

Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет



Методи розв'язання інженерних задач

Методичні вказівки до самостійної роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Штучний інтелект та аналіз масивів даних» галузі знань 11 Математика і статистика спеціальності 113 «Прикладна математика» денної та заочної форм навчання

ЛУЦЬК 2026

УДК 517.53/.55

До друку

Голова вченої ради факультету архітектури, будівництва та дизайну
О. Андрійчук

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в
репозитарій ЛНТУ

Директор бібліотеки _____ Н.Поліщук

Рекомендовано до видання вченою радою факультету архітектури,
будівництва та дизайну ЛНТУ,

протокол № ____ від « ____ » _____ 2026 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри прикладної математики та
механіки

протокол № ____ від « ____ » _____ 2026 року.

Завідувач кафедри _____ О. Мікуліч

Укладач: _____ О. Бондарський, кандидат технічних наук, доцент
кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Рецензент: _____ О.Приходько, кандидат технічних наук, доцент
кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Відповідальний за випуск: _____ О. Мікуліч, доктор технічних
наук, завідувач кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Методи розв'язання інженерних задач: Методичні вказівки до
самостійної роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти освітньої програми «Штучний інтелект та аналіз масивів
даних» галузі знань 11 Математика і статистика спеціальності 113
«Прикладна математика» денної та заочної форм навчання / укладач
О. Бондарський. – Луцьк: ЛНТУ, 2026. – 24 с.

Методичні вказівки складено відповідно до діючої програми курсу
Методи розв'язання інженерних задач до самостійної роботи для
здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої
програми «Штучний інтелект та аналіз масивів даних» галузі знань 11
Математика і статистика спеціальності 113 «Прикладна математика»
денної та заочної форм навчання. Наведені мета, завдання, програма
навчальної дисципліни та матеріал для самостійного опрацювання.

©Бондарський О., 2026

1. Мета і завдання дисципліни «Методи розв'язання інженерних задач»

1.1. Мета вивчення дисципліни.

Як навчальна дисципліна «Методи розв'язання інженерних задач» забезпечує формування у студентів практичних навичок моделювання, формалізації та розв'язання інженерних задач за допомогою сучасних методів аналітичної, чисельної та штучно-інтелектуальної обробки даних.

1.2. Завдання вивчення дисципліни

Формування у студентів комплексного бачення про методи розв'язання інженерних задач, застосування математичного моделювання для вирішення реальних практичних задач, вивчення основних прийомів та методів, ознайомлення з необхідним програмним забезпеченням.

1.3. Найменування та опис компетентностей, формування яких забезпечує вивчення дисципліни

Інтегральна компетентність

Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов, в тому числі методів машинного навчання і штучного інтелекту та їх застосування до аналізу масивів великих даних.

Загальні

ЗК 1. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

ЗК 2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК 3. Здатність генерувати нові ідеї (креативність).

ЗК 5. Здатність проведення дослідження на відповідному рівні.

ЗК 6. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 8. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

Фахові компетентності спеціальності

ФК 1. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК 2. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК3. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

ФК 13. Здатність зрозуміти постановку завдання, сформульовану мовою певної предметної галузі, здійснювати пошук та збір необхідних вихідних даних.

ФК 14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, ґрунтуючись на постановку певної предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.

1.4. Передумови для вивчення дисципліни.

Базові знання:

- Рівняння математичної фізики;
- Диференціальні рівняння;
- Системи комп'ютерної математики.

1.5. Результати навчання.

Студент повинен опанувати та розширити свої вміння у межах наступних програмних результатів навчання.

ПРН 1. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.

ПРН 3. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.

ПРН 5. Уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми, пов'язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв'язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв'язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень.

ПРН 6. Володіти основними методами розробки дискретних і неперервних математичних моделей об'єктів та процесів, аналітичного дослідження цих моделей на предмет існування та єдиності їх розв'язку.

ПРН 8. Поєднувати методи математичного та комп'ютерного моделювання з неформальними процедурами експертного аналізу для пошуку оптимальних рішень.

