beta)R_{C_1}(\gamma) T_{\text{tool}}, \quad {}^0T_W = R_{C_w}(\varphi)T_{\text{work}}$$

Інженерний зміст. Перевага (керованість/постпроцесор): серійний ланцюг з ортогональними осями зазвичай дає простішу обернену кінематику (послідовний “back-substitution”), що зменшує ризик неоднозначностей у NC-розкладі траєкторії.

Недолік (динаміка/точність на прискореннях): нарощування осей (особливо B/C_1 на супорті) підвищує рухомі маси. Для ілюстрації динамічного штрафу (спрощено, для пояснення):

$$\delta \approx F/k \approx m_{\text{eff}}a/k,$$

де k - еквівалентна жорсткість вузла, m_{eff} - ефективна рухома маса, a - прискорення. Отже, за інших рівних умов зростання m_{eff} лінійно збільшує пружні відхилення при високодинамічних режимах.

3) Патерн В - “nutating head nutating table” (компактний 2R-вузол із неортогональними та/або неперетинними осями)

3.1. Ключова відмінність і наслідок для постпроцесора.

Для nutating-кінематики осі обертання можуть бути неперетинними, тому перетворення траєкторії $CL \rightarrow NC$ виконується через form-shaping function у вигляді добутку НТМ та розв’язання ІК у постпроцесорі. Це прямо підкреслено для п’ятиосьової nutating-машини з двома неперетинними осями.

2.3.3 Мінімальна математична схема.

Нехай вісь В задається одиничним вектором w . Орієнтація може бути подана як

$$R = R_w(B)R_z(C)R_0,$$

де $R_w(B)$ — поворот навколо довільної осі (зручно реалізується через формулу Родріга).

Повне формоутворююче перетворення (один із типових записів):

$${}^0T_T(B, C, \dots) = \text{Trans}(L)\text{Rot}_z(C)\text{Trans}(M)\text{Rot}_B(B)\text{Trans}(P)$$

де L , M , P - вектори зміщень між осями/до ТСП (геометричні параметри головки).

Ризики (обов'язково зафіксувати в тексті). Складніша ІК і сингулярності. У nutating-постпроцесорі окремо аналізують сингулярні положення (погана обумовленість розкладу орієнтації), що впливає на планування траєкторій та обмеження по B, C .

4) Патерн C - гібридний серійно-паралельний ланцюг (РКМ-модуль + серійні осі). Мотивація патерну. Паралельний модуль часто вводять для покращення жорсткості/динаміки або для “компактизації” орієнтаційних DOF, а серійні осі додають для зручного подавання переміщення.

Приклад класу serial-parallel 5-осьових машин (паралельна платформа у шпинделі). Описано 5-осьову serial-parallel структуру, де паралельна 3-PRS платформа у шпиндельному блоці реалізує Z -переміщення та дві кутові координати, тоді як інші осі забезпечують переміщення подачу.

Патерн D - “гібридний токарно-фрезерний” як дволанцюгова система (tool-chain + workpiece-chain).

Топологічна постановка. Для turn-milling/комбінованих верстатів коректно виділяти два ланцюги: ланцюг інструмента (осі, що задають ТСП і орієнтацію інструмента); ланцюг заготовки (шпиндель/стіл/додаткові осі). Математично це природно зводиться до відносного перетворення ${}^wT_T = ({}^0T_w)^{-1} \cdot {}^0T_T$, яке і є основою для MBS-моделей та НТМ-моделювання точності.

Користь: правильна база для постпроцесора (розклад CL-даних на осі двох ланцюгів) і для моделі похибок як композиції похибок обох ланцюгів (геометричних кінематичних). При цьому ускладнюється калібрування ідентифікація похибок, бо частина помилок проявляється лише у відносному русі “інструмент-заготовка”

Таблиця 2.1 - Патерни кінематичних архітектур

| Патерн | Структурна ідея | Плюси | Мінуси/ризика | Типова вимога до постпроцесора |
|--------|--|---|--|---|
| A | Серійні осі на супорті/головці + (C_w) | Проста ІК, прозора ЧПК | Рухомі маси більші тоді динамічні похибки більші | Стандартний 5-осьовий комбінований |
| B | Nutating 2R з неортогональними/неперетинними осями | Компактність, потенційно краща динаміка | Складна ІК, сингулярності, валідація | Form-shaping function (HTM), спец-ІК |
| C | РКМ-модуль + серійні осі | Жорсткість динаміка, "3+2" архітектури | Множинність ІК assembly modes | ІК з вибором гілки/режиму |
| D | Два ланцюги: tool + work | Коректна база для моделі turn-milling і похибок | Складність калібрування ідентифікації | Розклад траєкторії на два ланцюги через $(T_w)^{-1}T_T$ |

Невизначеність обмеження. Формула $\delta \approx m_{\text{eff}} a/k$ наведена як пояснювальна (лінійна пружна модель одного ступеня вільності); для реальної машини потрібні частотні моделі/модальний аналіз і врахування сервопетлі.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛЬ КІНЕМАТИКИ І ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ

3.1 Припущення й область застосовності моделі

Кінематичні припущення (базові): Усі ланки - тверді тіла; деформації, термодріфт, люфти, пружні деформації інструмента/заготовки не враховуються в “ідеальній” моделі (вони входять у модель похибок/розширення). Кінематичні пари ідеальні: без зазорів і втрат, без гістерезису та без обмежень по швидкості/прискоренню в аналітичному ядрі. Система координат заготовки суміщена з САМ-програмною, а система координат верстата використовується як базова; положення орієнтація цих систем задаються через НСТ-матриці (гомогенні перетворення). Це узгоджується з підходом побудови кінематичної та похибкової моделі через НСТ для turn-milling центру.

Однорідні матриці перетворення (НСТ): Положення та орієнтація тіла системи координат {B} відносно {A} описуються матрицею.

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A p_B \\ 000 & 1 \end{bmatrix}$$

де ${}^A R_B \in SO(3)$, ${}^A p_B \in \mathbb{R}^3$

Обернення (для жорсткого тіла) має вигляд:

$$({}^A T_B)^{-1} = \begin{bmatrix} ({}^A R_B)^T & -({}^A R_B)^T {}^A p_B \\ 000 & 1 \end{bmatrix}$$

Область застосовності (кінематика turn-milling як відносний рух):

Для ортогонального turn-milling характерна композиція обертань заготовки та фрези і подач, що зручно інтерпретується як відносний рух інструмента щодо заготовки (через два кінематичні ланцюги). Зокрема, в оглядовій постановці для ортогонального turn-milling використовують (приклад) швидкість різання

$$v_c = r 2\pi n_1,$$

та модуль результуючої подачі

$$|v_f| = v_{fa}^2 + v_{ft}^2, \quad v_{ft} = n_2 2\pi(R + a_p),$$

де n_1 - оберти фрези, n_2 - оберти заготовки, R - радіус заготовки, a_p - глибина різання.

3.2. Загальна формула відносного перетворення (дві кінематичні "тілки")

Визначення двох ланцюгів: Tool chain: 0T_T - перетворення від бази станини $\{0\}$ до СК інструмента $\{T\}$. Workpiece chain: 0T_W - перетворення від бази станини $\{0\}$ до СК $\{W\}$. Кожен ланцюг зазвичай задається добутком елементарних перетворень осей (поступальних/обертальних) та сталих офсетів:

$${}^0T_T(q_T) = \prod_i T_i(q_i), \quad {}^0T_W(q_W) = \prod_j T_j(q_j)$$

Відносне положення інструмента в системі заготовки:

$${}^WT_T = ({}^0T_W)^{-1} \cdot {}^0T_T.$$

Це і є математичний оператор з'єднання дволанцюгової моделі: САМ-траєкторія у $\{W\}$ отримується як відносний результат двох незалежних перетворень.

