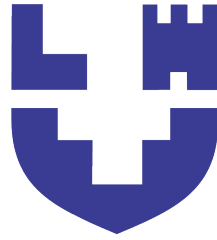


Міністерство освіти та науки України
Луцький національний технічний університет



ЕЛЕКТРОТЕХНІКА В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

Конспект лекцій

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
освітньої програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво
спеціальності G3 Електрична інженерія
денної та заочної форм навчання

ЛУЦЬК 2025

УДК 621.3.01(075)

E50

До друку

Голова вченої ради

факультету архітектури, будівництва та дизайну _____

О.В.Андрійчук

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозиторій ЛНТУ

Директор бібліотеки _____ Н.П. Поліщук

Затверджено вченою радою факультету архітектури, будівництва та дизайну ЛНТУ,

протокол № від « ____ » _____ 2025 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри електричної інженерії ЛНТУ, протокол № від « ____ » _____ 2025 року.

Завідувач кафедри електричної інженерії _____ Ю.В. Грицюк

Укладач: _____ А.В. Гадай, кандидат технічних наук, доцент кафедри електричної інженерії ЛНТУ

Рецензент: _____ В. І. Волинець, кандидат технічних наук, доцент кафедри електричної інженерії ЛНТУ

Відповідальний за випуск: _____ Ю.В. Грицюк, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри електричної інженерії ЛНТУ

E50 Електротехніка в електроенергетиці [Текст] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 6 Інженерія, виробництво та будівництво спеціальності 63 Електрична інженерія денної та заочної форм навчання / уклад. А.В. Гадай. Луцьк : ЛНТУ. 2025. 188 с.

Видання містить основні відомості про лінійні електричні кола із зосередженими та розподіленими параметрами, нелінійні електричні кола, перехідні процеси в колах постійної і змінної ЕРС.

Призначене для студентів спеціальності 63 Електрична інженерія денної та заочної форми навчання.

© А.В. Гадай, 2025

ЗМІСТ

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	7
1.1 Електричний струм, напруга, електрорушійна сила, потужність	7
1.2 Електричне коло, його елементи та заступна схема	7
1.3 Джерела електричної енергії	8
1.4 Пасивні елементи електричних кіл та їх рівняння. Закон Ома	10
1.5 Еквівалентні перетворення схем електричних кіл	11
1.6 Закони Кірхгофа	13
1.7 Електрична енергія та потужність	15
2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	17
2.1 Аналіз електричних кіл на основі законів Кірхгофа	17
2.2 Метод контурних струмів	18
2.3 Метод вузлових напруг	21
2.4 Метод еквівалентного генератора	25
2.5 Метод накладання	26
2.6 Баланс потужностей в електричному колі постійного струму	27
3 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА	29
3.1 Основні поняття та визначення	29
3.2 Характеристики та параметри нелінійних елементів	30
3.3 Методи аналізу нелінійних електричних кіл	33
3.4 Аналіз нелінійних електричних кіл постійного струму графічним методом	33
3.4.1 Послідовне з'єднання нелінійних елементів.	33
3.4.2 Паралельне з'єднання нелінійних елементів.	35
3.4.3 Змішане з'єднання нелінійних елементів.	35
3.4.4 Метод еквівалентного генератора.	36
3.4.5 Метод двох вузлів.	37
3.5 Аналіз нелінійних електричних кіл за дії синусоїдних джерел	38
3.5.1 Аналіз процесів у колі з вентилем за дії синусоїдної ЕРС.	38

3.5.2 Електромагнітні процеси в нелінійній котушці індуктивності за дії синусоїдної ЕРС.	40
3.6 Числові методи розрахунку нелінійних електричних кіл	41
3.7 Апроксимація нелінійних характеристик	43
4 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	46
4.1 Основні поняття та визначення	46
4.2 Діюче значення синусоїдного струму, ЕРС, напруги	47
4.3 Зображення синусоїдної величини на комплексній площині	48
4.4 Пасивні елементи в електричному колі синусоїдного струму	50
4.5 Комплексний опір та комплексна провідність. Закон Ома в комплексній формі	55
4.6 Потужності та баланс потужностей у колі синусоїдного струму	57
4.7 Символічний метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму	61
4.7.1 Суть символічного методу.	61
4.7.2 Закони Кірхгофа в комплексній формі.	61
4.8 Резонансні явища в електричному колі синусоїдного струму	63
4.8.1 Резонанс напруг.	63
4.8.2 Резонанс струмів.	67
4.9 Електричні кола із взаємоіндуктивними зв'язками	69
5 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ	73
5.1 Загальна характеристика чотиріполіусників	73
5.2 Рівняння прохідних пасивних чотиріполіусників	74
5.3 Визначення коефіцієнтів чотиріполіусника	79
5.4 Характеристичні параметри чотиріполіусника	80
5.5 Заступні схеми взаємних чотиріполіусників	83
5.6 Рівняння симетричного чотиріполіусника в гіперболічній формі	86
5.7 Способи з'єднання чотиріполіусників	87
5.8 Рівняння активних автономних чотиріполіусників	89
6 ТРИФАЗНІ КОЛА	92

6.1 Основні поняття та визначення	92
6.2 Способи з'єднання фаз у трифазних колах	95
6.3 Розрахунок трифазних кіл	98
6.3.1 З'єднання “зірка – зірка”.	98
6.3.2 З'єднання “трикутник – трикутник”.	101
6.4 Потужності у трифазних колах	103
6.5 Вимірювання потужності у трифазних колах	105
6.6 Метод симетричних складових	107
6.6.1 Основні поняття та визначення.	107
6.6.2 Опори елементів трифазних кіл для струмів різних послідовностей.	108
6.6.3 Розрахунок трифазних кіл методом симетричних складових.	109
6.6.4 Потужності трифазних кіл, виражені через симетричні складові.	113
7 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	114
7.1 Основні поняття та визначення	114
7.2 Діюче та середнє значення періодичного несинусоїдного струму. Коефіцієнти форми кривих	117
7.3 Потужності в колі періодичного несинусоїдного струму	119
7.4 Аналіз лінійних електричних кіл несинусоїдного струму	122
7.5 Параметри елементів електричного кола при несинусоїдних струмах.	123
7.6 Резонансні явища в колах несинусоїдного струму	124
8 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	125
8.1 Основні поняття та визначення	125
8.2 Закони комутації	126
8.3 Початкові умови	127
8.4 Класичний метод розрахунку перехідних процесів	128
8.4.1 Суть класичного методу.	128
8.4.2 Характеристичне рівняння.	129
8.4.3 Алгоритм розрахунку перехідних процесів класичним методом.	130
8.5 Перехідні процеси в простих електричних колах	137

8.5.1	Вмикання котушки індуктивності на постійну напругу	137
8.5.2	Вмикання котушки індуктивності на синусоїдну напругу $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.	139
8.5.3	Вмикання конденсатора на постійну напругу	141
8.5.4	Вмикання конденсатора на синусоїдну напругу.	142
8.5.5	Розряд конденсатора на резистор.	143
8.5.6	Аперіодичний розряд конденсатора колі з послідовно з'єднаною котушкою індуктивності.	145
8.5.7	Періодичний розряд конденсатора.	147
8.6	Операторний метод розрахунку перехідних процесів	148
8.6.1	Суть операторного методу.	148
8.6.2	Основні властивості перетворення Лапласа.	150
8.6.3	Операторні заступні схеми.	151
8.6.4	Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі.	153
8.6.5	Перехід від зображень до оригіналу. Теорема розкладу.	155
8.7	Перехідні процеси під час вмикання кола на напругу довільної форми	156
8.7.1	Вступні зауваження.	156
8.7.2	Перехідні функції.	157
8.7.3	Інтеграл Дюамеля.	158
9	ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	161
9.1	Первинні параметри та диференціальні рівняння однорідної лінії	161
9.2	Рівняння однорідної лінії в комплексній формі. Вторинні параметри	164
9.3	Лінія як чотириполюсник	167
9.4	Вхідний опір однорідної лінії	169
9.5	Біжучі хвилі в лінії та коефіцієнт відбиття хвилі	170
9.6	Довжина хвилі в лінії та фазова швидкість	173
9.7	Однорідна лінія в режимі узгодженого навантаження	174
9.8	Лінія без спотворень та лінія без втрат	177
9.9	Стоячі хвилі в лінії	179
9.10	Вмикання лінії на постійну напругу	182

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

1.1 Електричний струм, напруга, електрорушійна сила

Електричним струмом називається спрямований рух носіїв електричних зарядів.

Для кількісної характеристики електричного струму вводять поняття **сили струму**, якою називають фізичну величину, що дорівнює кількості електричних зарядів, які проходять через поперечний переріз провідника за одиницю часу. Одиницею сили струму слугує **ампер** (скорочено – А). Струм в один ампер – це такий струм, за якого за одну секунду через поперечний переріз провідника проходить електричний заряд величиною один кулон.

Обмежуючись явищем спрямованого руху заряджених частинок, можемо визначити силу електричного струму як границю, до якої прямує відношення кількості електричних зарядів Δq , які переносять заряджені частинки через поверхню Δs за час Δt , якщо останній прямує до нуля, тобто

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (1.1)$$

ЕРС є сторонньою силою, що зумовлює рух зарядів. Джерелом ЕРС можуть бути: гальванічний елемент, акумуляторна батарея, електричний генератор, термоелемент тощо. ЕРС та напругу вимірюють у вольтах (скорочено – В).

1.2 Електричне коло, його елементи та заступна схема

Електричне коло – це сукупність електротехнічних пристроїв, з'єднаних між собою провідниками. Окремі пристрої, що входять до електричного кола, називають його елементами.

Заступна схема – це умовне графічне зображення електричного кола за допомогою ідеальних елементів, параметри яких відповідають параметрам заміщуваних реальних елементів.

Електричне коло складається з віток. **Вітка** – це частина електричного кола, в якій елементи з'єднані послідовно (протікає один і той же струм). Вітку своїми кінцями (полюсами) під'єднують до вузлів. **Вузол** – це точка електричного кола, в якій з'єднані не менше ніж три вітки. На заступній схемі електричного кола вказують додатні напрями ЕРС, струмів та напруг. ЕРС на схемі позначається кружечком зі стрілкою, спрямованою до вищого потенціалу. Додатні напрямки струмів в електричних колах вибирають умовно (довільно). І якщо в результаті розрахунку одержимо від'ємне значення струму у деякій вітці, це означає, що дійсний його напрямок протилежний до вибраного.

Лінійні елементи мають лінійні характеристики (вольт-амперні, кулон-вольтні, вебер-амперні). Якщо характеристика елемента нелінійна, він називається **нелінійним**.

Частина електричного кола довільної конфігурації з двома виділеними затискачами, які називають **полюсами**, називається **двополюсником**. Кожна вітка має два затискачі (полюси) і її можна розглядати як двополюсник. Найпростіший двополюсник складається з одного елемента. Однак існують і багатополіусні елементи (наприклад, транзистор, трансформатор тощо), які мають три і більше полюсів. Двополюсники, до яких входять джерела електричної енергії, називаються **активними**, а ті, до яких вони не входять, – **пасивними**.

1.3 Джерела електричної енергії

Джерело електричної енергії на заступній схемі можна подати як джерело ЕРС або як джерело струму (ДС).

Якщо внутрішнім опором джерела енергії можна знехтувати, його подають у вигляді ідеального джерела ЕРС. Заступні схеми та вольт-амперні характеристики реального (а, б) та ідеального (в, г) джерел ЕРС наведені на рис. 1.1.

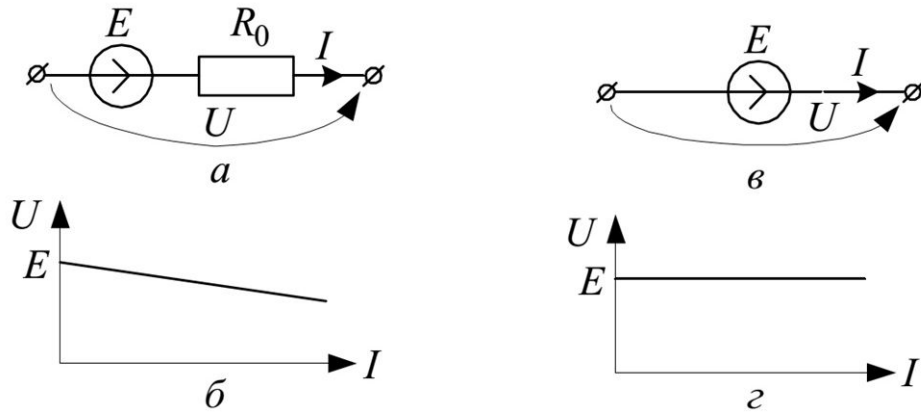


Рисунок 1.1

Напруга на затискачах реального джерела відрізняється від його ЕРС на величину спаду напруги всередині джерела.

$$U = E - R_0 I, \text{ або } E = U + R_0 I, \quad (1.2)$$

де R_0 – внутрішній опір джерела. Для ідеального ($R_0 = 0$) джерела $U = E$.

Реальне ДС зображають заступною схемою, до якої входить ідеальне ДС з паралельно увімкненим резистивним елементом (рис. 1.2, а). Ідеальне ДС має внутрішній опір $R_0 = \infty$. Надалі струм ДС позначатимемо J .

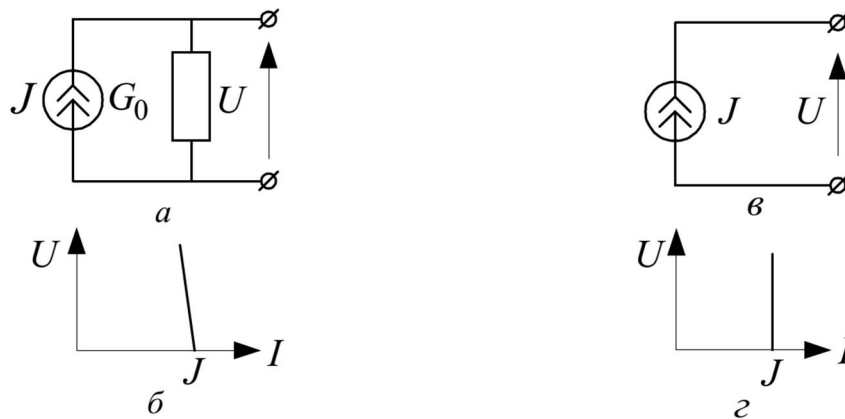


Рисунок 1.2

Реальне джерело ЕРС можна замінити реальним ДС і навпаки. Зокрема, розділивши рівняння (1.2) на R_0 , отримаємо

$$\frac{E}{R_0} = \frac{U}{R_0} + I = G_0 U + I, \quad (1.3)$$

або

$$J = \frac{E}{R_0} = G_0 U + I. \quad (1.4)$$

Рівнянню $U + I$. (1.4) відповідає заступна схема реального джерела струму, зображена на рис. 1.2,а, а його вольт-амперна характеристика – на рис. 1.2,б.

Заступна схема ідеального ДС наведена на рис. 1.2,в, а його вольт-амперна характеристика – на рис. 1.2,г.

Формули (1.3), $U + I$. (1.4) дають змогу замінити реальне джерело ЕРС реальним ДС і навпаки. Прикладом ДС може бути електронний підсилювач, внутрішній опір якого значно більший від опору навантаження, вимірювальний трансформатор струму тощо.

1.4 Пасивні елементи електричних кіл та їх рівняння. Закон Ома

Пасивними елементами електричного кола є резистивні, індуктивні та ємнісні елементи. У резисторі відбувається перетворення електромагнітної енергії в теплову. Він характеризується параметром R , який називають активним опором. Зв'язок між напругою u_R та струмом i резистора (рис. 1.3) визначається законом Ома

$$u_R = Ri. \quad (1.5)$$

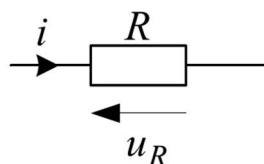


Рисунок 1.3

Величина індуктивності котушки залежить від конструктивного виконання і магнітної проникності середовища, по якому замикається магнітний потік. Одиниця вимірювання індуктивності – генрі (скорочено – Гн).

Заступна схема котушки складається з двох послідовно з'єднаних елементів (рис. 1.4), тому напругу на ній можна розглядати як суму напруг u_R та u_L , перша з яких визначається рівнянням (1.5).

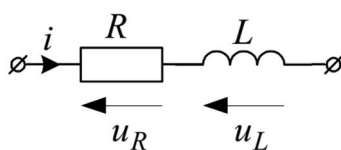


Рисунок 1.4

Напруга на ідеальній ($R = 0$) котушці індуктивності

$$u_L = L \frac{di}{dt}. \quad (1.6)$$

Ємнісний елемент характеризується параметром C , яким позначають величину ємності конденсатора. Величина ємності конденсатора залежить від геометричних розмірів і діелектричної проникності середовища. Одиниця вимірювання ємності – фарада (скорочено – Φ).

В реальних конденсаторах через недосконалість ізоляційного матеріалу завжди протікають струми витoku, наявність яких можна врахувати вмиканням паралельно до C резистивного опору з провідністю G (рис. 1.5), однак цей струм здебільшого настільки малий, що ним можна знехтувати і вважати конденсатор ідеальним елементом.

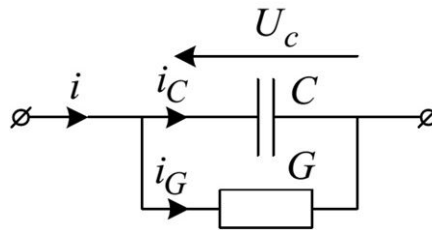


Рисунок 1.5

Рівняння ідеального конденсатора ємністю C

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.7)$$

Звідси одержимо рівняння ідеального конденсатора у вигляді

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt. \quad (1.8)$$

1.5 Еквівалентні перетворення схем електричних кіл

У багатьох випадках розрахунок і аналіз складних електричних кіл можна істотно спростити за допомогою перетворення, суть якого полягає у зміні їхньої структури. Еквівалентним називається перетворення схеми електричного кола, за якого зміна структури перетворюваної частини схеми не

впливає на зміну струмів та напруг у не перетвореній частині електричної схеми.

Послідовно з'єднані пасивні елементарні двополюсники можна замінити одним еквівалентним, опір якого дорівнює сумі опорів окремих двополюсників.

$$R_e = \sum R_k. \quad (1.9)$$

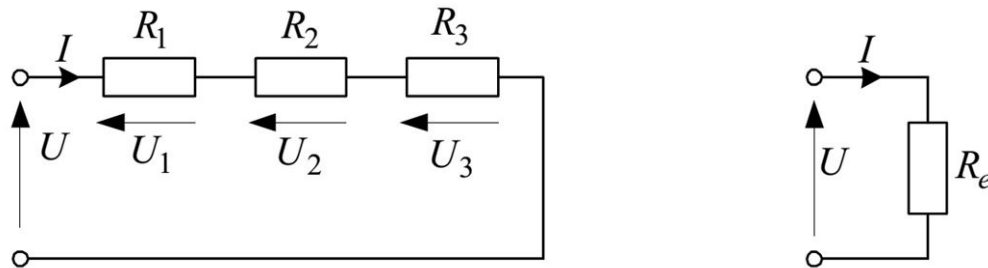


Рисунок 1.6

Розглянемо паралельне з'єднання пасивних двополюсників (рис. 1.7).

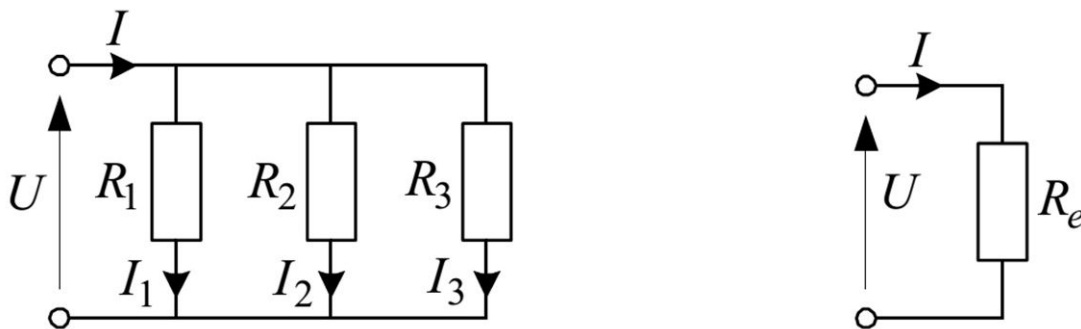


Рисунок 1.7

G_e – еквівалентна провідність, яка у разі паралельного з'єднання n елементів двополюсників визначається за формулою

$$G_e = \sum G_k, \text{ де } G_k = \frac{1}{R_k}. \quad (1.10)$$

У складних колах можуть бути з'єднання двополюсників, які не можна зарахувати ні до послідовного, ні до паралельного. Це з'єднання зіркою та трикутником (рис. 1.8).

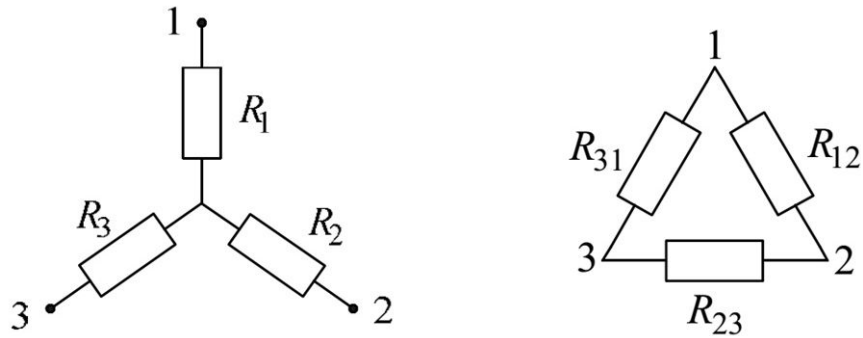


Рисунок 1.8

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3};$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1};$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2};$$

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (1.11)$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

$$R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

1.6 Закони Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа: *алгебрична сума струмів віток, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю.* Інакше кажучи, сума струмів, спрямованих до вузла, дорівнює сумі струмів, спрямованих від вузла. Математичний запис першого закону Кірхгофа має вигляд

$$\sum i_k = 0, \quad (1.12)$$

де i_k – струм k -ї вітки, зокрема і струм ДС.

Для зображеного на рис. 1.9 вузла перший закон Кірхгофа має вигляд

$$-i_1 + i_2 + i_3 - J = 0.$$

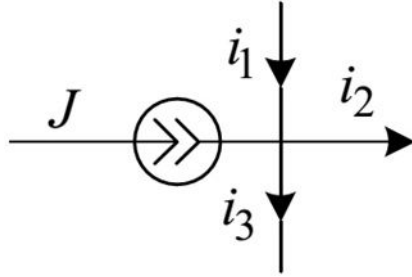


Рисунок 1.9

Оскільки під час розрахунку складних електричних кіл дійсні напрямки струмів у вітках здебільшого не відомі, то для складання рівнянь Кірхгофа необхідно задатись (довільно) додатними напрямками струмів у вітках, позначивши їх на схемі стрілками.

Другий закон Кірхгофа: у замкненому контурі алгебрична сума спадів напруг на всіх пасивних елементах дорівнює алгебричній сумі ЕРС джерел. Інакше кажучи, у замкненому контурі алгебрична сума напруг і ЕРС дорівнює нулю. Ці два формулювання можна відобразити математично у вигляді рівнянь

$$\sum u_k = \sum e_k, \text{ або } \sum i_k R_k = \sum e_k \quad (1.13)$$

$$\sum u_k, e_k = 0. \quad (1.14)$$

Під час складання рівнянь за другим законом Кірхгофа необхідно правильно визначати знаки спадів напруг та ЕРС. Напрями обходу контурів вибирають довільно. Користуючись формою (1.13) запису рівнянь за другим законом Кірхгофа, перед спадом напруги u_k ставимо знак плюс, якщо напрямок обходу контуру збігається з вибраним додатним напрямком струму в цьому елементі, і – мінус, якщо ці напрямки протилежні. Під час використання форми (1.14) запису рівнянь за другим законом Кірхгофа доцільно попередньо на кожному елементі позначити стрілкою додатні напрямки спадів напруг, які рекомендується вибирати протилежними до вибраного додатного спрямування струму, як показано на рис. 1.3-1.5.

Зазначимо, що у деяких підручниках застосовують і інше додатне спрямування спаду напруги, яке збігається з умовним додатним напрямком струму. Від цього система рівнянь, складених за законами Кірхгофа, не залежить, а інший підхід до вибору додатного спрямування спаду напруги на елементах зумовлює відмінний від описаного вище підхід до правил визначення знаків у складених за другим законом Кірхгофа рівняннях.

Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа, необхідно стежити за тим, щоб вибрані контури були *незалежними*. Контури будуть незалежними, якщо до кожного утвореного нового контуру входить хоча б одна вітка, яка не увійшла до вже утворених контурів. Вітки з ДС контурів не утворюють. Це означає, що під час утворення незалежних контурів необхідно вважати ці вітки розімкненими.

Задача розрахунку складного електричного кола полягає у визначенні невідомих струмів у вітках за заданих величин ЕРС та ДС. Отже, кількість рівнянь, складених за законами Кірхгофа, повинна дорівнювати кількості віток, крім віток з ДС, струми яких відомі. За першим законом Кірхгофа складають

$$n_1 = q - 1 \text{ рівнянь,} \quad (1.15)$$

де q – кількість вузлів схеми.

Решту рівнянь складають за другим законом Кірхгофа. Якщо до електричного кола входить p віток (до них не входять вітки з ДС), то кількість рівнянь, складених за другим законом Кірхгофа,

$$n_2 = p - n_1 = p - q + 1. \quad (1.16)$$

1.7 Електрична енергія та потужність

Енергію, яка пересилається від джерела до двополюсника, обчислюють за формулою

$$W = \int p dt, \quad (1.17)$$

де p – миттєве значення потужності, яка в кожний момент часу t пропорційна до миттєвих значень напруги $u(t)$ та струму $i(t)$

$$p(t) = u(t)i(t). \quad (1.18)$$

$$p = \frac{dW}{dt} = ui. \quad (1.19)$$

Миттєва потужність p додатна в момент часу, коли u та i мають однакові знаки, і від'ємна, коли ці знаки різні. Якщо для деякого споживача $p > 0$, енергія надходить до нього, а якщо $p < 0$, вона повертається до джерела.

Електрична енергія, яку споживає резистор з опором R , визначається за формулою

$$W_R = \int_0^t R i^2 dt. \quad (1.20)$$

Індуктивний та ємнісний елементи енергії не споживають, а лише її накопичують у вигляді енергії магнітного та електричного полів. Тому котушку індуктивності та конденсатор називають **реактивними** елементами. Енергію ідеальної котушки індуктивності з параметром L , по якій протікає струм i , та конденсатора ємністю C , до якого прикладена напруга u , можна визначити відповідно за формулами

$$W_L = \frac{Li^2}{2};$$

$$W_C = \frac{Cu^2}{2}.$$

2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

2.1 Аналіз електричних кіл на основі законів Кірхгофа

Режим роботи електричного кола будь-якої складності повністю описується системою рівнянь, складених на підставі першого (1.12)

$$\sum i_k = 0$$

та другого (1.13)

$$\sum u_k = \sum e_k$$

законів Кірхгофа. Математичний запис цих рівнянь для електричного кола постійного струму має вигляд

$$\sum I_k J_k = 0; \quad (2.1)$$

$$\sum R_k I_k = \sum E_k. \quad (2.2)$$

Для складання рівнянь Кірхгофа рекомендується дотримуватись такої послідовності:

- 1) довільно задатись додатними напрямками струмів у всіх вітках;
- 2) вибрати незалежні контури, утворюючи замкнені шляхи з віток електричного кола так, щоб кожен наступний контур відрізнявся від попереднього хоча б однією віткою;
- 3) довільно задатись напрямком обходу кожного незалежного контуру.

Відзначимо, що до утворених незалежних контурів не можуть входити вітки з ДС.

Приклад 2.1. Розглянемо зображене на рис. 2.1 електричне коло, яке має чотири вузли і сім віток, з яких одна із ДС, тобто $q = 4$, $p = 6$. Отже, для цієї схеми необхідно скласти $n_1 = q - 1 = 3$ рівняння за першим законом Кірхгофа та $n_2 = p - q + 1 = 3$ рівняння – за другим. Струм у вітці з ДС відомий.

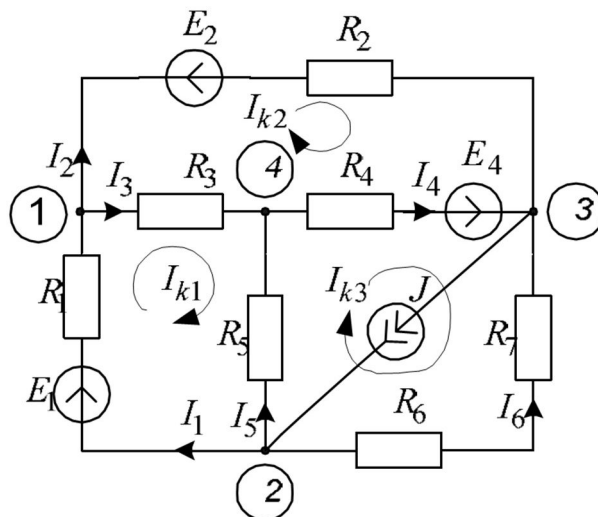


Рисунок 2.1

Повна система рівнянь, складених за першим та другим законами Кірхгофа за зображених на рисунку додатних напрямків струмів має вигляд

$$I_2 + I_3 - I_1 = 0;$$

$$I_1 + I_5 + I_6 - J = 0;$$

$$-I_2 - I_4 - I_6 + J = 0;$$

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_5 I_5 = E_1;$$

$$R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_3 I_3 = -E_2 - E_4;$$

$$R_4 I_4 - (R_6 + R_7) I_6 + R_5 I_5 = E_4.$$

2.2 Метод контурних струмів

Одним із методів, що дають змогу зменшити обсяг обчислень під час розв'язування задачі розрахунку струмів у вітках кола, є **метод контурних струмів**, який ґрунтується на другому законі Кірхгофа і принципі суперпозиції. Згідно з цим методом вважають, що у кожному контурі протікає свій контурний струм, напрям якого вибирають довільно. **Контурні струми** – це розрахункові величини, через які можна визначити реальні струми у вітках. Система рівнянь, у якій невідомими є контурні струми, складається для незалежних контурів, а отже, має порядок $n = n_2$, тобто такий, як за другим законом Кірхгофа.

Складаючи рівняння за методом контурних струмів, необхідно застосовувати під час обходу контуру ті самі правила вибору знаків спадів напруг, що і під час складання рівнянь за другим законом Кірхгофа. Система складених за методом контурних струмів рівнянь має вигляд

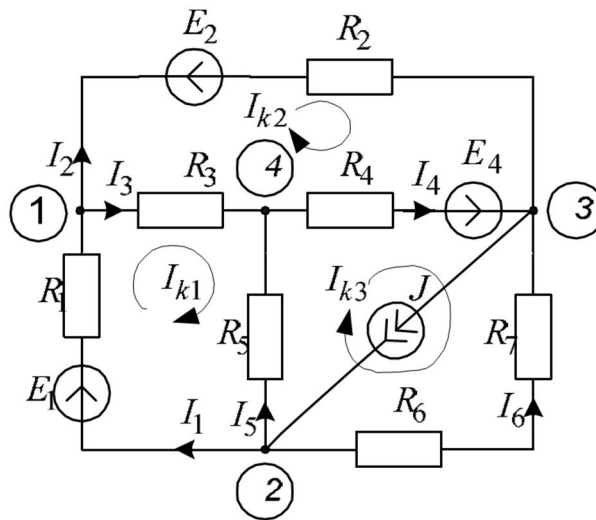
$$\begin{aligned}
 R_{11} I_{k1} - R_{12} I_{k2} - \dots - R_{1n} I_{kn} &= E_{11}; \\
 -R_{12} I_{k1} - R_{22} I_{k2} - \dots - R_{2n} I_{kn} &= E_{22}; \\
 -R_{n1} I_{k1} - R_{n2} I_{k2} - \dots + R_{nn} I_{kn} &= E_{kk}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

де R_{kk} – сума опорів усіх елементів, що входять до k -контуру, яку називають власним опором k - контуру; $R_{km} = R_{mk}$ – сума опорів елементів, що є спільними для k -го і m -го контурів, яку називають взаємними опорами цих контурів; E_{kk} – алгебрична сума всіх ЕРС контуру, які беруть зі знаком плюс, якщо вони збігаються з напрямком обходу контуру, і зі знаком мінус, якщо протилежні до нього.

Якщо напрямки усіх контурних струмів вибрані однотипно (за годинниковою стрілкою або проти), в системі рівнянь (2.3) перед власними опорами ставимо знак “плюс”, а перед взаємними – “мінус”. Якщо цього правила не дотримуватись, то необхідно ставити знак “+”, якщо в даній вітці напрямок контурного струму суміжного контуру збігається з напрямком власного контурного струму, і “–”, якщо він протилежний до нього. Струм ДС розглядається як відомий контурний струм, для якого необхідно вибрати замкнений шлях (через будь-які вітки).

Для визначення реальних струмів у вітках необхідно довільно задатись (як і під час складання рівнянь за законами Кірхгофа) додатними їх напрямками. Реальний струм у вітці схеми знаходять як алгебричну суму контурних струмів, які протікають через дану вітку, враховуючи струм ДС. Якщо напрямок контурного струму збігається з додатним напрямком струму у вітці, то перед ним ставиться знак плюс, а якщо протилежний до нього, то – мінус.

Приклад 2.2. Розглянемо те саме електричне коло (рис. 2.1), для якого вище були складені рівняння за законами Кірхгофа.



Для цього вважатимемо, що в кожному з вибраних під час записування рівнянь за другим законом Кірхгофа контурі протікає свій контурний струм, а струм ДС замикається через вітку з резисторами R_6 та R_7 . Зауважимо, що для замикання струму ДС можна було обрати і інший шлях, наприклад, через R_4 та R_5 . Додатні напрямки контурних струмів приймемо такі, як показано на рисунку, тобто за годинниковою стрілкою. Система рівнянь, складена за методом контурних струмів для схеми рис. 2.1, має вигляд

$$(R_1 + R_3 + R_5)I_{k1} - R_3I_{k2} - R_5I_{k3} = E_1;$$

$$(R_2 + R_3 + R_4)I_{k2} - R_3I_{k1} - R_4I_{k3} = -E_2 - E_4; \quad (2.4)$$

$$(R_4 + R_5 + R_6 + R_7)I_{k3} - R_5I_{k1} - R_4I_{k2} = E_4 + (R_6 + R_7)J.$$

З системи лінійних рівнянь (2.4), знаходимо контурні струми I_{k1} , I_{k2} , I_{k3} . Струми у вітках виражаємо через контурні струми, враховуючи струм ДС, за формулами

$$I_1 = I_{k1}; \quad I_2 = I_{k2}; \quad I_3 = I_{k1} - I_{k2};$$

$$I_4 = -I_{k2} + I_{k3}; \quad I_5 = I_{k1} - I_{k3}; \quad (2.5)$$

$$I_6 = -I_{k3} + J.$$

2.3 Метод вузлових напруг

Струм у вітці кола визначається різницею потенціалів між вузлами, до яких вона під'єднана, і не залежить від абсолютного значення потенціалів вузлів. Тому для визначення різниць потенціалів між вузлами схеми можна довільно задатись значенням потенціалу одного вузла і за цієї умови знайти потенціали решти вузлів. Як правило вважають, що потенціал одного вузла дорівнює нулю. Цей вузол називають **базовим**. Його прийнято позначати індексом "0". Напруги між рештою $q - 1$ вузлів електричного кола і базовим називають **вузловими**. Для їх знаходження необхідно скласти систему рівнянь, порядок якої буде на одиницю менший від кількості вузлів. Метод розрахунку електричних кіл, у якому за невідомі приймають вузлові напруги, називають **методом вузлових напруг**. Відзначимо, що напруга між k -тим вузлом схеми і базовим дорівнює різниці потенціалів між ними, тобто

$$U_{k0} = \varphi_k - \varphi_0 = \varphi_k - 0 = \varphi_k. \quad (2.6)$$

Метод вузлових напруг, як і метод контурних струмів, дає змогу значно скоротити порядок системи рівнянь, яку необхідно розв'язати для визначення струмів віток, і тим самим зменшити обсяг обчислень. Кількість невідомих, а отже і кількість незалежних рівнянь у методі вузлових напруг дорівнює кількості рівнянь, які необхідно скласти для розглядуваної схеми за першим законом Кірхгофа, тобто $n = n_1 = q - 1$.

Напругу на будь-якій вітці електричного кола можна визначити на основі вузлових напруг, що дає змогу знайти струм у ній шляхом розрахунку простого (нерозгалуженого) кола.

Загальний вигляд системи рівнянь, складених за методом вузлових напруг, за умови, що базовий вузол має нульовий номер, можна записати так:

$$\begin{aligned} G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - \dots - G_{1m}U_{m0} &= I_{kз1}; \\ -G_{21}U_{10} - G_{22}U_{20} - \dots - G_{2m}U_{m0} &= I_{kз2}; \\ -G_{m1}U_{10} - G_{m2}U_{20} - \dots + G_{mm}U_{m0} &= I_{kзм}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

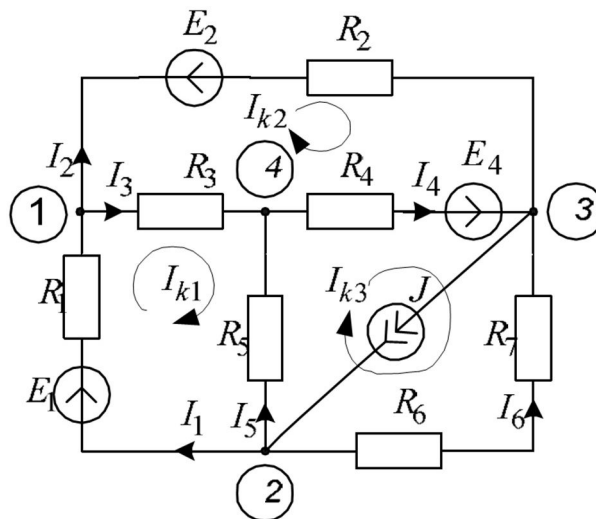
де діагональні елементи G_{kk} – це арифметичні суми провідностей, приєднаних до k -го вузла віток, а $G_{jk}=G_{kj}$ – арифметичні суми провідностей віток, які з'єднують вузли j та k .

Права частина (I_{k3j}) кожного j -го рівняння – це алгебрична сума струмів короткого замикання під'єднаних до j -го вузла віток. Для їх визначення необхідно умовно закорочувати кожну вітку i обчислювати струм короткого замикання за формулою

$$I_{k3j} = \Sigma G_k E_k + \Sigma J_k. \quad (2.8)$$

Добуток $G_k E_k$ беруть зі знаком “плюс”, якщо ЕРС E_k спрямована до вузла, і “мінус” – у протилежному випадку. Аналогічне правило для знаків струмів J_k .

Приклад 2.3. Метод вузлових напруг розглянемо на прикладі електричного кола, схема якого зображена на рис. 2.1.



Прийmemo потенціал вузла 4 таким, що дорівнює нулю, тобто $\varphi_4=0$, тоді невідомими будуть потенціали $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ інших трьох вузлів. Враховуючи (2.6), замість потенціалів вузлів користуватимемось вузловими напругами U_{14}, U_{24}, U_{34} . Для складання системи рівнянь за методом вузлових напруг скористаємось записаними вище за першим законом Кірхгофа рівняннями.