ПРН 9. Будувати ефективні щодо точності обчислень, стійкості, швидкодії та витрат з системних ресурсів з алгоритми для чисельного дослідження математичних моделей та розв'язання практичних задач.

2. Програма навчальної дисципліни:

Змістовий модуль 1

Тема 1. Вступ до інженерних задач у контексті штучного інтелекту.

1.1. Класифікація інженерних задач: моделювання, прогнозування, оптимізації, ідентифікації.

1.2. Приклади типових інженерних задач

Тема 2. Роль штучного інтелекту у вирішенні інженерних задач

2.1. Автоматизація рутинних операцій

2.2. Прогнозування та моделювання

2.3. Оптимізація рішень. Алгоритми оптимізації.

2.4. Обробка великих обсягів даних.

2.5. Підвищення безпеки. Системи комп'ютерного зору.

2.6. Інноваційне проєктування.

2.7. Інтеграція в CAD/CAE системи.

Тема 3. Поняття інженерної постановки задачі.

3.1. Мета, вхідні дані, обмеження, умови експлуатації, критерії оцінки

3.2. Формування типу задачі.

3.3. Очікуваний формат даних.

3.4. Приклади постановки задачі в контексті штучного інтелекту.

Змістовий модуль 2

Тема 4. Зміст формалізації інженерної задачі.

4.1. Етапи формалізації.

4.2. Виділення змінних (вхідні, вихідні, допоміжні)

4.3. Вибір математичних залежностей або моделі.

4.4. Вибір способу розв'язання.

Тема 5. Аналітичні та числові методи.

5.1. Метод розділення змінних та його застосування

5.2. Метод перетворень Фур'є.

5.3. Метод перетворень Лапласа

5.4. Метод скінченних елементів

Тема 6. Статика – як платформа для демонстрації можливостей аналітичних методів.

6.1. Вибір типової інженерної задачі.

6.2. Перехід від фізичної системи до математичної моделі.

6.3. Використання аналітичних методів розв'язку.

6.4. Інтерпретація результатів з точки зору інженерії.

Застосування аналітичних методів для розв'язку інженерних задач

Покажемо деякі приклади задач зі статики для балки на двох опорах і оформимо їх як демонстрацію застосування аналітичних методів — з повним переходом від фізики до рівнянь і числового результату.

Балка на двох опорах на яку діє зосереджена сила

Аналітичний розв'язок

1. Фізична постановка задачі (реальний об'єкт)

Розглянемо балку перекриття, що спирається на дві опори (наприклад, елемент каркаса, настилу або платформи) (Рис.1).

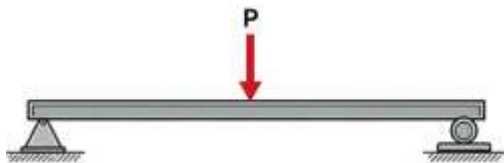


Рис.1. Зображення реального об'єкту - балки

Умова: довжина балки: $L = 6$ м. Балка спирається: ліворуч — шарнірно-нерухома опора (А), праворуч — шарнірно-рухома опора (В). У середині балки прикладена зосереджена сила $P = 12$ кН.

Інженерне запитання: які реакції опор виникають у точках А і В?

2. Схематизація. Будуємо механічну модель конструкції.

Реальний елемент замінюється ідеалізованою моделлю: балка є абсолютно жорстке тіло; опори - це геометричні в'язі; навантаженням є зосереджена сила.

Позначимо реакцію опори А як R_A ; реакцію опори В як R_B

Розрахункова схема балки зображена на рисунку 2.

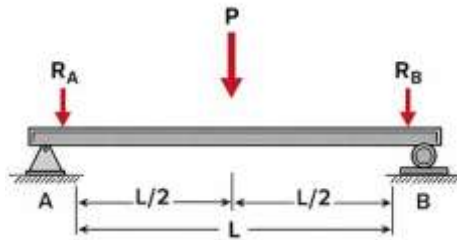


Рис. 2. Розрахункова схема балки

На цьому етапі продемонстроване фізичне моделювання — ключовий крок аналітичного підходу.

3. Аналітична модель.