Інтерпретація для постпроцесингу:

Forward (кінематика): задані осьові координати

$$(X, Y, Z, \dots, B, C, \dots) \Rightarrow {}^0T_T, {}^0T_W \Rightarrow {}^WT_T$$

Inverse (постпроцесинг): задана САМ-інформація (CL-дані) у $\{W\} \Rightarrow {}^WT_T \Rightarrow$ знайти осі верстата, що реалізують цю матрицю (з урахуванням структури ланцюгів).

Postprocessing для nutating-конфігурацій (2R-вузол). Вхідні CL-дані:

Нехай задано:

$Q = (Q_x, Q_y, Q_z)$ — координати точки інструмента (CL-точки) в $\{W\}$;

$k = (K_x, K_y, K_z)$ — одиничний напрям осі інструмента (tool axis). Окремо в nutating-вузлі фігурує одиничний вектор $w = (W_x, W_y, W_z)$, який задає вісь

nutating-обертання (довільна вісь у просторі).

Form-shaping function (структура матриць): Для nutating table+head конфігурації (приклад) рух описують добутком матриць переносу й повороту; зокрема використовують послідовність, де явно вводяться геометричні офсети L, M, P як сталі трансляції, та два обертання: навколо осі z і навколо довільної осі w.

$${}^wT_T = T(\dots)R_z(-\varphi_z)T(\dots)R_w(-\varphi_w)T(\dots),$$

де φ_z та φ_w - шукані кути двох обертальних DOF (умовно C та B). Наявність офсетів у трансляційних матрицях і загальна ідея form-shaping зафіксовані в постановці.

Збірка матриці з CL-даних (відтворювано):

Побудувати ортонормований базис інструмента (i, j, k):

$$k = k / \|k\|$$

вибрати допоміжний a (наприклад, $a = (0, 0, 1)$), якщо $|a \cdot k| < 0.95$, інакше $a = (0, 1, 0)$; $i = a \times k / \|a \times k\|$ $j = k \times i$.

Сформувати

$${}^wT_{T,CL} = \begin{bmatrix} i & j & k & Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аналітична обернена кінематика (ключові формули для φ_w , φ_z):

Для nutating-вузла явні співвідношення можуть бути записані через компоненти w та k (позначення узгоджені з наведеними формулами), з використанням

$$\varphi_w = \text{atan2}(W_y K_x - W_x K_y, W_z K_z + W_x K_x + W_y K_y),$$

$$\varphi_z = \text{atan2}(-W_y K_x + W_x K_y, (W_y(W_x K_x + W_y K_y) + W_x W_z K_z) / (W_x^2 + W_y^2))$$

Визначення X, Y, Z із трансляційної частини. Після знаходження φ_w , φ_z відома орієнтаційна частина form-shaping матриці; тоді X, Y, Z знаходять з рівняння

$${}^wT_{T,CL} \equiv {}^wT_{T,FS}(X, Y, Z, \varphi_w, \varphi_z, L, M, P)$$

порівнюючи вектор переносу (4-й стовпець) з урахуванням офсетів L, M, P, які входять у трансляційні множники моделі.

Узагальнена 5-осьова кінематика (3T+2R) як “універсальний” інструмент постпроцесингу.

Базова ідея: Універсальний постпроцесинг будується як рівність двох матриць:

CL-data matrix (із CAM): матриця положення та орієнтації інструмента;

Form-shaping function matrix (із кінематики верстата): добуток НСТ-матриць, що відповідають реальній структурі осей.

Цей підхід формулюється як зведення постпроцесингу до оберненої кінематики через НСТ. Структура “узагальненого” 5-осьового верстата:

Узагальнена схема розглядає 3 поступальні DOF і набір можливих обертальних, з яких активні лише 2 (типова 5-осьова конфігурація 3T+2R). Саме це дає можливість однією математичною рамкою описувати різні компоновки (tilting head, tilting table, nutating тощо).

Алгоритм “універсального” постпроцесингу (відтворюваний): З CL-даних зібрати ${}^wT_{T,CL}$. Записати ${}^wT_{T,FS}(q)$ як добуток НСТ-матриць осей (поступальних і обертальних) та сталих офсетів.

Прирівняти: ${}^wT_{T,CL} = {}^wT_{T,FS}(q)$. Розв’язати підсистему для орієнтації (2 кути), далі - для переносу (3 поступальні). Додати перевірки: допустимість діапазонів осей, уникнення сингулярностей, узгодження напрямків інструмента (sign-конвенції) та вибір гілки.

Nutating як окремий випадок універсальної схеми: Для nutating-осей у матриці form-shaping необхідна матриця повороту навколо довільної осі; це прямо зазначається як специфіка nutating у загальній методології.

3.3. Модель похибок (геометрична точність) при збільшенні ступенів вільності.

При додаванні DOF різко росте “простір похибок”: Кожна вісь (поступальна чи обертальна) має 6 просторових похибок (3 лінійні δ і 3 кутові ϵ), плюс похибки неперпендикулярності між осями. У прикладі для

turn-milling комбінованого центру це дає 45 геометричних похибкових термів, зведених у таблицю (структура осей включає X, Y, Z, B, W, C та похибки перпендикулярності).

Нотація похибок (типова):

δ_{ij} - лінійна похибка осі j у напрямі i (позиціонування/прямолінійність);

ϵ_{ij} - кутова похибка осі j (yaw/pitch/roll);

α, β, γ - похибки неперпендикулярності між осями.

Пояснення індексів і принцип формування повного набору термів наведені в постановці моделі

Композиція “ідеальної” та “похибкової” кінематики через НСТ:

Будується ідеальна кінематична модель ${}^wT_{T,ideal}(q)$. Для кожної осі вводяться матриці похибок положення/руху (малих відхилень) і формують

$${}^wT_{T,ideal}(q, e) = \prod (T_{ideal} \cdot E_{error}(e))$$

де e - вектор геометричних похибок. Підхід через НСТ і необхідність побудови кінематичної моделі як бази для прямої/оберненої кінематики та NC-інструкцій описані явно.

Вихідні похибки в робочій точці (приклад форми запису). Просторова похибка точки інструмента:

$$\Delta_r = P_{actual} - P_{ideal} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

У роботі наведено приклад спрощеної моделі $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ через суми окремих δ, ϵ та геометричні параметри (типу L , конструктивні офсети), що показує лінійну комбінацію впливів.

Практичний сенс: ідентифікація та чутливість (sensitivity). Після побудови моделі виконують вимірювання розділення апроксимацію похибок і валідацію (показано як послідовність “detection - modeling - separation”). Далі рахують коефіцієнти чутливості й застосовують інтервальний аналіз чутливості уздовж робочого простору, щоб визначити “найвпливовіші” похибки та пріоритет компенсації/допусків.

Окремо задається метрика *global maximum interval sensitivity*, яку прямо пропонують використовувати як індекс для проектування точності та розподілу допусків: Окремо задається метрика *global maximum interval sensitivity*, яку прямо пропонують використовувати як індекс для проектування точності та розподілу допусків:

$$S_j^* = \sum_{i=1}^3 (S_{ij}^*)^2$$

та описують її роль у призначенні допусків на джерела похибок.

Обмеження моделі похибок (важливо для коректності): Зазначено, що “чисто геометрична” модель часто базується на режимі без навантаження; в реальному різанні додаються впливи сили різання, зношування, вібрацій і термоефектів, що потребує комплекснішої моделі в подальших дослідженнях.