Підставивши одержані вирази у складені за першим законом Кірхгофа рівняння та врахувавши, що

$$U_{12}=U_{14}-U_{24}=(\varphi_1-\varphi_0)-(\varphi_2-\varphi_0),$$

$$U_{13} = U_{14} - U_{34} = (\varphi_1 - \varphi_0) - (\varphi_3 - \varphi_0),$$

$$U_{23} = U_{24} - U_{34} = (\varphi_2 - \varphi_0) - (\varphi_3 - \varphi_0),$$

одержуємо

$$\begin{aligned} G_{11}U_{14} - G_{12}U_{24} - G_{13}U_{34} &= I_{\kappa 31}; \\ -G_{21}U_{14} + G_{22}U_{24} - G_{23}U_{34} &= I_{\kappa 32}; \\ -G_{31}U_{14} - G_{32}U_{24} + G_{33}U_{34} &= I_{\kappa 33}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

де

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}; \quad G_{22} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6 + R_7}; \quad G_{33} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6 + R_7}; \\ G_{12} = G_{21} &= \frac{1}{R_1}; \quad G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_2}; \quad G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_6 + R_7}; \\ I_{\kappa 31} &= \frac{E_{11}}{R_1} + \frac{E_{21}}{R_2}; \quad I_{\kappa 32} = -\frac{E_{11}}{R_1} + J; \quad I_{\kappa 33} = -\frac{E_{21}}{R_2} + \frac{E_{41}}{R_1} - J. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.9), знаходимо вузлові напруги U_{14} , U_{24} , U_{34} , а на їх підставі обчислюємо струми віток

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1(E_1 - U_{12}); \\ I_2 &= G_2(-E_2 + U_{13}); \\ I_3 &= G_3U_{14}; \\ I_4 &= -G_4U_{34}; \\ I_5 &= G_5U_{24}; \\ I_6 &= G_6U_{23}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

де

$$G_1 = \frac{1}{R_1}; \quad G_2 = \frac{1}{R_2}; \quad G_3 = \frac{1}{R_3}; \quad G_4 = \frac{1}{R_4}; \quad G_5 = \frac{1}{R_5}; \quad G_{67} = \frac{1}{R_6 + R_7}.$$

Приклад 2.4. Запишемо рівняння, які необхідні для визначення струмів віток за законами Кірхгофа, методом контурних струмів та методом вузлових напруг.

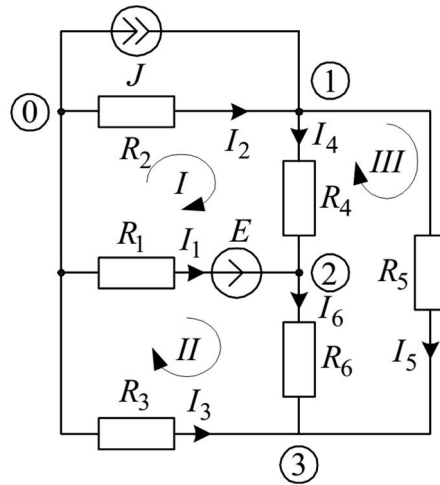


Рисунок 2.2

Рівняння Кірхгофа. Зображене на рис. 2.2 електричне коло має $p = 7$ віток, в одній з яких струм відомий (струм J джерела струму), $q = 4$ вузли. Необхідно знайти шість невідомих струмів.

Отже, за першим законом Кірхгофа необхідно скласти $n_1 = q - 1 = 3$ рівняння, а за другим $n_2 = p - q + 1 - n_J = 3$, де n_J — кількість віток з ДС.

Задавшись додатними напрямками струмів та вибравши незалежні контури (I , II , III) і напрям їх обходу, як показано на рис.2.2, запишемо рівняння Кірхгофа

$$\text{вузол 1: } J + I_2 - I_4 - I_5 = 0;$$

$$\text{вузол 2: } I_4 + I_1 - I_6 = 0;$$

$$\text{вузол 3: } I_6 + I_3 + I_5 = 0;$$

$$\text{контур I: } R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_1 I_1 = -E;$$

$$\text{контур II: } R_1 I_1 + R_6 I_6 - R_3 I_3 = E;$$

$$\text{контур III: } -R_4 I_4 + R_5 I_5 - R_6 I_6 = 0.$$

Метод контурних струмів. Для вибраних, як показано на рис. 2.2, трьох незалежних контурів запишемо рівняння за методом контурних струмів, спрямувавши I_{k1} , I_{k2} , I_{k3} за годинниковою стрілкою. Крім того, вважатимемо, що відомий струм J джерела струму замикається через резистор R_2 .

$$\text{Контур I: } (R_1 + R_2 + R_4) I_{k1} - R_1 I_{k2} - R_4 I_{k3} = R_2 J - E;$$

$$\text{контур II: } (R_1 + R_3 + R_6)I_{\kappa 2} - R_1 I_{\kappa 1} - R_6 I_{\kappa 3} = E;$$

$$\text{контур III: } (R_4 + R_5 + R_6)I_{\kappa 3} - R_6 I_{\kappa 2} - R_4 I_{\kappa 1} = 0.$$

Струми у вітках обчислюємо на підставі контурних струмів за формулами

$$I_1 = I_{\kappa 2} - I_{\kappa 1}; \quad I_2 = I_{\kappa 1} - J;$$

$$I_3 = -I_{\kappa 2}; \quad I_4 = I_{\kappa 1} - I_{\kappa 3};$$

$$I_5 = I_{\kappa 3}; \quad I_6 = I_{\kappa 2} - I_{\kappa 3}.$$

Метод вузлових напруг. Прийемо потенціал вузла 0 таким, що дорівнює нулю, тоді невідомими будуть вузлові напруги U_{10} , U_{20} , U_{30} . Складемо систему рівнянь

$$\text{вузол 1: } U_{10} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - U_{20} \frac{1}{R_4} - U_{30} \frac{1}{R_5} = J;$$

$$\text{вузол 2: } U_{20} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - U_{10} \frac{1}{R_4} - U_{30} \frac{1}{R_6} = E \frac{1}{R_1};$$

$$\text{вузол 3: } U_{30} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - U_{10} \frac{1}{R_5} - U_{20} \frac{1}{R_6} = 0.$$

Струми у вітках схеми

$$I_1 = \frac{E - U_{20}}{R_1}; \quad I_2 = -\frac{U_{10}}{R_2}; \quad I_3 = -\frac{U_{30}}{R_3};$$

$$I_4 = \frac{U_{10} - U_{20}}{R_4}; \quad I_5 = \frac{-U_{30} + U_{10}}{R_5}; \quad I_6 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_6}.$$

2.4 Метод еквівалентного генератора

Під час розрахунку електричних кіл може виникнути необхідність визначити струми не всіх віток, а лише однієї, або дослідити поведінку електричного кола у разі зміни параметрів однієї вітки. На розв'язання цієї задачі спрямований метод *еквівалентного генератора*, згідно з яким все електричне коло, за винятком вітки, в якій необхідно визначити величину струму, замінюється еквівалентним генератором з ЕРС E_{Γ} , і внутрішнім опором R_{Γ} .

Для визначення E_{Γ} необхідно будь-яким методом розрахувати електричне коло за умови, що вітка, у якій необхідно знайти струм, розімкнена,

і знайти напругу між вузлами, до яких під'єднана ця вітка. Це і буде ЕРС E_r . Внутрішній опір еквівалентного генератора R_r визначають шляхом еквівалентних перетворень електричного кола стосовно вузлів, до яких під'єднана вітка з шуканим струмом, за умови, що всі джерела ЕРС закорочені, а всі ДС розімкнені. Обчисливши E_r та R_r , під'єднуємо цю вітку до затискачів еквівалентного генератора і розраховуємо просте електричне коло.

Приклад 2.5. Для зображеної на рис. 2.1 схеми знайти методом еквівалентного генератора струм I_1 вітки, яка під'єднана до вузлів "1" та "2". Перетворена до еквівалентного генератора схема зображена на рис. 2.3, в якій E_r , R_r – ЕРС і внутрішній опір еквівалентного генератора, яким замінена вся схема, крім вітки зі струмом I_1 .

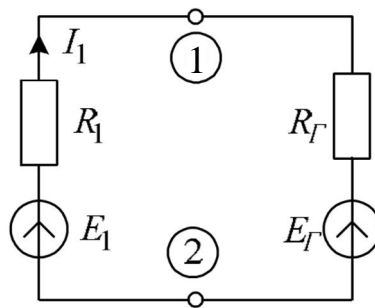


Рисунок 2.3

Як видно зі схеми рис. 2.3, невідомий струм I_1 визначається за формулою

$$I_1 = \frac{E_1 - E_r}{R_1 + R_r}.$$

2.5 Метод накладання

Принцип накладання впливає з лінійності причинно-наслідкових зв'язків у лінійних електричних колах, оскільки в них параметри не залежать від значень струмів та напруг. Отже, його можна застосовувати для аналізу лише лінійних електричних кіл. Суть методу накладання полягає у тому, що струм будь-якої вітки електричного кола визначається як сума струмів, зумовлених дією кожного джерела окремо, тобто накладанням (суперпозицією). Принцип накладання справедливий для будь-яких лінійних взаємозв'язків,

однак його не можна використовувати для рівнянь балансу потужностей, оскільки тут причинно-наслідкові зв'язки квадратичні.

Принцип накладання дає змогу звести розв'язування задачі розрахунку електричного кола з m джерелами енергії до розрахунку m простих кіл, у кожному з яких діє лише одне джерело, а всі решта вилучені. Решта джерел ЕРС повинні бути замкнені накоротко із збереженням у вітках їх внутрішніх опорів, а джерела струму – розімкнені із збереженням паралельно увімкнених до них внутрішніх провідностей.

Відзначимо, що найефективнішим методом розрахунку електричних кіл з одним джерелом енергії є метод еквівалентних перетворень.

2.6 Баланс потужностей в електричному колі постійного струму

Згідно із законом збереження енергії в електричному колі як у замкненій системі електрична енергія, яка генерується джерелами, дорівнює енергії, яку споживають приймачі. Звідси, як наслідок, витікає, що в будь-якому електричному колі існує баланс потужностей. Рівняння балансу потужностей має вигляд

$$\Sigma P_{дж} = \Sigma P_{сп}. \quad (2.12)$$

Спочатку розглянемо джерело ЕРС. Якщо напрямок струму, який протікає через джерело, збігається з напрямом ЕРС, то $P_{дж} = EI$ (рис.2.4,а), а якщо ці напрямки протилежні (рис. 2.4,б), то $P_{дж} = -EI$.

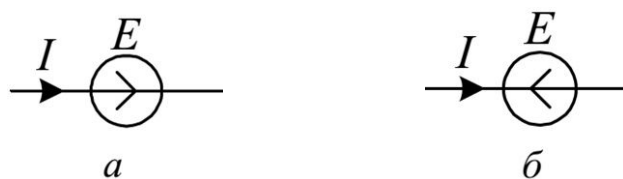


Рисунок 2.4

Потужність, яку розвиває ДС, визначається як добуток струму J джерела на напругу U_J на затискачах ДС, тобто $P_{дж} = JU_J$ (рис.2.5).

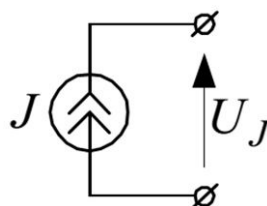


Рисунок 2.5

Очевидно, що як джерело ЕРС, так і ДС можуть не тільки генерувати електричну енергію, але й споживати її. Наприклад, під час заряджання акумуляторної батареї енергія споживається джерелом. Це означає, що потужність $P_{дж}$ джерела може мати як додатне, так і від'ємне значення.

Потужність резистивного споживача завжди додатна. Вона визначається за формулами: $P_{сп} = I^2 R$ або $P_{сп} = \frac{U^2}{R}$.

В наведених вище формулах для обчислення потужностей струми необхідно брати з тими знаками, які одержані в результаті їхнього розрахунку.

Потужність в електричному колі постійного струму можна обчислити за показами вольтметра і амперметра або виміряти ватметром, який вмикають як показано на рис. 2.6.

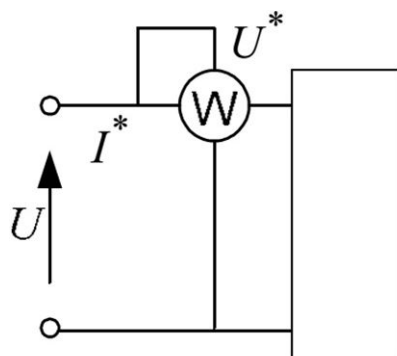


Рисунок 2.6

3 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

3.1 Основні поняття та визначення

Елементи, які характеризуються нелінійною залежністю між напругою на його затискачах і струмом, називаються *нелінійними*. Відповідно електричне коло, до якого входить хоча б один нелінійний елемент, називається нелінійним.

Більшість методів аналізу лінійних електричних кіл для нелінійних кіл не придатні. Це зумовлено тим, що нелінійні електричні кола описуються нелінійними алгебричними та диференціальними рівняннями і до них не можна безпосередньо застосувати відомі класичні методи аналізу (комплексної змінної, операторного числення, рядів Фур'є тощо).

На рис. 3.1 наведені умовні графічні зображення лінійних елементів електричного кола – резистивного з параметром R , індуктивного з параметром L та ємнісного з параметром C та відповідні зображення нелінійних елементів. Нелінійні елементи поділяються на *некеровані* і *керовані*. На відміну від некерованих, які мають одну вольт-амперну характеристику, керовані мають ціле їх сімейство. Для цього у них здебільшого є додатковий контур, через який відбувається вплив на струм чи напругу основного контуру. Керованими резистивними елементами є транзистори, тиристри, терморезистори, фоторезистори тощо, а некерованими – лампи розжарювання, діоди, газотрони, баретери, стабіловольти тощо.

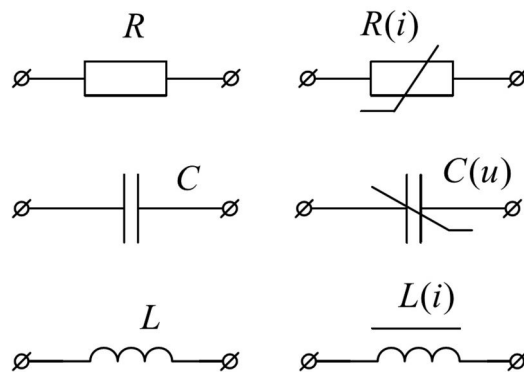


Рисунок 3.1

3.2 Характеристики та параметри нелінійних елементів

В нелінійній електротехніці ці залежності описуються нелійними характеристиками. Для виконання розрахунків повинні бути відомі характеристики нелінійних елементів, які входять до електричного кола. Їх можна подати: для нелінійного резистивного елемента вольт-амперною характеристикою $u = u(i)$, для котушки індуктивності – вебер-амперною $\psi = \psi(i)$, а для конденсатора – кулон-вольтною $q = q(u)$.

Нелінійний резистор характеризується параметром R , який залежить від струму $R = R(i)$ чи напруги $R = R(u)$; нелінійна котушка індуктивності – параметром L , який залежить від струму $L = L(i)$ або магнітного потоку $L = L(\Phi)$; нелінійний конденсатор – параметром C , який залежить від напруги на ньому $C = C(u_C)$ або заряду $C = C(q)$. Рівняння цих нелінійних елементів

$$u_R = R(i) \cdot I; \quad u_L = \frac{d\psi(i)}{dt}; \quad i_C = \frac{dq(u_C)}{dt},$$

де $\psi(i) = L(i) \cdot i$ – потокозчеплення котушки; $q(u) = C(u_C) \cdot u_C$ – заряд конденсатора.

Нелійними елементами є напівпровідникові та електронні прилади. На низьких частотах їхні еквівалентні схеми можна подати у вигляді резистивних нелінійних елементів. На високих частотах характеристики зазначених вище елементів залежать від частоти, тому до еквівалентної заступної схеми вводять реактивні елементи.

Нелійними індуктивними елементами є котушки з феромагнітними осердями. У них залежність магнітного потоку від струму, який протікає по обмотці, нелінійна, а тому індуктивність котушки залежить від величини змінного струму. Крім того, феромагнітним матеріалам властиве явище гістерезису, яке зумовлює додаткові втрати під час перемагнічування. Для нелінійних конденсаторів, які називають варикондами, залежність $q = q(u_C)$ – нелінійна, а ємність залежить від величини напруги u_C .

Характеристика нелінійного елемента **симетрична**, якщо її вигляд не залежить від напрямку струму в ньому та напруги на його затискачах.

Симетричні характеристики мають лампи розжарювання, баретери, терморезистори, індуктивні котушки, нелінійні конденсатори тощо. Відомі нелінійні елементи, у яких вольт-амперні характеристики різні для різних напрямів напруги на затискачах та струму. Типовим прикладом нелінійного елемента з несиметричною вольт-амперною характеристикою є напівпровідниковий діод (рис. 3.2).

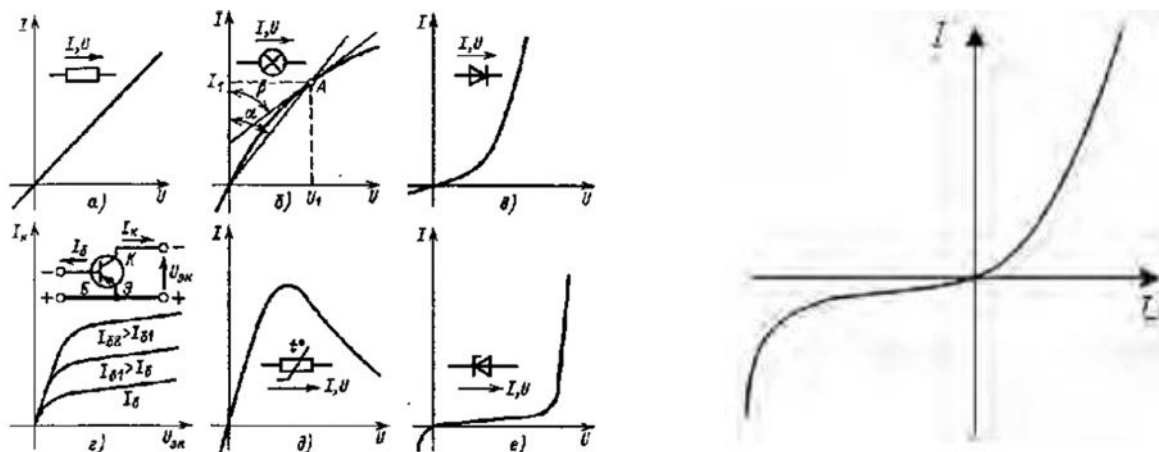


Рисунок 3.2

Для визначення параметрів нелінійних електричних кіл використовують задані графічно чи таблично вольт-амперні характеристики. Розрізняють статичні та динамічні параметри. На підставі статичних характеристик визначають статичний та диференціальний опори. **Статичний опір** визначають за формулою

$$R_{cm} = \frac{U}{I} = \operatorname{tg}\beta.$$

Як видно з рис. 3.3, статичний опір R_{ct} в точці А пропорційний тангенсу кута β між прямою, яка з'єднує точку А з початком координат, і віссю абсцис. Статичний опір нелінійного елемента, як і лінійного, завжди додатний.

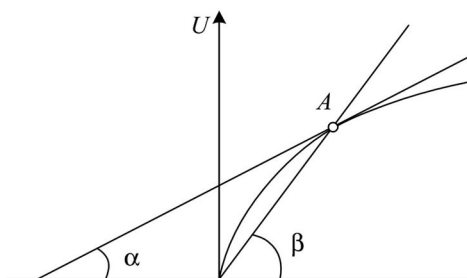


Рисунок 3.3

Диференціальний опір R_{∂} визначають як похідну

$$R_{\partial} = \frac{dU}{dI} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Для нелінійних елементів, які мають спадаючу вольт-амперну характеристику, диференціальний опір від'ємний. Інакше кажучи, якщо на деякій ділянці вольт-амперної характеристики нелінійного елемента напруга зменшується у разі зростання струму (рис. 3.4), то диференціальний опір стає від'ємним.

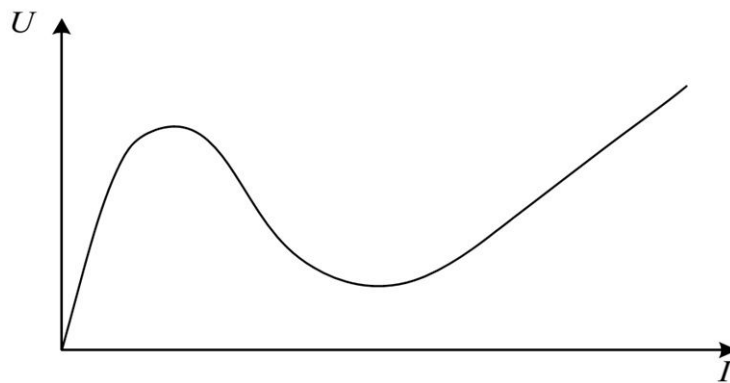


Рисунок 3.4

Аналогічно до нелінійного індуктивного елемента визначають статичну та динамічну індуктивності нелінійної котушки індуктивності

$$L_{\partial} = \frac{d\psi}{di}, \quad L_{cm} = \frac{\psi}{i} i,$$

які визначають з вебер-амперної характеристики $\psi = \psi(i)$, приклад якої наведено на рис. 3.5. Для лінійних елементів диференціальні і статичні параметри збігаються.

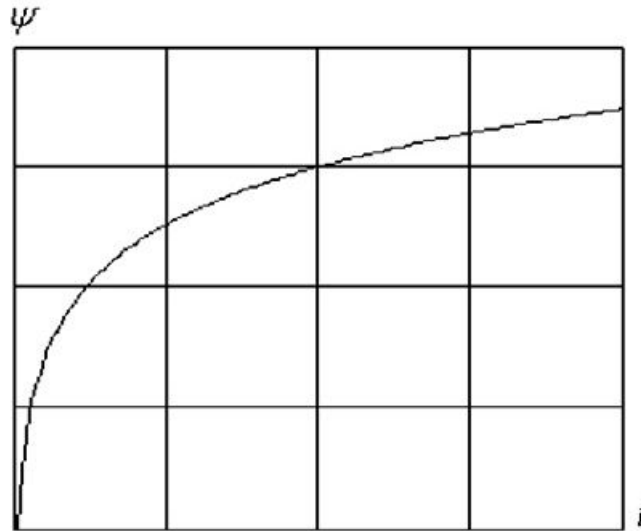


Рисунок 3.5

3.3 Методи аналізу нелінійних електричних кіл

Розраховувати нелінійні електричні кола можна графічним методом, графоаналітичним або числовим. Графічні методи розрахунку практично втратили свою актуальність і мають переважно пізнавальне значення. Їх можна застосовувати лише для розрахунку простих електричних кіл, для яких відомі задані графічно вольт-амперні характеристики. Їх суть полягає в побудові еквівалентних характеристик послідовно або паралельно з'єднаних елементів. Основними недоліками графічного способу розрахунку є громіздкість, невисока точність і неможливість машинного аналізу.

У сучасних умовах розвитку обчислювальних і програмних засобів основними і найефективнішими методами аналізу нелінійних електричних кіл будь-якої складності є числові методи.

3.4 Аналіз нелінійних електричних кіл постійного струму графічним методом

3.4.1 Послідовне з'єднання нелінійних елементів

Розглянемо послідовне з'єднання двох нелінійних елементів (рис. 3.6), вольт-амперні характеристики яких наведені на рис. 3.7.

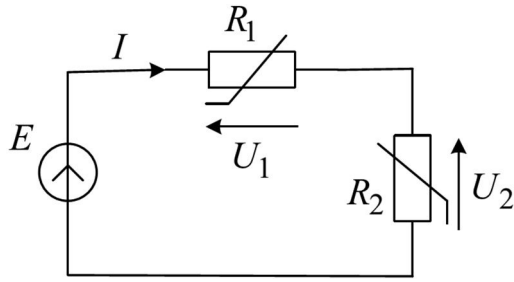


Рисунок 3.6

Для визначення струму в цьому колі за заданого значення ЕРС побудуємо сумарну характеристику обох елементів, яка описується рівнянням

$$U = U_1(I) + U_2(I) = U(I). \quad (3.1)$$

Щоб одержати таку характеристику, необхідно для кожного значення струму I скласти ординати U_1 та U_2 , які відповідають характеристикам нелінійних елементів (рис. 3.7). Це еквівалентно заміні двох послідовно з'єднаних нелінійних елементів з характеристиками $U_1 = U_1(I_1)$ і $U_2 = U_2(I_2)$ одним з характеристикою $U = U(I)$.

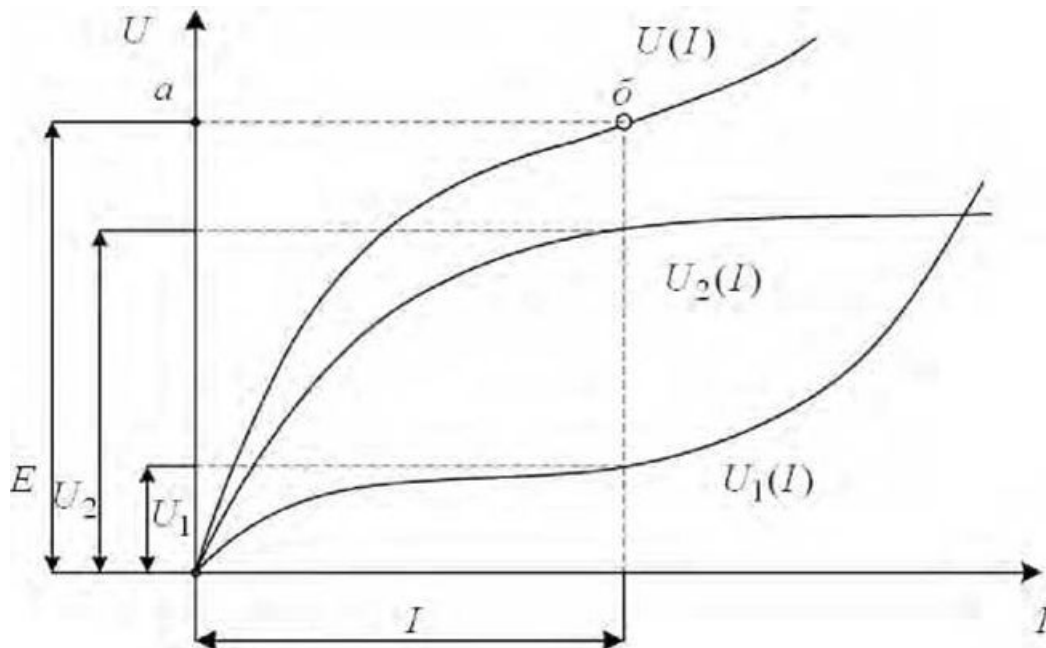


Рисунок 3.7

Струм у колі знаходимо графічно, відклавши на осі ординат відрізок, що дорівнює значенню ЕРС у відповідному масштабі. Опускаючи перпендикуляр з точки перетину кривої $U(I)$ з прямою ab на вісь абсцис, одержуємо значення струму I і напруг U_1 та U_2 на нелінійних елементах, які відповідають заданому значенню E .

3.4.2 Паралельне з'єднання нелінійних елементів

Розрахунок за графічним методом нелінійного електричного кола у разі паралельного з'єднання елементів розглянемо на прикладі зображеного на рис. 3.8 кола з двома нелінійними резисторами, характеристики яких зображені на рис. 3.9.

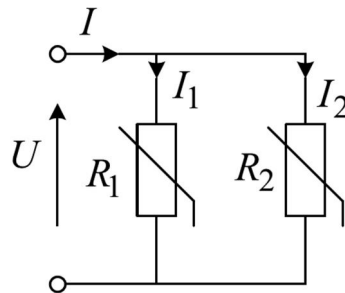


Рисунок 3.8

Згідно з першим законом Кірхгофа

$$I = I_1 + I_2. \quad (3.2)$$

Напруга на обох елементах однакова, а отже, для побудови вольт-амперної характеристики $U(I) = U(I_1 + I_2)$ необхідно задатись рядом значень напруги U і для кожного з них здійснити графічне додавання ординат характеристик $U(I_1)$ і $U(I_2)$ (рис. 3.9). Для визначення струмів за будь-якого значення напруги $U = U_3$ необхідно відкласти на осі ординат відрізок, що дорівнює заданій напрузі U_3 , і провести горизонтальну лінію. На її перетині з відповідними кривими одержуємо значення струмів I_{13} , I_{23} та I_3 . Такий підхід можна застосувати до розрахунку кола з будь-якою кількістю з'єднаних паралельно нелінійних елементів.

3.4.3 Змішане з'єднання нелінійних елементів

Графічно розраховують електричне коло у разі змішаного з'єднання нелінійних елементів за допомогою згортання схеми і побудови нелінійної характеристики еквівалентного двополосника. Це зводиться до графічного способу перетворення схеми відповідно до способу з'єднання елементів, у результаті чого одержують їх еквівалентні вольт-амперні характеристики.

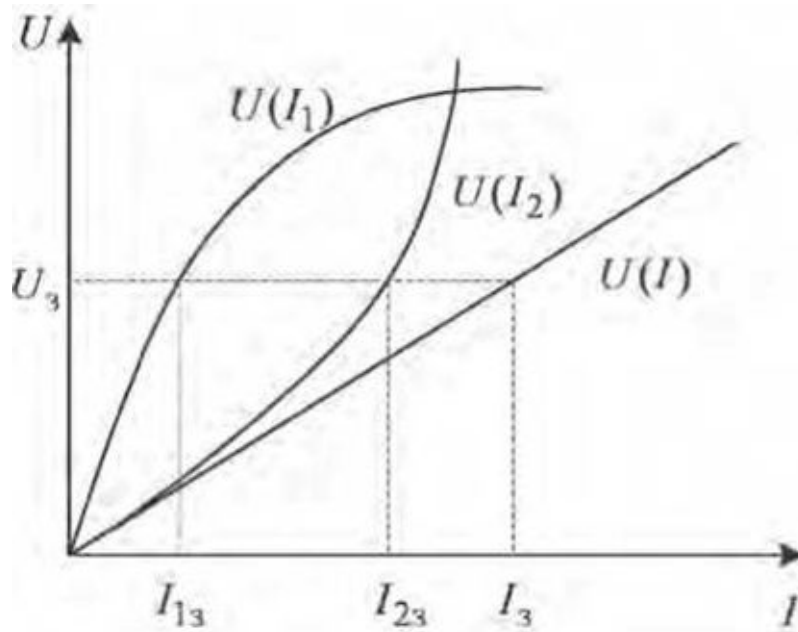


Рисунок 3.9

3.4.4 Метод еквівалентного генератора

Якщо в розгалуженому електричному колі є лише одна вітка з нелінійним елементом, то струм у ній можна визначити, користуючись методом еквівалентного генератора. Для цього необхідно всю лінійну частину електричного кола замінити еквівалентним генератором (рис. 3.10,а), тобто подати у вигляді активного двополюсника, до якого під'єднана вітка з нелінійним елементом R .

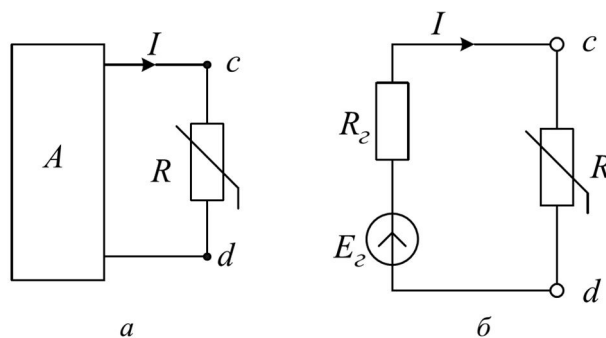


Рисунок 3.10

Електричне коло зводиться до одноконтурного з одним нелінійним елементом (рис. 3.10,б), розрахунок якого здійснюється побудовою еквівалентної вольт-амперної характеристики послідовно з'єднаних лінійного R_T і нелінійного R елементів.

3.4.5 Метод двох вузлів.

Електричне коло, яке має тільки два вузли, тобто складається з паралельно з'єднаних віток з нелінійними елементами, можна розрахувати за графічним методом двох вузлів. Його застосування розглянемо на прикладі схеми (рис. 3.11).

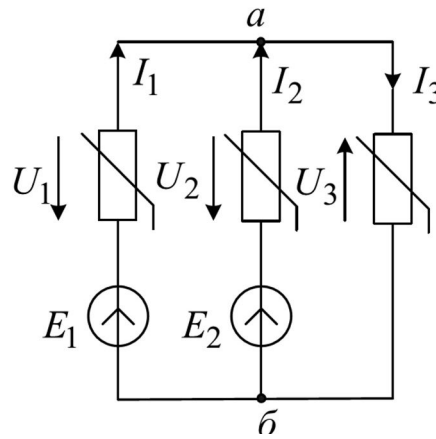


Рисунок 3.11

Вольт-амперні характеристики $U_1 = U_1(I_1)$, $U_2 = U_2(I_2)$, $U_3 = U_3(I_3)$ нелінійних елементів задані відповідними кривими (рис. 3.12).

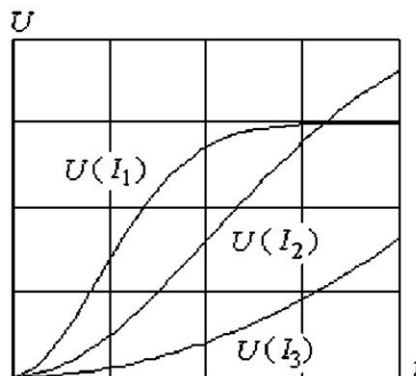


Рисунок 3.12

Як і для лінійних електричних кіл, задаємося додатними напрямками струмів у вітках. За першим законом Кірхгофа

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (3.3)$$

Кожен з цих струмів зв'язаний нелінійною залежністю з відповідною напругою – U_1 , U_2 , U_3 , які на основі методу вузлових напруг можна виразити в функції однієї змінної – напруги між вузлами U_{ab}

$$U_1 = E_1 - U_{ab};$$

$$U_2 = E_2 - U_{a\bar{b}}; \quad (3.4)$$

$$U_3 = U_{a\bar{b}}.$$

Задаючись низкою значень $U_{a\bar{b}}$, за формулами (3.4) визначаємо

$$U_1 = U_1(U_{a\bar{b}}); U_2 = U_2(U_{a\bar{b}}); U_3 = U_3(U_{a\bar{b}}) \quad (3.5)$$

і, користуючись вольт-амперними характеристиками нелінійних елементів, для кожної напруги (U_1, U_2, U_3) знаходимо відповідні значення струмів (I_1, I_2, I_3), що дає змогу побудувати залежності

$$I_1 = I_1(U_{a\bar{b}}); I_2 = I_2(U_{a\bar{b}}); I_3 = I_3(U_{a\bar{b}}). \quad (3.6)$$

Для знаходження розв'язку (струмів I_1, I_2, I_3) за заданих значень ЕРС E_1, E_2 необхідно відповідно до рівняння (3.3) знайти на побудованих в одному масштабі кривих (3.6) точку, для якої виконується рівність

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (3.7)$$

Для цього потрібно додати ординати кривих $I_1(U_{a\bar{b}})$ і $I_2(U_{a\bar{b}})$, У результаті чого одержимо результуючу характеристику $I = I_1 + I_2 = I(U_{a\bar{b}})$, на перетині якої з кривою $I_3 = I_3(U_{a\bar{b}})$, яка є оберненою до вольт-амперної характеристики $U_3 = U_3(I_3)$, знаходимо розв'язок, тобто значення напруги $U_{a\bar{b}}$, якому відповідають значення струмів I_1, I_2, I_3 .

3.5 Аналіз нелінійних електричних кіл за дії синусоїдних джерел

3.5.1 Аналіз процесів у колі з вентилем за дії синусоїдної ЕРС

Електричним вентилем прийнято називати нелінійний активний опір, який має односторонню провідність, тобто його вольт-амперна характеристика несиметрична. Найпоширенішими серед них є напівпровідникові елементи. За умови невисоких частот динамічні характеристики таких елементів практично збігаються зі статичними, тобто можна вважати їх безінерційними.

Для прикладу розглянемо електричне коло з послідовно з'єднаним напівпровідниковим діодом з активним навантаженням (рис. 3.13,а), в якому діє синусоїдна напруга $u = U_m \sin \omega t$, і так званий однопівперіодний випростувач.

Розглядатимемо реальний клапан, опір якого в прямому напрямку малий, а в зворотному великий. Його вольт-амперна характеристика має вигляд, зображений на рис. 3.14.

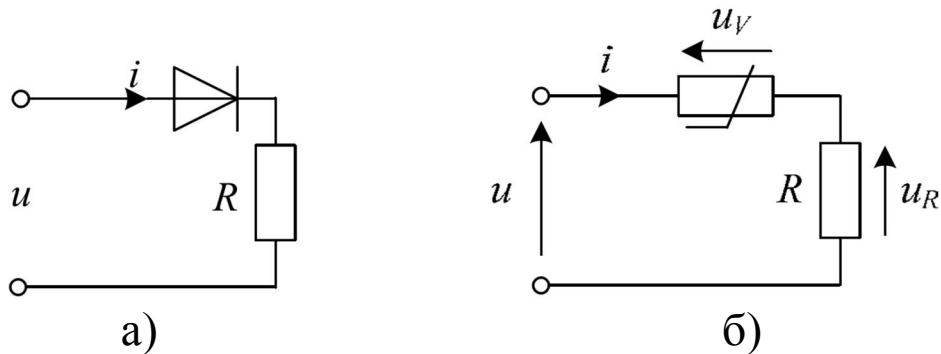


Рисунок 3.13

Згідно з другим законом Кірхгофа прикладена напруга зрівноважується спадом напруги u_v на клапані і u_R на резисторі з опором R (рис. 3.13, б)

$$U_m \sin \omega t = u_v + Ri, \quad (3.8)$$

де $i = i(u_v)$ визначається із зображеної на рис. 3.2 характеристики, в якій: $U = u_v$, а $I = i$.

На рис. 3.14 наведена крива струму в колі рис. 3.13,б за синусоїдної напруги живлення. Для її побудови використовують три координатні площини, на яких зображено залежності:

- а) вольт-амперна характеристика клапана у вигляді $i = i(u_v)$;
- б) часова залежність прикладеної до клапана синусоїдної напруги $u_v = u_v(t)$, вісь напруги u_v якої збігається з попередньою;
- в) побудована на основі перших двох характеристик часова залежність струму $i_v(t)$ клапана, який збігається із струмом у колі $i = i(t)$.

Спосіб побудови показано на рис. 3.14, на якому зображені криві: $u_v = U_m \sin \omega t$; $i = i(u_v)$; $i = i(t)$. Кожному миттєвому значенню прикладеної до клапана напруги u_v згідно з вольт-амперною характеристикою клапана відповідає значення струму $i(u_v)$. Визначаючи ці значення графічно і переходячи до координат $i - t$, будуємо залежність $i(t)$ струму в колі від часу.

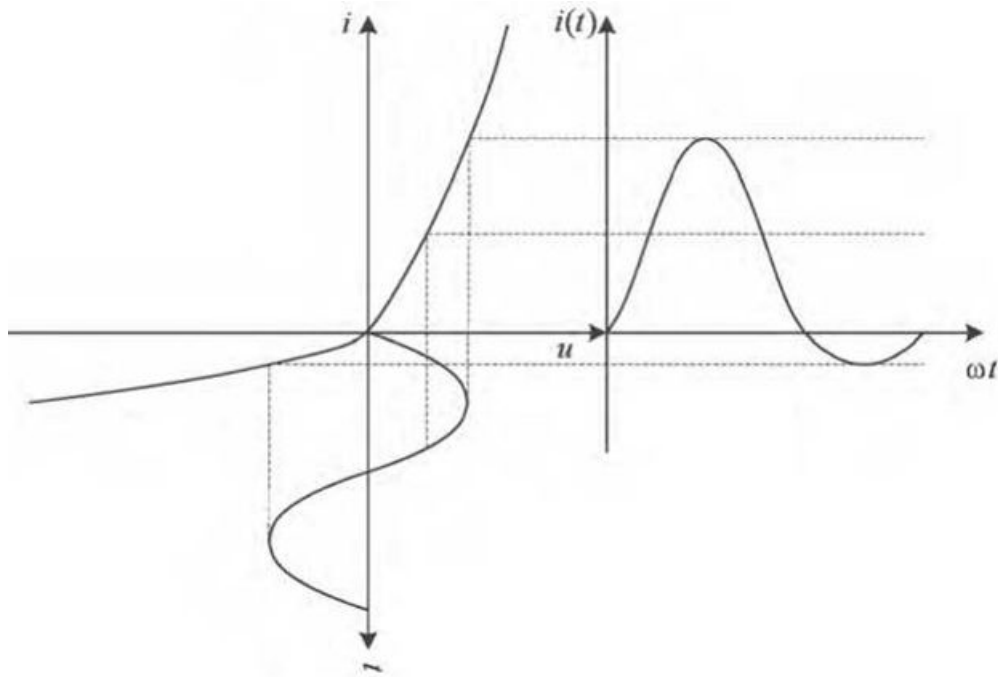


Рисунок 3.14

Як видно з рис. 3.14, несиметричність вольт-амперної характеристики зумовлює несиметрією кривої струму: максимальні додатні значення струму набагато більші від максимальних від'ємних.