Записуємо умови рівноваги. Балка перебуває у стані статичної рівноваги, тому виконуються рівняння:

1) Рівновага сил по вертикалі:

$$\sum F_y = 0;$$

$$R_A + R_B - P = 0.$$

2) Рівновага моментів. Беремо моменти відносно точки A (щоб позбутися R_A):

$$\sum M_A = 0;$$

$$R_B \cdot L - P \cdot \frac{L}{2} = 0.$$

4. Розв'язання системи рівнянь аналітичним методом.

Підставимо числові значення.

Рівняння моментів:

$$R_B \cdot 6 - 12 \cdot 3 = 0;$$

$$6R_B = 36;$$

$$R_B = 6 \text{ кН.}$$

Підставляємо R_B у рівняння сил:

$$R_A + 6 - 12 = 0$$

$$R_A = 6 \text{ кН}$$

5. Результат і його інженерна інтерпретація.

Отримано аналітичний результат:

$$R_A = R_B = 6 \text{ кН}$$

Фізичний зміст отриманих результатів полягає в наступному: навантаження розподілилося симетрично; кожна опора сприймає половину прикладеної сили.

Ці значення можуть бути використані для вибору типу опори, розрахунку фундаменту та для перевірки допустимих напружень.

6. Висновок.

Цей приклад чітко показує, що даний фізичний об'єкт може бути замінений на механічну модель яка може бути описана системою рівнянь рівноваги. Така система рівнянь має точний аналітичний розв'язок. Отриманий числовий результат використовують при прийнятті інженерних рішень. Саме так аналітичні методи дозволяють не "вгадувати", а строго обчислювати параметри конструкцій.

Алгоритм аналітичного розв'язку і його реалізація на Python

Покажемо той самий приклад вже не як розв'язану задачу, а як універсальний алгоритм аналітичного розрахунку який легко реалізується в Python.

Алгоритм аналітичного розрахунку балки на двох опорах на яку діє зосереджена сила.

Вхідні дані (параметризація задачі)

Алгоритм працює не для одного числа, а для будь-якої подібної задачі.

Прийmemo:

L — довжина балки,

P — величина сили,

a — відстань від лівої опори А до точки прикладання сили.

Для попереднього прикладу:

$$L = 6 \text{ м}, P = 12 \text{ кН}, a = 3 \text{ м}$$

Крок 1. Формалізація фізичних законів

Для балки у стані рівноваги:

1) Рівновага сил:

$$R_A + R_B = P$$

2) Рівновага моментів відносно точки А:

$$R_B \cdot L = P \cdot a$$

Це система аналітичних рівнянь, незалежна від конкретних чисел.

Крок 2. Аналітичне розв'язання у загальному вигляді.

Із рівняння моментів:

$$R_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

Із рівняння сил:

$$R_A = P - R_B = P \left(1 - \frac{a}{L}\right)$$

Як видно, аналітичний метод дає формули, а не лише відповідь для одного випадку.

Крок 3. Алгоритм (логічна схема)

1. Зчитати L, P, a

2. Обчислити $R_B = \frac{P \cdot a}{L}$

3. Обчислити $R_A = P - R_B$

4. Вивести результати

5. Перевірити умову рівноваги

Крок 4. Пряма реалізація алгоритму в Python

```
def beam_reactions(L, P, a):
    """
    Обчислює реакції опор балки
    L - довжина балки (м)
    P - зосереджена сила (кН)
    a - відстань від лівої опори до сили (м)
    """
    RB = P * a / L
    RA = P - RB
    return RA, RB
```

```
# Приклад використання
L = 6.0 # м
P = 12.0 # кН
a = 3.0 # м

RA, RB = beam_reactions(L, P, a)

print(f"Реакція опори A: {RA:.2f} кН")
print(f"Реакція опори B: {RB:.2f} кН")
```

Результат виконання:

```
Реакція опори A: 6.00 кН
Реакція опори B: 6.00 кН
```

Крок 5. Перевірка аналітичної коректності (інженерний контроль)

```
# перевірка рівноваги
print("ΣFy =", RA + RB - P)
```

Очікувано:

$$\Sigma F_y = 0$$

Цей приклад демонструє, що програма реалізує фізичні закони, а не просто рахує числа. Вона не замінює аналітику, а використовує її. Всі формули отримані до програмування. Змінивши a або P , ми миттєво аналізуємо нову конструкцію.