Рисунок 3.1 подає структурно-кінематичну схему та реальну компоновку 5-осьового серійно-паралельного верстата, вводячи позначення ланок, приєднувальних точок і систем координат, які далі використовуються для виведення рівнянь кінематики. На рис 3.1 показана загальна ідея компоновки (серійно-паралельна структура), що складається з: паралельного модуля (верхня частина) з трьома неідентичними ногами I–III, які з’єднують нерухому основу з рухомою платформою; серійного поворотно-нахильного столу (нижня частина) з позначеною віссю нахилу (*Tilting axis*), що забезпечує додаткові орієнтаційні ступені вільності системи. 2. Підрисунок (а): спрощена кінематична схема паралельного модуля. Паралельний модуль представлено як триприводну систему з трьома вертикальними напрямними, вздовж яких діють призматичні переміщення. Кожна нога реалізована як пара стрижнів (паралельні тяги), з’єднаних із: вузлами на каретках/основі (A_{i1}, A_{i2}); вузлами на рухомій платформі (B_{i1}, B_{i2}), через сферичні шарніри (показані характерними символами). На схемі окремо підкреслено різну структурну роль ніг I–III (дві ноги подано як геометрично подібні, одна — як відмінна), що відповідає “неідентичності” кінематичних ланцюгів

паралельного модуля.

Для рухомої платформи введено: опорну точку P та прив'язану до платформи систему координат (x_p, y_p, z_p) ; кут як параметр орієнтації платформи (обертання навколо осі (x)), що узгоджується з подальшим записом перетворення.

Підрисунок (b): реальна (інженерна) репрезентація верстата.

Показано просторову компоновку паралельного модуля з трьома вертикальними приводними осями та рухомою платформою, на якій розміщено шпindelний вузол. Точка U позначає положення робочого органа (інструмент вісь шпинделя), а Δ - конструктивний зсув (офсет) від платформи до точки прикладання/розташування інструмента, який є суттєвим для коректного кінематичного зв'язку "платформа - інструмент". Також введено характерні вертикальні розміри d_a і d_i як геометричні параметри компоновки (висотні/погоджувальні відстані між модулями), що потрібні для подальших перетворень між системами координат. Окремо показано поворотно-нахильний стіл із власною локальною системою координат (x_t, y_t, z_t) та віссю нахилу, що визначає орієнтаційні рухи заготовки відносно інструмента.

Рисунок 3.1 виконує роль еталонної "карти позначень" для кінематичного моделювання: визначає топологію ніг, приєднувальні точки (A_{ij}, B_{ij}) , узагальнені координати приводів, а також узгоджує базові та рухомі системи координат (для платформи та столу), що є базою для запису рівнянь зв'язку і подальшого виведення прямої/оберненої кінематики.

Рисунок вводить d_a та d_i як геометричні параметри; їх точні формальні визначення (що саме вимірюється між якими базовими елементами) слід брати з відповідного місця тексту статті, якщо потрібна однозначна інтерпретація для розрахунків.

Рисунок 3.2 фіксує геометричний зміст кутових параметрів орієнтації для нахильно-поворотного столу - орієнтація інструмента відносно системи столу - орієнтація самого столу відносно базової системи R_b .

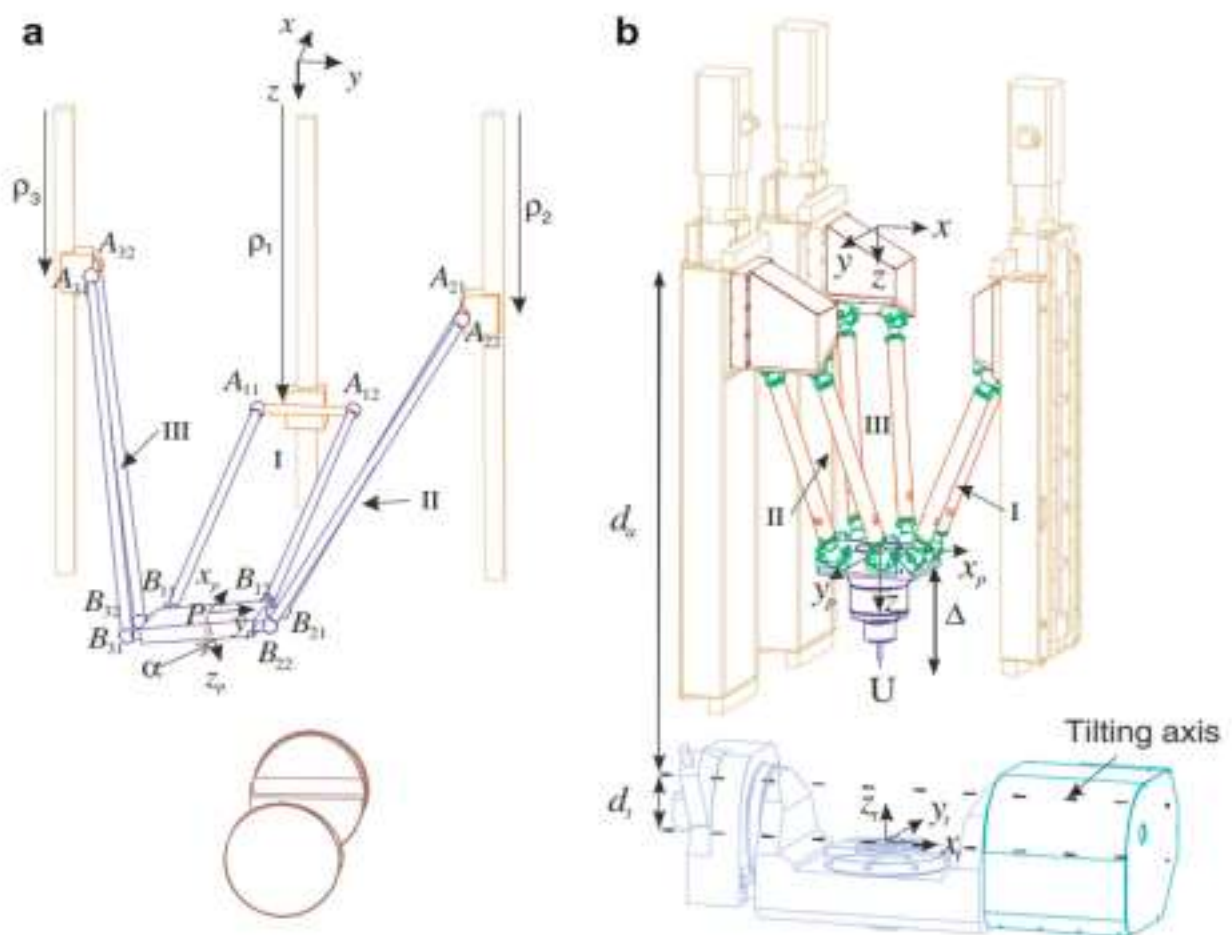


Рисунок – 3.1 Схематичне зображення інструментальної системи верстата: (а) спрощене зображення та (б) реальне зображення, надане компанією Fatronik.

На рисунку подано конструктивно-кінематичну “прив’язку” нахильно-поворотного столу, яка використовується для узгодження систем координат у моделі повної машини (паралельний модуль та стіл) та для однозначного введення кутів орієнтації. Системи координат і відлікові бази. Показано дві ключові системи координат: R_b - базова (нерухома) система, закріплена на основі верстата; R_t - локальна система, жорстко пов’язана з нахильно-поворотним столом. Таке розділення задає формальний перехід “основа - стіл” та дозволяє описувати орієнтації в різних відлікових системах без змішування кутів.

Орієнтаційні параметри столу. Кути на рисунку інтерпретуються як пара кутових координат, що визначають просторову орієнтацію столу відносно бази (R_b). На схемі вони подані як послідовні обертання (показані

дугами), пов'язані з робочою кінематикою нахильно-поворотного вузла, зокрема навколо осі нахилу (позначено "Tilting axis").