Крива струму у колі з вентилем, крім гармонічних складових, має постійну складову, яка тим більша, чим більша амплітуда прикладеної напруги.

3.5.2 Електромагнітні процеси в нелінійній котушці індуктивності за дії синусоїдної ЕРС

Розглянемо процеси в котушці з феромагнітним осердям і кількістю витків w , до якої прикладена синусоїдна напруга

$$u = U_m \sin \omega t.$$

У разі протікання струму i в котушці виникає магнітний потік Φ , а її потокозчеплення можна визначити за формулою $\psi = w\Phi$. Для спрощення знехтуємо активним опором обмотки і потоком розсіювання. Згідно із законом електромагнітної індукції

$$u_L = u = -e_L = \frac{d\psi}{dt} = w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Звідси

$$\Phi = \frac{I}{w} \int U_m \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega w} \sin(\omega t - 90^\circ) = \Phi_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Якщо до ідеальної котушки ($R = 0$) з феромагнітним осердям прикладена синусоїдна напруга, магнітний потік також змінюється за синусоїдним законом і відстає від прикладеної напруги на кут 90° . Відзначимо, що залежність магнітного потоку від намагнічувальної сили (а значить і струму) в реальній котушці нелінійна і визначається кривою намагнічування магнітного матеріалу. У результаті, як видно з рис. 3.15, у разі синусоїдної форми магнітного потоку крива струму несинусоїдна і має передусім третю гармоніку. Основна гармоніка струму збігається за фазою з кривою магнітного потоку і відстає від напруги на кут 90° .

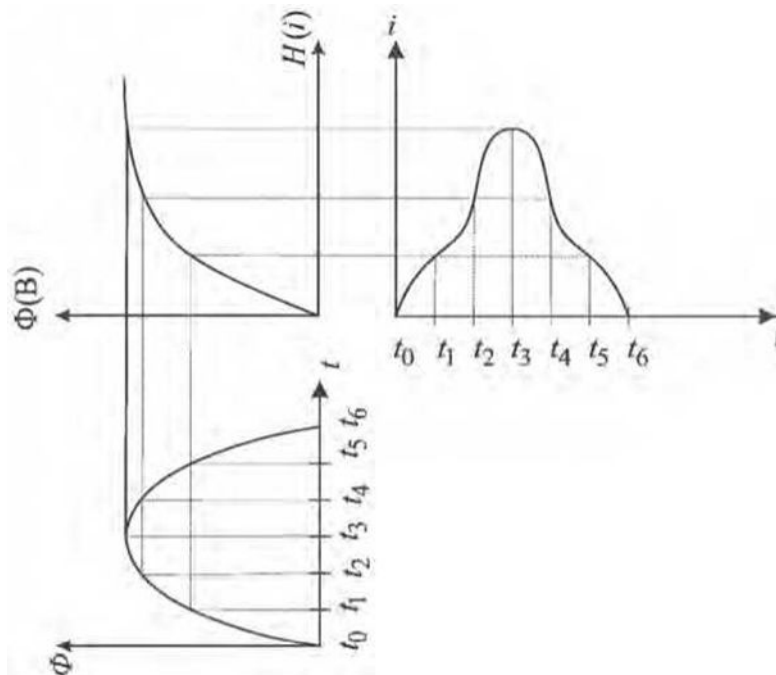


Рисунок 3.15

3.6 Числові методи розрахунку нелінійних електричних кіл

Будь-яке нелінійне електричне коло можна описати за допомогою рівнянь Кірхгофа, однак система рівнянь є нелінійною. Крім того, її потрібно доповнити нелійними характеристиками елементів, які можуть бути задані аналітично або таблично. Отже, проблема розрахунку нелінійного електричного кола зводиться до розв'язування нелінійної системи рівнянь. У

розв'язанні цієї задачі чинне місце займають числові методи, які дають змогу віднайти розв'язок з необхідною точністю.

Для числового розрахунку усталених режимів у нелінійних електричних колах широко застосовуються ітераційні методи, серед яких найефективнішим є ітераційний метод Ньютона. Покажемо його застосування для розв'язування складеної за законами Кірхгофа системи рівнянь, яку подамо у вигляді нелінійного векторного рівняння

$$\vec{Q}(\vec{X})=0. \quad (3.9)$$

Згідно з методом Ньютона $(k+1)$ – наближення вектора \vec{X} визначають за формулою

$$\vec{X}^{(k+1)} = \vec{X}^{(k)} - \Delta \vec{X}^{(k)}, \quad (3.10)$$

де $\Delta \vec{X}^{(k)}$ – приріст вектора X , який обчислюють розв'язуванням системи рівнянь

$$J \Delta \vec{X}^{(k)} = \vec{Q}^{(k)}, \quad (3.11)$$

де

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial X_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Q_m}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial Q_m}{\partial X_m} \end{pmatrix}$$

– матриця Якобі, а $\vec{Q}^{(k)}$ – вектор нев'язок системи $U_m \sin \omega t = u_v + Ri$,

(3.8) за значення вектора $\vec{X} = \vec{X}^{(k)}$.

Приклад 9.1. Для нелінійної системи рівнянь Кірхгофа, складеної для схеми рис. 3.8,

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1 - E_2;$$

$$R_3 I_3 + R_2 I_2 = E_2.$$

Матриця Якобі має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{pmatrix}$$

де $R_1 = \frac{\partial U_1}{\partial I_1}$, $R_2 = \frac{\partial U_2}{\partial I_2}$, $R_3 = \frac{\partial U_3}{\partial I_3}$ – диференціальні опори, визначенні диференціюванням відповідних нелінійних залежностей (рис. 3.10) на кожній k -й ітерації, тобто для кожного значення компонент вектора $\vec{X}^{(k)} = (I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, I_3^{(k)})$.

Алгоритм ітераційного уточнення здійснюють за формулами

(3.10), (3.11). Метод має квадратичну збіжність, однак

основною проблемою є пошук початкового наближення.

3.7 Апроксимація нелінійних характеристик

Для розрахунку нелінійних електричних кіл використовують апроксимації таблично заданих нелінійних характеристик елементів, які мають здебільшого експериментальне походження. Від точності та способу подання цих кривих залежить оптимізація обчислювального процесу розв'язування поставленої задачі, тому питання апроксимації характеристик має важливе значення.

Способи апроксимації нелінійних характеристик розвивали і вдосконалювали протягом багатьох років відповідно до зміни вимог, які до них висували. Коли розрахунки виконувались без використання комп'ютерів, головною вимогою до апроксимацій була простота апроксимуючого виразу, що досягалось зниженням точності відтворення нелінійних характеристик. У разі розв'язування задач за допомогою комп'ютера передусім постають дві вимоги: висока точність і наявність достатньої кількості неперервних похідних на всьому інтервалі зміни аргументу кривої.

Відомі способи апроксимації нелінійних залежностей можна поділити на:

- кусково-лінійні;

- апроксимації однією аналітичною функцією на всьому інтервалі зміни аргументу;
- апроксимації одним поліномом високого ступеня, який проходить через усі вузлові точки;
- апроксимації кількома поліномами невисоких порядків або іншими функціями, які відповідно зістиковані між собою;
- апроксимації сплайнами другого або третього порядку.

Апроксимація одним аналітичним виразом є проста, однак має надто низьку точність, тому її використання може бути зумовлене лише необхідністю одержати аналітичний розв'язок задачі. Наприклад, вольт-амперну характеристику напівпровідникового діода можна наближено виразити рівнянням $I = \alpha U_2$, де α – коефіцієнт, а для апроксимації кривих намагнічування нерідко використовують обернені тригонометричні функції.

Апроксимація одним степеневим поліномом (наприклад, Лагранжа), який збігається із заданими значеннями кривої у вузлових точках, достатньо проста, однак поліном такого типу має так звані осциляції (хвилястість), що призводить до ще більших осциляцій похідної, а це спричинює розбіжність ітераційних процесів.

У разі апроксимації кривої кількома поліномами забезпечується достатньо висока точність, однак у точках стикування крива має розриви похідних. Аналогічні недоліки має і кусково-лінійна апроксимація.

Зазначимо, що в разі математичного моделювання як статичних характеристик, так і динамічних режимів електротехнічних пристроїв використовують не тільки нелінійні характеристики, а й їхні похідні. Зокрема більшість методів числового інтегрування диференціальних рівнянь, які використовують для розрахунку перехідних процесів в електротехнічних пристроях, потребують наявності неперервних похідних не тільки першого, а й вищих порядків. У разі використання ітераційного методу Ньютона для розрахунку усталених режимів та статичних характеристик використовують першу похідну. За наявності розривів похідної або осциляцій практично

неможливо досягти збіжності ітераційного процесу, а у разі розрахунку перехідного процесу числовими методами відбувається необґрунтоване дроблення кроку інтегрування, зумовлене невідповідністю вибраного способу апроксимації числовому методу інтегрування диференціальних рівнянь.

Найповніше задовольняють вимоги високої точності апроксимації нелінійних характеристик елементів і неперервності та плавності зміни похідних кубічні сплайни, однак таблично задані характеристики мають експериментальне походження, і інтерполяційний сплайн має осциляції. Уникнути їх можна лише попереднім згладжуванням експериментальних даних або застосуванням так званих згладжувальних сплайнів, які поєднують в собі апроксимацію і згладжування одним із відомих методів, наприклад, найменших квадратів.

4 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

4.1 Основні поняття та визначення

Струм, який змінюється в часі за величиною та напрямком, називається змінним. Один із напрямків змінного струму вважають додатним, а протилежний – від’ємним. Значення струму в конкретний момент часу називають *миттєвим* значенням, яке є функцією часу. Воно визначається функціональною залежністю $i = i(t)$.

Змінний струм, миттєве значення якого повторюється через однакові проміжки часу, називається періодичним, а найменший проміжок часу, через який відбувається повторення, називається *періодом* змінного струму. Закон зміни такого струму можна подати функцією

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi), \quad (4.1)$$

де I_m – амплітуда; $\omega = 2\pi f$ – кутова частота, яка вимірюється в радіанах за секунду (s^{-1}); ψ – початкова фаза.

Амплітуда – це найбільше за абсолютною величиною значення синусоїдного струму. Виражена в герцах (Гц) частота f зв’язана з періодом T залежністю $f = 1/T$. Промислова частота становить 50 Гц (Україна, країни Європи тощо) та 60 Гц (США, Японія тощо).

Аргумент $(\omega t + \psi)$ синусоїдної електричної величини (4.1) називають фазою, а значення фази при $t = 0$ – початковою фазою. Якщо дві синусоїдні величини (наприклад, напруга та струм) мають різні початкові фази, (рис.4.1), то кажуть, що між ними існує зсув фаз. Зокрема, якщо

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

то зсув фаз між напругою та струмом визначають за формулою

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \quad (4.2)$$

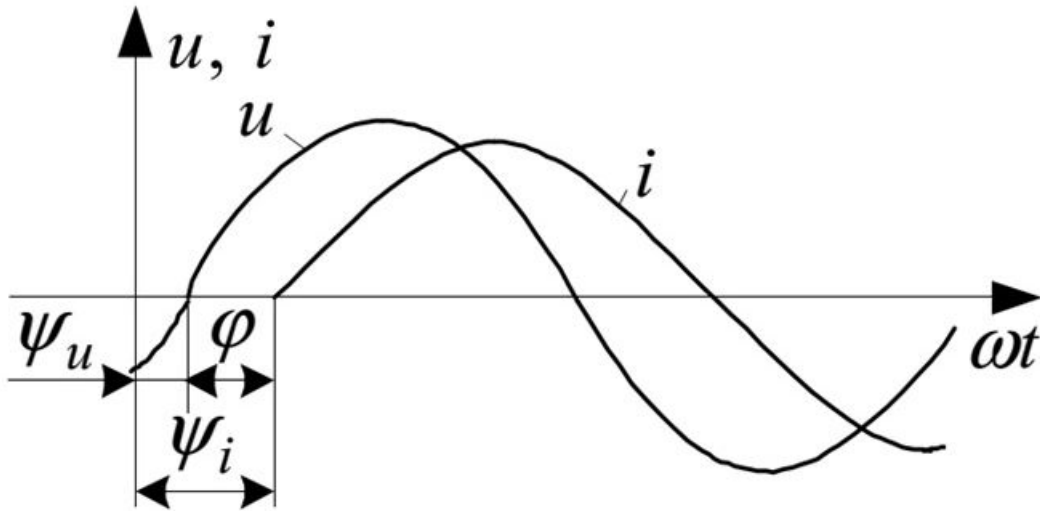


Рисунок 4.1

4.2 Діюче значення синусоїдного струму, ЕРС, напруги

Синусоїдний струм є наслідком дії синусоїдних ЕРС, які виробляють електромашинні генератори. Для змінного струму, як і для ЕРС, вводиться поняття *діючого* значення, яке використовується під час багатьох розрахунків. Діюче значення змінного струму дорівнює такому постійному струмові, який за один період T виділяє в тому ж резистивному елементі таку ж кількість тепла, як і змінний струм.

Енергія, яка виділяється постійним струмом I за час T , дорівнює

$$W = I^2 RT, \quad (4.3)$$

а змінним

$$W = \int_0^T i^2 R dt. \quad (4.4)$$

Діюче значення синусоїдного струму

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.5)$$

Діюче значення називають ще ефективним. Ним визначається не тільки теплова дія, але й силова. Зауважимо, що вимірювальні аналогові прилади електромагнітної, електродинамічної та феродинамічної систем вимірюють діюче значення.

Діючі значення напруги та ЕРС визначають аналогічно

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.6)$$

Діючі значення можна визначити, як середньоквадратичні

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}; \quad (4.7)$$

Середнє за період значення синусоїдного змінного струму дорівнює нулю. На практиці часто використовують середнє за модулем значення, яке визначається за формулою

$$I_{сеп} = \frac{2}{\pi} I_m. \quad (4.8)$$

Відношення діючого значення струму до середнього за модулем називають коефіцієнтом форми, який для синусоїдного струму дорівнює

$$K_\phi = I/I_{сеп} = 1,11. \quad (4.9)$$

4.3 Зображення синусоїдної величини на комплексній площині

Для спрощення розрахунків досягається, якщо перейти від синусоїдних функцій часу до їх зображень за допомогою комплексних чисел. Пояснимо, як це можна здійснити на прикладі синусоїдної напруги

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (4.10)$$

Згідно з формулою Ейлера

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha. \quad (4.11)$$

Нехай $\alpha = \omega t + \psi_u$, тоді, помноживши (4.11) на U_m , одержуємо

$$U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m \cos(\omega t + \psi_u) + jU_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (4.12)$$

Відкладемо на комплексній площині по осі абсцис дійсну частину комплексного числа (4.12), а по осі ординат – уявну. Тоді вектор довжиною U_m , спрямований під кутом $(\omega t + \psi_u)$ до осі абсцис (рис.4.2), буде символічним

відображенням синусоїдної напруги (4.10). Це пояснюється тим, що між миттєвим значенням напруги u і вектором U_m існує однозначний зв'язок: у кожний момент часу значення напруги визначається проекцією вектора U_m на уявну вісь.

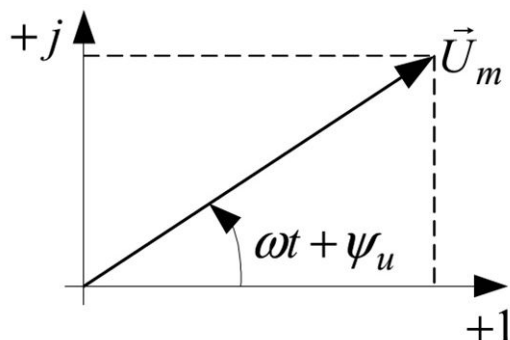


Рисунок 4.2

Нехай необхідно знайти суму двох струмів однакової частоти $i = i_1 + i_2$ де $i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1)$, $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2)$.

Подамо їх на комплексній площині векторами \vec{I}_{m1} та \vec{I}_{m2} (рис.4.3).

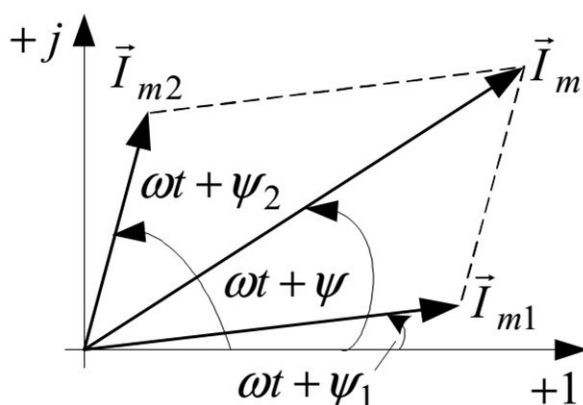


Рисунок 4.3

Ці вектори обертаються з постійною кутовою швидкістю ω , тому їх взаємне розташування в будь-який момент часу незмінне. Це означає, що вектор $\vec{I}_m = \vec{I}_{m1} + \vec{I}_{m2}$ буде незмінним за величиною і обертатися з тією ж частотою ω , а його проекція на вертикальну вісь дорівнює шуканій синусоїдній функції

$$i = i_1 + i_2 = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Взаємне розташування векторів не залежить від цього кута, то можна здійснити додавання за будь-якого його значення, зокрема й $\omega t = 0$.

Здебільшого зручно прийняти довжини векторів, що зображують синусоїдні функції, такими, що дорівнюють не амплітудним, а діючим значенням. Отже, надалі будемо користуватись не комплексними амплітудами \underline{I}_m , а комплексними діючими значеннями \underline{I} , які в $\sqrt{2}$ раз менші, тобто

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = I e^{j\psi}. \quad (4.13)$$

де $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ – діюче значення струму.

Для переходу від синусоїдної функції часу (оригіналу) до зображуючої її комплексної величини (символічного зображення), необхідно модуль комплексного числа вибрати таким, що дорівнює діючому значенню, а аргумент – значенню аргументу синусоїдної функції в момент часу $t = 0$.

Наприклад,

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = U e^{j\psi_u};$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = I e^{j\psi_i}.$$

Для зворотного переходу від комплексного числа, яке зображує синусоїдну функцію, до самої функції, тобто до оригіналу, необхідно взяти його проекцію на уявну вісь, помножити її на $\sqrt{2}$ і додати до аргументу ωt .

4.4 Пасивні елементи в електричному колі синусоїдного струму

Пасивними елементами заступної схеми електричного кола синусоїдного струму є резистивні, індуктивні і ємнісні елементи. .

Опір провідника змінному струмові більший, ніж постійному внаслідок витіснення струму до поверхні провідника. Однак для промислової частоти це збільшення опору незначне і ним можна знехтувати, а опір провідника визначати за тією ж формулою, що і для постійного струму.

У резистивних елементах електрична енергія перетворюється у теплову. Потужність, яка виділяється в резистивному елементі з параметром R , визначають за формулою

$$P=I^2R, \quad (4.14)$$

де I – діюче значення змінного струму.

Отже, резистор в електричному колі змінного струму, характеризується величиною його опору R , який називатимемо активним. Заступна схема резистивного елемента має вигляд (рис.4.44).

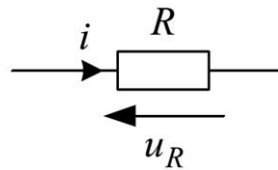


Рисунок 4.4

Згідно із законом Ома, напруга на резисторі, зумовлена протіканням змінного струму $i=I_m \sin (\omega t + \psi_i)$, визначається за формулою

$$u=Ri=RI_m \sin (\omega t + \psi_i)=U_m \sin (\omega t + \psi_u), \quad (4.15)$$

де $U_m = RI_m$ – амплітуда, а $\psi_u = \psi_i$ – початкова фаза напруги.

Як видно з (4.15), напруга u і струм i мають однакові початкові фази. Часові залежності напруги на резисторі u і струму i мають вигляд, зображений на рис.4.5.

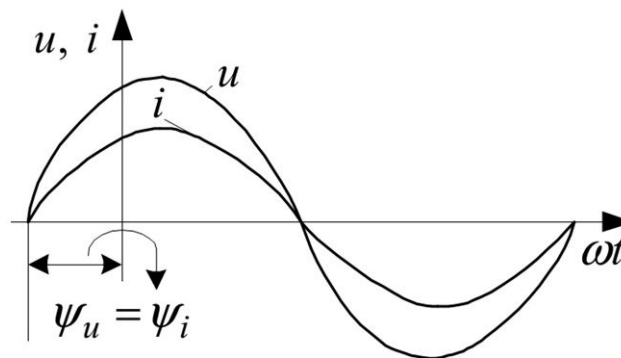


Рисунок 4.5

У комплексній формі $\underline{I} = I \cdot e^{j\psi_i}$. Відповідно $\underline{U}_R = R\underline{I} = RI \cdot e^{j\psi_i} = U \cdot e^{j\psi_u}$. Векторне відображення напруги та струму для резистивного елемента наведено на рис. 4.6.

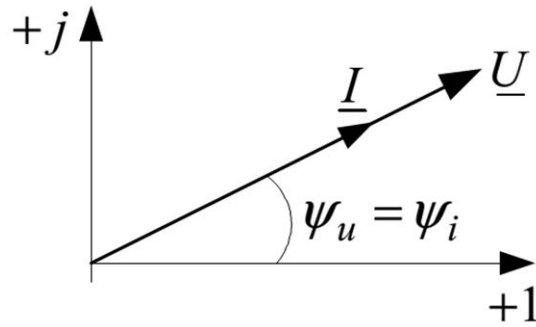


Рисунок 4.6

Висновок: *струм, який протікає через резистивний елемент, співпадає за фазою з напругою на ньому.*

Розглянемо процеси в лінійній (без сталевго осердя) котушці у разі протікання в ній синусоїдного струму.

Заступну схему котушки можна подати у вигляді послідовно з'єднаних резистивного елемента з параметром R та ідеального індуктивного елемента з параметром L (рис. 1.4). А оскільки процеси в резисторі уже розглянуті, то аналізуватимемо ідеалізовану котушку, яка характеризується лише параметром L (рис. 4.7).

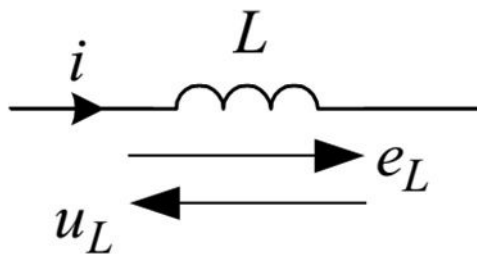


Рисунок 4.7

Під час зміни струму в котушці змінюється її потокозчеплення, і згідно із законом електромагнітної індукції в ній наводиться ЕРС самоіндукції

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (4.16)$$

Додатний напрямок ЕРС самоіндукції збігається з додатним напрямком струму (рис.4.7), тому напругу на котушці під час протікання по ній синусоїдного струму обчислимо за формулою

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt}(I_m \sin(\omega t + \psi_i)) = \omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) =$$

$$= X_L I_m \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ), \quad (4.17)$$

де величина $X_L = \omega L$ має розмірність Ом і називається **індуктивним опором** котушки.

Висновок: *напруга на ідеальному індуктивному елементі випереджує за фазою струм на кут $\varphi = 90^\circ$.*

Приклад залежності від часу напруги на котушці та струму в ній наведено на рис.4.8.

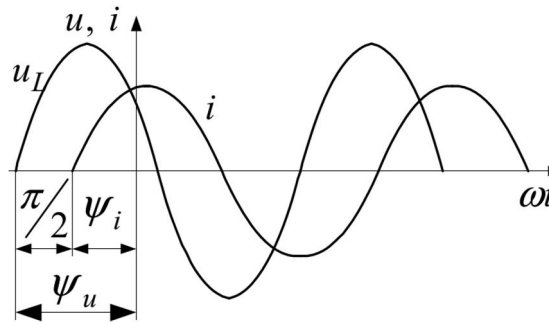


Рисунок 4.8

Запишемо струм та напругу на котушці індуктивності в комплексній формі

$$\underline{I} = I \cdot e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_L = U_L e^{j(\psi_i + 90^\circ)} = X_L I \cdot e^{j\psi_i} e^{j90^\circ} = X_L I \cdot e^{j90^\circ} = jX_L \underline{I}. \quad (4.18)$$

Векторне зображення напруги на індуктивному елементі та струму, який через нього протікає, наведено на рис.4.9.

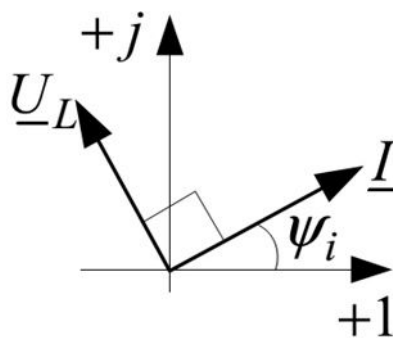


Рисунок 4.9

Заступна схема ідеального конденсатора має вигляд (рис.4.10 3.10).

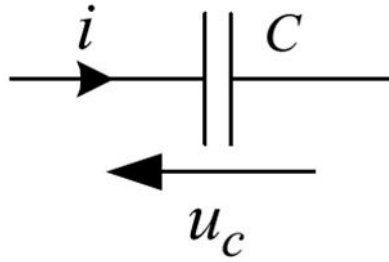


Рисунок 4.10

З формули (1.7) для синусоїдного струму знаходимо

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ) = \\ = X_C I_m \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ) = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ), \quad (4.19)$$

де величина $X_C = 1/\omega C$ – називається *ємнісним опором*.

Висновок: *Напруга на конденсаторі відстає від струму на кут $\varphi = 90^\circ$.*

У комплексній формі

$$\underline{I} = I \cdot e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_C = U_C e^{j(\psi_i - 90^\circ)} = X_C e^{j\psi_i} I e^{-j90^\circ} = X_C \underline{I} \cdot e^{-j90^\circ} = -jX_C \underline{I}. \quad (4.20)$$

Часові залежності напруги i струму наведені на рис. 4.11,а, а векторне відображення – на рис. 4.11,б.

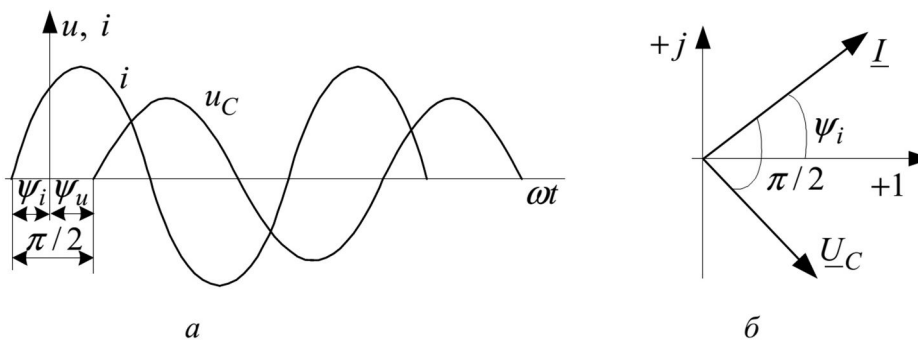


Рисунок 4.11

Під час визначення кута зсуву фаз між напругою та струмом на окремих елементах доцільно розглядати положення вектора струму стосовно напруги на елементі.

4.5 Комплексний опір та комплексна провідність. Закон Ома в комплексній формі

Розглянемо просте електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних резистивного, індуктивного і ємнісного елементів, які живляться від джерела синусоїдної напруги (рис.4.12).

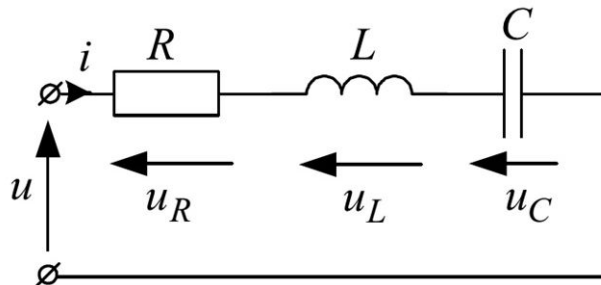


Рисунок 4.12

Згідно з другим законом Кірхгофа прикладена напруга зрівноважується спадом напруг на окремих елементах електричного кола

$$u = u_R + u_L + u_C. \quad (4.21)$$

Подамо всі напруги, що входять до рівняння (4.21), у комплексній формі

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C. \quad (4.22)$$

Враховуючи, що

$$\underline{U}_R = RI; \quad \underline{U}_L = jX_L I; \quad \underline{U}_C = -jX_C I$$

одержуємо

$$\underline{U} = (R + jX_L - jX_C)I = (R + jX) I,$$

де $X = X_L - X_C$, або в скороченій формі

$$\underline{U} = \underline{Z} I. \quad (4.23)$$

Комплексна величина

$$\underline{Z} = R + jX$$

називається **комплексним опором** двополіусника. Його компонентами є активний R і реактивний X опори.

Співвідношення (4.23) між комплексними напругою та струмом – це закон **Ома в комплексній формі** для пасивної ділянки електричного кола. Зокрема, якщо $\underline{U} = U e^{j\psi_u}$ і $\underline{I} = I e^{j\psi_i}$, то

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \underline{Z} e^{j\varphi} = R + jX, \quad (4.24)$$

де

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right).$$

Зсув фаз $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ між напругою та струмом двополюсника, визначається співвідношенням активного і реактивного опорів.

Комплексний опір Z має геометричну інтерпретацію (рис. 4.13,а). Активний, реактивний та повний опір двополюсника співвідносяться між собою як сторони прямокутного трикутника, який називають **трикутником опорів** (рис. 4.13,б).

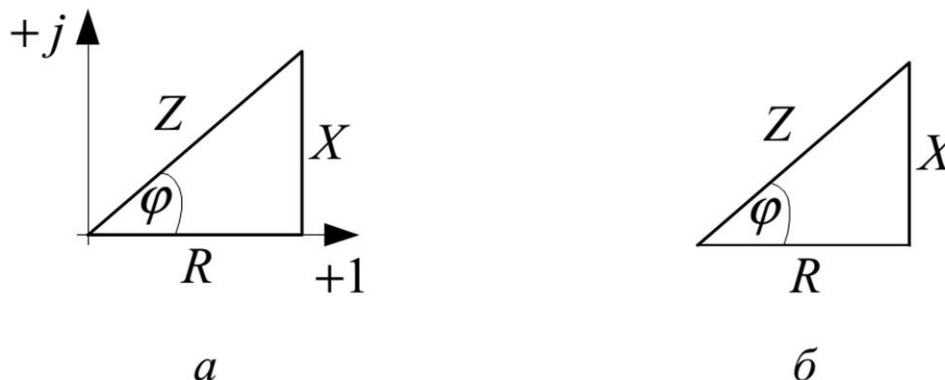


Рисунок 4.13

Величина, обернена до комплексного опору, називається **комплексною провідністю**, яку можна подати в алгебричній або показниковій формі

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB,$$

або

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi = G - jB,$$

де

$$G = Y \cos \varphi = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2} - \text{активна провідність};$$

$$B = Y \sin \varphi = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - \text{реактивна провідність};$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{G}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right).$$

На комплексній площині провідності \underline{Y} відповідає прямокутний трикутник (рис.4.14, а), який називають **трикутником провідностей** (рис. 4.14, б).

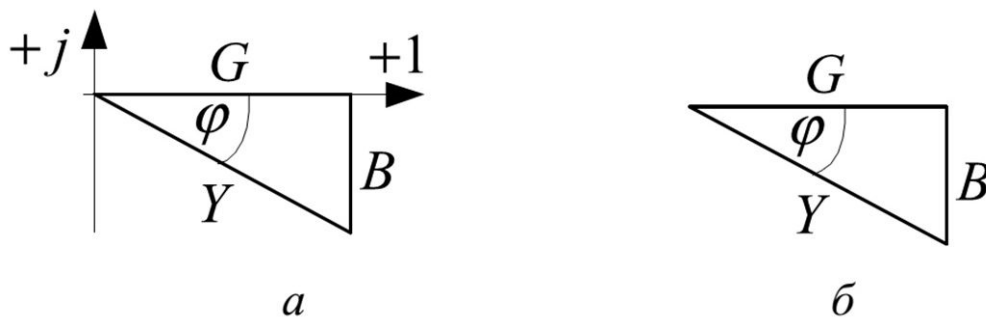


Рисунок 4.14

4.6 Потужності та баланс потужностей у колі синусоїдного струму

У загальному випадку напруга та струм на вході пасивного двополюсника зсунені за фазою на кут $\varphi = \psi_u - \psi_i$. Якщо прийняти початкову фазу напруги $\psi_u = 0$, то початкова фаза струму $\psi_i = -\varphi$. За таких умов миттєві значення напруги і струму можна подати у вигляді

$$u = U_m \sin \omega t; \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (4.25)$$

Миттєве значення потужності є функцією часу

$$p = ui. \quad (4.26)$$

Підставивши (4.25) в (4.26), одержуємо

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi), \quad (4.27)$$

де U, I – діючі значення напруги та струму, φ – кут зсуву фаз між ними.

У разі активно-індуктивного характеру опору двополюсника струм відстає від напруги (рис.4.15, а), а для активно-ємнісного – випереджує її (рис. 4.15, б).

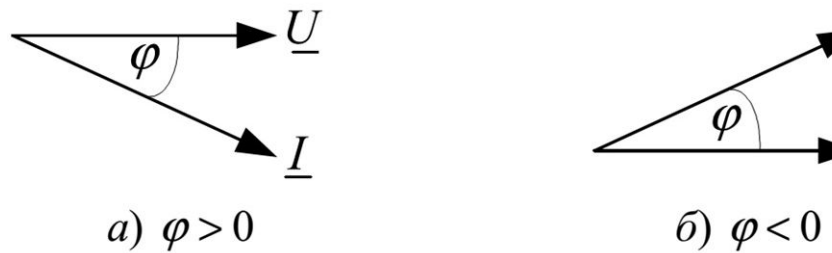


Рисунок 4.15

Як видно з (4.27), миттєва потужність має постійну складову $UI\cos\varphi$ і гармонічну $UI\cos(2\omega t - \varphi)$, кутова частота якої у два рази більша від частоти напруги та струму. Миттєва потужність двополюсника додатна для проміжків часу, коли напруга і струм мають однакові знаки і від'ємна, – коли ці знаки протилежні (рис. 4.16).

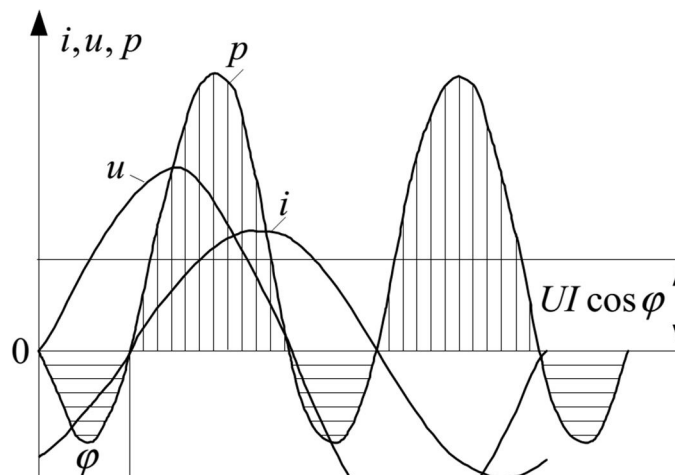


Рисунок 4.16

Для проміжків часу, в які миттєва потужність від'ємна, енергія повертається від споживача до джерела. Це можливо завдяки наявності реактивних елементів, у яких енергія періодично запасується в їх електричних і магнітних полях. Якщо двополюсник складається винятково з резистивних елементів, то енергія в ньому накопичуватись не може. Кут φ у цьому разі дорівнює нулю, напруга та струм завжди мають однакові знаки і немає моментів часу, коли потік енергії спрямований від споживача до джерела.

Середнє значення миттєвої потужності за період називають **активною** потужністю

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi. \quad (4.28)$$

Активна потужність залежить від діючих значень напруги U та струму I і кута φ зсуву фаз між ними. Множник $\cos \varphi$ для синусоїдних напруги та струму називається **коефіцієнтом потужності**. Оскільки для пасивного двополюсника $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, активна потужність не може бути від'ємною. Активна потужність резистивного елемента числово дорівнює енергії, яка виділяється в ньому за секунду.

Поряд з активною потужністю використовується поняття **реактивної** потужності, яку визначають за формулою

$$Q = UI \sin \varphi, \quad (4.29)$$

та **повної** потужності

$$S = UI. \quad (4.30)$$

Активна, реактивна та повна потужності в електричному колі синусоїдного струму пов'язані залежністю

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (4.31)$$

якій відповідає **трикутник потужностей** (рис. 4.17).

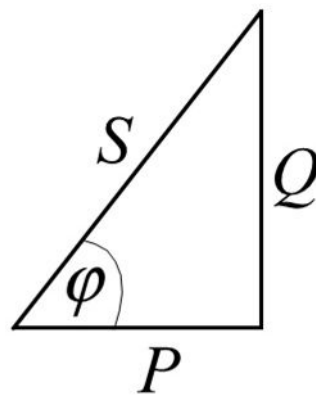


Рисунок 4.17

Реактивна може бути від'ємною – якщо $\varphi < 0$, то $Q < 0$.

Активна потужність пов'язана з незворотними процесами перетворення електричної енергії в інші види енергії, наприклад, у теплову чи механічну. Реактивна потужність пов'язана зі зворотними процесами обміну електричною енергією між індуктивними та ємнісними елементами (або між реактивними споживачами і генераторами).

Активна потужність вимірюється у **ваттах** (скорочено – Вт), реактивна – у **вольт-амперах реактивних** (скорочено – вар), а повна – у **вольт-амперах** (скорочено – ВА).

Реактивну потужність ідеального конденсатора ємністю C , до якого прикладена напруга, діюче значення якої дорівнює U , можна визначити за формулою

$$Q_C = \omega C U^2.$$

Аналогічно для ідеальної котушки індуктивністю L одержимо формулу

$$Q_L = \frac{U^2}{\omega L}.$$

Повну потужність можна записати у вигляді комплексного числа

$$\underline{S} = P + jQ = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi. \quad (4.32)$$

Її можна обчислити, використовуючи комплексні значення напруги $\underline{U} = U e^{j\psi_u}$ та струму $\underline{I}^* = I e^{j\psi_i}$. Для цього використовується комплексне спряжене значення струму $I^* = I e^{-j\psi_i}$, в якому знак перед аргументом ψ_i змінений на протилежний. Комплексне значення повної потужності

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi = P + jQ. \quad (4.33)$$

Баланс потужностей витікає із закону збереження енергії. У комплексній формі його можна записати у вигляді рівняння

$$\sum \underline{S}_{\text{спож}} = \sum \underline{S}_{\text{джер}} \quad (4.34)$$

яке розпадається на два: для дійсних (активних потужностей) і уявних (реактивних потужностей) частин. Отже, в електричному колі синусоїдного струму існує баланс активних потужностей і баланс реактивних потужностей.

Як і в колі постійного струму, активну потужність вимірюють ватметром. Покази ватметра визначаються як дійсна частина добутку

$$P = \operatorname{Re}(\underline{U} \underline{I}^*).$$

4.7 Символічний метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму

4.7.1 Суть символічного методу.

Метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму, в основу якого покладено зображення синусоїдних функцій часу комплексними числами називається *комплексним*, або *символічним*. Суть символічного методу розрахунку полягає в тому, що здійснюється перехід від миттєвих значень напруг, струмів та ЕРС (оригіналів) до їхніх символічних зображень. Після виконання розрахунків здійснюється перехід від комплексних до миттєвих значень.

Для розрахунку лінійних електричних кіл синусоїдного струму можна застосовувати ті самі методи, що і для кіл постійного струму

4.7.2 Закони Кірхгофа в комплексній формі.

Рівняння законів Кірхгофа в комплексній формі мають вигляд, аналогічний до рівнянь для електричних кіл постійного струму.

$$\sum \underline{I}_k = 0; \sum \underline{U}_k, \underline{E}_k = 0 \text{ або } \sum \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum \underline{E}_k. \quad (4.35)$$

Запишемо рівняння Кірхгофа для миттєвих значень та у комплексній формі для електричного кола, зображеного на рис.4.18,а.