Балка з кількома зосередженими силами (Рис. 3)

Розширимо попередній підхід без втрати аналітичної строгості і покажемо, як задача з кількома силами природно перетворюється на алгоритм.

1. Фізична постановка

Маємо:

- балку довжиною L ;
- дві опори (A — зліва, B — справа);
- n зосереджених вертикальних сил P_i , прикладених у точках x_i від опори A.

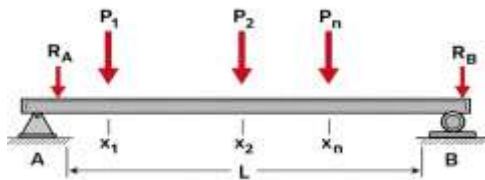


Рис.3. Балка з кількома зосередженими силами

Інженерна задача: знайти реакції опор R_A та R_B .

2. Аналітична модель (рівняння статички)

Для будь-якої кількості сил виконуються ті самі закони.

1) Рівновага сил по вертикалі

$$\sum F_y = 0;$$

$$R_A + R_B = \sum_{i=1}^n P_i$$

2) Рівновага моментів (відносно точки А)

$$\sum M_A = 0;$$

$$R_B \cdot L = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$

3. Узагальнений аналітичний розв'язок

Із моментного рівняння:

$$R_B = \frac{\sum P_i x_i}{L}$$

Із рівняння сил:

$$R_A = \sum P_i - R_B$$

Очевидно, що аналітичний метод не змінюється зі зростанням складності, змінюється лише кількість доданків у сумі.

4. Алгоритм розв'язку задачі

1. Задати L
2. Задати список сил P_i
3. Задати список координат x_i
4. Обчислити: $\sum P_i$, $\sum P_i x_i$
5. Знайти R_B
6. Знайти R_A
7. Перевірити рівновагу

5. Реалізація алгоритму в Python

```
def beam_reactions_multiple_forces(L, forces):  
    """  
    Розрахунок реакцій опор балки з кількома силами  
  
    L      - довжина балки (м)  
    forces - список кортежів (Pi, xi),  
             де Pi - сила (кН),  
             xi - відстань від лівої опори (м)  
    """  
  
    total_force = sum(P for P, x in forces)  
    total_moment = sum(P * x for P, x in forces)  
  
    RB = total_moment / L  
    RA = total_force - RB  
  
    return RA, RB
```

6. Приклад використання

Вхідні дані:

- $L = 6$ м
- Сили: $P_1 = 4$ кН, $x_1 = 1$ м
 $P_2 = 6$ кН, $x_2 = 3$ м
 $P_3 = 2$ кН, $x_3 = 5$ м

```

L = 6.0
forces = [
    (4.0, 1.0),
    (6.0, 3.0),
    (2.0, 5.0)
]

RA, RB = beam_reactions_multiple_forces(L, forces)

print(f"RA = {RA:.2f} кН")
print(f"RB = {RB:.2f} кН")

```

Перевірка фізичної коректності

```

total_force = sum(P for P, x in forces)
print(f"ΣFy =", RA + RB - total_force)

```

Результат:

```
ΣFy = 0.0
```

Балка на двох опорах на яку діють зосереджені сили та рівномірно розподілене навантаження (Рис. 4)

1. Фізичний зміст рівномірно розподіленого навантаження.

Рівномірно розподілене навантаження (РРН):

- позначається q ;
- одиниці: кН/м;
- діє по всій довжині балки або на її ділянці.

Фізично це:

- власна вага балки;
- настил, сніг, рівномірно розкладений вантаж.

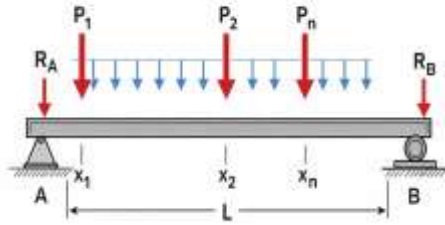


Рис. 4. Балка із зосередженими силами та рівномірно розподіленим навантаженням

2. Як РРН замінюється в статиці.