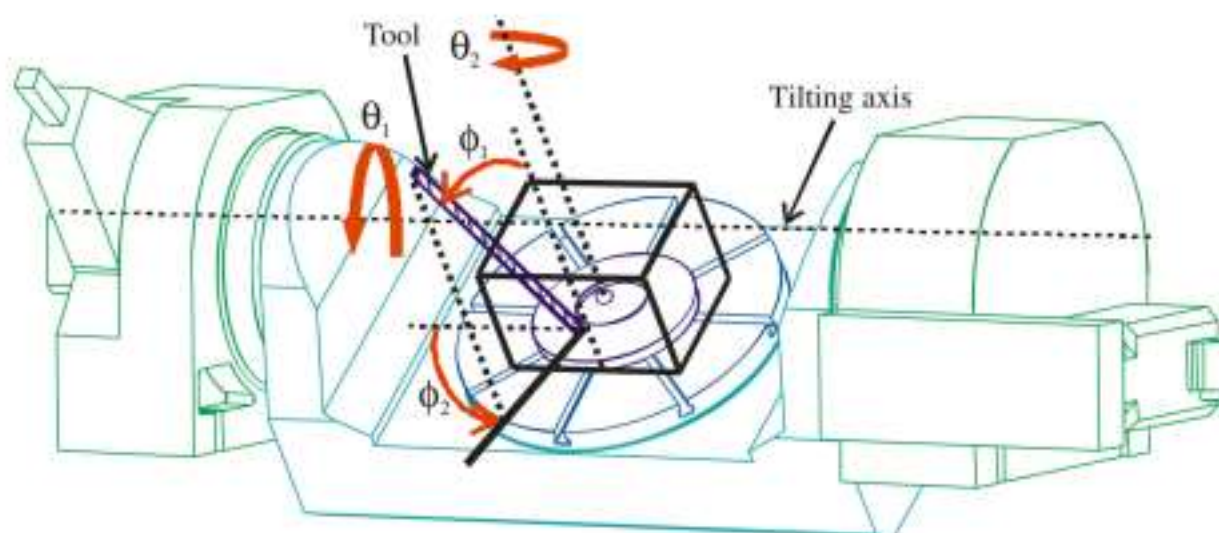


Рисунок 3.2 Креслення похилого столу де орієнтація інструменту визначається двома кутами, пов'язаної з похилим столом..

Орієнтаційні параметри інструмента. Кути визначають напрям осі інструмента ("Tool") відносно системи R_t , тобто описують орієнтацію інструмента у координатах, "прив'язаних" до столу. На рисунку це відображено через положення вектора/осі інструмента та кутові відхилення, задані відносно R_t . Рисунок 3.2 фактично задає конвенції орієнтації та знаки кутів, необхідні для коректного запису матриць перетворення між R_b і R_t та подальшої побудови кінематичних рівнянь повної системи. При цьому, він має пояснювальний характер і не містить розмірних даних; для однозначної інтерпретації послідовності обертань і формальних осей обертання слід спиратися на відповідні рівняння перетворень та таблицю матриць у тексті статті.

РОЗДІЛ 4

ВЕРИФІКАЦІЯ ТА ІНЖЕНЕРНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

4.1 Верифікація кінематичної працездатності

4.1.1 Вхідні дані та математична постановка

Номинальна модель. Нехай пряма кінематика машинної структури описується відображенням

$${}^W T_T = f(q), \quad {}^W T_T = \begin{bmatrix} {}^W R_T & {}^W p_T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

де $q = [q^1, \dots, q^n]^T$ - узагальнені координати (лінійні осі подач, поворотні осі, координати повзунів приводів РКМ тощо), ${}^W p_T$ - положення TCP у системі заготовки W , ${}^W R_T \in SO(3)$ - орієнтація інструмента.

Множина цільових позицій. За САМ-траєкторією (turn-milling) формується дискретний набір позицій:

$$S = \{{}^W T_T(i)\}_{i=1}^N, \quad {}^W T_T(i) = ({}^W R_T(i), {}^W p_T(i))$$

Задача аудиту (формально): для кожної ${}^W T_T(i)$ знайти принаймні один $q(i)$ та перевірити:

досяжність (ІК-існування): $\exists q(i) \in Q: f(q(i)) \approx {}^W T_T(i)$

дотримання обмежень: $q(i) \in Q; \dot{q}(i) \in \dot{Q}; \ddot{q}(i) \in \ddot{Q}$ відсутність колізій;

якість кінематичної конфігурації: віддаленість від сингулярностей, відсутність “поганих” гілок assembly modes.

Міра помилки пози/орієнтації (для чисельного ІК і верифікації):

$$\Delta p = \|{}^W p_T - {}^W p_{T,d}\|, \quad R_{err} = ({}^W R_{T,d})^T {}^W R_T, \quad \Delta \theta = \arccos((\text{tr}(R_{err}) - 1)/2),$$

та критерій прийнятності (приклад):

$$\Delta p \leq \varepsilon_p, \quad \Delta \theta \leq \varepsilon_\theta,$$

де $\varepsilon_p, \varepsilon_\theta$ задаються вимогами до точності постпроцесингу NC-інтерполяції (в межах кінематичного аудиту це інженерні допуски, не “точність верстата”).

Особливість РКМ: множинні розв'язки та assembly modes. Для 5-DOF гібридної машини VERNE показано, що обернена кінематика може мати 16 розв'язків, а фізично досяжною може бути лише частина мод (обмеження та геометрія відсікають інші).

Задання робочої області та множини цільових положень
Обмеження в координатному просторі. Область допустимих координат задається як гіперпаралелепіпед (та/або набір нерівностей):

$$Q = \{q: q_{j,\min} \leq q_j \leq q_{j,\max}\}$$

Далі робоча область в просторі позицій визначається як

$$\Omega = \{({}^W p, {}^W R) : \exists q \in Q, f(q) = ({}^W p, {}^W R) \text{ без колізій}\}$$

Побудова цільових позицій для turn-milling. Для кожного дискретного параметра траєкторії s_i :

позиція TSP: ${}^W p_T(i) = p(s_i)$ де $p(s_i)$ - САМ-траєкторія на поверхні контури (циліндр, торець, радіуси).

вісь інструмента: одиничний вектор $k(i)$ (нахил lead-lag під стратегію), ($\|k\|=1$).

кут "tool-twist" $\psi(i)$: обертання навколо $k(i)$ (важливо для уникнення колізій та забезпечення стабільності ІК).

Аналітична реконструкція матриці орієнтації з (k) та опорного вектора. Вибирається допоміжний вектор $u(i)$ не рівне $k(i)$ (наприклад, проєкція осі WZ або напрямок подачі), після чого:

$$e_3 = k, e_1 = u - (u^T e_3) e_3 / \|u - (u^T e_3) e_3\|, e_2 = e_3 \times e_1$$

$${}^W R_T = [e_1 \ e_2 \ e_3] \cdot R_{e_3}(\psi),$$

де $R_{e_3}(\psi)$ - поворот навколо осі e_3 на ψ (можна реалізувати формулою Родрігеса).

Практичний зміст: така параметризація зменшує ризик "стрибків" орієнтації при переході через критичні положення (коли, наприклад, нормаль поверхні стає близькою до обраного u).

4.1.2. Перевірка існування розв'язку

Загальний критерій існування. Для кожної цільової пози:

$$\exists q(i) \in Q, \Delta_p(i) \leq \varepsilon_p, \Delta_\theta(i) \leq \varepsilon_\theta,$$

Якщо аналітичний ІК відсутній або складний — використовується чисельний розв'язувач із контролем збіжності та обмежень (проекція на Q), штрафи за наближення до сингулярності тощо).