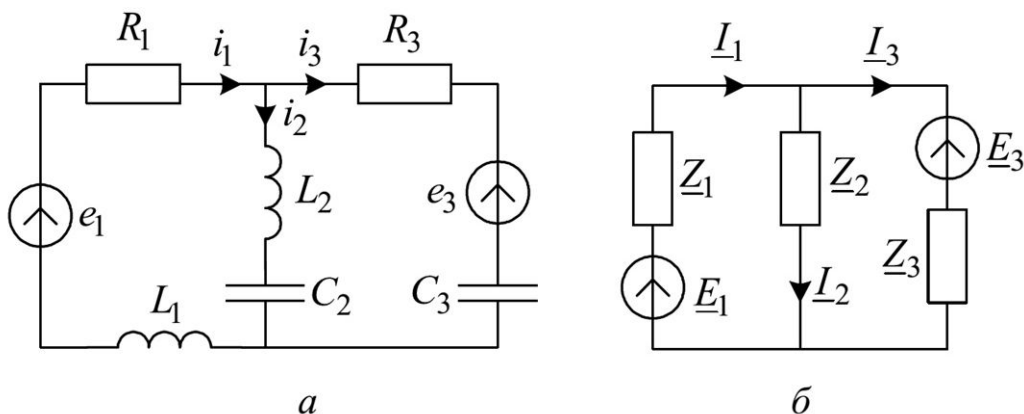


Рисунок 4.18

Рівняння, складені за законами Кірхгофа для миттєвих значень, мають вигляд

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_1;$$

$$R_3 i_3 + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt - L_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = -e_3.$$

Визначаємо комплексні опори віток

$$Z_1 = R_1 + jX_{L1} = Z_1 e^{j\varphi_1} \text{ Ом};$$

$$Z_2 = j(X_{L2} - X_{C2}) = Z_2 e^{j\varphi_2} \text{ Ом};$$

$$Z_3 = R_3 - jX_{C3} = Z_3 e^{j\varphi_3} \text{ Ом}.$$

Складена з використанням цих опорів комплексна заступна схема наведена на рис. 4.18, б. Користуючись нею, запишемо рівняння Кірхгофа у комплексній формі.

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0;$$

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{E}_1;$$

$$\underline{Z}_3 \underline{I}_3 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = -\underline{E}_3.$$

Рівняння, складені за **методом контурних струмів** у комплексній формі для електричного кола рис.4.18, б, мають вигляд

$$\underline{Z}_{11} \underline{I}_{k1} - \underline{Z}_2 \underline{I}_{k2} = \underline{E}_1;$$

$$-\underline{Z}_2 \underline{I}_{k1} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{k2} = -\underline{E}_3,$$

де $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$; $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$;

\underline{I}_{k1} , \underline{I}_{k2} – невідомі контурні струми, які спрямовані за годинниковою стрілкою.

4.8 Резонансні явища в електричному колі синусоїдного струму

У колах змінного струму, до складу яких входять котушки індуктивності та конденсатори, можуть виникати резонансні явища, які за своєю суттю аналогічні до резонансу в механічній системі. В електричному контурі відбувається періодичний перехід енергії електричного поля конденсатора в енергію магнітного поля котушки і навпаки. Під час резонансу в електричному колі мала напруга, прикладена до кола, може спричиняти значні напруги або струми на деяких ділянках кола. Це пов'язано з тим, що ємнісні та індуктивні опори (провідності) мають різні знаки і можуть взаємно компенсувати один одного. У результаті, незважаючи на наявність у колі реактивних елементів, вхідний реактивний опір (провідність) дорівнює нулю. Такий режим називається *резонансним*.

У разі послідовного з'єднання індуктивного і ємнісного елементів може виникати резонанс напруг, а за паралельного – резонанс струмів.

4.8.1 Резонанс напруг.

Резонанс напруг може виникати у разі послідовного з'єднання індуктивного і ємнісного елементів на рис. 4.19.

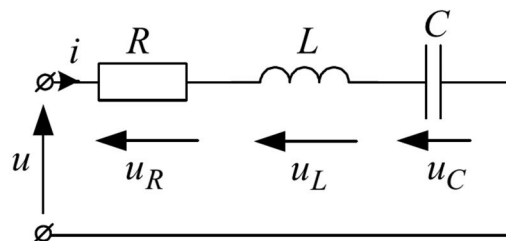


Рисунок 4.19

В резонансному режимі, струм і напруга на вході електричного кола збігаються за фазою, тобто $\varphi=0$, а повний опір дорівнює його активному опоріві

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R,$$

що можливо, якщо $X_L = X_C$. Отже, умова резонансу напруг у послідовному контурі

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (4.36)$$

Як видно з (4.36), резонанс напруг можна досягнути зміною одного з трьох параметрів: L , C , ω , кожен з яких можна визначити відповідно за формулами

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} \quad (4.37)$$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} \quad (4.38)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.39)$$

Частоту ω_0 , за якої настає резонанс, називають *резонансною*.

Струм під час резонансу не залежить від величини опорів послідовно з'єднаних реактивних елементів

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R} \quad (4.40)$$

Під час резонансу діюче значення напруги на індуктивному елементі дорівнює діючому значенню напруги на конденсаторі

$$U_L = X_L I = U_C = X_C I \quad (4.41)$$

а напруга на резисторі дорівнює прикладеній до входу електричного кола напрузі

$$U_R = RI = U \quad (4.42)$$

За умови резонансу напруги на котушці та конденсаторі можуть значно перевищувати напругу на вході кола. Це відбувається, якщо

$$R \ll \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (4.43)$$

Векторна діаграма для зображеного на рис. 4.19 електричного кола за умови наявності резонансу наведена на рис. 4.20.

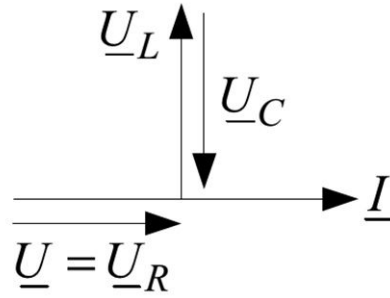


Рисунок 4.20

Реактивна потужність усього кола під час резонансу дорівнює нулю, оскільки

$$Q = Q_L - Q_C = I^2 X_L - I^2 X_C = 0, \quad (4.44)$$

а повна потужність дорівнює активній

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P. \quad (4.45)$$

Відповідно коефіцієнт потужності ($\cos \varphi$) дорівнює одиниці

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} = 1. \quad (4.46)$$

Під час резонансу реактивна енергія циркулює від індуктивного елемента до ємнісного і навпаки. Обміну реактивною енергією між джерелом і електричним колом не відбувається. Величина струму в провідниках, які з'єднують джерело з рештою кола, визначається винятково активною потужністю.

Залежності параметрів X_L , X_C , діючих значень напруг U_L , U_C та струму I від частоти наведені на рис. 4.20.

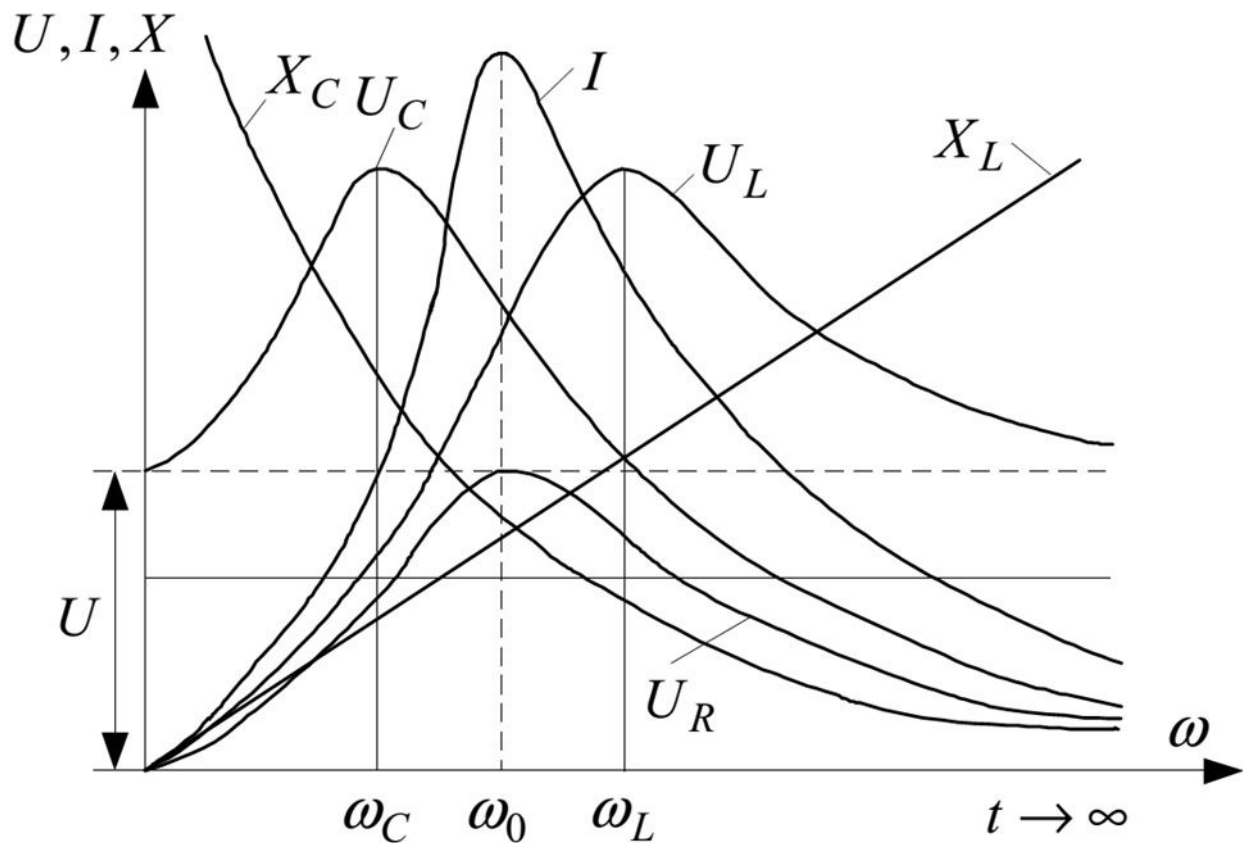


Рисунок 4.21

Як видно з рисунка, при $\omega = \omega_0$ струм у колі досягає максимального значення, а напруги U_L та U_C рівні між собою. Однак максимальних значень ці напруги досягають за відмінних від резонансних частот. Напруга U_C максимальна за частоти

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{(2L)^2}}, \quad (4.47)$$

тобто $\omega_C < \omega_0$, а напруга U_L максимальна за частоти

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R^2 C}{2L}}}. \quad (4.48)$$

тобто $\omega_L > \omega_0$. Як видно з (4.47), (4.48), ці частоти збігаються лише за умови $R=0$.

Величина $\rho = \sqrt{L/C}$ називається *характеристичним* опором контуру, а величина

$$q = \frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U} = \omega_0 \frac{L}{C} = \frac{\rho}{R} \quad (4.49)$$

– добротністю контуру. Вона визначає кратність перевищення напруги на індуктивному (ємнісному) елементі над напругою на вході кола в умовах резонансу. Величину $\rho = \sqrt{L/C}$, яка має розмірність опору, називають **хвильовим опором** контуру. Іншою величиною, яка характеризує резонансні властивості контуру, є величина $d = 1/q$, яка називається **згасанням**. Чим більша величина d , тим більше розходяться частоти ω_L та ω_C , а крива $I(\omega)$ має менше виражений максимум.

4.8.2 Резонанс струмів.

Розглянемо паралельне з'єднання віток з конденсатором та котушкою індуктивності (рис. 4.21).

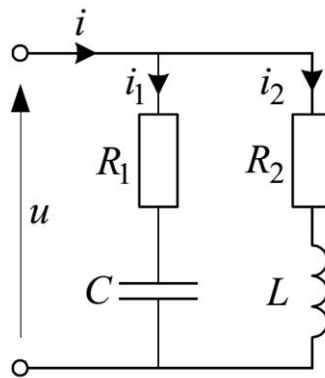


Рисунок 4.22

За визначенням в умовах резонансу на вході кола струм i повинен співпадати за фазою з напругою u . Це можливо, якщо вхідна реактивна провідність кола дорівнює нулю. Якщо позначити провідність першої вітки $\underline{Y}_1 = G_1 + jB_1$, а другої $\underline{Y}_2 = G_2 - jB_2$, то загальна провідність $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1 + G_2 + j(B_1 - B_2)$. Отже, умовою резонансу струмів є рівність $B_1 = B_2$, або в розгорнутій формі

$$\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}. \quad (4.50)$$

Оскільки $X_L = \omega L$, а $X_C = \frac{1}{\omega C}$, до рівняння (4.50) входять п'ять

величин: R_1 , R_2 , L , C , ω . Звідси випливає, що теоретично резонансу можна досягнути зміною будь-якої з них

Резонансну частоту з рівняння (4.50) визначають за формулою

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} \quad (4.51)$$

Приклад векторної діаграми для зображеного на рис. 4.21 електричного кола за умови резонансу наведений на рис. 4.22,а, а частотної характеристики струму – на рис. 4.22,б.

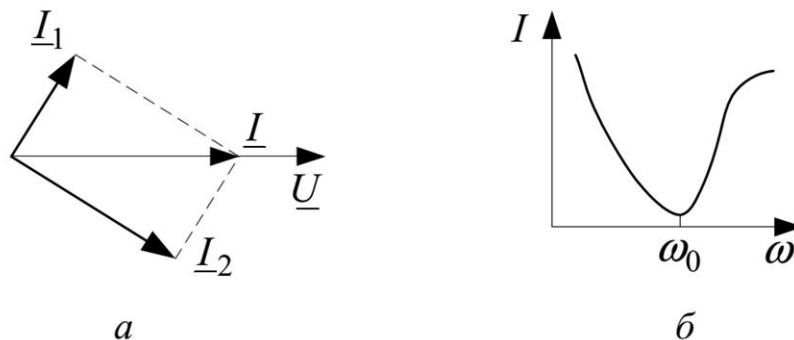


Рисунок 4.23

Розглянемо частковий випадок: $R_1=R_2=0$. За такої умови, як видно з (4.51), резонансна частота ω_0 визначається за тією самою формулою (4.39), що і в послідовному контурі.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

У паралельному контурі без втрат ($R_1=R_2=0$) струми i_1 та i_2 перебувають у протифазі, а струм i на вході кола дорівнює нулю. Енергія магнітного поля котушки упродовж чверті періоду зміни струму перетворюється в енергію електричного поля конденсатора, а в наступну чверть періоду повертається назад від конденсатора до котушки. Обміну енергією між електричним колом і джерелом не відбувається.

4.9 Електричні кола із взаємоіндуктивними зв'язками

Котушки індуктивності, які розміщені в одному або в різних електричних колах, можуть бути розташовані так, що магнітні силові лінії поля, створювані струмом однієї котушки, зчеплені з витками іншої котушки. У такому разі кажуть, що ці котушки індуктивно зв'язані, тобто між ними існує магнітний зв'язок, а потокозчеплення кожної котушки має дві складові, одна з яких зумовлена струмом цієї ж котушки, а друга – струмами інших котушок. Якщо дві котушки мають взаємоіндуктивний зв'язок, то струм другої (першої) котушки може створювати магнітний потік, який підсилює магнітне поле першої (другої) котушки або послаблює його. У першому випадку увімкнення котушок називається узгодженим, а в другому – зустрічним. На схемах для визначення характеру індуктивного зв'язку користуються умовними позначеннями: однойменні полюси (початки або кінці) котушок позначають крапками або зірочками.

Якщо струми в котушках спрямовані однаково стосовно однойменних затискачів, то вони увімкнені узгоджено. У цьому разі власне і взаємне потокозчеплення кожної котушки додають. Для двох індуктивно зв'язаних котушок

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12}; \psi_2 = \psi_{22} + \psi_{21}, \quad (4.52)$$

де ψ_{11} , ψ_{22} – потокозчеплення, зумовлені власними струмами відповідно i_1 та i_2 ; ψ_{12} – потокозчеплення взаємоіндукції першої котушки, зумовлене струмом i_2 другої котушки; ψ_{21} – потокозчеплення взаємоіндукції другої котушки, зумовлене струмом i_1 першої котушки.

Якщо струми котушок спрямовані по-різному стосовно однойменних затискачів, то вони увімкнені зустрічно, і тоді їх потокозчеплення

$$\psi_1 = \psi_{11} - \psi_{12}; \psi_2 = \psi_{22} - \psi_{21}. \quad (4.53)$$

Відношення потокозчеплення ψ_{12} взаємоіндукції першої котушки до струму i_2 другої котушки називається **взаємною** індуктивністю (одиниця вимірювання – *генрі* (Гн)). Тобто

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}. \quad (4.54)$$

Аналогічно для другої котушки

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1}, \quad (4.55)$$

причому $M_{12} = M_{21} = M$.

Взаємна індуктивність M у лінійних електричних колах не залежить від напрямків та значень струмів, а визначається тільки конструкціями котушок та їхній взаємним розташуванням. Для оцінювання ступеня магнітного зв'язку між котушками застосовують поняття коефіцієнта зв'язку

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Цей коефіцієнт може приймати значення від $k = 0$, у разі перпендикулярного розміщення осей котушок, до $k = 1$ – у разі співосного розміщення, коли потік однієї котушки повністю зчіплюється з потоком іншої та навпаки.

Поділу потокозчеплення котушки на потокозчеплення самоіндукції і взаємоіндукції відповідає поділ ЕРС, яка наводиться в ній, на ЕРС само- і взаємоіндукції. Зокрема, у разі двох індуктивно зв'язаних котушок у першій з них наводиться ЕРС

$$e_1 = -\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{(\psi_{11} \pm \psi_{12})}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M_{12} \frac{di_2}{dt}. \quad (4.56)$$

Аналогічно ЕРС другої котушки

$$e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{(\psi_{22} \pm \psi_{21})}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (4.57)$$

Отже, напруги на котушках, які мають взаємоіндуктивний зв'язок

$$u_1 = -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt}, \quad (4.58)$$

$$u_2 = -e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1}{dt},$$

які можна записати у комплексній формі

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M_{12} \underline{I}_2 \quad (4.59)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M_{21} \underline{I}_1.$$

Величина $X_M = \omega M$ має розмірність опору і називається індуктивним *опором взаємодукції*, а величина jX_M – комплексним опором взаємодукції.

Запишемо рівняння Кірхгофа для простого електричного кола із взаємодуктивними зв'язками, наведеного на рис. 4.24, в якому котушки індуктивності увімкнені зустрічно.

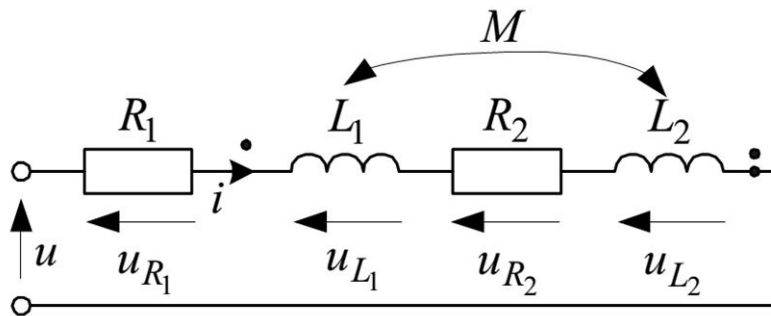


Рисунок 4.24

За другим законом Кірхгофа

$$u = u_{R1} + u_{L1} + u_{R2} + u_{L2},$$

де напруги на окремих елементах визначають за формулами

$$u_{R1} = iR_1; \quad u_{R2} = iR_2;$$

$$u_{L1} = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}; \quad u_{L2} = L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

У комплексній формі

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{I}(R_1 + R_2) + j(\omega L_1 - \omega M)\underline{I} + j(\omega L_2 - \omega M)\underline{I} = \\ &= \underline{I} [(R_1 + R_2) + j(X_{L1} + X_{L2} - 2X_M)]. \end{aligned}$$

Взаємодуктивні зв'язки можуть існувати не тільки між елементами одного кола, але й між електрично не зв'язаними індуктивними елементами.

Типовим прикладом електричного кола із взаємоіндуктивними зв'язками є трансформатор, електрична схема якого наведена на рис. 4.25. Обмотки трансформатора мають взаємоіндуктивний зв'язок за рахунок єдиного магнітного потоку, який є спільним для обох обмоток. Крім того, витки кожної обмотки охоплюються потоками розсіювання.

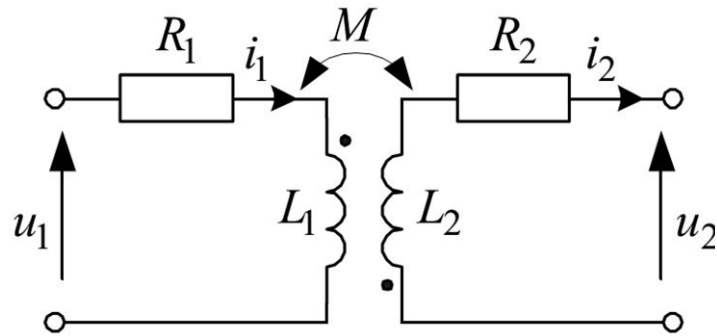


Рисунок 4.25

Рівняння, складені за другим законом Кірхгофа для первинної і вторинної обмоток трансформатора, мають вигляд

$$\begin{aligned}
 u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\
 -u_2 &= R_2 I_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt},
 \end{aligned}
 \tag{4.60}$$

де знак “+” перед M відповідає зображеному на рис. 4.25 узгодженому вмиканню первинної і вторинної обмоток.

Розрахунок електричних кіл із взаємоіндуктивними зв'язками можна здійснювати на основі законів Кірхгофа або за методом контурних струмів.

5 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

5.1 Загальна характеристика чотириполюсників

Численні електротехнічні пристрої, що призначені для перетворення та пересилання електричної енергії, мають два вхідні та два вихідні затискачі, які прийнято називати *полюсами*. Такі пристрої називаються *чотириполюсниками*. Прикладами чотириполюсників є двообмоткові трансформатори, однофазні випростувачі, підсилювачі, електричні фільтри, двопровідні лінії електропересилання тощо.

Під час експлуатації здебільшого необхідно і достатньо знати тільки залежності між вхідними та вихідними струмами і напругами.

Чотириполюсники позначають прямокутником з чотирма полюсами. На рис. 5.1 наведено загальноприйняті позначення полюсів чотириполюсника: 1 — 1' — вхідних, 2—2' — вихідних; напрямів струмів: I_1 та I_1' — вхідних полюсів, I_2 та I_2' — вихідних та напруг: U_1 — між вхідними полюсами, U_2 — вихідними.

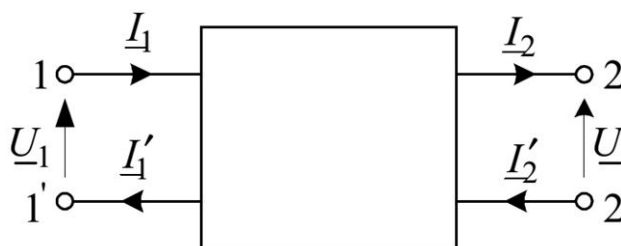


Рисунок 5.1

Чотириполюсники, до схеми яких не входять джерела електричної енергії, називаються **пасивними**, а ті, що мають у своєму складі джерела, — **активними**. Активні чотириполюсники позначають прямокутником з написом А, а пасивні — з написом П (рис. 5.2).

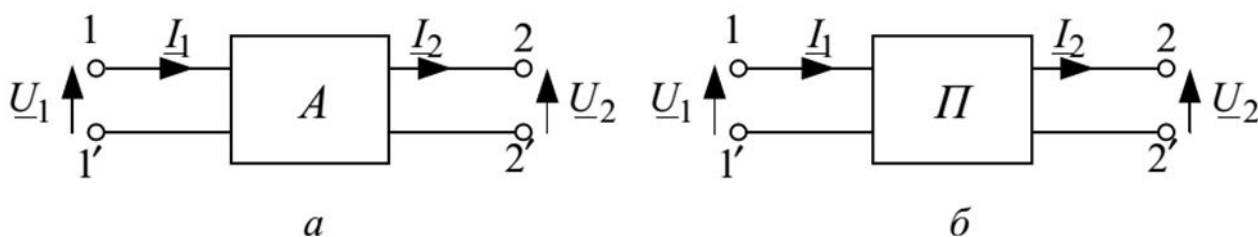


Рисунок 5.2

Зазвичай букву Π не пишуть, маючи на увазі, що чотириполіусник пасивний, а позначають лише активні чотириполіусники. Пасивний лінійний чотириполіусник може мати в своєму складі джерела енергії, якщо їхня дія взаємно компенсується так, що напруги на обох парах розімкнених та від'єднаних від зовнішніх кіл затискачів чотириполіусника дорівнюють нулю.

Інакше кажучи, чотириполіусник є активним, якщо струм $I_1 \neq 0$ у разі короткого замикання полюсів 1–1 або струм $I_2' \neq 0$ – у разі короткого замикання полюсів 2–2'.

Чотириполіусник, для якого виконується перший закон Кірхгофа окремо для входу ($I_1 - I_1' = 0$) та окремо для виходу ($I_2 - I_2' = 0$), називається **прохідним** чотириполіусником.

Чотириполіусник, у якого провідність $Y_{12} = I_1/U_2$ між входом та виходом дорівнює провідності $Y_{21} = I_2/U_1$ між виходом та входом, тобто $Y_{12} = Y_{21}$, називається **взаємним**, а якщо $Y_{12} \neq Y_{21}$ – **невзаємним**.

Чотириполіусник, у якого вхідний опір $Z_{1\text{вх}} = U_1/I_1$ стосовно полюсів 1–1' дорівнює вихідному опоріві $Z_{2\text{вх}} = U_2/I_2$ стосовно полюсів 2–2', тобто $Z_{1\text{вх}} = Z_{2\text{вх}}$, називається **симетричним**, а якщо $Z_{1\text{вх}} \neq Z_{2\text{вх}}$ – **несиметричним**.

Чотириполіусники, що містять керовані елементи (електронні та напівпровідникові прилади), називаються **керованими**.

Якщо параметри чотириполіусника не залежать від параметрів схем, що під'єднані до його зовнішніх полюсів, то такий чотириполіусник називається **автономним**, а якщо залежать – **неавтономним**.

5.2 Рівняння прохідних пасивних чотириполіусників

Активний чотириполіусник завжди можна звести до еквівалентного пасивного із ззовні винесеними додатковими джерелами.

Напруги і струми внутрішніх віток та вузлів прохідних чотириполіусників не розглядають, а беруть до уваги лише струми та напруги входу (U_1, I_1) і виходу (U_2, I_2). Співвідношення, які пов'язують між собою ці змінні, називаються **рівняннями чотириполіусника**, а коефіцієнти при змінних – **параметрами**.

A-форма рівнянь чотириполюсника визначає залежності вхідної напруги \underline{U}_1 та струму \underline{I}_1 від вихідної напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \quad (5.1)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2$$

або у матричній формі

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

де $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix}$ – матриця так званих **A**-параметрів, в якій: \underline{A}_{11} , \underline{A}_{22} —

безрозмірні коефіцієнти; \underline{A}_{12} – має розмірність опору, а \underline{A}_{21} – провідності.

Коефіцієнтам чотириполюсника можна фізично інтерпретувати:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_{20}} \text{ — комплексний коефіцієнт передачі напруги при } \underline{I}_2 = 0$$

(неробочий режим);

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_{1к}}{\underline{I}_{2к}} \text{ — комплексний коефіцієнт передачі струму при } \underline{U}_2 = 0 \text{ (коротке}$$

замикання);

$$\underline{A}_{12} = \underline{U}_{1к} / \underline{I}_{2к} \text{ — комплексний взаємний опір між входом та виходом при } \underline{U}_2 = 0;$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{I}_{10} / \underline{U}_{20} \text{ — комплексна взаємна провідність між входом та виходом при } \underline{I}_2 = 0.$$

Інколи застосовують інше, зручніше для написання позначення коефіцієнтів **A**-форми рівнянь чотириполюсника, яке не потребує написання індексів, згідно з яким

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}, \underline{A}_{12} = \underline{B}, \underline{A}_{21} = \underline{C}, \underline{A}_{22} = \underline{D},$$

а відповідні рівняння чотириполюсника мають вигляд

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2. \quad (5.3)$$

A-форма рівнянь є найпоширенішою для аналізу в системах пересилання електричної енергії. Вона дає змогу визначити струм \underline{I}_1 та напругу \underline{U}_1 на вході чотириполюсника, які необхідні для забезпечення на виході (у споживача) струму \underline{I}_2 та напруги \underline{U}_2 (тобто заданої потужності).

B-форма рівнянь чотириполюсника визначає залежності вихідних значень струму \underline{I}_2 та напруги \underline{U}_2 від вхідних – \underline{I}_1 та \underline{U}_1

B-форма рівнянь чотириполюсника має вигляд

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \underline{I}_1; \\ \underline{I}_2 &= \underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \underline{I}_1\end{aligned}\quad (5.4)$$

або в матричній формі

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{Bmatrix}, \quad (5.5)$$

де $\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{Bmatrix}$ – матриця **B** – параметрів.

Y-форму рівнянь чотириполюсника визначає залежності струмів \underline{I}_1 та \underline{I}_2 від напруг \underline{U}_1 та \underline{U}_2

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \quad (5.6)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2$$

або в матричній формі

$$\begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.7)$$

де $\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{Bmatrix}$ – матриця **Y**-параметрів.

Очевидно, що всі коефіцієнти рівнянь (5.6) мають розмірності провідностей. Відповідно фізична інтерпретація коефіцієнтів така: \underline{Y}_{11} – вхідна провідність при $\underline{U}_2 = 0$; \underline{Y}_{22} – вихідна провідність при $\underline{U}_1 = 0$; \underline{Y}_{12} – взаємна

провідність між входом та виходом при $\underline{U}_2 = 0$; \underline{Y}_{21} – взаємна провідність між виходом та входом при $\underline{U}_1 = 0$.

Z-форма рівнянь чотириполюсника визначає залежності напруг \underline{U}_1 та \underline{U}_2 від струмів \underline{I}_1 та \underline{I}_2

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2\end{aligned}\quad (5.8)$$

або в матричній формі

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.9)$$

де $\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{Bmatrix}$ – матриця **Z**-параметрів.

Усі коефіцієнти рівнянь (5.8) мають розмірності опорів.

G-форма рівнянь чотириполюсника визначає залежності струму \underline{I}_1 та напруги \underline{U}_2 від струму \underline{I}_2 та напруги \underline{U}_1 . Вона має вигляд

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{G}_{11}\underline{U}_1 + \underline{G}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{G}_{21}\underline{U}_1 + \underline{G}_{22}\underline{I}_2\end{aligned}\quad (5.10)$$

або в матричній формі

$$\begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.11)$$

де $\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{Bmatrix}$ – матриця **G**-параметрів.

H-форма рівнянь чотириполюсника визначає залежності напруги \underline{U}_1 та струму \underline{I}_2 від напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_1 . Вона має вигляд

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2\end{aligned}\quad (5.12)$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

де $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix}$ – матриця \mathbf{H} – параметрів.

Коефіцієнти усіх рівнянь пасивного прохідного чотириполюсника є сталими за умови незмінної частоти і визначаються тільки внутрішньою структурою чотириполюсника та параметрами елементів, з яких він складається. Коефіцієнти чотириполюсника не залежать від параметрів схем (джерел живлення та приймачів), що під'єднуються до зовнішніх полюсів чотириполюсника. Вони однозначно характеризують режим роботи кола, стосовно його зовнішніх полюсів.

Визначник системи рівнянь завжди дорівнює одиниці

$$\Delta A = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{21}\underline{A}_{12} = 1. \quad (5.14)$$

Це означає, що пасивний взаємний чотириполюсник однозначно характеризується тільки трьома незалежними параметрами.

Аналіз рівнянь форм \mathbf{A} та \mathbf{B} свідчить, що при взаємній заміні вхідних та вихідних полюсів $\underline{A}_{11} = \underline{B}_{22}$, $\underline{A}_{22} = \underline{B}_{11}$. На рис. 5.3, а, б, наведені схеми та відповідні рівняння чотириполюсника у разі живлення з боку виходу.

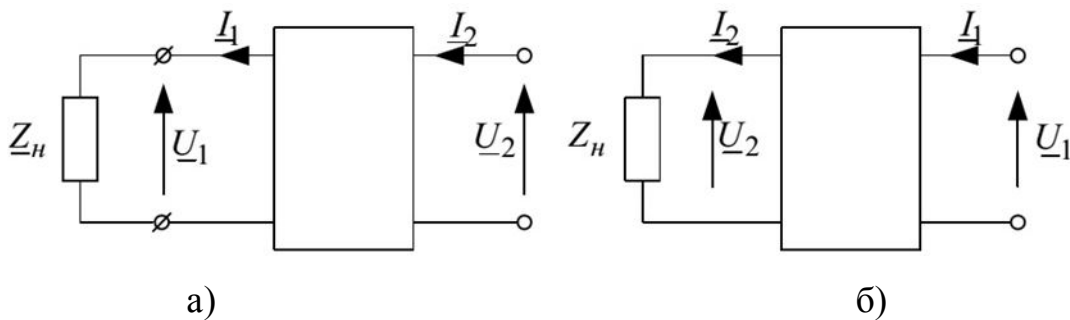


Рисунок 5.3

Рівняння схеми рис. 5.3, а мають вигляд

$$\underline{U}_2 = \underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12} \underline{I}_1;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}_1.$$

Рівняння схеми рис. 5.3,б

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{22}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{11}\underline{I}_2.$$

Отже, якщо поміняти вхід і вихід місцями, то в рівняннях А-форми необхідно коефіцієнти \underline{A}_{11} та \underline{A}_{22} поміняти місцями. Якщо за такої заміни режим роботи зовнішньої частини кола не зміниться, то такий чотириполюсник називається **симетричним**. Інакше кажучи, чотириполюсник симетричний, якщо у разі зміни місцями джерела і споживача не змінюються струми і напруги на вході та виході чотириполюсника, інакше чотириполюсник – **несиметричний**. Для симетричного чотириполюсника – $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, або $\underline{A} = \underline{D}$. Отже, симетричний чотириполюсник характеризується лише двома незалежними параметрами.

5.3 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника

За аналогією з двополюсниками параметри чотириполюсника можуть бути визначені з дослідів неробочого режиму та короткого замикання. Оскільки прохідний пасивний чотириполюсник характеризується трьома незалежними параметрами, то необхідно здійснити три експерименти – дослід неробочого режиму та короткого замикання за умови живлення з боку однієї пари полюсів і один із таких дослідів за умови живлення з боку другої пари полюсів.

А-форма рівнянь симетричного чотириполюсника

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \quad (5.15)$$

Дослід неробочого режиму ($\underline{I}_2 = 0$). Із (5.15) витікає, що в режимі відсутності навантаження на виході чотириполюсника $\underline{U}_{10} = \underline{A}_{11}\underline{U}_{20}$, $\underline{I}_{10} = \underline{A}_{21}\underline{U}_{20}$, отже,

$$\frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \underline{Z}_{10} = Z_{10} e^{j\varphi_{10}}, \quad (5.16)$$

де \underline{U}_{10} , \underline{I}_{10} — комплекси напруги та струму на вході чотириполюсника, \underline{Z}_{10} комплексний вхідний опір у цьому експерименті.

Дослід короткого замикання ($\underline{U}_2 = 0$). Із (5.15) витікає, що в режимі короткого замикання на виході чотириполюсника $\underline{U}_{1к} = \underline{A}_{12} \underline{I}_{2к}$, $\underline{I}_{1к} = \underline{A}_{22} \underline{I}_{2к}$. Звідси

$$\frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{1к}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \underline{Z}_{1к} = \underline{Z}_{1к} e^{j\varphi_{1к}}, \quad (5.17)$$

де $\underline{U}_{1к}$, $\underline{I}_{1к}$ – комплекси напруги та струму в цьому експерименті, а $\underline{Z}_{1к}$ – вхідний опір.

A-параметри через \underline{Z}_{10} , $\underline{Z}_{1к}$

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1к}}}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{1к}; \quad \underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{10}}. \quad (5.18)$$

Комплексні вхідні опори \underline{Z}_{10} , $\underline{Z}_{1к}$ чотириполюсника, як і двополюсника, можна виміряти за допомогою амперметра, вольтметра і фазометра (або ватметра).

5.4 Характеристичні параметри чотириполюсника

Параметри чотириполюсника називаються *характеристичними параметрами*. До них належать *характеристичний опір* і *коефіцієнт передачі*. Ці параметри називають *вторинними*, на відміну від коефіцієнтів рівнянь чотириполюсника, які називають *первинними*.

Характеристичним називають такий опір, за умови вмикання якого на вихід чотириполюсника його вхідний опір дорівнює цьому опорі. Очевидно, що несиметричний чотириполюсник має два характеристичні опори: \underline{Z}_{c1} і \underline{Z}_{c2} , один з яких визначається за умови живлення з боку вхідних полюсів (1-1'), а другий – з боку виходу (полюси 2-2'). Для симетричного чотириполюсника ці опори рівні між собою, тобто $\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c$, через це іноді опір \underline{Z}_c називають *повторним*. Якщо чотириполюсник навантажений на характеристичний опір $\underline{Z}_н = \underline{Z}_c$, то такий режим роботи називають *узгодженим*.

Виразимо характеристичний опір симетричного чотириполюсника через A-параметри. Для цього до виходу чотириполюсника (рис. 5.4) під'єднаємо опір навантаження $\underline{Z}_н = \underline{Z}_c$.

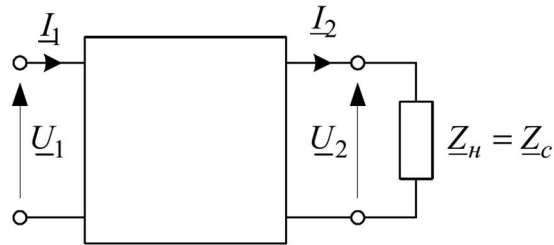


Рисунок 5.4

Підставимо в А-форму рівнянь чотириполюсника $\underline{U}_2 = \underline{Z}_c \underline{I}_2$

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 = \underline{A}_{11} \underline{Z}_c \underline{I}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2. \quad (5.19)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2 = \underline{A}_{21} \underline{Z}_c \underline{I}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2. \quad (5.20)$$

Поділивши рівняння (5.19) на рівняння (5.20), одержуємо

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{11} \underline{Z}_c \underline{I}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_c \underline{I}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2}$$

Звідки

$$\underline{A}_{11} \underline{Z}_c + \underline{A}_{12} = \underline{A}_{21} \underline{Z}_c^2 + \underline{A}_{22} \underline{Z}_c.$$

Для симетричного чотириполюсника $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, то характеристичний опір

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}. \quad (5.21)$$

Для визначення коефіцієнта передачі симетричного чотириполюсника знайдемо відношення напруги \underline{U}_1 на вході до напруги \underline{U}_2 на виході чотириполюсника. Враховуючи, що в режимі узгодженого навантаження $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c}$, одержуємо

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \frac{1}{\underline{Z}_c} \underline{A}_{12}\underline{U}_2.$$

Відношення вхідної напруги \underline{U}_1 до вихідної \underline{U}_2 визначається за формулою

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_c} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}, \quad (5.22)$$

Подібну процедуру здійснимо і для струмів, застосувавши вираз (5.20):

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{Z}_c \underline{I}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2;$$

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{A}_{22} + \underline{A}_{21} \underline{Z}_c = \underline{A}_{22} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}. \quad (5.23)$$

Для симетричного чотиріполюсника з (5.22) та (5.23) випливає, що у разі узгодженого навантаження

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}. \quad (5.24)$$

Для визначення співвідношення між напругами (струмами) на вході і виході чотиріполюсника за узгодженого навантаження підставимо в (5.24) комплексні значення $\underline{U}_1 = U_1 e^{j\psi_{u1}}$, $\underline{U}_2 = U_2 e^{j\psi_{u2}}$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1 e^{j\psi_{u1}}}{U_2 e^{j\psi_{u2}}} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{u1} - \psi_{u2})} = e^{(\alpha + j\beta)} = e^\alpha \cdot e^{j\beta}$$

де

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} \quad (5.25)$$

– **коефіцієнт згасання**, який характеризує зміну напруги (струму) за модулем між входом та виходом (безрозмірна величина, одиницею вимірювання якої є **непер**; згасання в один непер відповідає зміні напруги в $e = 2,72$ рази);

$$\beta = \psi_{u1} - \psi_{u2} \quad (5.26)$$

– **коефіцієнт фази**, який характеризує зсув фаз між напругами (струмами) на вході \underline{U}_1 та виході \underline{U}_2 чотиріполюсника.