У статиці розподілене навантаження завжди замінюють еквівалентною зосередженою силою. Для навантаження по всій довжині L :

Еквівалентна сила:

$$Q = q \cdot L$$

Точка прикладання:

$$x_Q = \frac{L}{2}$$

3. Повна система навантажень.

Тепер на балку діють:

- зосереджені сили P_i у точках x_i ;
- одна еквівалентна сила Q від РРН.

4. Рівняння рівноваги (аналітично)

Сума сил:

$$R_A + R_B = \sum P_i + qL$$

Сума моментів відносно точки А:

$$R_B \cdot L = \sum P_i x_i + (qL) \cdot \frac{L}{2}$$

5. Узагальнені формули

$$R_B = \frac{\sum P_i x_i + qL \cdot \frac{L}{2}}{L}$$

$$R_A = \sum P_i + qL - R_B$$

6. Алгоритм

1. Обчислити суму зосереджених сил
2. Обчислити суму моментів від зосереджених сил
3. Обчислити еквівалентну силу від РРН
4. Додати її внесок у моменти
5. Знайти R_B , потім R_A

7. Реалізація в Python

```
def beam_reactions_with_udl(L, forces, q):
    """
    Балка на двох опорах з:
    - зосередженими силами Pi у точках xi
    - рівномірно розподіленим навантаженням q по всій довжині

    L      - довжина балки (м)
    forces - список (Pi, xi)
    q      - інтенсивність РРН (кН/м)
    """
```

```
# 1. Зосереджені сили
total_force = sum(P for P, x in forces)
total_moment = sum(P * x for P, x in forces)

# 2. Рівномірно розподілене навантаження
Q = q * L          # еквівалентна сила
x_Q = L / 2       # точка прикладання
moment_q = Q * x_Q

# 3. Реакції опор
RB = (total_moment + moment_q) / L
RA = total_force + Q - RB

return RA, RB
```

8. Приклад числового розрахунку

Вхідні дані:

- $L = 6$ м,
- $q = 2$ кН/м,
- $P_1 = 4$ кН, $x_1 = 1$ м,
- $P_2 = 6$ кН, $x_2 = 4$ м.

```
L = 6.0
q = 2.0

forces = [
    (4.0, 1.0),
    (6.0, 4.0)
]

RA, RB = beam_reactions_with_udl(L, forces, q)

print(f"RA = {RA:.2f} кН")
print(f"RB = {RB:.2f} кН")
```

Інженерна перевірка

```
print("ΣFy =", RA + RB - (sum(P for P, x in forces) + q * L))
```

Очікувано:

```
ΣFy = 0.0
```

Рівномірно розподілене навантаження в алгоритмі — це просто ще одна сила з відомим плечем. Аналітичні рівняння не змінюються, лише додається ще один доданок. Код напряду повторює формули зі статки.

Метод скінченних елементів (МСЕ)

Метод скінченних елементів — це спосіб розв'язувати задачі механіки, замінюючи суцільне тіло системою простих елементів і зводячи диференціальні рівняння до системи алгебраїчних рівнянь.

Яку проблему вирішує МСЕ?

У класичній механіці є диференціальні рівняння (балка, пластина, оболонка) і вони часто не мають простого аналітичного розв'язку для реальних умов.

МСЕ дозволяє отримати наближений розв'язок для складної геометрії, навантажень і граничних умов.

Основна ідея:

1. Розбити тіло на прості частини (скінченні елементи)
2. У середині кожного елемента приблизно описати деформацію
3. Зв'язати сили та переміщення аналітичними залежностями
4. Зібрати все в одну систему рівнянь
5. Розв'язати її чисельно

Що замінює МСЕ? В класичному підході маємо диференціальні рівняння, нескінчену кількість точок та точний розв'язок. В МСЕ маємо матричні рівняння, скінченну кількість вузлів та наближений але керований розв'язок.

Структура методу наступна:

1. Дискретизація

Тіло розглядають як сукупність елементів і вузлів.

2. Вибір моделі деформації

У кожному елементі деформації задаються функціями форми і залежать від вузлових переміщень.