Nutating-вузли: аналітичний постпроцесинг через НСТ та form-shaping function

Для п'ятиосьових конфігурацій з nutating-головкою, де вісь обертання нахилена і/або осі не перетинаються, у роботах She & Chang показано підхід: NC-рівняння отримують з оберненої кінематики та матриці form-shaping function, побудованої на однорідних перетвореннях.

Ключовий елемент - поворот навколо довільного одиничного вектора $W = W_x i + W_y j + W_z k$. Для такого повороту (по суті - форма Родрігеса) у статті прямо наведено матричний запис $Rot(W, \varphi_w)$ з $(V_{\varphi_w} = 1 - \cos \varphi_w)$. Саме це дозволяє коректно моделювати nutating-кінематику, коли вісь обертання не є ортогональною до базових осей.

Практичний аудит для nutating-вузла включає:

1. перевірку правильності вектора осі W (нормування, відповідність прийнятій системі координат);
2. правильність геометричних зсувів: “program origin - rotary axis”, “primary axis - secondary axis”, “gauge plane - pivot point”, “tool tip - gauge plane”. У прикладі верифікації ці параметри явно вводяться в постпроцесор і далі повторюються при моделюванні;
3. зіставлення початкових CL-даних і трансформованих CL (back-transformation) як внутрішній контроль коректності алгоритму.

ПКМ-модулі: множинність розв'язків та відбір фізично придатної гілки

Для ПКМ (і гібридних схем) розв'язок ІК часто не є однозначним. На прикладі VERNE: 16 розв'язків ІК і кілька assembly-modes, з яких реально досяжною може бути лише одна (через обмеження геометрію)

Тому в аудит вводиться задача вибору гілки: де $Q_{IK}(i)$ - множина всіх ІК-розв'язків для пози i ; доданки Φ - штрафи за погану обумовленість, близькість до меж, сингулярності; ваги w_i задаються інженерно.

Виявлення “проблемних” конфігурацій: сингулярності, керованість, обмеження. У загальному вигляді:

$$\dot{x} = J(q)\dot{q},$$

де x - 6-вимірний вектор швидкостей ТСП (лінійна та кутова складові в обраній параметризації).

Локальні метрики керованості (dexterity). В огляді Russo et al. підкреслено, що для паралельних гібридних структур найбільш уживані локальні індекси - маніпульованість μ та число обумовленості k_n , обидва як функції Якобіана:

$$\mu = \sqrt{\det(JJ^T)}, \quad k_n = \|J\| \|J^{-1}\|$$

З інженерної точки зору:

якщо μ прямує до 0 - наближення до сингулярності (погана передача швидкостей/сил);

велика k_n - підсилення похибок активних координат у похибки ТСП (кінематично “небезпечні” зони).

Serial- vs parallel-сингулярності (для РКМ). У паралельних механізмах сингулярні стани можуть виникати як:

втрата керованості по виходу (end-effector) при скінченних (\dot{q}) (аналог $\det(J)=0$ у відповідній формі); або втрата здатності чинити опір навантаженню (передача сил “вироджується”), що також проявляється через погані властивості матриць передачі Якобіанів.

Особливий клас проблем — “сингулярність орієнтаційних параметрів” у постпроцесингу. В Int J Adv Manuf Technol (2008) наведено приклад: може виникати сингулярна позиція, коли певний параметр (кут) стає невизначеним, і тоді потрібно використовувати “look-ahead” (читати наступну точку траєкторії) для забезпечення лінійної зміни кута між

точками. Це безпосередньо переноситься на аудит: навіть якщо ІК формально існує, параметризація може створювати розриви, які зруйнують плавність руху та NC-інтерполяцію.

Протокол виявлення проблемних зон (рекомендована процедура):

Для кожної $q(i)$ обчислити $\mu(i)$, $\kappa_n(i)$.

Задати пороги прийнятності, наприклад:

$$\mu(i) \geq \mu_{\min}, \quad \kappa_n(i) \leq \kappa_{\max},$$

де $\mu_{\min}, \kappa_{\max}$ визначаються з урахуванням структури (типово — через аналіз статистики по всій Ω : нижній верхній перцентилі).

3. Перевірити запас до меж: і вимагати ($m_q(i) \geq m_{q\min}$) (аналогічно для швидкостей/прискорень).

4. Зафіксувати сегменти траєкторії, де порушено будь-який критерій - це “проблемні конфігурації” для подальшого перепланування траєкторії зміни гілки ІК модифікації структури.

4.1.3. Верифікація постпроцесингу, геометрія траєкторії

Проблема лінеаризації в 5-осьовому русі.

Навіть якщо CL-дані є “ідеальними”, реальна траєкторія TCP відносно заготовки при одночасних лінійних і поворотних рухах є криволінійною, а ЧПК часто інтерполуює прямою між сусідніми точками. Це дає похибку лінеаризації, і в роботі про узагальнений 5-осьовий постпроцесор зазначено, що для контролю відхилення застосовують команду: задається допустиме відхилення і додаються проміжні керуючі точки, щоб фактичне відхилення не перевищувало допуск.

Аналітична постановка контролю лінеаризації (практично):

1. Нехай для двох сусідніх CL-точок маємо ${}^W T_T(i)$ та ${}^W T_T(i+1)$
2. Постпроцесор генерує проміжні точки, якщо оцінка максимальної девіації δ_{\max} (за внутрішньою моделлю руху осей) перевищує заданий допуск Δ_{lin} .
3. Застосовується рекурсивне дроблення сегмента, доки $\delta_{\max} \leq \Delta_{\text{lin}}$.

Цей блок є частиною кінематичного аудиту, бо “кінематично допустима” траєкторія може стати “кінематично неприйнятною” після інтерполяції.

Верифікація NC у середовищі solid-cutting simulation

Для nutating-конфігурацій демонструють верифікацію згенерованих NC-даних. У прикладі налаштування вказуються: побудова 5-осьової машини з nutating-головкою, задання вектора осі W, зсувів між осями та параметрів інструмента (gauge plane, pivot point).

У спорідненій роботі (Int J Adv Manuf Technol, 2008) також наведено типову процедуру: параметри з кінематичної схеми мають бути відображені в дереві компонентів VERICUT; як приклад — формула вектора осі B-вузла nutating-столу та зсуви між осями.

Мінімальний чек-лист NC-верифікації в аудиті:

1. Імпорт NC + інструментальна бібліотека (довжина інструмента відносно gauge plane).
2. Верифікація кінематичних параметрів машини в симуляторі: W, зсуви, pivot distance, знаки осей.
3. Симуляція зняття матеріалу (solid cutting) та перевірка: колізії, вихід за межі, непередбачені “викиди” орієнтації кута.
4. (Опційно, але бажано) back-check: порівняння трансформованих CL з вихідними CL для підтвердження коректності перетворень.

Кроки / алгоритм аудиту (відтворюваний)

1. Вхід: Q, \dot{Q}, \ddot{Q} , модель $f(q)$, геометрія машини, траєкторія САМ $S=\{{}^W T_T(i)\}$.
2. Побудова орієнтацій: для кожного (i) сформувати ${}^W R_T(i)$ з $k(i)$ та $\psi(i)$ (аналітична реконструкція базису).
3. ІК-пошук: згенерувати множину розв’язків $Q_{IK}(i)$ (аналітичну чисельну).
4. Відбір гілки: мінімізувати функцію вартості з безперервністю $\|q(i)-q(i-1)\|$ та штрафи за k_n , межі, сингулярності.