Комплексна величина

$$\underline{\Gamma} = \alpha + j\beta = \gamma e^{j\theta} \quad (5.27)$$

називається **коефіцієнтом передачі**. Вона дорівнює відношенню вхідної напруги (струму) до вихідної напруги (струму) за узгодженого навантаження чотиріполюсника

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = e^{\underline{\Gamma}} \quad (5.28)$$

Оскільки коефіцієнт згасання $\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2}$, то завжди $\alpha \geq 0$, тобто від'ємним бути не може. Характеристичний опір і коефіцієнт передачі чотириполюсника називають вторинними параметрами, оскільки вони визначаються структурою та параметрами елементів схеми і не залежать від напруг та струмів на вході та виході.

Визначимо складові α та β коефіцієнта передачі через A -параметри чотириполюсника. Для цього праву частину рівняння (5.22)

$$\frac{U_1}{U_2} = \underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_c} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}},$$

запишемо у показниковій формі

$$\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = me^{j\theta}. \quad (5.29)$$

Отже, вирази (5.28) та (5.29) повинні бути ідентичними, тобто

$$e^{\underline{\Gamma}} = e^{(\alpha+j\beta)} = me^{j\theta}; \quad \alpha = \ln m; \quad \beta = \theta. \quad (5.30)$$

Вирази (5.29) та (5.30) дають змогу визначити коефіцієнт загасання α та коефіцієнт фази β через A -параметри чотириполюсника.

Коефіцієнт передачі $\underline{\Gamma}$ характеризує режим для узгодженого навантаження і є параметром чотириполюсника, на відміну від передавальної функції, яка визначається для будь-якого навантаження.

5.5 Заступні схеми взаємних чотириполюсників

Оскільки режим роботи взаємного чотириполюсника визначається трьома незалежними параметрами, то еквівалентна заступна схема повинна складатись не менше ніж із трьох елементів, параметри яких визначаються коефіцієнтами рівнянь чотириполюсника, що можуть утворити дві структури: у вигляді зірки або трикутника (так звані **T**- або **Π**-подібні заступні схеми).

T-подібна заступна схема (з'єднання зіркою) зображена на рис. 5.5.

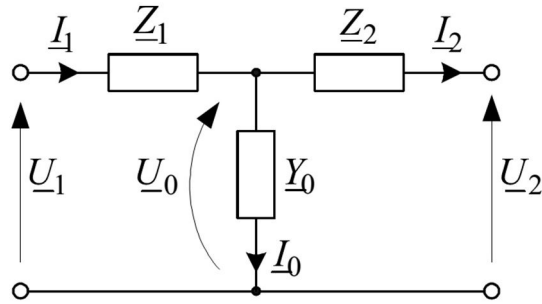


Рисунок 5.5

Виразимо вхідні величини \underline{U}_1 та \underline{I}_1 через вихідні \underline{U}_2 та \underline{I}_2 . За законами Кірхгофа

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_2; \quad (5.31)$$

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2. \quad (5.32)$$

Згідно із законом Ома з урахуванням (5.32)

$$\underline{I}_0 = \underline{Y}_0 \underline{U}_0 = \underline{Y}_0 (\underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2). \quad (5.33)$$

Підставивши (5.33) у (5.31), одержуємо залежність вхідного струму \underline{I}_1 від вихідних напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_0 (\underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2) + \underline{I}_2 = \underline{Y}_0 \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \underline{I}_2. \quad (5.34)$$

На підставі другого закону Кірхгофа

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_0 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2. \quad (5.35)$$

Підставивши (5.34) у (5.35) (5.35), одержуємо залежність вхідної напруги \underline{U}_1 від вихідних напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 (\underline{Y}_0 \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \underline{I}_2) + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2 = \\ &= (1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \underline{U}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Оскільки система рівнянь (5.1)

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2$$

та рівняння (5.34), (5.36) повинні бути еквівалентними, то коефіцієнти при координатах \underline{U}_2 та \underline{I}_2 повинні бути рівними. Звідки знаходимо

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0; & \underline{A}_{22} &= 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0; \\ \underline{A}_{12} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0; & \underline{A}_{21} &= \underline{Y}_0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

З рівнянь (5.37) можна виразити параметри \underline{Y}_0 , \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 через А-параметри

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21}; \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}}. \quad (5.38)$$

Для симетричного чотирьополосника $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, це означає, що $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$.

П-подібна заступна схема (з'єднання трикутником) зображена на рис.

5.6. З метою визначення її параметрів виразимо вхідну напругу \underline{U}_1 та вхідний струм \underline{I}_1 через вихідну напругу \underline{U}_2 та вихідний струм \underline{I}_2 .

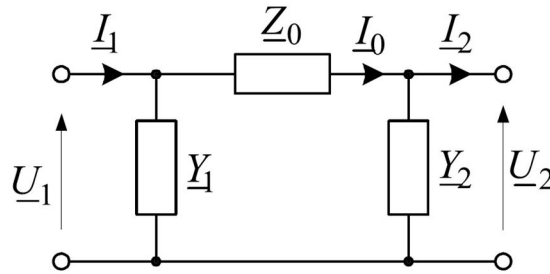


Рисунок 5.6

За другим законом Кірхгофа

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_0 (\underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{I}_2) + \underline{U}_2 = (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2. \quad (5.39)$$

Згідно з першим законом Кірхгофа з урахуванням (5.39) одержимо

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{I}_0 = \underline{Y}_1 ((1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2) + \underline{I}_2 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = \\ &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (5.40)$$

З рівнянь (5.39), (5.40) можна визначити залежності між А-параметрами та параметрами П-подібної заступної схеми. Вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2; & \underline{A}_{22} &= 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1; \\ \underline{A}_{12} &= \underline{Z}_0; & \underline{A}_{21} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; \\ \underline{Z}_0 &= \underline{A}_{12}; & \underline{Y}_1 &= \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{12}}; & \underline{Y}_2 &= \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Для симетричного чотирьополосника $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ і $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2$.

5.6 Рівняння симетричного чотириполюсника в гіперболічній формі

Виразимо \underline{A} -параметри симетричного чотириполюсника через характеристичні параметри. З порівняння (5.34)

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_0 (\underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2) + \underline{I}_2 = \underline{Y}_0 \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \underline{I}_2.$$

та (5.37)

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0; \quad \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0;$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0; \quad \underline{A}_{21} = \underline{Y}_0.$$

витікає, що

$$e^{\underline{\Gamma}} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}. \quad (5.42)$$

Враховуючи що для симетричного чотириполюсника $\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} = 1$, одержуємо

$$e^{-\underline{\Gamma}} = \underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}. \quad (5.43)$$

На підставі (5.42) та (5.43) одержимо вираз для визначення параметра \underline{A}_{11} (\underline{A}_{22}) за відомим характеристичним параметром $\underline{\Gamma}$

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = ch \underline{\Gamma}. \quad (5.44)$$

Для визначення параметрів \underline{A}_{12} та \underline{A}_{21} знайдемо різницю виразів (5.42) та (5.43). У результаті одержимо

$$\sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = sh \underline{\Gamma}. \quad (5.45)$$

Помноживши (5.45) на характеристичний опір \underline{Z}_c , з урахуванням (5.31)- (5.33) одержимо

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_c sh \underline{\Gamma}. \quad (5.46)$$

Поділивши (5.45) на \underline{Z}_c , з урахуванням (5.21) матимемо

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_c} sh \underline{\Gamma}. \quad (5.47)$$

З рівнянь (5.44), (5.46), (5.47) та (5.19), (5.20) отримаємо рівняння симетричного чотириполюсника у гіперболічній формі за узгодженого навантаження

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \Gamma + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \Gamma; \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \underline{U}_2 \operatorname{sh} \Gamma + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \Gamma. \end{aligned} \quad (5.48)$$

5.7 Способи з'єднання чотириполюсників

Послідовне з'єднання передбачає, що входні і відповідно вихідні струми чотириполюсників є однаковими. На рис. 5.7 наведено схему двох послідовно з'єднаних чотириполюсників N та M . Як видно зі схеми

$$\underline{I}_{1N} = \underline{I}_{1M}; \quad \underline{I}_{2N} = \underline{I}_{2M}, \quad (5.49)$$

тобто рівняння (5.49) задовольняють умовам послідовного з'єднання на вході і на виході.

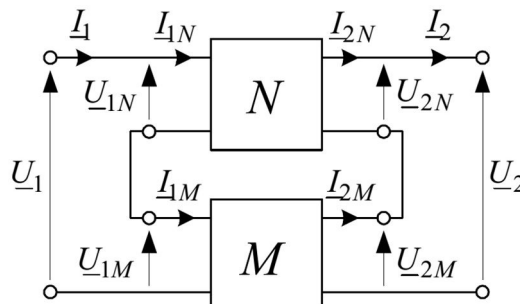


Рисунок 5.7

Два чотириполюсники, за аналогією із двополюсниками, можна перетворити в один еквівалентний чотириполюсник. Умова перетворення

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{1N} = \underline{I}_{1M}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{2N} = \underline{I}_{2M} \\ \underline{U}_1 &= \underline{U}_{1N} + \underline{U}_{1M}; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{2N} + \underline{U}_{2M}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

У цьому разі доцільно скористатися Z -формою рівнянь

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

оскільки необхідно додавати напруги окремих чотириполіусників і на вході, і на виході. Запишемо рівняння для чотириполіусників N та M з урахуванням позначень на рис. 5.7

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1N} &= \underline{Z}_{11N}\underline{I}_{1N} + \underline{Z}_{12N}\underline{I}_{2N}; \\ \underline{U}_{1M} &= \underline{Z}_{11M}\underline{I}_{1M} + \underline{Z}_{12M}\underline{I}_{2M}; \\ \underline{U}_{2N} &= \underline{Z}_{21N}\underline{I}_{1N} + \underline{Z}_{22N}\underline{I}_{2N}; \\ \underline{U}_{2M} &= \underline{Z}_{21M}\underline{I}_{1M} + \underline{Z}_{22M}\underline{I}_{2M}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Після підстановки у (5.50) одержимо рівняння еквівалентного чотириполіусника у Z -формі

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (\underline{Z}_{11N} + \underline{Z}_{11M})\underline{I}_1 + (\underline{Z}_{12N} + \underline{Z}_{12M})\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= (\underline{Z}_{21N} + \underline{Z}_{21M})\underline{I}_1 + (\underline{Z}_{22N} + \underline{Z}_{22M})\underline{I}_2 \end{aligned} \quad (5.52)$$

або у матричній формі

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} = \underline{Z}_{MN} \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.53)$$

де $\underline{Z}_{MN} = \underline{Z}_M + \underline{Z}_N$, \underline{Z}_{MN} , \underline{Z}_M , \underline{Z}_N – матриці еквівалентного чотириполіусника та складових чотириполіусників відповідно M і N .

Отже, перетворення чотириполіусників при послідовному з'єднанні зводиться до додавання матриць Z -параметрів складових чотириполіусників.

Паралельне з'єднання передбачає, що напруги відповідно на вході і виході чотириполіусників однакові (рис. 5.8).

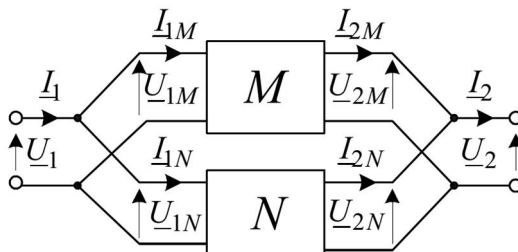


Рисунок 5.8

Очевидно, що

$$\underline{U}_{1M} = \underline{U}_{1N}; \underline{U}_{2M} = \underline{U}_{2N}. \quad (5.54)$$

Зображені чотириполюсники M і N можна перетворити в один еквівалентний. Умови перетворення

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{1M} + \underline{I}_{1N}; \underline{U}_1 = \underline{U}_{1M} = \underline{U}_{1N}; \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{2M} + \underline{I}_{2N}; \underline{U}_2 = \underline{U}_{2M} = \underline{U}_{2N}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

У цьому разі для здійснення перетворення згідно з (5.55) доцільно скористатись Y -формою рівнянь (5.6) чотириполюсника

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2. \end{aligned}$$

Підставивши рівняння (5.6) у (5.55), за аналогією з здійсненими вище перетвореннями, одержуємо

$$\underline{Y}_{MN} = \underline{Y}_M + \underline{Y}_N. \quad (5.56)$$

Перетворення чотириполюсників за паралельного з'єднання зводиться до додавання матриць Y -параметрів складових чотириполюсників.

5.8 Рівняння активних автономних чотириполюсників

Як зазначалось в п. 5.1, у активних автономних чотириполюсниках за відсутності під'єднаних до зовнішніх полюсів джерел полюсні струми (I_1 , I_2) та міжполюсні напруги (U_1 , U_2) як на вході, так і на виході не дорівнюють нулю. Система рівнянь вигляду (5.1)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}$$

для цього випадку стає не чинною, оскільки у разі короткого замикання первинних 1-1' та відповідно вторинних 2-2' виводів (полюсів), тобто при $\underline{U}_1 = 0$ та $\underline{U}_2 = 0$ струми \underline{I}_1 та \underline{I}_2 також повинні дорівнювати нулю, що не відповідає умовам автономності та активності, а саме $\dot{I}_{1к} \neq 0$; $\dot{I}_{2к} \neq 0$. Це стосується i неробочого режиму, коли при $\dot{I}_1 = 0$, $\dot{I}_2 = 0$, напруги неробочого режиму на

вході \underline{U}_{10} та на виході \underline{U}_{20} не дорівнюють нулю.

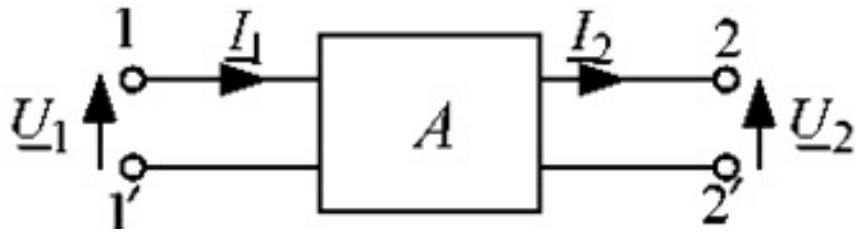


Рисунок 5.9

Для формування рівнянь активного автономного чотириполюсника (рис. 5.9) застосуємо теорему про активний двополюсник окремо для входу та виходу. У результаті одержимо дві можливі еквівалентні схеми: варіант з джерелом напруги (рис. 5.10) та варіант з джерелом струму (рис. 5.11).

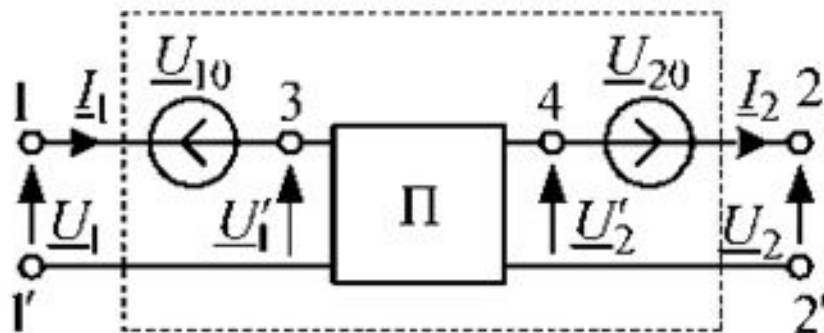


Рисунок 5.10

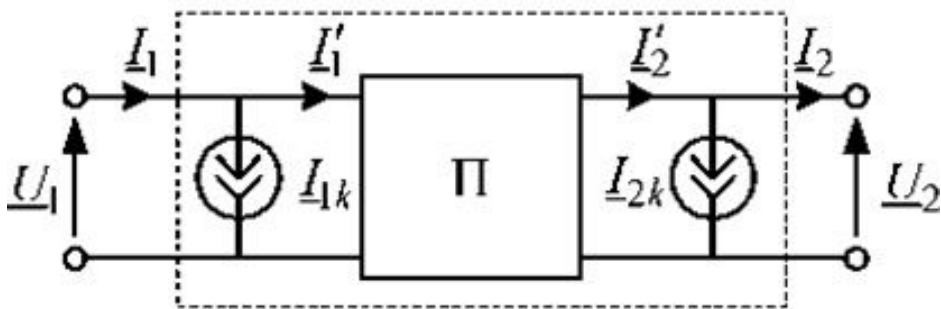


Рисунок 5.11

Сформуємо рівняння для одержаних еквівалентних схем.

Чотириполюсник рис. 5.10 стосовно полюсів 3-1' та 4-2' є пасивним, А-форма рівнянь якого має вигляд

$$\underline{U}'_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}'_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2; \underline{I}'_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}'_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2. \quad (5.57)$$

Очевидно, що

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{10} + \underline{U}'_1; \underline{U}_2 = \underline{U}_{20} + \underline{U}'_2 \text{ (або } \underline{U}'_2 = \underline{U}_2 - \underline{U}_{20}); \underline{I}'_1 = \underline{I}_1; \underline{I}'_2 = \underline{I}_2. \quad (5.58)$$

З рівнянь (5.57) і (5.58), одержуємо рівняння активного автономного чотириполюсника у вигляді

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 + (\underline{U}_{10} - \underline{A}_{11}\underline{U}_{20}); \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 - \underline{A}_{21}\underline{U}_{20}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Для варіанта схеми з джерелом струму рівняння (5.57) необхідно перетворити.

Згідно з рис. 5.11

$$\underline{I}'_1 = \underline{I}_1 - \underline{I}_{1\kappa}; \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}_2 + \underline{I}_{2\kappa}; \quad \underline{U}'_1 = \underline{U}_1; \quad \underline{U}'_2 = \underline{U}_2. \quad (5.60)$$

Підставляючи (5.60) в (5.57), одержуємо інший вигляд рівнянь активного автономного чотириполюсника

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_{2\kappa}; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 + \underline{I}_{1\kappa} + \underline{A}_{22}\underline{I}_{2\kappa}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Отже, для аналізу активних автономних чотириполюсників можна використовувати методи розрахунку пасивних чотириполюсників.

6 ТРИФАЗНІ КОЛА

6.1 Основні поняття та визначення

Сукупність кількох однофазних кіл, у яких діють зсунені за фазою одна щодо іншої ЕРС однакової частоти, які створені одним джерелом енергії, називають багатофазним електричним колом. Окремі частини цього кола називають **фазами**. Отже, поняття фази в електротехніці має подвійне значення: аргумент $(\omega t + \psi)$ синусоїдно-змінної величини (див. п. 4.1) і частина багатофазної системи електричного кола. Зсув фаз між ЕРС, напругами та струмами m -фазної системи становить $2\pi/m$. Багатофазну систему називають незв'язаною, якщо окремі фази не мають між собою електричного зв'язку (6.1).

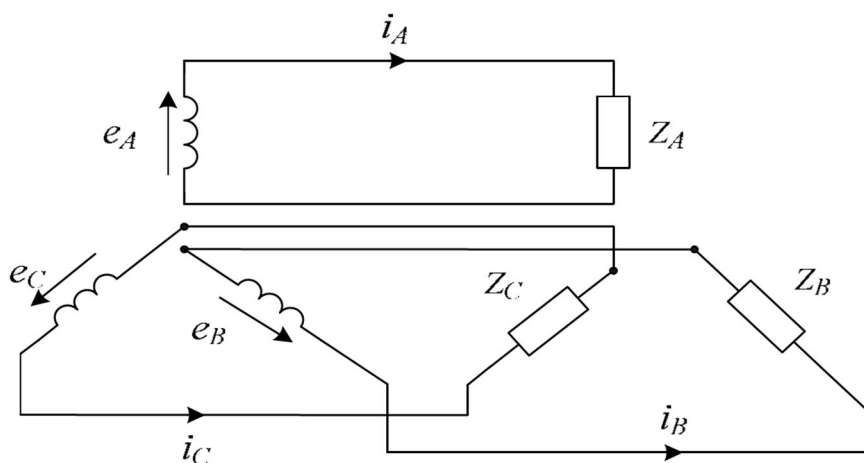


Рисунок 6.1

З'єднання кожної фази зі споживачем за допомогою двох окремих проводів економічно недоцільно. З метою зменшення кількості з'єднувальних проводів застосовують зв'язані багатофазні системи, в яких фази з'єднані між собою відповідним способом в одне багатофазне електричне коло. Економія провідникових матеріалів є однією з переваг багатофазних систем.

Коло симетричне, якщо симетрична система ЕРС (напруг) і симетричне навантаження, тобто однакові комплексні опори фаз. Якщо миттєве значення потужності багатофазної системи не залежить від часу, її називають зрівноваженою, а якщо залежить від часу, то незрівноваженою. Ця властивість є важливою, оскільки момент на валу багатофазного двигуна як елемента

зрівноваженої багатофазної системи не змінюється під час обертання його ротора.

В електроенергетиці широкого застосування набули трифазні кола (трифазні електричні машини, трифазні лінії електропередавання тощо). Майже всю електричну енергію виробляють за допомогою трифазних генераторів і передають до споживачів за допомогою трифазних електричних мереж. Від трифазної мережі живляться не тільки трифазні, але й однофазні споживачі. Характерною ознакою трифазного кола є наявність у ньому трифазного джерела, в якому діють синусоїдні ЕРС однакової частоти, які зсунені між собою за фазою на незмінний у часі кут. Сукупність ЕРС, які діють у трифазному електричному колі, називають **трифазною системою** ЕРС, а сукупність струмів і напруг у її фазах – трифазною системою відповідно струмів і напруг. Трифазна система синусоїдних ЕРС (струмів) називається **симетричною**, якщо вони мають однакові амплітуди і зсунені між собою за фазою на однаковий кут $\alpha = 120^\circ$.

Трифазне коло складається з трьох основних частин: джерела трифазної системи ЕРС, лінії пересилання та одного або кількох трифазних приймачів. Джерелом енергії у трифазному колі слугує трифазний генератор, який має три обмотки на статорі, початки яких позначимо літерами A, B, C , а кінці – X, Y, Z . Оскільки осі обмоток статора зсунені в просторі на кут 120° , то під час обертання ротора, який є електромагнітом, у них індукуються ЕРС, що мають однакові амплітуди і зсунені в часі за фазою на кут 120° .

Трифазну систему ЕРС генератора можна записати у вигляді

$$e_A = E_{mA} \sin \omega t;$$

$$e_B = E_{mB} \sin(\omega t - 120^\circ) \quad (6.1)$$

$$e_C = E_{mC} \sin(\omega t + 120^\circ)$$

Часові діаграми для симетричної ($E_{mA}=E_{mB}=E_{mC}=E_m$) трифазної системи ЕРС зображені на рис. 6.2,а, а відповідна векторна діаграма – на рис. 6.2,б.

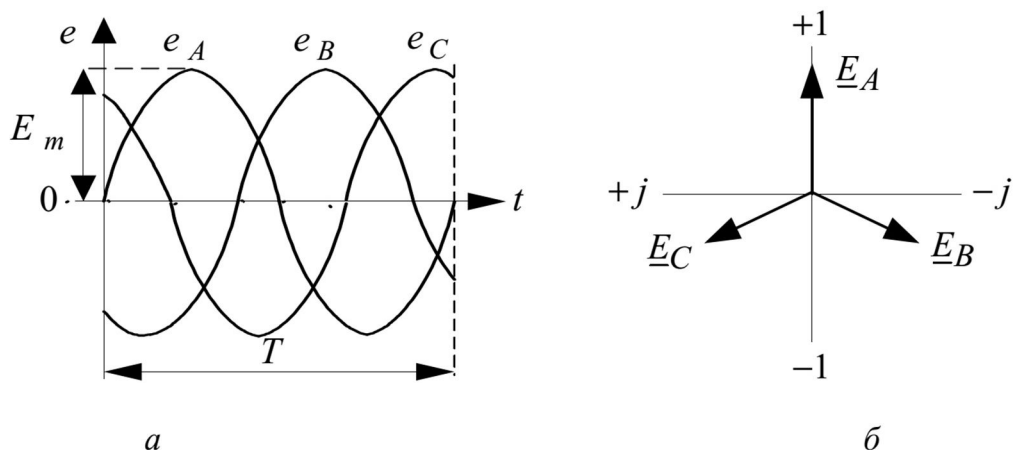


Рисунок 6.2

Для запису значень напруг та струмів у трифазних колах застосовують комплексну величину

$$\underline{a} = e^{j120^\circ} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (6.2)$$

яку називають **оператором** трифазної системи. Множення вектора на \underline{a} рівноцінно його повороту на кут 120° проти годинникової стрілки без зміни його модуля

$$\underline{a}^2 = e^{-j120^\circ} = e^{j240^\circ} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0.$$

Користуючись оператором \underline{a} , можна виразити ЕРС фаз B та C через ЕРС фази A

$$\underline{E}_B = \underline{a}^2 \underline{E}_A; \quad \underline{E}_C = \underline{a} \underline{E}_A. \quad (6.3)$$

Для трифазної системи важливо, в якій послідовності ЕРС фаз набувають однакових значень, наприклад, додатних максимумів. Цю послідовність називають порядком чергування фаз, або, просто, послідовністю фаз. Послідовність $ABCA...$ має назву **прямої послідовності**. Послідовність $ACBA...$ має протилежний порядок чергування фаз і називається **зворотною послідовністю**.

У симетричній трифазній системі ЕРС фаз рівні за амплітудою і відстають за фазою одна щодо іншої на кути $k\frac{2\pi}{3}$, де $k = 0, 1, 2$. При $k = 1$ одержуємо симетричну систему прямої послідовності, в якій ЕРС досягають максимумів в порядку ABC , тобто

$$\underline{E}_{A1} = E; \underline{E}_{B1} = \underline{a}^2 \underline{E}_{A1}; \underline{E}_{C1} = \underline{a} \underline{E}_{A1}. \quad (6.4)$$

При $k = 2$ одержимо симетричну систему зворотної послідовності

$$\underline{E}_{A2} = \underline{E}; \underline{E}_{B2} = \underline{a} \underline{E}_{A2}; \underline{E}_{C2} = \underline{a}^2 \underline{E}_{A2}, \quad (6.5)$$

в якій ЕРС фаз досягають максимумів у зворотному порядку.

При $k = 0$ одержимо систему **нульової** послідовності, в якій ЕРС усіх трьох фаз досягають максимумів одночасно. Її можна записати у вигляді

$$\underline{E}_{A0} = \underline{E}_{B0} = \underline{E}_{C0} = \underline{E}_0. \quad (6.6)$$

Усе наведене стосовно ЕРС стосується також трифазних систем напруг та струмів. Для симетричних систем прямої та зворотної послідовностей сума ЕРС усіх фаз дорівнює нулю, а для нульової послідовності $-3\underline{E}$, оскільки вони мають однакові початкові фази.

Режим роботи трифазного кола називається **симетричним**, якщо в ньому симетричні усі трифазні навантаження і діє симетрична система ЕРС. У цьому разі струми і напруги утворюють також симетричні системи.

6.2 Способи з'єднання фаз у трифазних колах

Загальноприйнято на електричній схемі трифазний генератор зображувати у вигляді трьох обмоток, розміщених під кутом 120° одна щодо іншої (рис. 6.3). Додатні напрямки ЕРС фаз генератора прийнято спрямовувати від кінців фаз (X, Y, Z) до їх початків (A, B, C), струмів у лінійних проводах – від джерела до приймача, а в нейтральному проводі – від нейтральної точки приймача до нейтральної точки джерела.

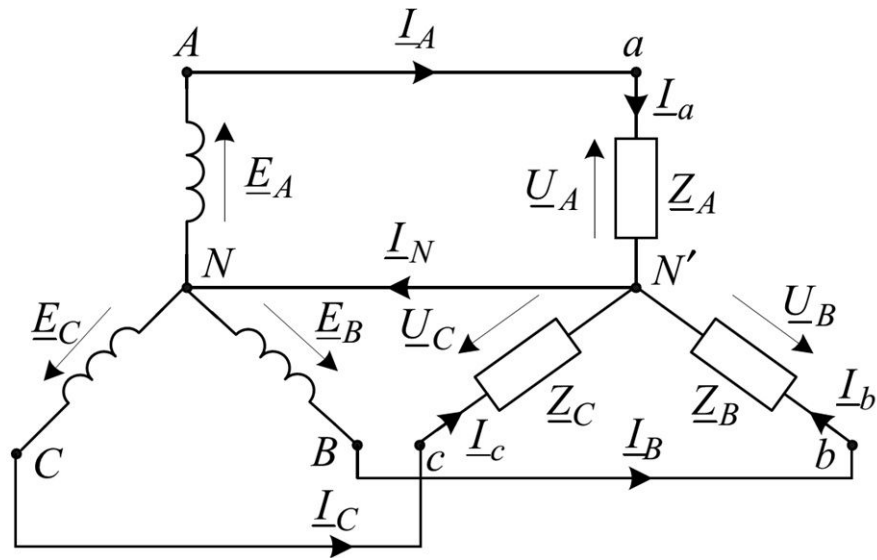


Рисунок 6.3

Відомо два основних способи з'єднання обмоток генератора, трансформатора та приймачів у трифазних колах: **зіркою** і **трикутником**, які дають змогу зменшити кількість проводів, що необхідні для з'єднання генератора з навантаженням. Вітки зірки та трикутника називаються **фазами**. Відповідно струми, напруги, потужності окремих фаз називають фазними величинами (I_{ϕ} , U_{ϕ} , E_{ϕ} , P_{ϕ} , Q_{ϕ} , S_{ϕ}).

З'єднання зіркою передбачає, що кінці фаз генератора (споживача) об'єднують в один вузол N , який називається нейтральною точкою або, просто, **нейтраллю**. Провід, що з'єднує нейтральні точки генератора (N) та приймача (N'), називається **нейтральним (нульовим) проводом**. Решта три проводи, які з'єднують генератор з приймачем, називають **лінійними**. Напруга між початком і кінцем однієї фази називається **фазною**, а між кінцями різних фаз – **лінійною**. Напруги між лінійними проводами і струми в цих проводах називають відповідно лінійними напругами та струмами ($U_{\text{л}}$, $I_{\text{л}}$). У разі з'єднання зіркою (рис. 6.3) лінійні напруги ($E_{\text{ЛС}}$) визначаються як різниці фазних напруг

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A, \quad (6.7)$$

а їхні додатні напрямки (як різниця двох векторів) спрямовані від другого індекса до першого.

Трифазну лінію з нейтральним проводом називають **чотирипровідною**, а без нього – **трипровідною**. Зображену на рис. 6.3 схему електричного кола, в

якій фази генератора та приймача з'єднані зіркою, називають “*зірка–зірка*” з *нульовим проводом*. Особливістю чотирипровідної лінії є те, що зміна навантаження в одній фазі не впливає на роботу інших фаз, тому що нейтральний провід забезпечує незмінність напруг на них.

З'єднання обмоток генератора *трикутником* передбачає, що кінець першої обмотки з'єднується з початком другої, кінець другої – з початком третьої, а кінець третьої – з початком першої. В результаті три фази утворюють замкнений трикутник. За такою ознакою формується з'єднання трикутником і приймача. Спільні точки кожної пари фаз з'єднуються з навантаженням за допомогою лінійних проводів (рис. 6.4). Таке з'єднання називають “*трикутник–трикутник*”. Додатний напрямок струмів у вітках трикутника приймача вибиратимемо у напрямі *abca*. Отже, на відміну від зірки, струм у трикутнику позначають літерою з двома індексами, які вказують на умовно додатні напрямки струму. Наприклад, позначення I_{ab} означає, що додатний напрямок струму від точки “a” до точки “b”.

Зауважимо, що з'єднання обмоток генератора трикутником не є коротким замиканням, оскільки в симетричній системі сума ЕРС в контурі дорівнює нулю, тому, якщо до вершин *ABC* трикутника не під'єднане навантаження, то по обмотках генератора струм не протікає.

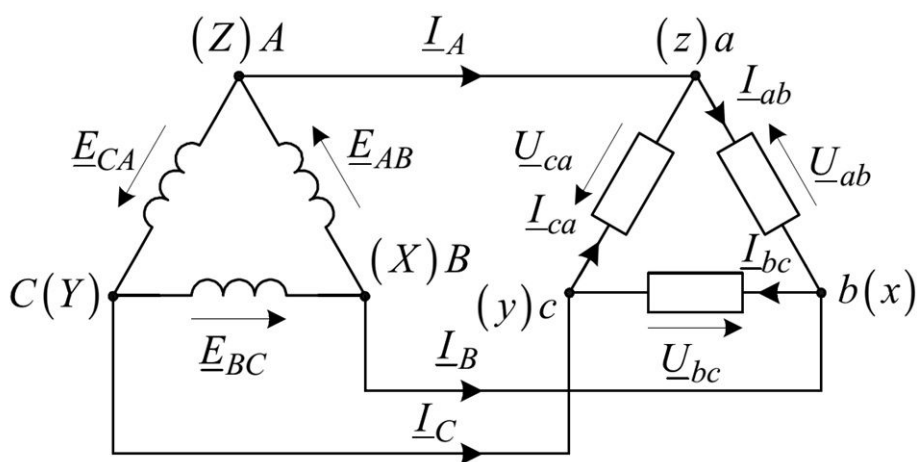


Рисунок 6.4

В одному і тому самому колі джерела живлення та приймачі можуть бути з'єднані різними способами.

6.3 Розрахунок трифазних кіл

6.3.1 З'єднання “зірка – зірка”.

Розглянемо трифазне коло, в якому фази генератора і приймача з'єднані зіркою з нульовим проводом (рис. 6.3). Зазвичай опори проводів значно менші від опорів фаз приймача, тому їх можна здебільшого не враховувати. У цьому разі фазні напруги споживача дорівнюватимуть відповідним фазним напругам джерела (генератора чи вторинної обмотки трансформатора), тобто $\underline{U}_a = \underline{U}_A$, $\underline{U}_b = \underline{U}_B$, $\underline{U}_c = \underline{U}_C$. Якщо комплексні опори фаз приймача відповідно дорівнюють \underline{Z}_a , \underline{Z}_b , \underline{Z}_c , то, прийнявши таким, що дорівнює нулю опір нейтрального проводу, одержуємо струм у фазах приймача

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}; \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b}; \quad \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c}. \quad (6.8)$$

У симетричному трифазному колі ($\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}$) у разі з'єднання фаз генератора зіркою лінійні напруги (\underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA}) за модулем в $\sqrt{3}$ разів більші від фазних (\underline{U}_A , \underline{U}_B , \underline{U}_C), а діючі значення лінійних струмів (I_A , I_B , I_C) дорівнюють діючим значенням фазних струмів, тобто

$$U_L = \sqrt{3} U_\phi, \quad I_L = I_\phi.$$

За першим законом Кірхгофа струм у нульовому провіднику дорівнює сумі струмів фаз

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C.$$

Якщо трифазне коло симетричне, то струми \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C будуть однакові за діючим значенням і відставати за фазою від відповідних напруг на однаковий кут φ (рис. 6.5), величина якого визначається комплексним опором навантаження \underline{Z} . Отже, їх сума дорівнює нулю ($I_N = 0$), звідки випливає, що у разі симетричного навантаження струм у нульовому провіднику не протікає, а отже, він не потрібний. У цьому разі достатньо знайти струм в одній фазі, оскільки решта струмів будуть такими самими за величиною, і зсунені за фазою на кут 120° . Тому їх можна визначити на підставі струму фази А за формулами

$$\underline{I}_B = \underline{a}^2 \underline{I}_A; \quad \underline{I}_C = \underline{a} \underline{I}_A.$$

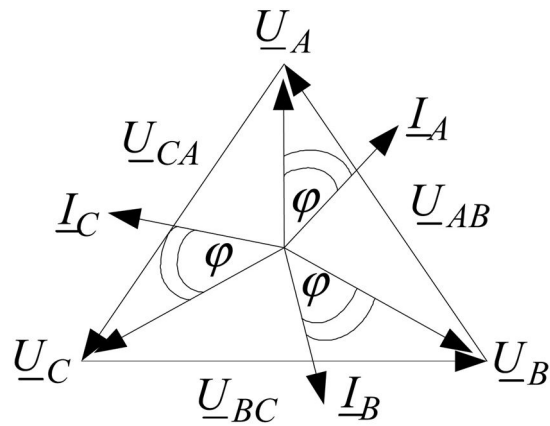


Рисунок 6.5

Розглянемо особливості розрахунку несиметричних трифазних кіл за з'єднання джерела та приймача зіркою (рис. 6.6). Такий спосіб з'єднання у трифазних мережах є найпоширенішим, тому таку схему можна розглядати як базову.

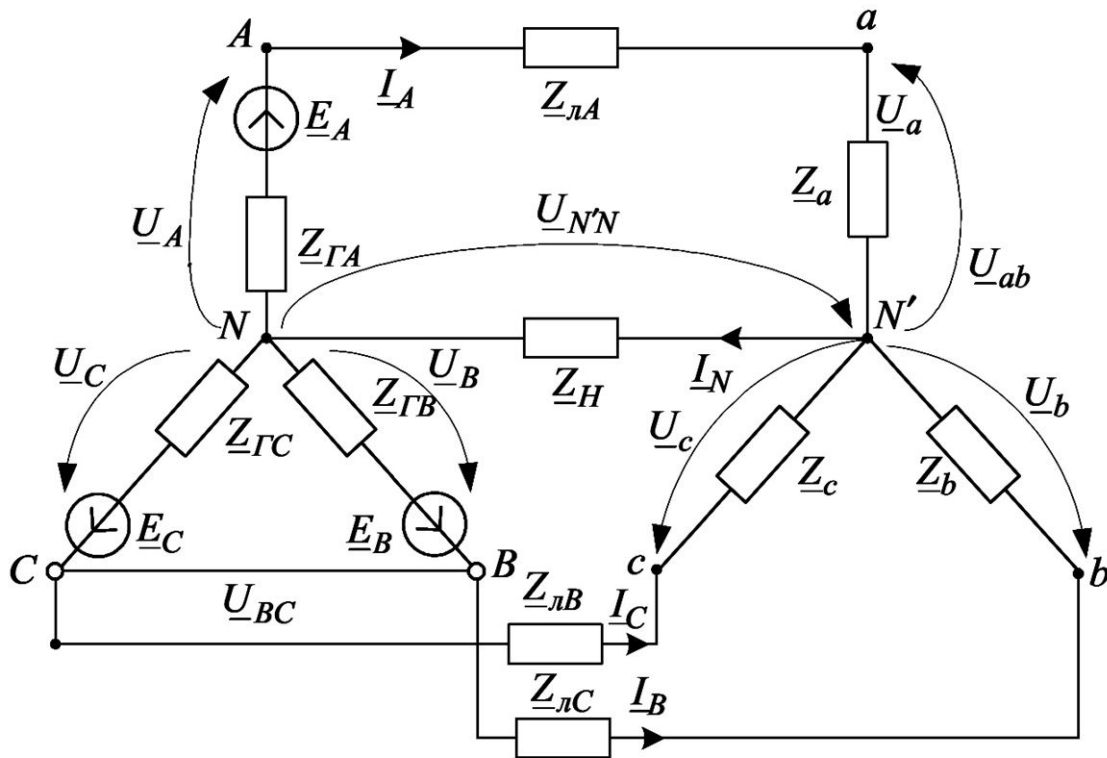


Рисунок 6.6

На рис. 6.6 позначено: \underline{E}_A , \underline{E}_B , \underline{E}_C – система фазних ЕРС джерела; \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA} , \underline{U}_{ab} , \underline{U}_{bc} , \underline{U}_{ca} – системи лінійних напруг джерела та приймача відповідно; \underline{Z}_{GA} , \underline{Z}_{GB} , \underline{Z}_{GC} , $\underline{Z}_{лA}$, $\underline{Z}_{лB}$, $\underline{Z}_{лC}$, \underline{Z}_a , \underline{Z}_b , \underline{Z}_c , \underline{Z}_N – комплексні опори фаз відповідно генератора, лінії, навантаження та нейтрального проводу; \underline{U}_a , \underline{U}_b , \underline{U}_c ,

$\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c$ – системи фазних напруг та струмів приймача; \underline{I}_N – струм нейтрального проводу; $\underline{U}'_{N'N}$ – напруга між нейтральними точками приймача та генератора.