3. Формування рівнянь елемента

Для кожного елемента отримують:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e$$

4. Збирання системи

Усі елементи «зшиваються»:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

5. Граничні умови

Задаються опори, закріплення та умови симетрії.

6. Розв'язання

Комп'ютер розв'язує систему рівнянь, знаходить переміщення. Потім знаходяться напруження, моменти та реакції.

5. МСЕ завдяки одному розрахунку дає можливість знайти прогини, напруження, моменти, реакції опор та складає картину напружено-деформованого стану.

6. Метод називається «скінченних елементів» бо кількість елементів кінцева, кількість рівнянь кінцева та точність контролюється кількістю елементів.

7. Зв'язок зі статикою і механікою.

МСЕ не суперечить класичній механіці, він її узагальнює і алгоритмізує. При грубій сітці отримуємо аналітичну статику, а при дрібній сітці - майже точний розв'язок.

8. МСЕ - це спосіб думати про конструкцію як про систему рівноваги, але в багатьох точках одночасно.

Застосування методу скінченних елементів (МСЕ) до балки на двох опорах з силами P_i і РРН q

1. Головна ідея МСЕ

Балку розбивають на короткі елементи, для кожного елемента записують рівняння рівноваги у матричній формі, а потім збирають їх у велику систему рівнянь. Це та ж сама статика, але не для всієї балки одразу, а для маленьких шматочків.

2. Що змінюється порівняно з аналітичним методом

В аналітичній статистиці балка приймається як одне ціле, складаються два рівняння та знаходяться реакції опор за допомогою ручного розрахунку. У МСЕ балка розбивається на багато елементів, складаються сотні рівнянь, знаходяться реакції, прогини та моменти за допомогою комп'ютерного розрахунку.

3. Кінематична модель балки (основа МСЕ)

Для плоскої балки у кожному вузлі є вертикальне переміщення w , кут повороту θ , та 2 ступені вільності на вузол.

4. Дискретизація (перший крок МСЕ)

Було: балка довжиною L

Стало: n елементів довжиною: $l_e = \frac{L}{n}$ та $n + 1$ вузол

5. Балковий скінченний елемент

Для одного елемента довжиною l_e , модулем пружності E , моментом інерції I – локальна матриця жорсткості має вигляд:

$$k_e = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

Це аналітичний результат який записаний у матричному вигляді.

6. Як у МСЕ враховується рівномірно розподілене навантаження
Для одного елемента з РРН q еквівалентний вузловий вектор сил:

$$f_e = \begin{bmatrix} ql_e/2 \\ ql_e^2/12 \\ ql_e/2 \\ -ql_e^2/12 \end{bmatrix}$$

Тобто РРН перетворюється у набір вузлових сил і моментів.

7. Зосереджена сили P_i якщо прикладена у вузлі то просто додається у глобальний вектор сил, а якщо між вузлами - розподіляється між двома сусідніми вузлами.

8. Глобальна система рівнянь після збирання всіх елементів має вигляд:

$$Ku = F$$

де:

K — глобальна матриця жорсткості,
 u — вектор переміщень і поворотів,
 F — вектор навантажень.

9. Задання граничних умов (опори А і В)

Для шарнірної опори:

$$w = 0 \\ \theta \text{— вільний}$$

Для роликової:

$$w = 0$$

θ — вільний

Це математичний аналог опор у статичі.

10. Результати МСЕ

Після розв'язання можна отримати:

- прогини $w(x)$
- кути повороту $\theta(x)$
- епюри моментів $M(x)$
- поперечні сили $Q(x)$
- опорні реакції (як побічний результат)

11. Зв'язок зі статикою

Якщо балка лінійна, навантаження статичні та елементів достатньо багато, то реакції опор з МСЕ рівні реакціям зі статички. Отже, МСЕ узагальнює статичний розрахунок.