5. Оцінка Якобіана: $\mu(i)=\sqrt{\det(JJ^T)}$, $k_n(i)=|J|J^{-1}|$) та фіксація “поганих” точок сегментів.
6. Контроль параметризаційних сингулярностей: застосувати look-ahead фільтр для кутів, які стають невизначеними в окремих положеннях.
7. Лінеаризація: задати Δ_{lin} та вставити проміжні точки до виконання допуску.
8. NC-верифікація: імпорт NC, відтворення параметрів W, зсувів, pivot gauge; симуляція та звіт колізій помилок.
9. Вихід: “паспорт кінематичної працездатності” структури: відсоток досяжних позицій, карти μ , k_n перелік сегментів з порушеннями, рекомендації (зміна гілки, локальна модифікація траєкторії, обмеження робочої області).

При цьому треба врахувати певні припущення.

1. Пороги μ_{min} , k_{max} , $m_{q,min}$, Δ_{lin} є інженерними і залежать від конкретної структури, ЧПК та режимів (у розділі слід або задати типові значення, або описати процедуру їх підбору через статистику по Ω).
2. Метрики μ , k_n коректні як локальні індикатори, але для РКМ бажано доповнювати їх окремими критеріями “force torque transmissibility” та (за потреби) динамічними індексами.

Таким чином здійснюється формалізований кінематичний аудит: визначення робочої області та цільових позицій TCP, перевірка існування/стійкості розв’язків ІК (включно з множинністю для РКМ), виявлення сингулярностей та порушень обмежень, контроль коректності постпроцесингу (лінеаризація, NC-верифікація).

4.2 Вибір кінематичного модуля для гібридного ланцюга за динамічними критеріями

4.2.1 Базова інверсна динамічна модель та розділення поступальної/обертальної складових

У гібридній схемі типу “три ступеня вільності на паралельний маніпулятор та 2-ступеня вільності на подаючий стіл” паралельний модуль визначає не лише досяжність позицій, а й реальні режими high-speed обробки: граничні прискорення/швидкості, вимоги до приводів, запас по вібраційній стійкості та реакцію на великі сили різання. Саме тому для машин інструментального класу потрібне порівняння РКМ-кандидатів за динамічними властивостями в робочому просторі, а не лише за кінематичними/геометричними метриками. У роботі Li et al. розглянуто 3-ступеня вільності РКМ із двома поступальними та одним обертальним ступенем вільності, де для нового гібридного верстата вводяться індекси, що вимірюють динамічні можливості у всій робочій області, з акцентом на high-speed.

Для маніпуляторів із одночасними поступальними та обертальними рухами важливою є проблема неоднорідності одиниць (м проти рад), через що “єдині” еліпсоїди/індекси можуть втрачати фізичну інтерпретованість. Тому у динамічному аналізі доцільно розділяти поступальні й обертальні величини.

Динамічна модель (одержана, зокрема, через лагранжевий формалізм) задається в інверсній формі для вектора приводних зусиль f_a (3×1) через вихідні прискорення платформи, зовнішні навантаження та нелінійні/гравітаційні складові. Для випадку 2T1R (дві поступальні координати $p=[y, z]^T$ та один кут θ) використовується представлення:

$$f_a = M_t(q)\ddot{p} + M_r(q)\ddot{\theta} + E_t(q)f_c + E_r(q)m_c + c(p', \theta') + g(q),$$

де $q=[y \ z \ \theta]^T$ f_c - зовнішня сила (Н), m_c - зовнішній момент (Н·м); M_t має розмірність кг (щоб $M_t\ddot{p} \rightarrow \text{Н}$), M_r — кг·м (щоб $M_r\ddot{\theta} \rightarrow \text{Н}$), E_t - безрозмірна, E_r м^{-1} ; c — нелінійні інерційні терміни, g — гравітація.

4.2.2 Активні індекси динамічної здатності

(а) Індекси здатності до прискорень. Ідея: оцінити типову величину приводних зусиль, необхідних для одиничних поступальних/обертальних

прискорень. На основі рядків матриць M_t та M_r вводяться локальні індекси:

$$k_{At}(q) = 1/3 \sum^3 \|M_{t,i}(q)\|, \quad k_{Ar}(q) = 1/3 \sum^3 \|M_{r,i}(q)\|$$

де $M_{t,i}$ - i -й рядок M_t , $M_{r,i}$ i -й рядок M_r . Фізичний зміст: чим менше k_{At} , k_{Ar} , - тим менші приводні зусилля потрібні для реалізації заданих p , θ у відповідній точці робочого простору.

Щоб перейти від локальної оцінки до глобальної (для ранжування кандидатів), використовують середнє та СКВ по робочій області Ω (із об'ємом мірою V_w):

$$k_{At} = 1/V_w \iiint_{\Omega} k_{At}(q) dV_w,$$

аналогічно для k_{Ar} . Інженерна інтерпретація: k характеризує "середній рівень вимог до приводу", а σ - нерівномірність динамічних властивостей (ризик "провалів" у підобластях).

(b) Індекси здатності до зовнішніх сил моментів. Оцінюється, наскільки "дорого" по приводних зусиллях компенсувати зовнішні навантаження різання:

$$k_{Et}(q) = 1/3 \sum^3 \|E_{t,i}(q)\|, \quad k_{Er}(q) = 1/3 \sum^3 \|E_{r,i}(q)\|$$

Менші значення означають кращу здатність переносити сили/момент різання при тих самих ресурсах приводів.

(c) Індекси "швидкісної" здатності (через нелінійні інерційні сили). Нелінійний термін $c(p, \theta)$ дає внесок, що зростає зі швидкістю. Вводяться індекси через коефіцієнти при p^2 та θ^2

$$k_{vt}(q) = 1/3 \sum^3 \|C_{t,i}(q)\|, \quad k_{vr}(q) = 1/3 \sum^3 \|C_{r,i}(q)\|$$

де C_t , C_r формуються з c (див. визначення в першоджерелі). Глобальні k_v^* , σ_v^* визначаються аналогічно.

(d) Оцінка максимального приводного зусилля для заданих обмежень режиму. Для прикладних вимог high-speed обробки (обмеження по максимальних прискореннях/швидкостях) можна оцінити необхідне максимальне приводне зусилля як:

$$f(q) = k_{At}(q)A_m + k_{Ar}(q)\alpha_m + k_{vt}(q)V_m^2 + k_{vr}(q)\omega_m^2 + k_G(q),$$

де A_m (m/c^2) і V_m (m/c) - поступальні межі; α_m ($рад/c^2$) і ω_m ($рад/c$) — кутові межі; k_G - гравітаційна складова. Це дає прямий “міст” до вибору приводів та до ранжування РКМ-кандидатів.

4.2.3 Пасивні індекси динамічної здатності

Окремо можуть застосовуватись індекси, що ґрунтуються на узагальненій інерційній матриці $M(q)$ платформи, записаній у блочній формі (2T1R):

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}$$

де M_{11} - 2×2 (поступальна частина), M_{22} - скаляр (обертальна), M_{12} - зв'язок “поступальний–обертальний”. Для цього вводяться локальні індекси: k_s , k_1 , k_2 , k_3 . Інтерпретація: k_s - “swiftness” (легкість генерування прискорень), k_1 - поступальна динамічна ізотропія (чим ближче до 1, тим менша залежність від напрямку), k_2 - обертальна swiftness, k_3 - зв'язок поступального та обертального рухів. Такі індекси називають пасивними, бо вони описують здатність структури без урахування граничних зусиль приводів; натомість “активні” індекси прямо пов'язують динаміку з приводними зусиллями.

Практичний алгоритм вибору РКМ-модуля (для turn-milling / hybrid turning–milling)

Задати робочу область Ω та множину цільових позицій інструмента ${}^W T_T(i)$ (позиція орієнтація, типові для turn-milling), узгоджених із кінематикою “РКМ-модуль + стіл”.