Для розрахунку такого трифазного кола доцільно скористатись методом вузлових напруг, згідно з яким напругу між нульовими точками генератора та приймача визначають за формулою

$$\underline{U}'_{N'N} = \frac{\underline{Y}_A \underline{E}_A + \underline{Y}_B \underline{E}_B + \underline{Y}_C \underline{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (6.9)$$

де

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_{\Gamma A} + \underline{Z}_{\lambda A} + \underline{Z}_a};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_{\Gamma B} + \underline{Z}_{\lambda B} + \underline{Z}_b};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_{\Gamma C} + \underline{Z}_{\lambda C} + \underline{Z}_c}$$

– комплексні провідності фаз; \underline{Y}_N – комплексна провідність нейтрального проводу.

Якщо нейтральний провід відсутній, то у формулі (6.9) необхідно прийняти $\underline{Y}_N = 0$.

Струми генератора, лінії та приймача визначають за формулами

$$\underline{I}_A = \underline{I}_a = \underline{Y}_A (\underline{E}_A - \underline{U}'_{N'N});$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_b = \underline{Y}_B (\underline{E}_B - \underline{U}'_{N'N}); \quad (6.10)$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_c = \underline{Y}_C (\underline{E}_C - \underline{U}'_{N'N}).$$

На рис. 6.7 побудована векторна діаграма напруг для зображеної на рис. 6.6 схеми. З метою спрощення під час побудови діаграми прийнято, що $\underline{Z}_{\Gamma} \approx 0$, $\underline{Z}_{\lambda} \approx 0$, отже, точки $A - a$, $B - b$, $C - c$ на векторній діаграмі збігаються.

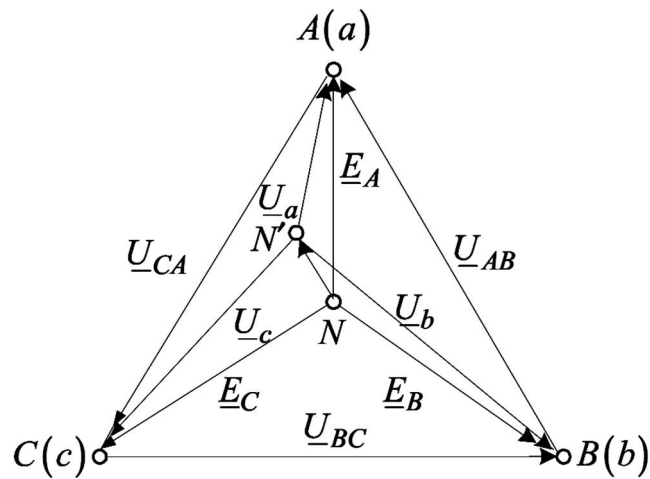


Рисунок 6.7

У разі несиметричного навантаження фаз, не зважаючи на симетрію напруги живлення, система фазних напруг приймача стає несиметричною, а це зумовлює появу напруги між нейтральними точками приймача та генератора, тобто $U_{N'N} \neq 0$. Таке явище називається **перекосом** напруг. Зменшення перекосу напруг можна досягти, як видно з (6.9), за рахунок збільшення провідності Y_N нейтрального проводу. Отже, призначення нейтрального проводу – симетрувати систему фазних напруг за довільних значень опорів приймача.

До чотирипровідних трифазних ліній часто під'єднують однофазні споживачі, кожен з яких вмикають між затискачами однієї з фаз і нейтральним проводом, завдяки чому кожен споживач перебуває під однаковою напругою. Це було б неможливим без наявності нульового проводу, оскільки у цьому разі зміщується нейтральна точка N' і, як наслідок, напруги на приймачах різних фаз були б різними. За наявності нейтрального проводу система фазних напруг приймача залишається практично симетричною, незалежно від опорів окремих фаз приймача, а зміна опору приймача в одній фазі не впливає на роботу інших фаз приймача.

6.3.2 З'єднання “трикутник – трикутник”.

Розглянемо особливості розрахунку трифазних кіл за з'єднання фаз джерела та приймача трикутником (рис. 6.8).

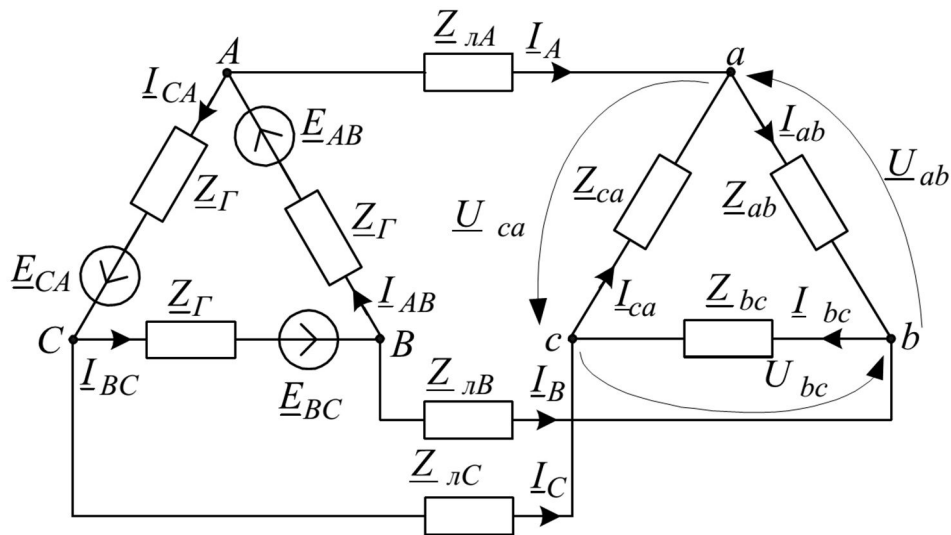


Рисунок 6.8

У цьому разі фазна напруга дорівнює лінійній. Фазні струми приймача визначаються за формулами

$$\underline{I}_{ab} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{U_{bc}}{Z_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}}. \quad (6.11)$$

Залежність між лінійними та фазними струмами при з'єднанні навантаження трикутником визначається за першим законом Кірхгофа для кожного вузла

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}. \quad (6.12)$$

У симетричному трифазному колі при з'єднанні приймача трикутником діючі значення струмів фаз навантаження можна знайти, поділивши на $\sqrt{3}$ діючі значення лінійних струмів, тобто $I_{\phi} = I_{\text{л}} / \sqrt{3}$.

Симетричну трифазну систему ЕРС генератора, незалежно від способу з'єднання його фаз, можна розглядати або як систему фазних, або як систему лінійних напруг. Здебільшого джерела живлення працюють у режимі заданих напруг, тобто лінійні напруги залишаються незмінними у разі зміни струмів навантаження. У разі роботи джерела в режимі заданої напруги немає потреби зображати схеми сполучення обмоток генератора, а достатньо задати систему лінійних (рис. 6.9) або фазних (рис. 6.10) напруг.

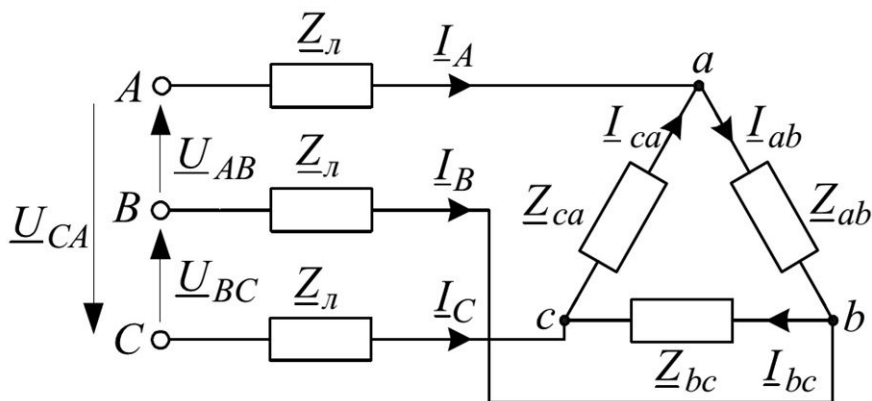


Рисунок 6.9

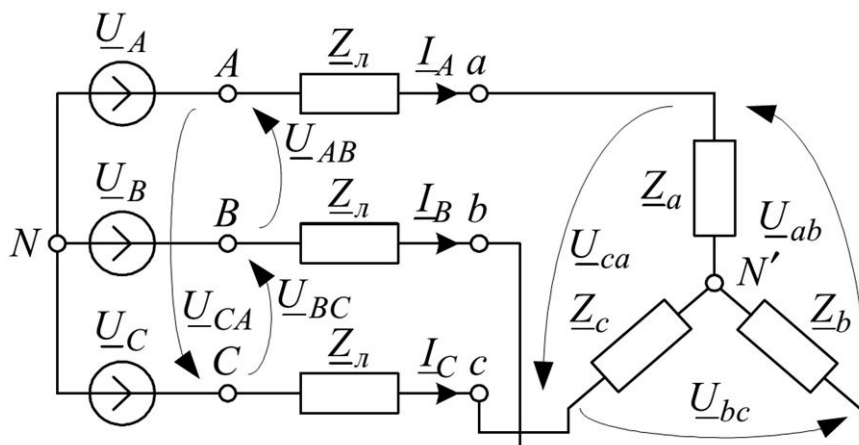


Рисунок 6.10

Визначивши лінійні струми I_A , I_B , I_C , відповідно до (6.11), (6.12), розраховуємо лінійні напруги приймача за формулами

$$U_{ab} = Z_a I_A - Z_b I_B;$$

$$U_{bc} = Z_b I_B - Z_c I_C;$$

$$U_{ca} = Z_c I_C - Z_a I_A.$$

6.4 Потужності у трифазних колах

Миттєва потужність трифазного кола дорівнює сумі миттєвих потужностей окремих фаз

$$P_{3\phi} = P_a + P_b + P_c = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c. \quad (6.13)$$

Для симетричного трифазного кола

$$P_a = U_\phi I_\phi \cos\varphi - U_\phi I_\phi \cos(2\omega t - \varphi);$$

$$p_b = U_\phi I_\phi \cos\varphi - U_\phi i_\phi \cos(2\omega t - 2 \cdot 120^\circ - \varphi); \quad (6.14)$$

$$P_c = U_\phi i_\phi \cos\varphi - U_\phi i_\phi \cos(2\omega t + 2 \cdot 120^\circ - \varphi).$$

Підставивши (6.14) у (6.13), одержуємо для миттєвої потужності вираз

$$p_{3\phi} = 3U_\phi I_\phi \cos\varphi, \quad (6.15)$$

з якого випливає важливий висновок: *миттєве значення потужності у симетричному трифазному колі, не залежить від часу*. Цей факт є основою для створення трифазних асинхронних двигунів, оскільки утворюваний у них електромагнітний момент не залежить від кута повороту ротора.

Активна потужність трифазного приймача дорівнює сумі активних потужностей окремих фаз

$$P_{3\phi} = P_a + P_b + P_c = U_a I_a \cos\varphi_a + U_b I_b \cos\varphi_b + U_c I_c \cos\varphi_c. \quad (6.16)$$

Зокрема, для симетричного трифазного кола

$$U_a = U_b = U_c = U_\phi;$$

$$I_a = I_b = I_c = I_\phi;$$

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi.$$

Отже,

$$P_{3\phi} = 3U_\phi I_\phi \cos\varphi. \quad (6.17)$$

На практиці прийнято потужність трифазного кола виражати через лінійні струми та напруги. Оскільки у разі з'єднання зіркою $I_\phi = I_L$, $U_\phi = U_L/\sqrt{3}$, а у разі сполучення трикутником навпаки: $U_\phi = U_L$, $I_\phi = I_L/\sqrt{3}$, то вираз

(6.17) набуває вигляду

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi. \quad (6.18)$$

Формула (6.18) справедлива для визначення потужності через лінійні струми та напруги незалежно від способу з'єднання фаз приймача.

Реактивна потужність трифазного приймача дорівнює алгебричній сумі реактивних потужностей окремих фаз

$$Q_{3\phi} = Q_a + Q_b + Q_c = U_a I_a \sin \varphi_a + U_b I_b \sin \varphi_b + U_c I_c \sin \varphi_c. \quad (6.19)$$

Для симетричного трифазного кола

$$Q_{3\phi} = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi. \quad (6.20)$$

Повна потужність симетричного трифазного кола визначається за формулою

$$S_{3\phi} = \sqrt{3} U_L I_L. \quad (6.21)$$

6.5 Вимірювання потужності у трифазних колах

На рис. 6.11 наведено схему вимірювання активної потужності в несиметричному трифазному колі з нульовим проводом за допомогою трьох однофазних ватметрів, яка придатна як для симетричного, так і несиметричного навантаження.

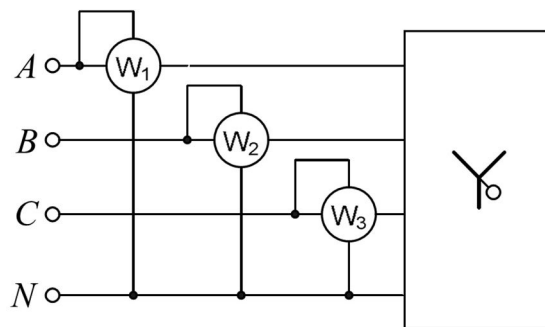


Рисунок 6.11

Активна потужність трифазного кола дорівнює сумі показів трьох ватметрів

$$P_\phi = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}. \quad (6.22)$$

Для симетричного кола покази ватметрів будуть однакові, тому достатньо виміряти потужність тільки в одній фазі.

У разі вимірювання потужності за схемою рис. 6.11 кожен ватметр вимірює потужність відповідної фази, оскільки до нього прикладена відповідна фазна напруга і протікає фазний струм.

У практиці експлуатації трифазних мереж нейтральний провід є не завжди. За відсутності доступу до нейтралі виміряти потужність можна за

допомогою двох ватметрів, увімкнених згідно з наведеною на рис. 6.12 схемою (схема Арона), яка придатна як для симетричних, так і несиметричних трипровідних кіл.

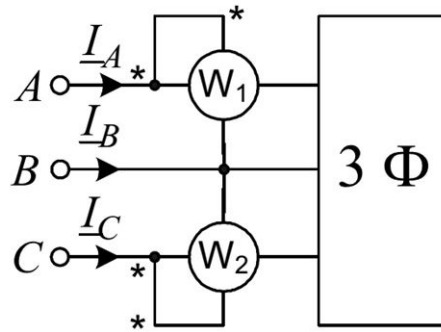


Рисунок 6.12

Покази ватметрів визначають за формулами

$$P_{W1} = \text{Re}(\underline{U}_{AB}\underline{I}_A^*); \quad P_{W2} = \text{Re}(\underline{U}_{CB}\underline{I}_C^*). \quad (6.23)$$

Виразимо лінійні напруги через фазні $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B$; $\underline{U}_{CB} = \underline{U}_C - \underline{U}_B$ і обчислимо суму показів ватметрів з урахуванням того, що $\underline{I}_A - \underline{I}_C = \underline{I}_B$. У результаті одержимо

$$\begin{aligned} P_{W1} + P_{W2} &= \text{Re}[(\underline{U}_A - \underline{U}_B) \underline{I}_A^* + (\underline{U}_C - \underline{U}_B) \underline{I}_C^*] = \\ &= \text{Re} [\underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^*] = P_A + P_B + P_C. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Отже, сума показів двох ватметрів дорівнює активній потужності трифазного приймача. На відміну від схеми рис. 6.11, у цьому разі покази окремого ватметра не є потужністю відповідної фази, а сенс має тільки алгебрична сума показів обох ватметрів.

Для симетричного кола формула (6.24) набуває вигляду

$$P_{3\phi} = P_{W1} + P_{W2} = \underline{U}_l \underline{I}_l \cos(\varphi - 30^\circ) + \underline{U}_l \underline{I}_l \cos(\varphi + 30^\circ). \quad (6.25)$$

звідки випливає, що при $|\varphi| > 60^\circ$, покази приладів матимуть протилежні знаки. Отже, активна потужність дорівнює **алгебричній сумі** показів двох ватметрів. Знак вимірної аналоговим ватметром потужності визначають так. Якщо стрілка одного з ватметрів прагне відхилитися в протилежний бік, незважаючи на правильне його під'єднання, необхідно змінити на протилежну полярність вмикання однієї з обмоток ватметра і вимірну потужність вважати від'ємною.

Насамкінець відзначимо, що у промисловості застосовують трифазні ватметри, які дають змогу виміряти сумарну потужність усіх трьох фаз, незалежно від симетрії навантаження.

6.6 Метод симетричних складових

6.6.1 Основні поняття та визначення.

Для розрахунку і аналізу роботи несиметричних трифазних кіл здебільшого застосовують метод *симетричних складових*. Суть його полягає в розкладанні несиметричної трифазної системи векторів (комплексних відображень ЕРС, ДС, напруг та струмів) на три симетричні трифазні системи: **прямої**, **зворотної** та **нульової** послідовностей. Їх називають симетричними складовими, а відрізняються вони **порядком чергування** фаз (див. п. 6.1). Несиметричну трифазну систему векторів ЕРС, напруг та струмів фаз одержують як суму векторів відповідних складових, тобто метод симетричних складових має в своїй основі принцип накладання, тому правомірний лише для лінійних трифазних кіл.

У системі прямої послідовності ЕРС (струми, напруги) набувають максимумів у фазі А, потім у В, потім у С, а в системі зворотної послідовності – після фази А максимум настає в фазі С, а потім у В. На відміну від прямої і зворотної послідовностей, у нульовій послідовності максимуми у всіх трьох фазах настають одночасно, тобто чергування відсутнє. Величини, які належать до систем прямої, зворотної та нульової послідовностей прийнято позначати відповідно індексами 1, 2, 0. На рис. 6.13 наведено приклад векторних діаграм ЕРС симетричних складових усіх трьох послідовностей.

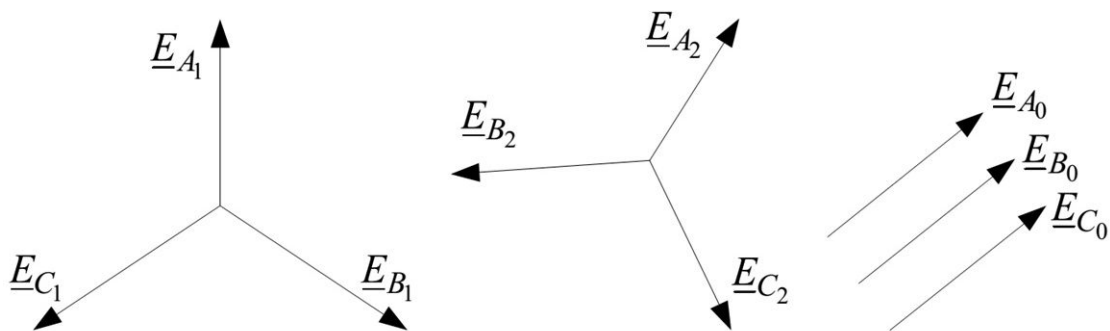


Рисунок 6.13

Між реальними ЕРС, напругами та струмами фаз і їх симетричними складовими існує однозначний зв'язок. Для прикладу, запишемо формули переходу від векторів \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C струмів фаз до їх симетричних складових \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_0 , користуючись оператором \underline{a} (див. 4. 2),

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{1}{3} (\underline{I}_A + \underline{a} \underline{I}_B + \underline{a}^2 \underline{I}_C); \\ \underline{I}_2 &= \frac{1}{3} (\underline{I}_A + \underline{a}^2 \underline{I}_B + \underline{a} \underline{I}_C); \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{3} (\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C).$$

Обернені перетворення мають вигляд

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= (\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0); \\ \underline{I}_B &= (\underline{a}^2 \underline{I}_1 + \underline{a} \underline{I}_2 + \underline{I}_0); \\ \underline{I}_C &= (\underline{a} \underline{I}_1 + \underline{a}^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Аналогічні формули можна записати для несиметричних трифазних систем ЕРС та напруг і їхніх складових.

6.6.2 Опори елементів трифазних кіл для струмів різних послідовностей.

Відношення фазних напруг (ЕРС) прямої, зворотної та нульової послідовностей до відповідних фазних послідовностей струму називають *комплексними опорами* відповідних послідовностей

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}; \quad \underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0}. \quad (6.28)$$

Зауважимо, опори прямої, зворотної та нульової послідовностей у загальному відрізняються. Для статичного навантаження (трансформатори, лінії) зміна порядку чергування фаз прикладеної симетричної системи напруг з прямого на зворотне зумовлює зміну порядку чергування струмів без зміни їх

амплітуд. Тому опори фаз для прямої \underline{Z}_1 і зворотної \underline{Z}_2 послідовностей однакові, тобто $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$.

Для динамічного навантаження (електричні генератори, двигуни) $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2$. Це пояснюється тим, що в трифазних електричних машинах магнітне поле, яке створюють струми прямої послідовності, обертається в одному напрямку з ротором, а створене струмами зворотної послідовності поле і ротор обертаються в протилежних напрямках.

Струми нульової послідовності не створюють обертового магнітного поля, а шляхи проходження створюваних ними потоків значно відрізняються від потоків, створених як струмами прямої, так і зворотної послідовностей. Тому опір нульової послідовності \underline{Z}_0 завжди відрізняється від опорів як прямої, так і зворотної послідовностей.

Опори різних послідовностей для різних електротехнічних об'єктів розраховують за відповідними методиками і наведені в довідниках.

6.6.3 Розрахунок трифазних кіл методом симетричних складових.

Метод симетричних складових дає змогу звести задачу розрахунку несиметричного трифазного кола до простіших задач – розрахунку його симетричних режимів. Усі розрахунки симетричних складових несиметричного трифазного кола здійснюють для однієї фази (як правило, фази А). Розрахунок проводять за методом *накладання*, тобто для кожної послідовності окремо. Зауважимо, що тільки в симетричному колі симетрична система напруг (ЕРС) утворює симетричну систему струмів. Якщо опори трифазного кола несиметричні, то система струмів буде також несиметричною, тобто міститиме інші симетричні складові.

У трифазних колах розрізняють два види несиметрії: поперечну (рис. 6.14) та поздовжню (рис. 6.15). З метою зведення задачі несиметричного трифазного кола до розрахунку його симетричних режимів. Несиметричну ділянку кола замінимо невідомою несиметричною системою напруг \underline{U}_A , \underline{U}_B , \underline{U}_C , як показано на відповідних рисунках.

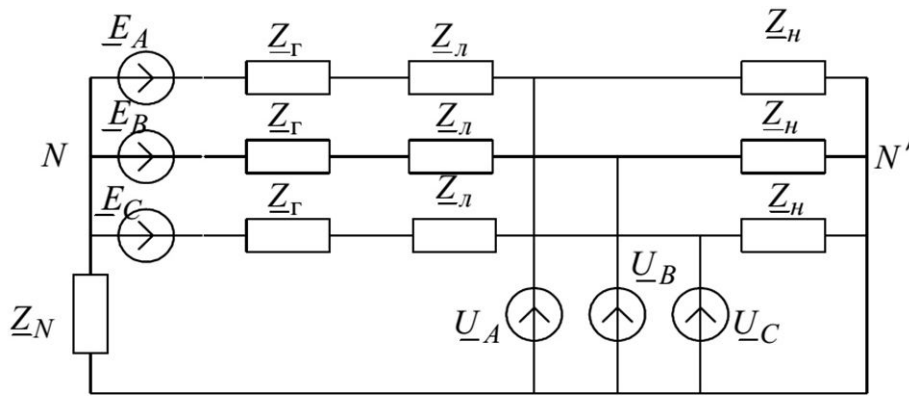


Рисунок 6.14

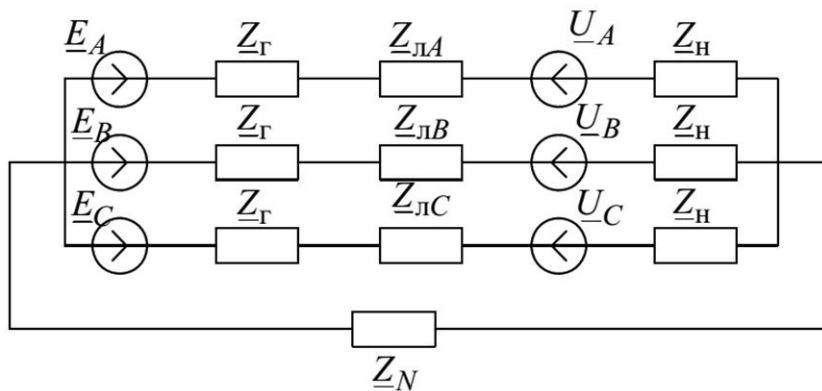


Рисунок 6.15

Невідомі напруги, що характеризують несиметричну ділянку, можна записати у вигляді

$$\underline{U}_A = \underline{Z}_A \underline{I}_A; \underline{U}_B = \underline{Z}_B \underline{I}_B; \underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I}_C; \underline{U}_N = \underline{Z}_N \underline{I}_N. \quad (6.29)$$

Залежно від характеру несиметрії комплексні опори \underline{Z}_A , \underline{Z}_B , \underline{Z}_C , \underline{Z}_N можуть набувати значень від нуля до безмежності. Наприклад, за відсутності контакту проводу лінії з нейтральним проводом (землею) (рис. 6.15) $\underline{Z}_N = \infty$, а $\underline{I}_N = 0$; за наявності такого контакту $\underline{Z}_N = 0$, тоді $\underline{U}_N = 0$. У разі обриву лінійного проводу фази А $\underline{Z}_A = \infty$, $\underline{I}_A = 0$, а $\underline{Z}_B = 0$ і $\underline{Z}_C = 0$, відповідно $\underline{U}_B = 0$ і $\underline{U}_C = 0$.

Наступним кроком є розкладання на симетричні складові усіх ЕРС, струмів та напруг, зокрема і вищезазначених \underline{U}_A , \underline{U}_B , \underline{U}_C , \underline{I}_a , \underline{I}_b , \underline{I}_c за формулами , (6.26)

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{3} (\underline{I}_A + \underline{a} \underline{I}_B + \underline{a}^2 \underline{I}_C);$$

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{3} (\underline{I}_A + \underline{a}^2 \underline{I}_B + \underline{a} \underline{I}_C);$$

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{3} (\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C).$$

Зауважимо, що розкладанню ЕРС, напруги на симетричні складові відповідає послідовне з'єднання джерел напруг окремих послідовностей. Після заміни несиметричної ділянки невідомими напругами коло стало симетричним, і розрахунок здійснюють лише для однієї фази за кожною послідовністю окремо із врахуванням того, що опори віток кола для різних послідовностей можуть бути різними. Розрахунок виконуємо для кожної послідовності окремо. Відповідні розрахункові схеми наведені на рис. 6.16–6.21.

На рис. 6.16 наведено схему для розрахунку прямої послідовності для поперечної несиметрії, а на рис. 6.17 – для поздовжньої.

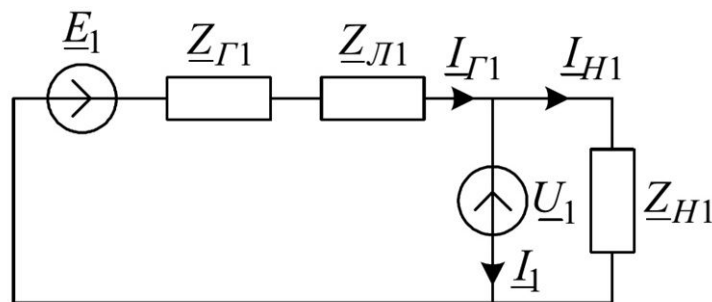


Рисунок 6.16

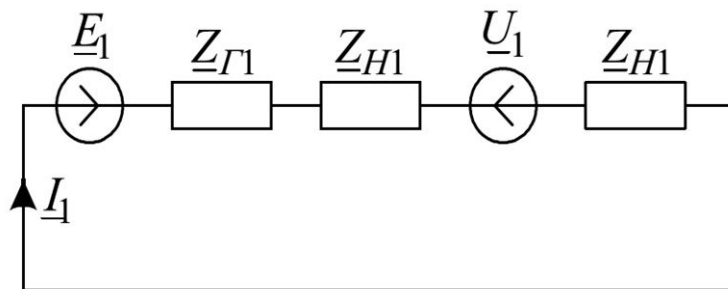


Рисунок 6.17

Аналогічно будуються розрахункові схеми для зворотної послідовності. Однак, якщо система фазних ЕРС генератора симетрична, то в схемах для зворотної послідовності (рис. 6.18, 6.19) будуть відсутні ЕРС зворотної послідовності, тобто $\underline{E}_2 = 0$.

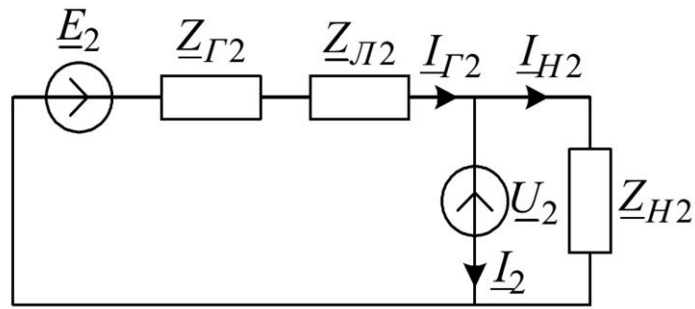


Рисунок 6.18

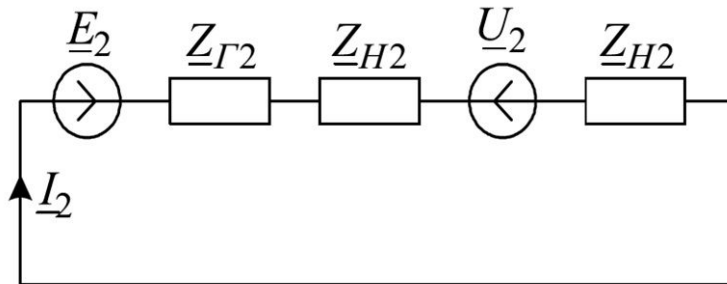


Рисунок 6.19

Розрахункові схеми для нульової послідовності у разі поперечної несиметрії наведені на рис. 6.20., а у разі поздовжньої – на рис. 6.21, у яких до заступної схеми входить потроєне значення опору нейтрального проводу.

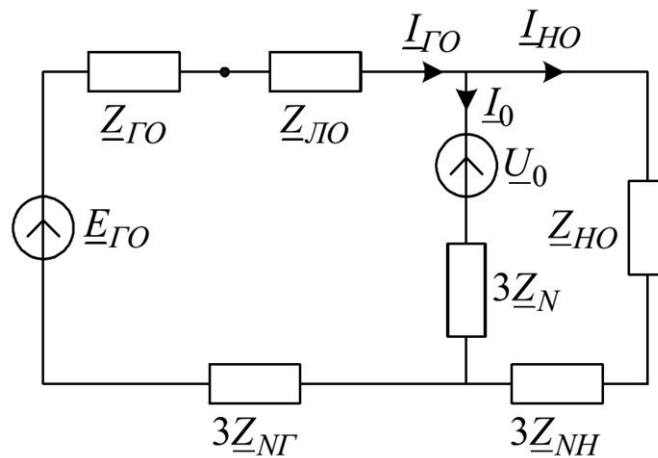


Рисунок 6.20

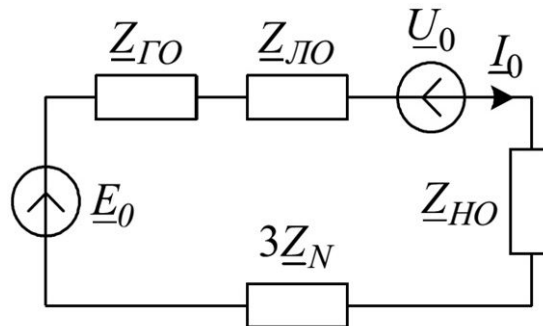


Рисунок 6.21

Уведення до розрахункової схеми нульової послідовності опору $3Z_N$ зумовлено тим, що струм, який протікає в нейтральному проводі, дорівнює потроєному значенню струму нульової послідовності $I_N = 3I_0$, а відповідна напруга $U_N = 3Z_N I_0$, оскільки струми нульової послідовності не мають зсуву за фазою.

Рівняння, які описують відповідні схеми рис. 6.16–6.21, разом з рівняннями, які випливають з умов несиметрії, дають змогу визначити напруги та струми симетричних складових. Після обчислення симетричних складових усіх струмів та напруг реальні струми та напруги несиметричного трифазного кола розраховують за формулами (6.27)

$$I_A = (I_1 + I_2 + I_0);$$

$$I_B = (a^2 I_1 + a I_2 + I_0);$$

$$I_C = (a I_1 + a^2 I_2 + I_0).$$

6.6.4 Потужності трифазних кіл, виражені через симетричні складові.

Комплексна потужність $S_{3\phi}$ трифазного кола визначається як сума комплексних потужностей фаз

$$S_{3\phi} = U_A I_A^* + U_B I_B^* + U_C I_C^*. \quad (6.30)$$

Підставляючи в (6.30) значення відповідних напруг та струмів, виражені через симетричні складові

$$I_A = I_1^* + I_2^* + I_0^*; \quad I_B = a^2 I_1^* + a I_2^* + I_0^*; \quad I_C = a I_1^* + a^2 I_2^* + I_0^*;$$

$$U_A = U_1 + U_2 + U_0; \quad U_B = a^2 U_1 + a U_2 + U_0; \quad U_C = a U_1 + a^2 U_2 + U_0,$$

одержимо формулу для визначення комплексної потужності трифазного кола на підставі симетричних складових

$$S_{3\phi} = 3U_1 I_1^* + 3U_2 I_2^* + 3U_0 I_0^*. \quad (6.31)$$

7 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

7.1 Основні поняття та визначення

На практиці в багатьох випадках в усталених режимах в електричних колах струми несинусоїдні.

Несинусоїдність електричних струмів, які протікають в електричних колах в усталених режимах, може виникати як у лінійних колах, так і в нелінійних. У нелінійних електричних колах причиною несинусоїдності струмів є як несинусоїдність відповідних кривих джерел живлення (ЕРС, напруг, струмів ДС), так і нелінійність його елементів. У лінійних електричних колах причиною несинусоїдності струмів є винятково несинусоїдність джерел живлення.

Синхронні генератори, які є основними джерелами електричної енергії, проектують так, що ЕРС, які в них індукуються, практично синусоїдні. Тут несинусоїдність є, як правило, результатом різних замикань чи інших відхилень від нормальної роботи. Однак у різноманітних пристроях автоматики, зв'язку, електроніки несинусоїдність напруг та струмів є необхідною умовою їх нормального функціонування. Прикладами джерел несинусоїдної напруги є різноманітні випрямлячі, генератори лінійно-змінної напруги, генератори імпульсів тощо. Несинусоїдними періодичними ЕРС, напругами, струмами називають такі, які змінюються за періодичним законом (рис. 7.1), тобто

$$e(t)=e(t+T), u(t)=u(t+T), i(t)=i(t+T), \quad (7.1)$$

де T – часовий період, у межах якого закон зміни функції може бути довільним.

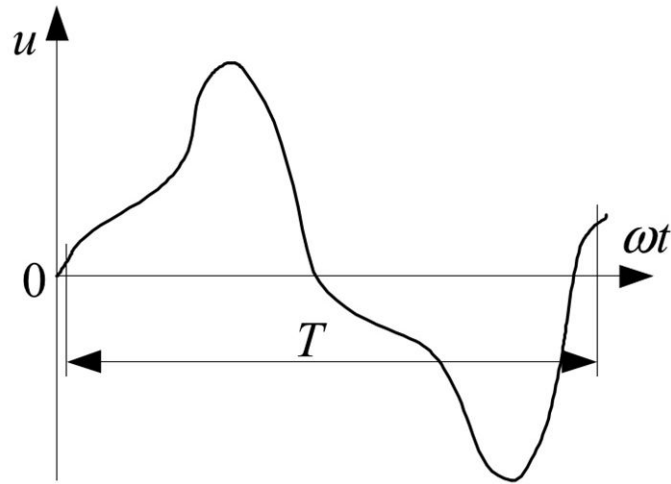


Рисунок 7.1

Для розрахунку лінійних електричних кіл несинусоїдного струму використовують розклад періодичних функцій у тригонометричний ряд Фур'є.

Ряд Фур'є, який апроксимує періодичну функцію $f(t)=f(t+T)$, можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 f(t) &= A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k). \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

Він складається з постійної складової – A_0 і синусоїдних – $A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$, які називають **гармоніками**. Синусоїду найнижчої ($k = 1$) частоти $\omega = \frac{2\pi}{T}$ називають **основною** гармонікою, а всі інші ($k > 1$) – **вищими**. Постійну складову іноді називають **нульовою** гармонікою. Сукупність гармонічних складових несинусоїдної періодичної функції називається її дискретним частотним спектром: $A_{km}(\omega)$ – амплітудний спектр, $\psi_k(\omega)$ – фазовий спектр. Параметри ряду Фур'є A_{km} , ψ_k можна обчислити аналітично, якщо $f(t)$ задана аналітично, або числовими методами.

Із збільшенням кількості членів ряд Фур'є швидко збігається, тому під час розкладу в ряд обмежуються певною кількістю n гармонік. Для прикладу, на рис. 7.2 наведено першу і третю гармоніки напруги та результат їх додавання.

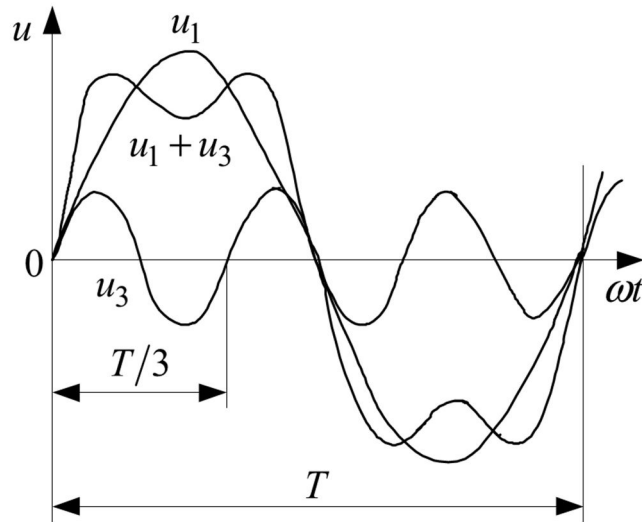


Рисунок 7.2

Для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є його доцільно подати у вигляді **постійної** та **синусних і косинусних** складових

$$f(t) = A_0 + \sum (B_{kms} \sin k\omega t + B_{kmc} \cos k\omega t). \quad (7.3)$$

Коефіцієнти A_0 , B_{kms} , B_{kmc} обчислюються за формулами

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt;$$

$$B_{kms} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin k\omega t dt;$$

$$B_{kmc} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k\omega t dt.$$

Перехід від коефіцієнтів ряду (7.3) до коефіцієнтів ряду (7.2) здійснюється за формулами

$$A_{km} = \sqrt{B_{kms}^2 + B_{kmc}^2}; \quad \psi_k = \arctg \left(\frac{B_{kmc}}{B_{kms}} \right).$$

Для типових кривих, які найчастіше трапляються в електротехніці, розклад у ряд можна знайти в довідниках з математики чи електротехніки.

Під час розкладання періодичних напруг, ЕРС та струмів у ряд Фур'є обсяг обчислень можна істотно скоротити, якщо скористатися властивостями функцій, що мають симетрію.