12. Алгоритм МСЕ наступний

1. Розбити балку на елементи
2. Для кожного елемента:
 - сформувати k_e
 - сформувати f_e
3. Зібрати K і F
4. Задати граничні умови
5. Розв'язати $Ku = F$
6. Обчислити реакції, $M(x)$, $Q(x)$

ЛІТЕРАТУРА

Базова

1. Возняк Л.С., Шарин С.В. Чисельні методи: Методичний посібник для студентів природничих спеціальностей. – Івано-Франківськ: “Плай”, 2001, – 64 с.
2. Гончаров О.А., Васильєва Л.В., Юнда А.М. Чисельні методи розв'язання прикладних задач. Навчальний посібник. – Суми: Сумський державний університет, 2020. – 142 с.
3. Махней О.В. Лабораторний практикум з імітаційного моделювання у GPSS: Метод рекомендації до проведення лабораторних занять. – Ів.-Франківськ: 2020. – 40 с.

4. Мурашиний алгоритм [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Мурашиний алгоритм](https://uk.wikipedia.org/wiki/Мурашиний_алгоритм). 2021.
5. Яворський Н.Б., Андрущак Н.А. Моделювання дисперсійних співвідношень пористих композиційних матеріалів на підставі коміркових мікрорівневих структурних моделей. Науковий вісник НЛТУ України, 2020, 30(1), 142-151.
6. Bargmann, S., Klusemann, B., Markmann, J., Schnabel, J., et al. (2018). Generation of 3D representative volume elements for heterogeneous materials: A review. *Progress in Materials Science*, 96, 322–384.
7. Li, S., Lin, H., Meng, F., Moss, D., et al. (2018). On-Demand Design of Tunable Complete Photonic Band Gaps based on Bloch Mode Analysis. *Scientific Reports*, 8, 14283.
8. Segovia-Chaves, F., Vinck-Posada, H., & Navarro-Barón, E. (2019). Photonic band structure in a two-dimensional hexagonal lattice of equilateral triangles. *Physics Letters A*, 383(25), 3207–3213.
9. Zohd, T. (2018). 1Rapid Voxel-Based Digital-Computation for Complex Microstructured Media. *Arch. of Comp. Meth. in Eng.*, 1–16.

Допоміжна

1. Омаров М.А. Основи теоретичної механіки. Ч.1: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2018. – 184 с.
2. Пирогов В.В. Практикум з технічної механіки. Теоретична механіка: Навч. посібник. – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – 68 с.
3. Романюк О.Д. Теоретична та прикладна механіка: Навч. посібник. – Дніпро: ДДТУ, 2021. -283 с.
4. Черниш О.М. Теоретична механіка: Навч. посібник – Центр учбової літератури, 2022. – 760 с.
5. Цвіркун Л.О., Омельченко О.В. Теоретична механіка. Методичні рекомендації для вивчення дисципліни. – Кривий Ріг: Дон. НУЕТ, 2019. – 100 с.
6. Штанько П.К., Шевченко В.Г. та інші. Теоретична механіка: Навч. посібник. – Запоріжжя: НУ Запорізька політехніка, 2021, - 464 с.
7. Штефан Н.І., Гнатейко Н.В. та інші. Теоретична механіка: Конспект лекцій. Навч. посібник. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 143 с.
8. Янгулова О.Л. Теоретична механіка. Аналітична механіка: Навч. посібник. – Дніпро: Дніпров. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2019. – 75 с.
9. Alex Maas. Theoretical Mechanics. Lecture in WS 2016/17 at the KFU Graz. – 181 p.

10. Бондарський О.Г. Теоретична механіка. Кінематика. Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2022. – 17 с.

11. Бондарський О.Г. Теоретична механіка. Динаміка. Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2022. – 53 с.

Методи розв'язання інженерних задач: Методичні вказівки до самостійної роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Штучний інтелект та аналіз масивів даних» галузі знань 11 Математика та статистика спеціальності 113 «Прикладна математика» денної та заочної форм навчання / укладач О. Бондарський. – Луцьк: ЛНТУ, 2026. – 24 с.

Комп'ютерний набір
Редактор

О.Бондарський
О.Бондарський

Підп. до друку « » _____ 2026 р. Формат 60x84/16.Папір офс.
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 1,0.
Тираж 50 прим.

Відділ іміджу та промоцій
Луцького національного технічного університету
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – відділ іміджу та промоцій ЛНТУ