Для кожного кандидата РКМ: виконати ІК-розв'язання для всіх i до $q(i)$. Пози, де ІК не існує або багатозначний із переходами, позначити як непридатні (це стикується з “кінематичним аудитом”).

Для всіх $q(i)$ обчислити локальні індекси k_{A_i} , k_{L_i} , k_{E_i} , k_{V_i} , k_{V_r} та їх глобальні k і σ по Ω . Використовувати карти індексів (heat-maps) для виявлення “провалів” у робочій області: низькі значення/висока неоднорідність - ризик поганої керованості та перевантаження приводів.

Перейти до прикладної метрики під режими: за заданими (A_m, V_m, a_m, ω_m) оцінити $f(q)$ за і сформуванати агреговану цільову функцію типу.

$$F=f+\mu\sigma f,$$

де μ - вага "рівномірності" (висока μ доречна для high-mix виробництва, де робота йде по всій Ω).

Ранжувати РКМ-кандидати за F та додатковими обмеженнями (максимальні зусилля приводів, жорсткість, маса рухомих ланок, компоновочні обмеження). У прикладі порівняння двох 3-степені вільності РКМ показано вибір для 5- степені вільності гібридного верстата як кращого за лінійними динамічними можливостями та простішого в виготовленні збиранні.

(Опційно) Якщо структура передбачає противаги балансування, індекси можна використати для оптимізації мас противаг з метою мінімізувати f при заданих обмеженнях режимів; у демонстраційному кейсі зменшення необхідних приводних зусиль для заданих максимумів прискорення/швидкості становило близько 10% (база порівняння - не оптимізований варіант).

4.3. Чутливість точності до параметрів структури

4.3.1 Загальна форма моделі чутливості

Малі відхилення геометричних параметрів і малий кутовий дрейф: допускається лінеаризація першого порядку. Аналіз охоплює кінематичну (геометричну) складову похибки TCP; деформації від сил різання/терміки/люфтів - окремо (або як додаткові параметри δr у розширеній моделі). Порівняння структур коректне лише для однакової множини цільових положень Ω (типових для turn-milling) і узгоджених обмежень по ходах кутах.

Позначимо: x - вектор похибки TCP у просторі позицій (для 5 ступеней вільності: 5 компонент; для загального випадку зручно брати 6D-твіст)

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta \phi \end{bmatrix}, \delta \phi \text{ — малий кут (вектор).}$$

p - вектор структурних параметрів (геометрія ланок, базування шарнірів, положення повзунів, довжини стрижнів, довжина інструмента тощо).

Тоді в околі номінальної конфігурації:

$$\delta x \approx S(q) \delta p.$$

Щоб отримати S для механізмів із замикальними контурами: задається система рівнянь зв'язків (контурів).

$$F(x, q, p) = 0,$$

і виконується повне диференціювання:

$$\delta x \frac{\partial F}{\partial x} + \delta p \frac{\partial F}{\partial p} + \delta q \frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

Якщо у задачі оцінюємо чутливість саме до геометрії ($\delta q = 0$), маємо:

$$\delta x = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1} \delta p \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right).$$

Це формалізований вигляд того, що в прикладних роботах реалізують як "sensitivity matrix" для заданих позицій платформи чи головки та набору параметрів.

4.3.2 Принципи побудови моделі через векторні контурні рівняння

Для паралельного/серійно-паралельного модуля з трьома контурами (типовий підхід) для кожного контуру i задають векторний ланцюг замикання. В одній з канонічних постановок (машина з трьома паралельними "петлями") контур записують у векторній формі через положення повзуна/обертального шарніра R_i , базові/платформні точки та матрицю орієнтації R платформи; рівняння типу.

$$L_i = R b_i + p - R_i,$$

$p = [x_T, y_T, z_T]^T$ - положення платформи (або еквівалентне положення опорної точки головки),

b_i - координати відповідної точки платформи,

R - матриця орієнтації (залежить від кутів),

R_i - положення повзуна шарніра i -го контуру.

У матричному вигляді це приводять до системи компонентних рівнянь для L_i, R_i, p і елементів R (напр., через напрямні косинуси)

Лінеаризують кожне контурне рівняння за параметрами p та x (геометричні параметри, координати шарнірів, l_i , тощо).

Об'єднують лінеаризовані рівняння усіх контурів у блочну систему

$$A\delta x + B\delta p = 0.$$

Отримують $\delta x = -A^{-1}B\delta p$ тобто $S = -A^{-1}B$.

Інженерний сенс: матриця A карає наближення до сингулярностей погано обумовлених конфігурацій; саме тому чутливість різко зростає у поганих зонах робочого простору.

4.3.3 Критичні параметри, показники чутливості та перенесення на вибір ланцюга для токарної обробки

(а) Що зазвичай є критичним у 5-ступеневій вільності серійно-паралельній схемі. За результатами sensitivity-аналізу для серійно-паралельної 5-ступеневій вільності структури встановлено:

чутливість змінюється зі зміною орієнтації платформи;

параметри, пов'язані з Z -координатою, впливають сильніше, ніж X/Y ;

практично найчутливіші: позиціонування паралельних повзунів, номінальна довжина стрижнів l_i і довжина інструмента.

Це прямо перетворюється на критерії компоновки: “додавати DOF” слід лише разом із контролем найбільш важливих (геометрично підсилених) параметрів.

(б) Чому довжина інструмента майже завжди небезпечна

Для малих кутових похибок орієнтації $\delta\phi$ лінійне зміщення TCP включає крос-добуток із радіус-вектором від опорної точки головки до вершини інструмента:

$$\delta r_{TCP} \approx \delta r_0 + \delta\phi \times r_{tool}$$

Тому збільшення L_{tool} (виносу) пропорційно “підсилює” будь-які кутові похибки.

У моделях для 5-осьових конфігурацій із nutating-вузлом ефективна довжина інструмента L_t входить безпосередньо у form-shaping (НСТ) матрицю, тобто є структурним параметром у кінематичному ланцюзі - отже, й у sensitivity-аналізі вона закономірно стає критичною.

Інженерний перенос на вибір ланцюга під токарну/turn-milling задачу. Узгоджувати ступені вільності із чутливістю: додатковий nutating/ПКМ-модуль доцільний лише якщо κ_{\max} у потрібній Ω не зростає (або компенсується калібруванням/датчиками).

Мінімізувати винос: тримати L_{tool} мінімальним, бо він підсилює кутові похибки та Abbe-помилки (для кутових джерел похибок чутливість не можна оцінювати "просто", її потрібно рахувати з урахуванням Abbe-складової та довжини інструмента). Уникати зон високої чутливості повзунів: позиції повзунів кареток, що потрапляють у конфігурації з високим впливом Z-параметрів, підвищують похибку орієнтації.

Контроль l_i як критичного параметра: номінальні довжини стрижнів впливають на z_T та кути орієнтації, і їхній внесок змінюється з позою (тому потрібні або жорсткі допуски, або калібрування).

Проектувати "рівномірну" чутливість по Ω : не лише мінімум κ , а й відсутність різких піків (це практично знижує вимоги до локальної юстировки та стабілізує точність при переналагодженні).

Невизначеність обмеження. Лінеаризація першого порядку коректна для малих δr ; при великих відхиленнях потрібні Monte-Carlo/нелінійні оцінки. Показники κ_{\max} залежать від вибору Ω та ваг w_k ; їх треба задавати від реального циклу turn-milling.

Геометрична sensitivity не охоплює пружні деформації, терміку, знос і силові ефекти; для "жорсткісних" структур потрібне суміщення з еласто-кінематичною моделлю.