Одним із поширених видів симетрії кривих, які трапляються в електротехніці, є симетрія відносно осі абсцис. Такі функції задовольняють умову $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$, тобто від'ємна частина кривої є дзеркальним відображенням додатної частини, зсуненої уздовж осі абсцис на половину періоду. У цьому разі ряд не містить постійної складової та парних гармонік, тому що для них ця умова не задовольняється. Отже, ряд складається лише з непарних гармонік

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + A_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots \quad (7.4)$$

У схемах випрямлення змінного струму існують функції, симетричні відносно осі ординат (див. рис. 8.5), які задовольняють умову $f(\omega t) = f(-\omega t)$. У цьому разі тригонометричний ряд не містить синусних складових

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \cos \omega t + A_{2m} \cos 2\omega t + A_{3m} \cos 3\omega t + \dots \quad (7.5)$$

У схемах множення частоти є функції симетричні стосовно початку координат, які задовольняють умову $f(\omega t) = -f(-\omega t)$. У цьому разі ряд не містить постійної та косинусної складових

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin \omega t + A_{2m} \sin 2\omega t + \dots + A_{km} \sin k\omega t. \quad (7.6)$$

7.2 Діюче та середнє значення періодичного несинусоїдного струму.

Коефіцієнти форми кривих

Для несинусоїдного струму за аналогією з синусоїдним вводять різні розрахункові значення. Діюче значення несинусоїдного струму визначається як середньоквадратичне

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (7.7)$$

де

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Оскільки квадрат суми дорівнює сумі квадратів миттєвих значень усіх гармонік і сумі добутків миттєвих значень окремих гармонік різних частот, середнє значення яких за період дорівнює нулю, то (7.7) набуває вигляду

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^n I_k^2}. \quad (7.8)$$

Отже, діюче значення несинусоїдного струму дорівнює кореню квадратному з суми квадратів діючих значень усіх гармонік, у тому числі й нульової. Це стосується напруг та ЕРС

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}; \quad (7.9)$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_n^2}. \quad (7.10)$$

Середнє значення несинусоїдного струму визначають за формулою

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = I_0, \quad (7.11)$$

тобто середнє за період значення несинусоїдного струму дорівнює його постійній складовій. Зауважимо, що середнє значення синусоїдного струму дорівнює нулю.

Діючі значення несинусоїдних напруг та струмів можна виміряти аналоговими приладами електромагнітної, електродинамічної та феродинамічної систем, а постійні складові – приладами магнітоелектричної системи.

Середнє за модулем значення несинусоїдного струму визначається за формулою

$$I_{\text{сеп.м}} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt. \quad (7.12)$$

В електроенергетичних мережах здебільшого криві напруг та струмів симетричні щодо осі абсцис. Для їх характеристики використовують відповідні коефіцієнти.

Коефіцієнтом форми k_f називається відношення діючого до середнього за модулем значення

$$k_f = \frac{A}{A_{\text{сер.м}}}. \quad (7.13)$$

Для синусоїди $k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$.

Коефіцієнт амплітуди k_a дорівнює відношенню максимального значення до діючого

$$k_a = \frac{A_m}{A}. \quad (7.14)$$

Для синусоїди $k_a = \sqrt{2} = 1,41$.

Коефіцієнт спотворення k_c визначають як відношення діючого значення основної гармоніки до діючого значення несинусоїдної величини

$$k_c = \frac{A_I}{A}. \quad (7.15)$$

Для синусоїди $k_c = 1$ (для несинусоїдного струму $k_c < 1$).

Коефіцієнт гармонік визначають як відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення першої гармоніки

$$k_2 = \frac{1}{A_I} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}. \quad (7.16)$$

Для синусоїди $k_2 = 0$ (для несинусоїдного струму $k_2 > 0$).

7.3 Потужності в колі періодичного несинусоїдного струму

Миттєву потужність як величину, що характеризує швидкість зміни енергії за одиницю часу, визначають незалежно від форми напруги та струму за формулою (1.18)

$$p(t) = u(t)i(t),$$

а активна потужність будь-якого періодичного струму дорівнює середньому за період значенню миттєвої потужності

$$P = \int_0^T \frac{1}{T} i u dt. \quad (7.17)$$

Подамо несинусоїдні напругу та струм двополюсника рядами Фур'є

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ku});$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ki}) \quad (7.18)$$

і підставимо в (7.17). У цьому разі інтеграл (7.17) складається із суми інтегралів, серед яких відмінними від нуля будуть тільки ті інтеграли, підінтегральні функції яких – це добуток постійних складових напруги та струму або їх гармонік однакових порядків. Решта інтегралів дорівнюватимуть нулю. У результаті одержимо формулу для обчислення активної потужності несинусоїдного струму

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots, \quad (7.19)$$

де U_k, I_k – діючі значення напруги та струму k -ї гармоніки; $\varphi_k = \psi_{ku} - \psi_{ki}$ – зсув фаз між k -ю гармонікою напруги та k -ю гармонікою струму.

Як видно з (7.19), активна потужність періодичного несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік, враховуючи нульову.

За аналогією з поняттям реактивної потужності для синусоїдних функцій в електричному колі з періодичними несинусоїдними напругами та струмами вводять поняття реактивної потужності

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots, \quad (7.20)$$

а також повної потужності як добутку діючих значень напруги та струму

$$S=UI, \quad (7.21)$$

де U, I визначають за формулами (7.8), (7.9)

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2},$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}.$$

На відміну від електричних кіл синусоїдного струму, сума квадратів активної і реактивної потужностей у колі з періодичними несинусоїдними напругами та струмами не дорівнює квадрату повної потужності

$$S^2 \geq P^2 + Q^2. \quad (7.22)$$

З метою оцінювання нерівності (7.22) вводять розрахункову величину, яку визначають за формулою

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}. \quad (7.23)$$

Величина D називається **потужністю спотворення** несинусоїдного струму, яка фізичного тлумачення не має і характеризує досконалість процесу одностороннього перетворення електричної енергії в інші види, зумовлену спотворенням форми кривої струму та напруги.

У колах синусоїдного струму активна потужність визначається як $P=UI\cos\varphi$, де величину $\cos\varphi$ називають **коефіцієнтом потужності**. У колах періодичного несинусоїдного струму також використовують поняття коефіцієнта потужності, який визначають за формулою

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI} \quad (7.24)$$

$\lambda = 1$ лише за умови, що до кола входять тільки резистивні елементи, опір яких не залежить від частоти, в інших випадках $\lambda < 1$. Поява вищих гармонік у кривих напруги та струму призводить до зниження коефіцієнта потужності споживача порівняно з такими ж діючими значеннями синусоїдних напруг та струмів. Для спрощення аналізу електричних кіл несинусоїдного

струму за відсутності постійних складових несинусоїдні струми та напруги замінюють еквівалентними синусоїдами основної частоти. Для цього приймають рівними їх діючі значення, а кут зсуву фаз між еквівалентними синусоїдами беруть, враховуючи рівність $\cos \varphi = \lambda$.

7.4 Аналіз лінійних електричних кіл несинусоїдного струму

Згідно з методом накладання джерело несинусоїдної ЕРС можна розглядати як послідовне з'єднання джерела постійної та гармонічних ЕРС різних частот. Наприклад, якщо

$$e = E_0 + e_1 + e_2 + e_3 = E_0 + e_{1m} \sin(\omega t + \psi_{e1}) + e_{2m} \sin(2\omega t + \psi_{e2}) + e_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{e3}), \quad (7.25)$$

то еквівалентна заступна схема ЕРС має вигляд, як показано на рис. 7.3.

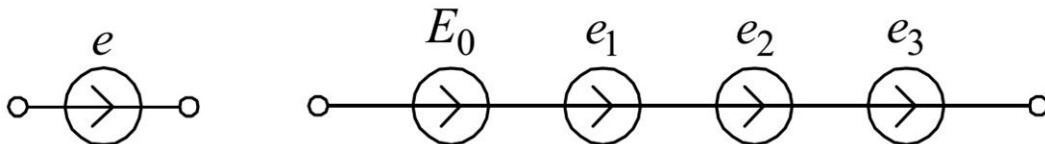


Рисунок 7.3

Джерело несинусоїдного струму можна розглядати як паралельне з'єднання джерел постійного та гармонічних струмів різних частот. Наприклад, якщо

$$J = J_0 + J_1 + J_2 + J_3 = J_0 + J_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i1}) + J_{2m} \sin(2\omega t + \psi_{i2}) + J_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{i3}), \quad (7.26)$$

то еквівалентна заступна схема ДС має вигляд на рис. 7.4.

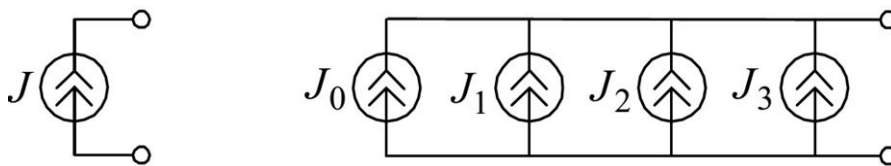


Рисунок 7.4

Отже, застосовуючи метод накладання, розрахунок лінійних електричних кіл за несинусоїдних струмів можна звести до розрахунку електричних кіл, у яких діють джерела енергії однієї частоти (або постійні).

Розрахунок виконується у наступному порядку:

- 1) несинусоїдні ЕРС та струми ДС розкладаються у ряд Фур'є;

2) розраховується електричне коло одним із відомих методів розрахунку складних електричних кіл, вважаючи, що в колі діють тільки ті складові розкладу в ряд Фур'є, які мають одну і ту саму частоту. До того ж для розрахунку гармонічних складових струмів і напруг однієї частоти доцільно користуватись символічним методом;

3) після почергово розрахунку для постійних і всіх гармонічних складових, за принципом накладання визначаються миттєві значення струмів у вітках та напруг на окремих ділянках як суму постійної складової та миттєвих значень гармонік;

4) визначивши струми для всіх складових тригонометричного ряду, остаточний розв'язок подається у вигляді суми їх миттєвих значень

$$i_k(t) = I_0 + i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots$$

7.5 Параметри елементів електричного кола при несинусоїдних струмах.

Важливим питанням є визначення параметрів електричного кола для різних гармонічних складових. Очевидно, що активний опір R , якщо не враховувати явище скін-ефекту, не залежить від частоти. Однак реактивні опори індуктивних і ємнісних елементів залежать від порядкового номера k гармоніки. Їх визначають за формулами

$$X_{Lk} = kX_{L1} = k\omega L; X_{Ck} = \frac{X_{C1}}{k} = \frac{1}{k\omega C} \quad (7.27)$$

Як видно з (7.27), для постійної складової опір ідеальної котушки індуктивності дорівнює нулю, а для конденсатора – нескінченності. Звідси випливає, що під час розрахунку постійних складових струмів котушки індуктивностей необхідно вважати закороченими, а вітки з конденсаторами – розімкненими.

Залежність опорів реактивних елементів від частоти (порядку гармоніки) призводить до того, що напруги на індуктивних і ємнісних елементах відрізняються за формою від струмів, які через них протікають. Відзначимо, що

векторні діаграми можна будувати лише для кожної гармоніки окремо. Не можна додавати та віднімати вектори чи комплексні напруги та струми різних гармонік.

7.6 Резонансні явища в колах несинусоїдного струму

Якщо в електричному колі, до якого входять індуктивні та ємнісні елементи, діють несинусоїдні ЕРС, то в ньому можуть виникати резонансні режими (резонанси струмів або напруг) не тільки на першій, але й на вищих гармоніках. Як і для синусоїдного струму, резонансним режимом на k -й гармоніці називається такий режим, за якого струм k -ї гармоніки на вході електричного кола збігається за фазою з k -ю гармонікою вхідної напруги. Отже, умови резонансу для k -ї гармоніки полягають у тому, що реактивна складова вхідного опору для цієї гармоніки повинна дорівнювати нулю.

В умовах резонансу на якій-небудь вищій гармоніці струми (напруги) цієї гармоніки можуть бути більшими від струмів (напруг) першої гармоніки, незважаючи на те, що амплітуда ЕРС першої гармоніки є більшою від амплітуди ЕРС відповідної вищої гармоніки.

8 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

8.1 Основні поняття та визначення

Після вмикання електричного кола в ньому встановлюються струми та напруги на всіх ділянках кола відповідно до їх параметрів та прикладеної напруги. Інакше кажучи, в колі встановлюється режим, у якому струми і напруги або залишаються незмінними в часі (електричні кола постійного струму), або періодично змінюються за одним і тим же законом (електричні кола змінного струму). Усталені режими називають іноді **вимушеними** (вони зумовлені дією вимушувальних сил – джерел напруги та струму).

Вмикання або вимикання джерел енергії, зміну структури електричного кола або стрибкоподібну зміну параметрів його елементів називають **комутацією**. У результаті комутації порушується рівноважний стан електричного кола, внаслідок чого відбувається перехід від одного усталеного режиму роботи електричного кола до іншого. Усталений режим, який існував у колі до комутації, називають **докомутаційним**, а той, що встановився після комутації, – **післякомутаційним**. Процес переходу від одного енергетичного стану, який відповідає докомутаційному режимові, до іншого, який відповідає післякомутаційному режимові, називається **перехідним процесом**.

Післякомутації новий усталений режим виникає миттєво лише в колах з винятково резистивними елементами. Реактивні елементи є накопичувачами енергії, і внаслідок комутації відбувається зміна запасеної в них енергії. Зокрема енергію електричного поля W_e конденсатора ємністю C , до якого прикладена напруга u , визначають за формулою

$$W_e = \frac{Cu^2}{2}.$$

Енергію магнітного поля W_m котушки індуктивністю L , через яку протікає струм i , визначають за формулою

$$W_m = \frac{Li^2}{2}.$$

Процес накопичення та віддачі енергії реактивними елементами не може відбуватись миттєво, тому що в цьому разі миттєве значення потужності джерела повинно бути нескінченно великим, оскільки вона визначається як похідна по часові від енергії

$$p(t) = \frac{dW}{dt},$$

і якщо $dt \rightarrow 0$, то $p(t) \rightarrow \infty$. Оскільки енергія не може змінюватись стрибком, то і струм в індуктивному та напруга на ємнісному елементах не можуть змінюватись стрибком.

У перехідному процесі струми та напруги є змінними в часі величинами, незалежно від того, зумовлені вони джерелами постійної чи змінної напруги або струму, тому їх прийнято позначати малими літерами як функції часу: $u(t)$, $i(t)$.

8.2 Закони комутації

Під час розрахунку перехідних процесів вважають, що комутація відбувається миттєво. Це дає змогу відлік часу, з якого починається перехідний процес ($t = 0$), відраховувати з моменту комутації. Загальноприйнято час, який передував моменту комутації (границя ліворуч) позначати $t = 0_-$, а той, з якого починається перехідний процес (границя праворуч), $t = 0_+$.

Для розрахунку перехідного процесу в електричному колі необхідно знати початкові умови – значення напруг $u(0_+)$ та струмів $i(0_+)$, з яких починається їх зміна в перехідному процесі. Перехід від значень цих величин при $t = 0_-$ до їх значень при $t = 0_+$ визначається **законами комутації**.

Перший закон комутації. Струм i_L , який протікає через котушку індуктивності, під час комутації не може змінюватись стрибком. Інакше кажучи, після комутації струм i_L починає змінюватись з того значення, яке було до комутації

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0).$$

Напруга на котушці індуктивності може змінюватись стрибком.

Другий закон комутації. Напруга u_C на конденсаторі під час комутації не може змінюватись стрибком. Інакше кажучи, після комутації напруга u_C починає змінюватись з того значення, яке було до комутації

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0).$$

Струм конденсатора може змінюватись стрибком.

Закони комутації дають змогу визначити значення напруг та струмів при $t=0_+$, з яких починається їх зміна в перехідному процесі.

8.3 Початкові умови

Розрахунок перехідного процесу в електричному колі полягає в розв'язуванні системи інтегро-диференціальних рівнянь, які описують динамічний режим електричного кола, яке утворилось внаслідок комутації. Для цього необхідно знати значення струмів у вітках і напруг на різних ділянках електричного кола в перший момент після комутації ($t = 0_+$), тобто, так звані, **початкові умови**. Якщо струми, що протікають через котушки індуктивності, і напруги на конденсаторах до комутації дорівнювали нулю, то початкові умови називають **нульовими** початковими умовами, а в протилежному випадку – **ненульовими**. Згідно із законами комутації струми, які протікають через індуктивні елементи, а також напруги на конденсаторах не можуть мати стрибки в момент комутації. Це означає, що початкові умови для індуктивних елементів та конденсаторів (при $t = 0$) можна визначити з розрахунку докомутаційного режиму. Інші струми та напруги можуть змінюватись під час комутації стрибкоподібно. Їх визначають з рівнянь Кірхгофа, складених для скомутованого електричного кола, на підставі відомих значень струмів індуктивних елементів і напруг на конденсаторах.

Значення струмів у вітках з індуктивними елементами і напруг на ємнісних елементах при $t = 0_+$ називають **незалежними** початковими умовами,

а значення решти струмів і напруг, які визначаються на підставі незалежних початкових умов, – *залежними* початковими умовами.

8.4 Класичний метод розрахунку перехідних процесів

8.4.1 Суть класичного методу.

Перехідні процеси можуть виникати лише в електричних колах з реактивними елементами. Задача розрахунку перехідного процесу в лінійному електричному колі полягає в розв'язуванні системи лінійних диференціальних рівнянь, які в загальному є неоднорідними.

Однорідними диференціальними рівняннями описують процеси, які протікають в електричному колі за відсутності дії сторонніх джерел енергії. Ці процеси відбуваються лише за рахунок запасеної в конденсаторах і котушках енергії, а тому струми та напруги, які визначаються з розв'язання однорідних диференціальних рівнянь, називаються *вільними*. Вони завжди прямують до нуля. Складові напруг та струмів, які визначаються як частковий розв'язок неоднорідних диференціальних рівнянь, називаються *усталеними (вимушеними)*. За своїм фізичним змістом – це ті величини, які відповідають післякомутаційному усталеному режимові в колі за заданих значень вимушувальних сил, якими є напруги джерел ЕРС та струми ДС. У лінійних колах постійного струму – це постійні величини, а в колах синусоїдного струму – це синусоїдні величини. Надалі вільні складові напруг та струмів позначатимемо нижнім індексом “в”, а усталені – “у”.

Напруги на елементах та струми віток подають як суму двох складових

$$u(t) = u_y(t) + u_v(t); \quad i(t) = i_y(t) + i_v(t),$$

де $u_y(t)$, $i_y(t)$ – усталені значення напруги та струму, які визначаються шляхом розрахунку усталеного режиму кола, що утворилось після комутації, а $u_v(t)$, $i_v(t)$ – вільні складові, які визначаються як загальний розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь (в яких відсутнє збурення, тобто права частина дорівнює нулю).

Розклад напруг та струмів на вільні і вимушені складові є математичним

засобом, який можна застосовувати лише до розрахунку лінійних електричних кіл, для яких правомірний принцип суперпозиції (накладання).

Для знаходження вільних складових як загального розв'язку однорідних диференціальних рівнянь необхідно визначати сталі інтегрування. Їх визначають з початкових умов, що є найбільшою проблемою класичного методу.

8.4.2 Характеристичне рівняння.

Для знаходження вільних струмів необхідно скласти характеристичне рівняння та знайти його корені. Існує два способи складання характеристичного рівняння:

- на підставі головного визначника алгебрізованої системи рівнянь для вільних струмів;
- на підставі виразу для вхідного комплексного опору стосовно будь-якої вітки електричного кола.

Алгебрізацію системи інтегро-диференціальних рівнянь для вільних складових можна здійснити формальною заміною в них операції диференціювання множенням на λ , а інтегрування – діленням на λ , де λ – корінь характеристичного рівняння. Характеристичне рівняння одержимо, прирівнявши до нуля головний визначник алгебрізованої системи. Очевидно, що те ж рівняння можна одержати, якщо систему рівнянь, що описує перехідний процес, шляхом підстановки звести до одного рівняння вищого порядку і замінити в ньому похідні різних порядків відповідними степенями оператора λ .

Для складання характеристичного рівняння на підставі вхідного опору необхідно записати вираз останнього в комплексній формі, замінити в ньому $j\omega$ на λ і прирівняти одержаний вираз до нуля. Зауважимо, що в разі наявності в схемі вітки з джерелом струму, не можна визначати вхідний опір стосовно цієї вітки. Під час визначення вхідного опору необхідно закортити всі джерела ЕРС і розімкнути вітки з ДС.

Кількість значень коренів p характеристичного рівняння визначається його порядком (степенем). До того ж від кількості коренів та їхніх значень залежить характер зміни вільних складових струмів та напруг, а отже і загальний вигляд функцій, які їх описують.

8.4.3 Алгоритм розрахунку перехідних процесів класичним методом.

Загалом розрахунок перехідного процесу класичним методом складається з таких етапів:

1) розрахунок докомутаційного усталеного режиму в електричному колі та визначення незалежних початкових умов – значень струмів у вітках з котушками індуктивності та напруг на конденсаторах за $t = 0$;

2) складання системи рівнянь Кірхгофа стосовно миттєвих значень напруг та струмів для електричного кола, яке утворилось у результаті комутації;

3) визначення залежних початкових умов на підставі відомих з п.1 незалежних початкових умов та законів комутації;

4) складання характеристичного рівняння та визначення його коренів;

5) формування аналітичних виразів для вільних складових відповідно до значень коренів характеристичного рівняння;

6) визначення вимушених складових струмів та напруг шляхом розрахунку усталеного режиму в скомутованому електричному колі;

7) визначення сталих інтегрування;

8) подання струмів та напруг у вигляді суми вимушених і вільних складових та визначення сталих інтегрування.

Реалізацію викладеного вище алгоритму розрахунку перехідного процесу класичним методом проілюструємо на прикладі перехідного процесу в електричному колі (рис. 8.1), в якому діє постійна ЕРС.

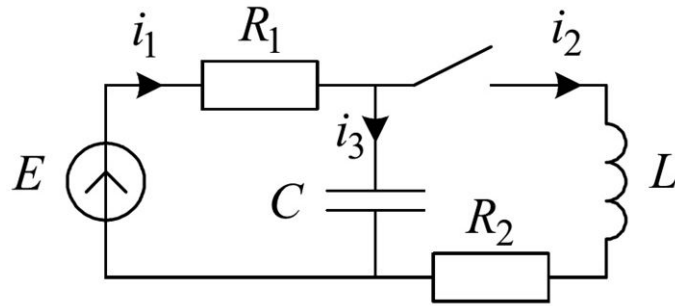


Рисунок 8.1

Розрахунок докомутаційного усталеного режиму. Як видно з рис. 8.1, у докомутаційному усталеному режимі всі струми дорівнюють нулю, тобто $i_1=i_2=i_3=0$, а напруга на конденсаторі $u_C = E$. Незалежні початкові умови мають вигляд:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = E;$$

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = i_2(0) = 0. \quad (8.1)$$

Рівняння Кірхгофа для схеми, яка утворилась після комутації, мають вигляд

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt = E; \quad (8.2)$$

$$R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0.$$

Залежні початкові умови визначаємо, використовуючи незалежні початкові умови (8.1), з рівнянь (8.2), записаних для моменту часу $t = 0_+$

$$i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) = 0;$$

$$R_1 i_1(0_+) + u_C(0_+) = E; \quad (8.3)$$

$$R_2 i_2(0_+) + L \frac{di_2(0_+)}{dt} - u_C(0_+) = 0.$$

Характеристичне рівняння, складене на основі визначника з використанням системи рівнянь (8.2), має вигляд

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & \frac{1}{\lambda C} \\ 0 & R_2 + \lambda L & -\frac{1}{\lambda C} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.4)$$

Звідси одержимо

$$R_1 C L \lambda^2 + (R_1 R_2 C + L) \lambda + R_1 + R_2 = 0. \quad (8.5)$$

Проілюструємо інший спосіб складання характеристичного рівняння – з використанням загального виразу для комплексного вхідного опору відносно затискачів джерела ЕРС

$$\underline{Z}_{ex}(j\omega) = R_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C} (R_2 + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + R_2 + j\omega L}. \quad (8.6)$$

Простіший вираз для вхідного опору можна одержати, якщо його визначити стосовно вітки з конденсатором

$$\underline{Z}_{ex}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_1 (R_2 + j\omega L)}{R_1 + R_2 + j\omega L}. \quad (8.7)$$

Для одержання характеристичного рівняння необхідно в будь-якому з рівнянь (8.6), (8.7) замінити $j\omega$ на λ і одержаний вираз прирівняти до нуля. Легко переконатись, що отримані характеристичні рівняння будуть ідентичними з рівнянням (8.5).

Характеристичне рівняння (8.7) має другий порядок. Його корені визначають за формулою

$$\lambda_{1,2} = \frac{R_1 R_2 C + L}{2 R_1 C L} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1 R_2 C + L}{2 R_1 C L} \right)^2 - \frac{R_1 + R_2}{R_1 C L}}. \quad (8.8)$$

Залежно від числових значень параметрів електричного кола корені можуть бути:

дійсні різні (причому обов'язково від'ємні)

$$\lambda_1 = -\delta_1, \quad \lambda_2 = -\delta_2;$$

дійсні рівні (від'ємні)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta;$$

комплексні спряжені з від'ємною дійсною частиною

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega_6;$$

Вільні складові. Загальний вираз для вільних складових струмів і напруг визначається значенням коренів характеристичного рівняння.

Якщо ці корені дійсні і різні, то вільні складові струму i_2 і напруги u_2 мають вигляд

$$\begin{aligned} i_{2\theta}(t) &= A_1 e^{-\delta_1 t} + A_2 e^{-\delta_2 t}; \\ u_{C\theta}(t) &= B_1 e^{-\delta_1 t} + B_2 e^{-\delta_2 t}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 – сталі інтегрування, тобто в колі відбувається згасаючий аперіодичний процес.

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні, то вільні складові записуються у вигляді

$$\begin{aligned} i_{2\theta}(t) &= (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}; \\ u_{C\theta}(t) &= (B_1 + B_2 t) e^{-\delta t}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

тобто наявний граничний (критичний) випадок аперіодично згасаючого процесу.

У разі комплексних коренів вільні складові мають коливний згасаючий характер

$$\begin{aligned} i_{2\theta}(t) &= (A_1 \cos \omega_6 t + A_2 \sin \omega_6 t) e^{-\delta t}; \\ u_{C\theta}(t) &= (B_1 \cos \omega_6 t + B_2 \sin \omega_6 t) e^{-\delta t}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Рівняння (8.11) можна подати в іншому вигляді, а саме:

$$i_{2\theta}(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_6 t + \psi_i);$$

$$u_{C_6}(t) = Be^{-\delta t} \sin(\omega_6 t + \psi_u), \quad (8.12)$$

в яких визначенню підлягають величини A , B , ψ_i , ψ_u .

Усталені (вимушені) складові струму i_{2y} та напруги u_{C_y} як частковий розв'язок системи неоднорідних диференціальних рівнянь (8.2) отримаємо за допомогою розрахунку усталеного режиму для скомутованого електричного кола. Оскільки ЕРС джерела постійна, то струм $i_{3y} = 0$, отже, $i_{1y}(0_+) = i_{2y}(0_+)$, а рівняння, які описують усталений режим у скомутованому колі, мають вигляд

$$\begin{aligned} R_1 i_{2y} + u_{C_y} &= E; \\ R_2 i_{2y} - u_{C_y} &= 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

З системи алгебричних рівнянь (8.13) визначаємо

$$i_{2y} = \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad u_{C_y} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

Сталі інтегрування A_1 , A_2 , B_1 , B_2 знаходимо на основі початкових умов та законів Кірхгофа. Оскільки сталих інтегрування чотири, а незалежних початкових умов дві, то для їх знаходження необхідно знати значення похідних струму котушки індуктивності та напруги на конденсаторі при $t=0_+$, які визначаємо на підставі вихідної системи (8.2).

Оскільки

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt},$$

то для визначення зазначених похідних одержимо систему рівнянь

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{u_C}{L} + \frac{R_2 i_2}{L}, \quad (8.14)$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E}{R_1 C} - \frac{u_C(t)}{R_1 C} - \frac{i_2(t)}{C}. \quad (8.15)$$

Підставляємо незалежні початкові умови (8.1) в рівняння (8.14), (8.15)

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{u_C(0)}{L}; \quad (8.16)$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{E - u_C(0)}{R_1 C}. \quad (8.17)$$

Згідно з класичним методом розрахунку перехідних процесів струми і напруги подають у вигляді суми вимушених і вільних складових. Отже, для моменту часу $t = 0_+$ одержимо

$$i_2(0_+) = i_{2y}(0_+) + i_{2\epsilon}(0_+);$$

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0_+} = \left. \frac{di_{2y}}{dt} \right|_{t=0_+} = \left. \frac{di_{2\epsilon}}{dt} \right|_{t=0_+}, \quad (8.18)$$

$$u_C(0) = u_{Cy}(0) + u_{C\epsilon}(0);$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \left. \frac{du_{Cy}}{dt} \right|_{t=0_+} + \left. \frac{du_{C\epsilon}}{dt} \right|_{t=0_+} \quad (8.19)$$

Для конкретності вважатимемо, що вільні складові струмів мають вигляд (8.11). Диференціюючи (8.11) по t , знаходимо похідні від вільних складових струму $i_{2\epsilon}(t)$ та напруги $u_{C\epsilon}(t)$

$$\frac{di_{2\epsilon}}{dt} = (-A_1 \omega_\epsilon \sin \omega_\epsilon t + A_2 \omega_\epsilon \cos \omega_\epsilon t) e^{-\delta t} - (A_1 \cos \omega_\epsilon t + A_2 \sin \omega_\epsilon t) \delta e^{-\delta t}; \quad (8.20)$$

$$\frac{du_{C\epsilon}}{dt} = (-B_1 \omega_\epsilon \sin \omega_\epsilon t + B_2 \omega_\epsilon \cos \omega_\epsilon t) e^{-\delta t} - (B_1 \cos \omega_\epsilon t + B_2 \sin \omega_\epsilon t) \delta e^{-\delta t}. \quad (8.21)$$

Беручи до уваги (8.11), (8.13), (8.16), (8.17), (8.20), (8.21), одержуємо систему рівнянь

$$0 = \frac{E}{R_1 + R_2} + A_1; \quad E = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} + B;$$

$$\frac{E}{L} = 0 + A_2 \omega_\epsilon - \delta A_1; \quad \frac{1}{R_1 C} = 0 + B_2 \omega_\epsilon - \delta B_1,$$

з якої визнаємо сталі інтегрування.

$$A_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad A_2 = \frac{E}{\omega_6} \left(\frac{1}{L} + \frac{\delta}{R_1 + R_2} \right);$$

$$B_1 = E \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right); \quad B_2 = \frac{E}{\omega_6} \left(\frac{1}{R_1 C} \delta \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \right). \quad (8.22)$$

Загальні вирази для струмів та напруг. Запишемо вирази для струму $i_2(t)$ та напруги $u_C(t)$ в перехідному процесі як суму усталених і вільних складових

$$i_2(t) = i_{2y}(t) + i_{2\delta}(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} +$$

$$+ \left(-\frac{E}{R_1 + R_2} \cos \omega_6 t + \frac{E}{\omega_6} \left(\frac{1}{L} - \frac{\delta}{R_1 + R_2} \right) \sin \omega_6 t \right) e^{-\delta t},$$

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\delta}(t) = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} +$$

$$+ \left(E \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \cos \omega_6 t + \frac{E}{\omega_6} \left(\frac{1}{R_1 C} + \delta - \frac{R_2 \delta}{R_1 + R_2} \right) \sin \omega_6 t \right) e^{-\delta t}.$$

Ввівши позначення

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\left(\frac{E}{R_1 + R_2} \right)^2 + \left(\frac{E}{\omega_6} \left(\frac{1}{L} - \frac{\delta}{R_1 + R_2} \right) \right)^2};$$

$$\psi_{i2} = \arctg \frac{A_1}{A_2} = \frac{-\frac{E}{R_1 + R_2}}{\frac{E}{\omega_6} \left(\frac{1}{L} - \frac{\delta}{R_1 + R_2} \right)}$$

одержуємо загальний вираз для струму

$$i_2(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + A e^{-\delta t} \sin(\omega_6 t + \psi_{i2}). \quad (8.23)$$

Аналогічно, ввівши позначення

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{E^2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 + \left(\frac{E}{\omega_e} \left(\frac{1}{R_1 + R_2}\right)\right)^2},$$

$$\psi_{uC} = \arctg \frac{B_1}{B_2} = \frac{E \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)}{\frac{E}{\omega_e} \left(\frac{1}{R_1 C} + \delta - \frac{R_2 \delta}{R_1 + R_2}\right)},$$

одержуємо загальний вираз для напруги на конденсаторі

$$u_C(t) = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} + B e^{-\delta t} \sin(\omega_e t + \psi_{uC}). \quad (8.24)$$

8.5 Перехідні процеси в простих електричних колах

8.5.1 Вмикання котушки індуктивності на постійну напругу

Розглянемо електричне коло, схема якого зображена на рис. 8.2.

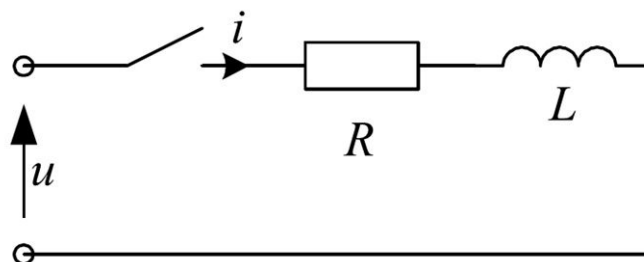


Рисунок 8.2

Перехідний процес у колі описується диференціальним рівнянням

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t). \quad (8.25)$$

Однорідне рівняння, яке відповідає вільній складовій, має вигляд

$$L \frac{di_e}{dt} + Ri_e = 0. \quad (8.26)$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda L + R = 0 \quad (8.27)$$

має один корінь $\lambda = -\frac{R}{L}$.

Вільна складова струму

$$i_e(t) = Ae^{\lambda t} = Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Струм у перехідному процесі подаємо сумою усталеної і вільної складових

$$i(t) = i_y(t) + i_e(t). \quad (8.28)$$

У разі вмикання електричного кола на постійну напругу ($U = const$) усталену складову струму визначають за законом Ома

$$i_y(t) = \frac{U}{R},$$

а струм у колі описується рівнянням

$$i(t) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (8.29)$$

Сталу інтегрування A знаходимо з початкових умов

$$i(0) = 0,$$

звідки $A = -\frac{U}{R}$.

Отже, струм у перехідному процесі змінюється за законом

$$i(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (8.30)$$

На рис. 8.3 наведені криві струму $i(t)$ та його складових $i_y(t)$ і $i_e(t)$ у перехідному процесі.

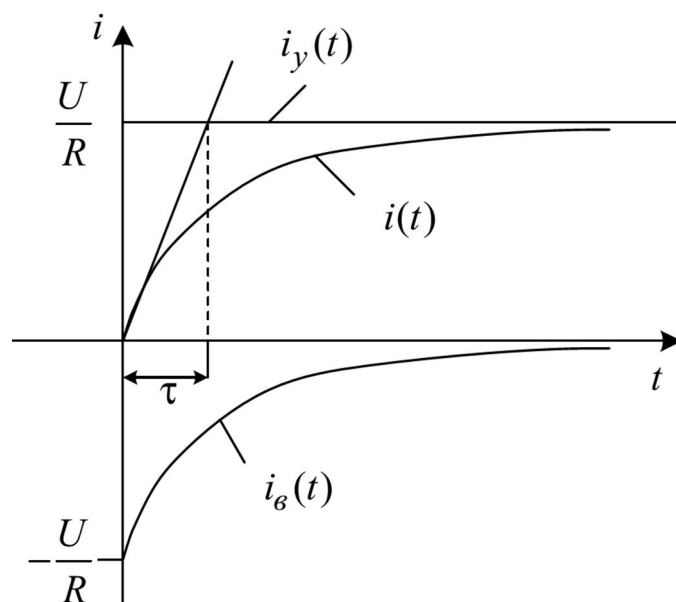


Рисунок 8.3

Величина

$$\tau = \frac{L}{R}$$

називається **сталю часу** (одиниця вимірювання – секунда). Вона характеризує швидкість спадання вільної складової струму в перехідному процесі. Графічно – це довжина піддотичної до кривої $i_g(t)$. Зростання струму в колі з індуктивністю відбувається тим швидше, чим менша стала часу. Оскільки експонента не перетинає осі абсцис, то теоретично перехідний процес триває нескінченно довго. Однак на практиці можна вважати, що він закінчується через час $t = (3 \div 5)\tau$. Тривалість перехідного процесу визначається лише параметрами електричного кола і не залежить від величини напруги, що діє в колі.

Стала часу чисельно дорівнює проміжковій часу, за який вільна складова струму чи напруги зменшується в $e=2,718$ разів. Відповідно струм у колі у разі вмикання на постійну напругу досягає $0,632i_y$. За час $t=5\tau$ струм становить $i = 0,993i_y$.

8.5.2 Вмикання котушки індуктивності на синусоїдну напругу

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Вимушена складова струму має вигляд

$$i_y(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

де $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right),$

тому

$$i(t) = i_y(t) + i_e(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Усталену складову можна визначити символічним методом.

Враховуючи початкові умови $i(0) = i(0_-) = 0$, знаходимо

$$A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi).$$

Загальний вираз для струму в перехідному процесі має вигляд

$$i(t) = I_m (\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \sin(\psi_u - \varphi)) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.31)$$

Напругу на індуктивному елементі знаходимо як похідну від струму $i(t)$

$$u_L = L \frac{di(t)}{dt} = LI_m (\omega \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) + \frac{1}{\tau} \sin(\psi_u - \varphi)) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.32)$$

Приклад часових залежностей напруги $u(t)$, струму $i(t)$ та його складових наведено на рис. . 8.4

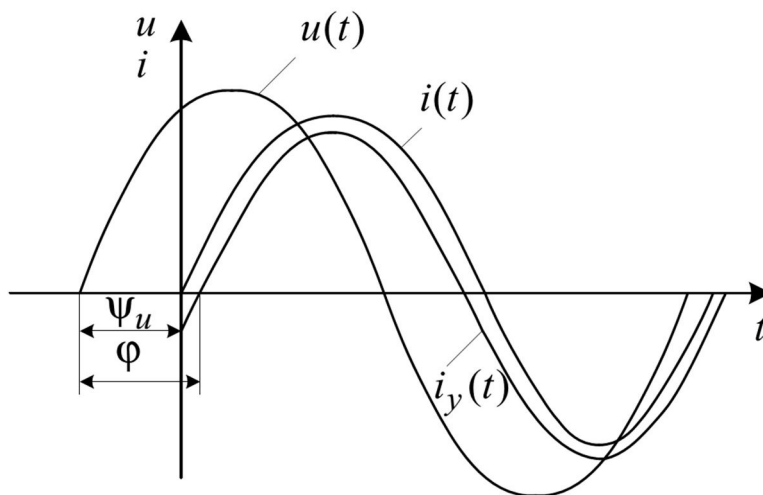


Рисунок 8.4

Характер зміни струму $i(t)$ в перехідному процесі залежить від миттєвого значення прикладеної напруги $u(t)$ в момент комутації, тобто від початкової її фази ψ_u . Як видно з (8.31), вільна складова струму визначається

$\sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}$. Отже, у разі $(\psi_u - \varphi) = 0$ вільна складова дорівнює нулю і в колі відразу настає усталений синусоїдний режим. Якщо комутація відбувається за умови $\sin(\psi_u - \varphi) = \pm 1$, то початкове значення вільної складової струму максимальне і дорівнює $I_{\text{max}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X^2}}$. Однак максимальне значення струму в колі завжди менше від подвійного значення його амплітуди в усталеному режимі.

8.5.3 Вмикання конденсатора на постійну напругу

Розглянемо перехідний процес у зображеному на рис. 8.5 електричному колі за умови $U = \text{const}$.

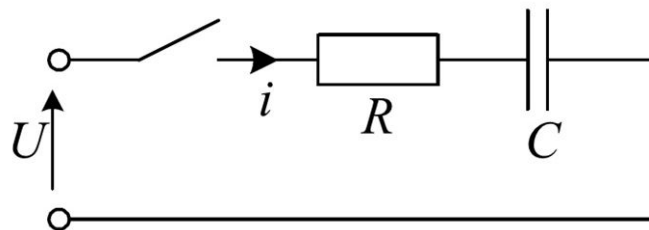


Рисунок 8.5

Вважатимемо, що до комутації конденсатор ємністю C був незаряджений. Отже, початкові умови нульові, тобто напруга на конденсаторі $u_C(0) = 0$.