Таким чином можна представити інженерні рекомендації щодо вибору структури ланцюга залежно від пріоритетів: для модернізації існуючих токарних верстатів при жорстких обмеженнях по масі рухомих вузлів -

доцільні компактні 2R-вузли (nutating) за умови наявності надійного postprocessing; для високодинамічних токарно-фрезерних центрів - перспективні гібридні серійно-паралельні структури з попереднім аналізом робочої зони та динамічних індексів; для систем, орієнтованих на точність, - необхідно передбачати моделі геометричних похибок і процедури калібрування як складову частину впровадження додаткових DOF.

Напрями подальших досліджень: параметричний синтез і оптимізація конкретної обраної структури за критеріями робочої області, жорсткості, динаміки та чутливості; розширення моделі похибок (геометричні/кінематичні/термодеформації) та їх ідентифікація експериментом; розробка/валідація постпроцесора для обраної компоновки з тестовими траєкторіями turn-milling і перевіркою на реальному ЧПК-контурі.

ВИСНОВКИ

Обґрунтовано актуальність збільшення ступенів вільності інструмента в токарній обробці як необхідну умову для реалізації комбінованих технологій (зокрема turn-milling), де одночасно використовуються обертання заготовки та інструмента і комбінована подача, що потребує додаткових осей позиціонування та орієнтації.

Сформовано систему кінематичних вимог до розширеної токарної системи у вигляді цільової здатності відносного руху «інструмент–заготовка», де для більшості задач складного формоутворення достатньою є структура типу 3T+2R (просторове позиціонування точки інструмента та двокомпонентна орієнтація його осі).

Виконано структурний синтез і класифікацію типових кінематичних ланцюгів, що забезпечують збільшення ступеней вільності інструмента при токарній обробці шляхом серійного нарощування осей (додавання); компактні 2R-вузли (nutating-головка/стіл) як спосіб отримання двох орієнтаційних ступенів вільності без значного ускладнення компоновки; гібридні серійно-паралельні структури з паралельним модулем (ПКМ) для трансляцій та серійним (поворотним) підланцюгом для орієнтації; подання комбінованих токарно-фрезерних машин як двох взаємодіючих кінематичних ланцюгів (інструментального й заготовкового), що є коректним базисом для формалізованого аналізу та постпроцесингу.

Запропоновано підхід до побудови моделі кінематики на основі однорідних матриць перетворення (НСТ) і отримано узагальнену формулу відносного перетворення яка уніфікує опис серійних і гібридних структур та дозволяє виконувати прямі та обернені перетворення координат у єдиному алгоритмічному контурі.

Виявлено ключові обмежувальні фактори збільшення ступенів вільності через: зростання впливу геометричних похибок із ростом кількості ланок/пар; можливість появи сингулярностей і “поганих” конфігурацій у

компактних 2R-вузлах та РКМ-модулях; необхідність оцінювання чутливості кінцевої точки інструмента до параметрів структури, зокрема довжин ланок, офсетів та положень кареток/повзунів.

Розглянуто процедуру верифікації кінематичної працездатності, яка включає: формування множини цільових положень для turn-milling, перевірку існування розв'язків оберненої кінематики для кожного положення, аналіз робочої області та виявлення наближень до сингулярностей, що забезпечує інженерно коректний вибір структури до етапу детального проектування.

Досягнення мети роботи підтверджено тим, що узагальнено узгоджений набір: структурних рішень (ланцюгів), математичного апарату НСТ для опису відносного руху, алгоритмів постпроцесингу та (iv) методики верифікації, які разом забезпечують системне проектування кінематик із підвищеними ступенями вільності для токарної обробки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bi Z.M., Jin Y. Kinematic modeling of Exechon parallel kinematic machine // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. — 2011. — Vol. 27, Iss. 1. — P. 186–193. — doi:10.1016/j.rcim.2010.07.006.
2. Fan K.-C., Wang H., Zhao J.-W., Chang T.-H. Sensitivity analysis of the 3-PRS parallel kinematic spindle platform of a serial-parallel machine tool // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. — 2003. — Vol. 43, Iss. 15. — P. 1561–1569. — doi:10.1016/S0890-6955(03)00202-5.
3. Kanaan D., Wenger P., Chablat D. Kinematic analysis of a serial-parallel machine tool: the VERNE machine // *Mechanism and Machine Theory*. — 2009. — Vol. 44, Iss. 2. — P. 487–498. — doi:10.1016/j.mechmachtheory.2008.03.002.
4. Li Y., Wang J., Liu X.-J., Wang L.-P. Dynamic performance comparison and counterweight optimization of two 3-DOF parallel manipulators for a new hybrid machine tool // *Mechanism and Machine Theory*. — 2010. — Vol. 45, Iss. 11. — P. 1668–1680. — doi:10.1016/j.mechmachtheory.2010.06.009.
5. Li P., Zhao R., Luo L. A Geometric Accuracy Error Analysis Method for Turn-Milling Combined NC Machine Tool // *Symmetry*. — 2020. — Vol. 12, Iss. 10. — Art. 1622. — doi:10.3390/sym12101622.
6. Liu X.-J., Wang L.-P., Xie F., Bonev I.A. Design of a three-axis articulated tool head with parallel kinematics achieving desired motion/force transmission characteristics // *Journal of Manufacturing Science and Engineering (Trans. ASME)*. — 2010. — Vol. 132, No. 2. — Art. 021009 (8 p.). — doi:10.1115/1.4001244.
7. Peng F.-Y., Ma J.-Y., Wang W., Duan X.-Y., Sun P.-P., Yan R. Total differential methods based universal post processing algorithm considering geometric error for multi-axis NC machine tool // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. — 2013. — Vol. 70. — P. 53–62. — doi:10.1016/j.ijmachtools.2013.02.001.
8. Russo M., Zhang D., Liu X., Xie F. A review of parallel kinematic

machine tools: Design, modeling, and applications // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. — 2024. — Vol. 196. — Art. 104118. — doi:10.1016/j.ijmachtools.2024.104118.

9. She C.-H., Chang C.-C. Design of a generic five-axis postprocessor based on generalized kinematics model of machine tool // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. — 2007. — Vol. 47, Iss. 3–4. — P. 537–545. — doi:10.1016/j.ijmachtools.2006.06.002.

10. She C.-H., Chang C.-C. Development of a five-axis postprocessor system with a C-axis behind a B-axis nutating rotary head // *Journal of Materials Processing Technology*. — 2007. — Vol. 187–188. — P. 60–64. — doi:10.1016/j.jmatprotec.2006.11.101.

11. She C.-H., Hung H.-L. Development of multi-axis numerical control program for mill–turn machine tool // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*. — 2008. — Vol. 222, No. 6. — P. 741–745. — doi:10.1243/09544054JEM1098SC.

12. She C.-H., Huang Z.-T. Postprocessor development of a five-axis machine tool with nutating head and table configuration // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. — 2008. — Vol. 38. — P. 728–740. — doi:10.1007/s00170-007-1126-5.

13. Zhu L., Wang Y., Ma J., Luan X. An overview of turn-milling technology // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. — 2015. — Vol. 79. — P. 493–505. — doi:10.1007/s00170-015-7187-y.

14. Lai, Y.-L.; Liao, C.-C.; Chao, Z.-G. Inverse kinematics for a novel hybrid parallel–serial five-axis machine tool // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. — 2018. — Vol. 50. — P. 63–79. — doi: 10.1016/j.rcim.2017.09.002.

15. Yang, B.; Zhang, G.; Ran, Y.; Yu, H. Kinematic modeling and machining precision analysis of multi-axis CNC machine tools based on screw theory // *Mechanism and Machine Theory*. — 2019. — Vol. 140. — P. 538–552. — doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.06.021.