За другим законом Кірхгофа для скомутованої схеми

$$U = Ri + u_C. \quad (8.33)$$

Враховуючи, що $i = C \frac{du_C}{dt}$, одержуємо

$$U = RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (8.34)$$

Характеристичне рівняння

$$RC\lambda + 1 = 0 \quad (8.35)$$

має корінь $p = -\frac{1}{RC}$. Отже, стала часу $\tau = RC$.

Напругу на конденсаторі в перехідному процесі подамо у вигляді суми усталеної і вільної складових

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{C\delta}(t) = u_{Cy}(t) + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Струм у колі визначається за формулою

$$I = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{du_{Cy}}{dt} - \frac{A}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Якщо коло вмикається на постійну напругу U , то $i_y(t) = 0$, усталена складова напруги на конденсаторі $u_{Cy}(t) = U$, а стала інтегрування $A = -U$. Отже,

$$u_C(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.36)$$

Часові залежності напруги на конденсаторі та струму у разі вмикання конденсатора на постійну напругу наведені на рис. 8.6.

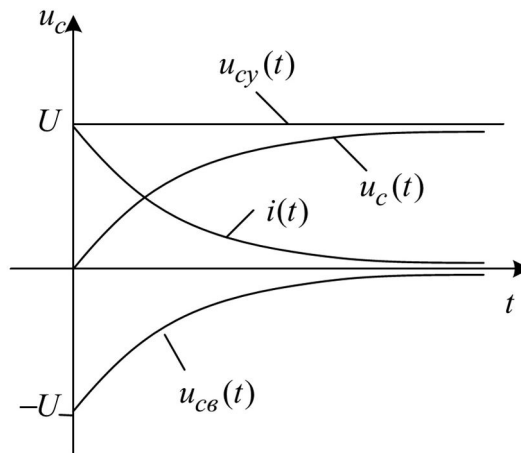


Рисунок 8.6

8.5.4 Вмикання конденсатора на синусоїдну напругу.

Якщо коло вмикається на синусоїдну напругу $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, то усталена складова напруги на конденсаторі

$$u_{Cy} = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi - 90^\circ),$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right).$$

Отже,

$$u_C(t) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Враховуючи, що $u_C(0) = 0$, для визначення сталої A одержимо рівняння

$$0 = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi_u - \varphi) + A.$$

Звідси

$$A = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi_u - \varphi).$$

Отже, в перехідному процесі напруга на конденсаторі змінюється за законом

$$u_C(t) = -\frac{I_m}{\omega C} \left(\cos(\omega t + \psi_u - \varphi) - \cos(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (8.37)$$

а струм у колі

$$i = C \frac{du_C}{dt} = I_m \left(\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \frac{1}{\omega CR} \cos(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (8.38)$$

Якщо в момент комутації фаза прикладеної напруги $\psi_u = \varphi + 90^\circ$, то вільна складова відсутня і в колі відразу початкова встановлюється усталений синусоїдний режим.

8.5.5 Розряд конденсатора на резистор.

Розглянемо процес розряду конденсатора ємністю C , який заряджений до напруги U , на резистор з опором R (рис. 8.7). Очевидно, що перехідний

процес відбувається за рахунок накопиченої в електричному полі енергії W_C

$$= \frac{CU^2}{2}$$

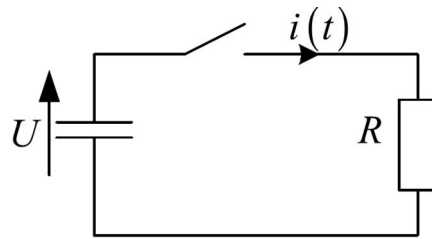


Рисунок 8.7

Оскільки конденсатор розряджається, то усталені значення струму i_y і напруги на конденсаторі u_{Cy} дорівнюють нулю. Отже, необхідно визначити лише вільні складові.

Рівняння Кірхгофа для вільних складових має вигляд

$$Ri_{\epsilon} + u_{C\epsilon} = 0.$$

Враховуючи, що

$$i_{\epsilon} = C \frac{du_{C\epsilon}}{dt},$$

одержуємо для вільних складових диференціальне рівняння

$$RC \frac{du_{C\epsilon}}{dt} + u_{C\epsilon} = 0.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u_C(t) = u_{C\epsilon}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} = U e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (8.39)$$

де $A = u_C(0) = U$, $\tau = RC$.

Для струму в колі одержуємо вираз

$$i(t) = i_{\epsilon}(t) = C \frac{du_{C\epsilon}}{dt} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.40)$$

Перехідний процес під час розрядження конденсатора полягає в переході накопиченої в конденсаторі енергії електричного поля у теплову, яка виділяється в резисторі, тобто

$$W = \int_0^{\infty} i^2(t) R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 (t) R dt = \frac{CU^2}{2}.$$

Графіки струму та напруги в перехідному процесі наведені на рис. 8.8.

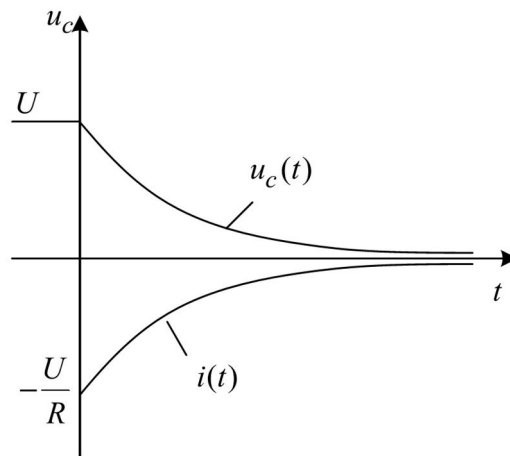


Рисунок 8.8

8.5.6 Аперіодичний розряд конденсатора колі з послідовно з'єднаною котушкою індуктивності.

Розглянемо перехідний процес, що виникає в електричному колі (рис. 8.9), якщо конденсатор перед замиканням вимикача був заряджений до напруги U . На відміну від розряду конденсатора на резистор, під час якого напруга на конденсаторі монотонно спадає до нуля, його розряд на котушку індуктивності з параметрами R , L , може бути аперіодичним або періодичним, тобто коливним.

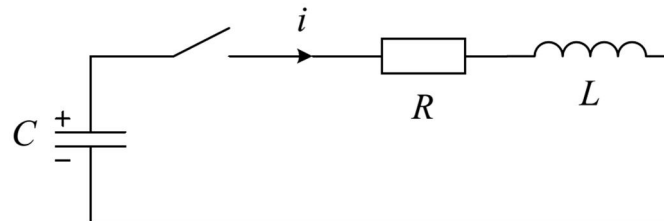


Рисунок 8.9

Оскільки конденсатор розряджається, то усталена складова струму відсутня. Отже, диференціальне рівняння, яке описує перехідний процес, має вигляд

$$Ri_g + L \frac{di_g}{dt} + u_{Cg} = 0. \quad (8.41)$$

Виражаючи струм через напругу на конденсаторі, одержуємо

$$\frac{d^2 u_{C_6}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{C_6}}{dt} + \frac{1}{LC} u_{C_6} = 0. \quad (8.42)$$

Диференціюючи рівняння (8.41) по t , одержуємо рівняння для струму в колі

$$\frac{d^2 i_6}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_6}{dt} + \frac{1}{LC} i_6 = 0, \quad (8.43)$$

що свідчить про однаковий закон зміни напруги на конденсаторі та струму.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0, \quad (8.44)$$

а його корені визначають за формулою

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Характер вільного процесу залежить від коренів рівняння, які визначаються підкореневим виразом. Зокрема, якщо

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC},$$

то корені λ_1, λ_2 будуть дійсні і різні, а загальний розв'язок має вигляд

$$u_{C_6} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (8.45)$$

де A_1 і A_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов

$$u_C(0) = U; \quad i(0) = 0.$$

Враховуючи, що

$$i_6(t) = C \frac{du_{C_6}}{dt} = C(A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}), \quad (8.46)$$

одержуємо з рівнянь (8.45), (8.46) при $t = 0$

$$A_1 = \lambda_2 \frac{U}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad A_2 = -\lambda_1 \frac{U}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Напруга на конденсаторі та струм у колі змінюються за законом

$$u_{C_8}(t) = \frac{U}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}); \quad (8.47)$$

$$i_8(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 C U}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (8.48)$$

Рівняння (8.48) можна записати в іншому вигляді, якщо врахувати, що добуток, коренів характеристичного рівняння (як рівняння другого порядку) дорівнює його вільному члену, тобто $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{LC}$. Отже,

$$i_8(t) = \frac{U}{L(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (8.49)$$

Напруга на індуктивному елементі визначається за формулою

$$U_L(t) = \frac{U}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}). \quad (8.50)$$

Оскільки в колі є індуктивний елемент, то струм спочатку наростає від нуля до деякого максимального значення, а потім спадає до нуля. Чим більша індуктивність котушки, тим повільніше спадає напруга на конденсаторі.

8.5.7 Періодичний розряд конденсатора.

Якщо в характеристичному рівнянні (8.44)

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

активний опір

$$R = R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

то корені цього характеристичного рівняння дійсні і рівні між собою. Такий опір називають **критичним**. У цьому граничному випадку процес ще буде аперіодичним. Зазвичай його називають граничним аперіодичним.

Періодичний (коливний) процес виникає під час розряду конденсатора на котушку індуктивності з параметрами R, L , якщо $R < R_{кр}$. У цьому разі корені характеристичного рівняння (8.44) комплексні спряжені, тобто $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$,

$$\text{де } \alpha = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Напругу на конденсаторі та струм визначають за формулами

$$u_C(t) = u_{C_6}(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \gamma) \quad (8.51)$$

$$i(t) = i_6(t) = -CAe^{-\alpha t} (\alpha \sin(\omega_0 t + \gamma) - \omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma)), \quad (8.52)$$

тобто криві зміни $u_C(t)$ та $i(t)$ мають характер згасаючих синусоїдних функцій з частотою власних коливань контуру ω_0 і коефіцієнтом згасання α (рис. 8.10).

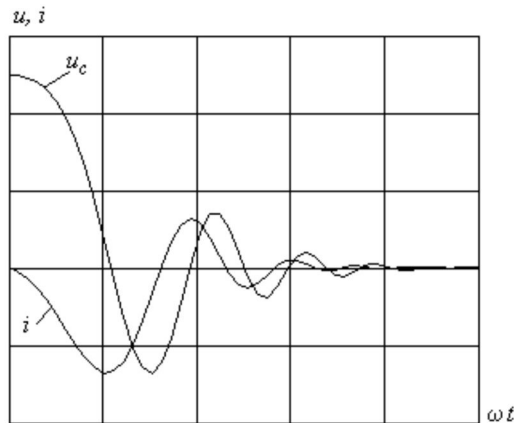


Рисунок 8.10

Під час розряджання конденсатора відбувається обмін енергією між котушкою індуктивності і конденсатором, до того ж у резисторі відбувається незворотне її перетворення в теплову. Очевидно, що в ідеальному коливальному контурі ($R = 0$) відсутнє незворотне перетворення енергії і коливний процес має незгасаючий характер, причому частота ω_0 вільних коливань дорівнює резонансній частоті контуру.

8.6 Операторний метод розрахунку перехідних процесів

8.6.1 Суть операторного методу.

Одним із шляхів розв'язування лінійних диференціальних рівнянь є **операторний** метод. Він ґрунтується на використанні поняття зображення функції. Кожній функції часу відповідає функція комплексної змінної $p = \alpha + j\omega$ і навпаки – кожній функції змінної p відповідає відповідна функція часу. Зображення функцій часу використовується під час застосування символічного

методу розрахунку усталених режимів в електричних колах синусоїдного струму, де зображенням синусоїдної функції часу є комплексне число.

Під час застосування операторного методу розрахунку перехідних процесів перехід від функції часу t до функції комплексної змінної p здійснюється за допомогою прямого перетворення Лапласа, згідно з яким функції $f(t)$ дійсної змінної t ставиться у відповідність інша функція $F(p)$ комплексної змінної p , яку називають **зображенням**. Такий перехід здійснюють за формулою

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (8.53)$$

Інтегральне рівняння (8.53) відображає пряме перетворення Лапласа. Функція $f(t)$ називається оригіналом, а функція $F(p)$ – зображенням за Лапласом. Кожен **оригінал** має своє єдине **зображення**.

Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$, то скорочено записуватимемо так

$$f(t) \Rightarrow F(p). \quad (8.54)$$

Для знаходження оригіналу $f(t)$ за відомим зображенням $F(p)$ необхідно виконати обернене перетворення Лапласа за допомогою інтеграла Бромвіча

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (8.55)$$

який є розв'язком інтегрального рівняння (8.53) стосовно невідомої функції $f(t)$. Його використання дає змогу одержати формули **теорему розкладу**.

Отже, суть операторного методу розрахунку перехідних процесів полягає в переході від реальних функцій часу до їх зображень, розрахунку операторних струмів та напруг і здійснення зворотного переходу. Важливою властивістю операторного методу розрахунку перехідних процесів є відсутність необхідності обчислення сталих інтегрування, оскільки всі початкові умови враховуються під час переходу від систем інтегро-диференціальних рівнянь до

систем операторних алгебричних рівнянь. Операторні зображення струму $i(t)$ та напруги $u(t)$ позначають відповідно як $I(p)$ та $U(p)$.

Розрахунок перехідного процесу операторним методом виконується в такій послідовності:

- 1) перейти від функцій часу до їх операторних зображень;
- 2) розрахувати операторні струми та напруги із застосуванням будь-якого з відомих методів аналізу лінійних електричних кіл;
- 3) перейти від операторних зображень до функцій часу.

8.6.2 Основні властивості перетворення Лапласа.

На практиці формулою (8.53) не користуються, оскільки в теорії операторного числення знайдено зображення практично для всіх функцій, які трапляються в електротехніці. Зображення для найуживаніших функцій наведені в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
A	$\frac{A}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p \pm a}$
$e^{\mp \omega_0 t}$	$\frac{1}{p \pm j\omega_0}$
$e^{j(\omega_0 t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega_0}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p + a)^2}$
$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$

$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega_0 \cos \psi}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega_0 \sin \psi}{p^2 + \omega_0^2}$
$shat = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$chat = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$

Операторне зображення напруги на індуктивному елементі

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0). \quad (8.56)$$

де $i(0)$ – значення струму при $t = 0$.

Величину $Li(0)$ називають **внутрішньою** ЕРС, яка зумовлена запасом енергії в магнітному полі котушки індуктивності внаслідок протікання в ній струму $i(0)$ безпосередньо перед комутацією.

Зображення напруги на конденсаторі

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}, \quad (8.57)$$

де $u_C(0)$ – значення напруги на конденсаторі при $t = 0$.

Величина $\frac{u_C(0)}{p}$ – це внутрішня ЕРС, яка зумовлена запасом енергії в електричному полі конденсатора внаслідок наявності напруги $u_C(0)$ на ньому, безпосередньо перед комутацією.

8.6.3 Операторні заступні схеми.

Для застосування операторного методу розрахунку перехідних процесів необхідно скласти операторну заступну схему. Під час її складання всі величини замінюються їх операторними зображеннями (наприклад, $i(t)$ на $I(p)$, $u(t)$ на $U(p)$, $e(t)$ на $E(p)$ тощо). Індуктивні елементи замінюються послідовними схемами, які складаються з операторного опору pL і джерела ЕРС зі значенням $Li(0)$ (рис. 8.11,а), а ємнісні елементи – послідовними схемами, які складаються

з операторного опору $\frac{1}{pC}$ і джерела ЕРС величиною $\frac{u_C(0)}{p}$ (рис. 8.11,б). Напрямок джерела ЕРС, увімкненого послідовно до котушки індуктивності, збігається з напрямом струму $i_L(t)$, а джерела ЕРС, увімкненого послідовно до ємнісного елемента, – зустрічно до струму $i_C(t)$.

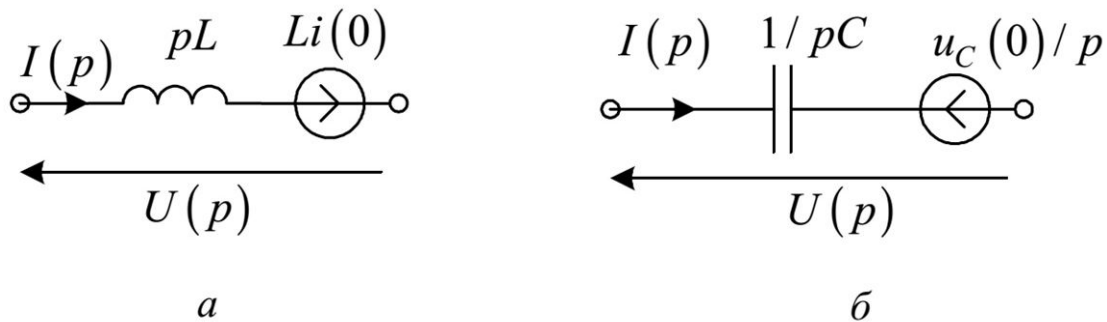


Рисунок 8.11

Операторне рівняння схеми рис. 8.11,а

$$U(p) = pL \cdot I(p) - Li(0),$$

де $i(0)$ – початкове значення струму,

а схеми рис. 8.11,б

$$U(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p},$$

де $u_C(0)$ – початкове значення напруги.

Для прикладу на рис. 8.12 наведено схему електричного кола та його операторну заступну схему.

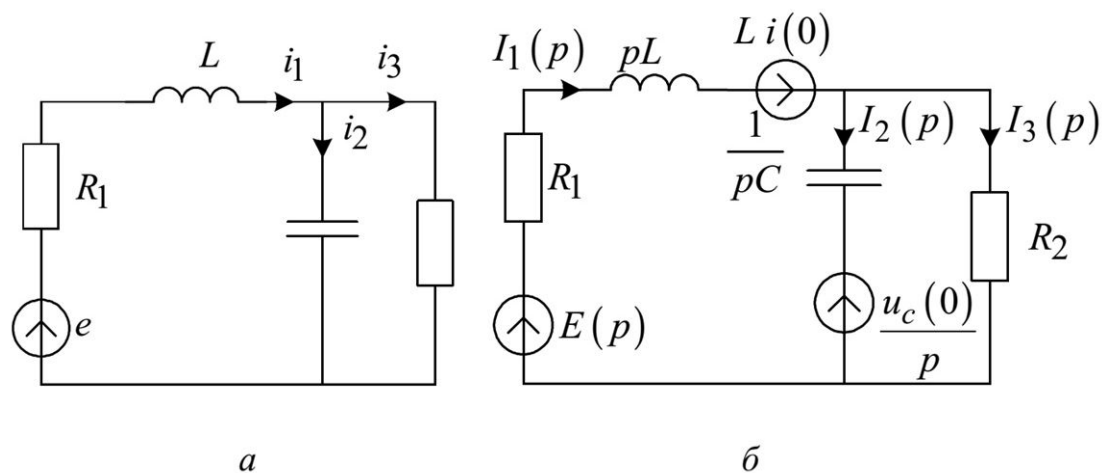


Рисунок 8.12

8.6.4 Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі.

Під час складання рівнянь за законами Ома та Кірхгофа необхідно дотримуватись усіх правил, які були сформульовані вище для дійсних функцій часу. Наприклад, для вітки, яка складається з послідовно з'єднаних резистора, котушки індуктивності та конденсатора, можна записати

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt,$$

Враховуючи, що

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0),$$

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}$$

В операторній формі одержимо

$$\begin{aligned} U(p) &= RI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} = \\ &= \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right) I(p) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Величина

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} \quad (8.59)$$

називається **операторним опором** двополюсника, де R , pL , $\frac{1}{pC}$ – операторні опори резистора, котушки та конденсатора відповідно.

Як видно з (8.59), операторний опір вітки можна одержати з комплексного опору формальною заміною $j\omega$ на p .

Операторні зображення струму $I(p)$ і напруги $U(p)$ узагальненої вітки, до якої входить резистор (параметр – R), котушка індуктивності (параметр – L) і конденсатор (параметр – C), зв'язані співвідношенням

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{Z(p)}, \quad (8.60)$$

яке є *законом Ома в операторній формі*.

Якщо початкові умови нульові, то рівняння (8.60) набуває вигляду

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (8.61)$$

Рівняння (8.61) залишається справедливим, якщо процес у колі до комутації не був усталеним. У цьому разі числові значення $u_C(0)$ і $i_L(0)$ необхідно брати такими, які вони мають у момент комутації.

Перший закон Кірхгофа в операторній формі записується у вигляді рівняння

$$\sum I_k(p) = 0. \quad (8.62)$$

Другий закон Кірхгофа в операторній формі має вигляд

$$\sum E_k(p) = \sum U_k(p), \quad (8.63)$$

де $U_k(p)$ – визначається згідно з (8.58).

У разі ненульових початкових умов рівняння другого закону Кірхгофа (8.63) набуває вигляду

$$\sum E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} = \sum Z_k(p) I_k(p). \quad (8.64)$$

Величини $L_k i_k(0)$ і $\frac{u_{Ck}(0)}{p}$ дають змогу врахувати ненульові початкові умови. Їх можна розглядати як додаткові джерела енергії (так звані внутрішні ЕРС), які вводяться до віток з індуктивними елементами, напрямком яких збігається з напрямком струму, та до віток з ємнісними елементами, напрямком яких протилежний до напрямку струму. Зважаючи на це, для визначення струмів можна використовувати метод накладання і розраховувати процес у колі спочатку за нульових початкових умов, а потім знайти струми та напруги, зумовлені дією додаткових ЕРС, які визначаються початковими умовами, і результати додати.

8.6.5 Перехід від зображень до оригіналу. Теорема розкладу.

Після знаходження операторних зображень струмів та напруг, необхідно здійснити перехід до реальних функцій часу. На практиці найчастіше операторні зображення визначаються у вигляді раціонального дробу

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a^n}, \quad (8.65)$$

де $F_1(p)$, $F_2(p)$ – поліноми оператора p степеня відповідно m та n .

Для знаходження оригіналів таких зображень користуються **теоремою розкладу**, суть якої полягає в такому. Вважатимемо, що степінь m полінома $F_1(p)$ чисельника менша від степеня n полінома $F_2(p)$ знаменника, тобто $m < n$. Тоді за умови, що рівняння $F_2(p) = 0$ не має кратних коренів, а також спільних коренів з рівнянням $F_1(p) = 0$, дріб (8.65) можна розкласти на прості дроби за формулою

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k}, \quad (8.66)$$

де p_1, \dots, p_n – корені рівняння $F_2(p) = 0$.

Оскільки перехід від зображень до оригіналів кожної компоненти виразу (8.66) здійснюють за формулою

$$\frac{A_k}{p-p_k} = A_k e^{p_k t}, \quad (8.67)$$

то оригінал шуканої величини $x(t)$ є сумою

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (8.68)$$

де $F_2'(p_k)$ – значення похідної функції $F_2(p)$, якщо $p = p_k$.

Якщо рівняння $F_2(p) = 0$ має один корінь, що дорівнює нулю, то його можна записати у вигляді добутку

$$F_2(p) = p F_3(p).$$

У цьому разі оригінал знаходять за формулою

$$x(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (8.69)$$

Якщо рівняння $F_2(p)=0$ має n різних коренів, причому корінь p_1 має кратність m_1 , корінь p_2 має кратність m_2 тощо, то оригінал визначають за формулою

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1} F_1(p_k)}{dp^{m_k-1} F_2(p_k)} (p - p_k)^{m_k} e^{pt} \right]_{p=p_k} \quad (8.70)$$

Рівняння (8.68)-(8.70) називають **теоремою розкладу**. Теорема розкладу (8.70) у разі наявності простих коренів (кратність $m_k = 1$) є частковим випадком теореми розкладу для випадку кратних коренів, якщо прийняти $0! = 1$.

Якщо серед коренів рівняння $F_2(p) = 0$ є комплексно спряжені корені p_k і p_k^* , то в рівняннях (8.69), (8.70) достатньо визначити доданок для одного з цих коренів, наприклад p_k , а для спряженого кореня p_k^* взяти спряжене значення цього доданка. Сума, яка відповідає цим двом доданкам, дорівнює подвоєному значенню дійсної частини, знайденої для одного з коренів.

8.7 Перехідні процеси під час вмикання кола на напругу довільної форми

8.7.1 Вступні зауваження.

Нерідко виникає потреба проаналізувати процеси, які відбуваються під час вмикання електричного кола на неперервно змінну напругу довільної форми, наприклад, у разі джерел енергії трикутної, прямокутної, лінійно наростаючої чи спадаючої форми. У разі лінійного електричного кола перехідний процес у ньому можна розрахувати на основі методу накладання із застосуванням інтегралу Дюамеля. Суть методу полягає в тому, що визначають перехідну провідність кола, яка числово дорівнює струмові в колі за дії напруги в один вольт, а потім визначають перехідний струм у колі, зумовлений дією довільної напруги $u = u(t)$.

8.7.2 Перехідні функції.

Припустимо, що двополюсник, операторна провідність якого $Y(p)$, вмикають на постійну напругу U_0 . Операторне зображення струму $I(p)$ на вході визначають за формулою

$$I(p) = U_0(p)Y(p). \quad (8.71)$$

Оригінал струму $I(p)$ можна подати у вигляді

$$i(t) = U_0 g(t), \quad (8.72)$$

де величину $g(t)$, яка є функцією часу, називають **перехідною провідністю**. Її вимірюють у сіменсах (См).

Як видно з (8.72), перехідна провідність числово дорівнює струмові $i(t)$ на вході двополюсника під час вмикання його на постійну напругу $U_0 = 1В$, тобто

$$i(t) = 1 \cdot g(t). \quad (8.73)$$

Звідси випливає спосіб визначення перехідної провідності. Для цього необхідно знайти класичним або операторним методом вираз для струму у вітці у разі вмикання її на постійну напругу в один вольт. Наприклад, перехідну провідність схеми рис. 8.2 визначають за формулою

$$g(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (8.74)$$

Аналогічно можна знайти перехідну функцію напруги у разі живлення кола від джерела струму величиною один ампер. Така перехідна величина називається **перехідним опором** $r(t)$ і вимірюється в омах. Загальна назва перехідних величин (провідності чи опору) – **перехідна функція** $h(t)$. Перехідні функції є функціями часу і не залежать від величини та форми кривих прикладених напруг чи струму, а визначаються параметрами елементів схеми електричного кола. Оскільки значення перехідної функції $h(t)$ залежить від часу, то її називають (**часовою перехідною характеристикою**). Її можна визначити як класичним, так і операторним методом.

8.7.3 Інтеграл Дюамеля.

Нехай до джерела неперервно змінної напруги $u(t)$ (рис. 8.13 *Ошибка!* *Источник ссылки не найден.*, а) вмикають пасивний лінійний двополюсник з довільною внутрішньою схемою. Необхідно знайти струм $i(t)$ на вході двополюсника.

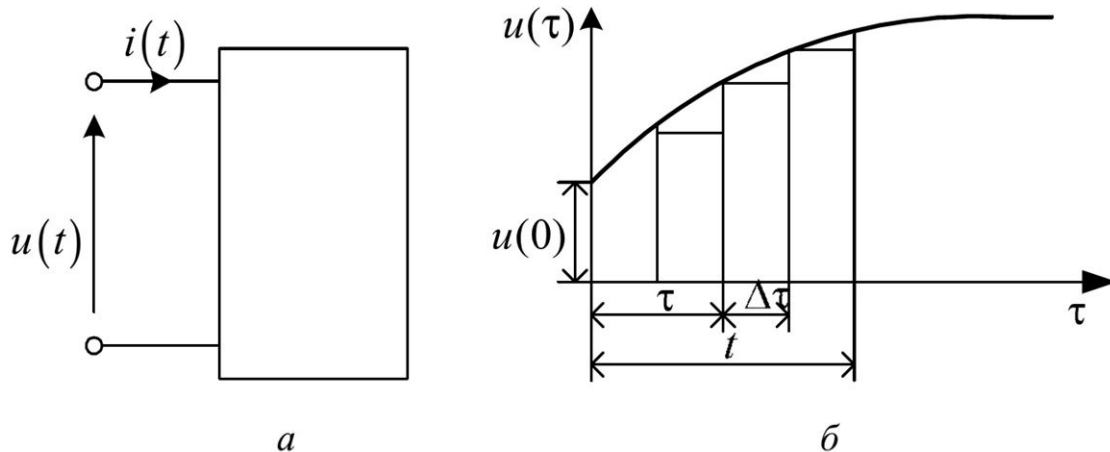


Рисунок 8.13

Неперервно змінну напругу $u(t)$ замінимо ступінчастою функцією з елементарними стрибками напруги Δu (рис. 8.13, б). Тоді зміну напруги можна подати як вмикання при $t = 0$ постійної напруги величиною $u(0)$, а потім елементарних постійних напруг величиною Δu з часовим інтервалом $\Delta \tau$. Ці елементарні напруги можуть мати знак плюс чи мінус в залежності від того зростає чи спадає крива напруги.

Складова струму в момент часу t від постійної напруги $u(0)$ дорівнює $u(0) \cdot g(t)$. Складова струму в момент часу t від елементарного стрибка напруги Δu , який відбувається в момент часу τ дорівнює $\Delta u \cdot g(t - \tau)$. Це пояснюється тим, що елементарний стрибок напруги Δu починає діяти на час τ пізніше розмикання рубильника на вході, тобто проміжок часу між моментом τ початку дії цього стрибка і моментом часу t дорівнює $(t - \tau)$.

Елементарний стрибок напруги Δu можна подати у вигляді $\Delta u \approx \Delta \tau \cdot \text{tga} = \Delta \tau \cdot u'(\tau)$, а відповідну йому складову струму визначити за формулою

$$\Delta u \cdot g(t - \tau) = u'(\tau) \Delta \tau \cdot g(t - \tau).$$

Елементарні стрибки напруги вмикають в інтервалі часу від нуля до t , де t – час, для якого визначається струм. Тому, додаючи складові струму, зумовлені всіма стрибками, і переходячи до границі при $\Delta\tau \rightarrow 0$, а також, врахувавши складову струму від початкового стрибка напруги $u(0)$, одержуємо формулу

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (8.75)$$

яку називають першою формою *інтегралу Дюамеля*. Літерою τ позначено змінну інтегрування, а літерою t – поточне значення часу, для якого потрібно знайти перехідний струм.

В загальному вигляді формулу (8.75) можна записати так

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x'(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Відомі інші форми цього інтегралу, які запишемо стосовно перехідного струму,

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad (8.76)$$

де $u'(t - \tau)$ – похідна функції $u(t - \tau)$ за аргументом $(t - \tau)$;

$$i(t) = u(t)g(0) + \int_0^t u(\tau) g'(t - \tau) d\tau; \quad (8.77)$$

$$i(t) = u(t)g(0) + \int_0^t u(t - \tau) g'(\tau) d\tau. \quad (8.78)$$

Форму інтегралу вибирають в залежності від того, наскільки простим буде підінтегральний вираз.

Формули інтегралу Дюамеля використовують лише у разі нульових початкових умов. За необхідності дослідження перехідного процесу в активному електричному колі з ненульовими початковими умовами

застосовують принцип накладання і зведення задачі до нульових початкових умов.

Розрахунок перехідного процесу з використанням інтегралу Дюамеля виконують у такій послідовності:

1) використовуючи класичний або операторний методи розрахунку перехідних процесів, визначити перехідну провідність $g(t)$ як реакцію кола на одиничну напругу $u(t)=1\text{В}$ та замінити в одержаному виразі аргумент t на $(t-\tau)$;

2) на кожній ділянці неперервної зміни функції вхідної напруги $u(\tau)$ апроксимувати її аналітичним виразом та продиференціювати одержані вирази по часу;

3) для кожного інтервалу часу неперервної зміни вхідної напруги записати вирази для струму у вигляді інтегралу Дюамеля, поданого однією з формул (8.75)-(8.78) з урахуванням стрибків вхідної напруги $u(\tau)$. Останні записують як добуток $\Delta u \cdot g(t-t_k)$ величини стрибка на перехідну провідність, де t_k – час конкретного стрибка;

4) одержаний вираз для струму інтегрують по τ і знаходять остаточні вирази для струму в перехідному процесі за дії прикладеної неперервно змінної напруги як функції часу t .

9 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

9.1 Первинні параметри та диференціальні рівняння однорідної лінії

Під час пересилання електричної енергії через довгі лінії навіть за промислової частоти через наявність ємності між проводами та недосконалість ізоляції виникають струми зміщення та витоку крізь ізоляцію. Однак за високих напруг, які наявні в лініях пересилання, а також високих частот, які існують у лініях зв'язку, нехтувати струмами зміщення (зумовленими ємністю між проводами) і струмами витоку (провідністю ізоляції) неприпустимо, отже, струм у різних перерізах лінії відрізнятиметься. Струм у проводах лінії зумовлює спад напруги в активному опорі і створює змінне магнітне поле, яке наводить у лінії ЕРС самоіндукції, тому напруга між проводами в різних точках лінії буде неоднакова. У зв'язку з чим струм у лінії та напруга залежать від місця у лінії, а тому вони є не тільки функціями часу t , але й координати відстані x , тобто вони є функціями двох змінних

$$u = u(x, t); i = i(x, t).$$

Отже, довгі лінії не можна розглядати як кола із зосередженими параметрами. На відміну від кіл із зосередженими параметрами, процеси в електричних колах з розподіленими параметрами описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Практично будь-яке коло функціонує як коло з розподіленими параметрами, але особливо необхідно враховувати розподілений характер параметрів у довгих лініях електропересилань та ліній зв'язку. Ці лінії характеризуються питомими (тобто погонними) параметрами: активними опорами, провідностями, індуктивностями, ємностями, а іноді і взаємними індуктивностями. Їх розглядають як електричні кола з **розподіленими** параметрами. Якщо ці параметри розподілені рівномірно уздовж лінії, то лінію називають **однорідною**. Це можливо тоді, коли проводи лінії виготовлені з однакового матеріалу, мають однаковий поперечний переріз, взаємне розташування і характеристики середовища (ізоляції) не змінюються уздовж

лінії. Кожен елемент довжини лінії має активний опір R_0 та індуктивність L_0 , а між проводами є активна провідність G_0 і ємність C_0 . Ці параметри називаються **первинними**. Погонні параметри однорідної лінії є сталими і не залежать від координати довжини. Лінія, вздовж якої значення погонних параметрів змінюються, називається **неоднорідною**.

Заступна схема елементарної ділянки однорідної лінії зображена на рис. 9.1. Для записування диференціальних рівнянь, яким задовольняють струми та напруги в будь-якій точці лінії з координатою x зобразимо довгу лінію як сукупність послідовно з'єднаних елементів довжиною dx , кожен з яких має опір $R_0 dx$, індуктивність $L_0 dx$, провідність $G_0 dx$, ємність $C_0 dx$. Для еквівалентної схеми елементарної ділянки лінії на підставі законів Кірхгофа можна записати рівняння для приростів напруг та струмів.

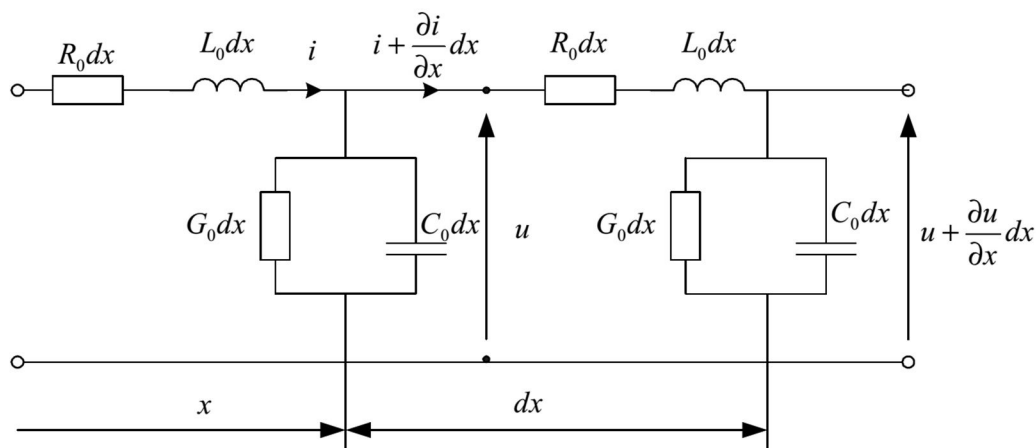


Рисунок 9.1

Якщо в деякий момент часу t в точці, яка розташована на відстані x від початку лінії, напруга та струм мають значення відповідно u та i , то в той же час на відстані $x+dx$ ці величини можна визначити як

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad i + \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Отже, спад напруги u на ділянці dx визначають за формулою

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = R_0 i dx + L_0 \frac{\partial i}{\partial x} dx. \quad (9.1)$$

Різниця між струмами на початку та в кінці ділянки лінії довжиною dx зумовлена наявністю струму провідності між проводами. Її визначають за формулою

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = G_0 u dx + C_0 \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (9.2)$$

Скоротивши (9.1), (9.2) на dx , одержуємо рівняння однорідної лінії в частинних похідних

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial x}.$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (9.3)$$

Розв'язок одержаної системи рівнянь дає змогу визначити миттєві значення напруги та струму як функції лінійної координати x та часу t . Рівняння (9.3) називають *телеграфними* рівняннями. Ці рівняння застосовують як для аналізу процесів у двопровідних лініях передавання інформації, так і в трифазних електроенергетичних лініях, де за умови їх симетрії стає можливим розглядати процеси в одній фазі. У разі несиметричних режимів роботи трифазних мереж аналіз режиму доцільно зводити до застосування методу симетричних складових, тобто до аналізу однофазних схем прямої, зворотної і нульової послідовностей. Отже, надалі рівняння (9.3) розглядатимемо в одновимірному трактуванні, в яких напруга $u = u(x, t)$ – це напруга між проводами, а струм $i = i(x, t)$ – це струм проводу двопровідної лінії.

З математичного погляду рівняння (9.3) належать до класу гіперболічних рівнянь. Вони, як і звичайні диференціальні рівняння, мають безліч розв'язків, тому знаходження конкретного розв'язку потребує знання початкових і крайових умов. Ці умови задають у вигляді закономірності розподілу напруги та струму в початковий момент часу.

9.2 Рівняння однорідної лінії в комплексній формі. Вторинні параметри

За умови незмінних первинних параметрів і синусоїдної напруги живлення струми та напруги в будь-якій точці лінії з координатою x змінюються за гармонічними законами

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Їх можна записати в комплексній формі у вигляді

$$\underline{I}(t) = I e^{j(\omega t + \psi_i)} = I e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t};$$

$$\underline{U}(t) = U e^{j(\omega t + \psi_u)} = U e^{j\psi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}.$$

Комплексні значення напруги \underline{U} та струму \underline{I} є функціями тільки однієї змінної – координати x , тому рівняння (9.3) в частинних похідних для миттєвих значень напруги u та струму i будуть звичайними диференціальними рівняннями для комплексних значень напруги U та струму I

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)\underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \quad (9.4)$$

$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)\underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U} \quad (9.5)$$

де

$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ – комплексний опір одиниці довжини лінії;

$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$ – комплексна провідність одиниці довжини лінії.

Причому $\underline{Y}_0 \neq \frac{1}{\underline{Z}_0}$.

Розв'яжемо систему рівнянь (9.4), (9.5). Для цього диференціюємо рівняння (9.4) по x

$$-\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{d\underline{I}}{dx}. \quad (9.6)$$

Підставивши (9.5) в (9.6), одержуємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{U} = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{+\gamma x}, \quad (9.7)$$

де $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ – сталі інтегрування, а

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (9.8)$$

Комплексна величина

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

називається **коефіцієнтом поширення**, причому α – це **коефіцієнт згасання**, який характеризує зменшення за амплітудою синусоїдної величини у разі поширення хвилі уздовж лінії на одиницю довжини ($\alpha \geq 0$), а β – **коефіцієнт фази**, який характеризує її зміну за фазою ($\beta \geq 0$).

Диференціюючи (9.7) по x і підставляючи одержане значення похідної в (9.4), матимемо

$$\underline{I} = \underline{Z}_C^{-1} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{+\gamma x}). \quad (9.9)$$

Комплексна величина

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad (9.10)$$

називається **хвильовим опором** [Ом]. Якщо однорідну лінію зобразити чотирьохполюсником, то його характеристичний опір дорівнює хвильовому опорів лінії.

Хвильовий опір \underline{Z}_C і коефіцієнт поширення γ називаються **вторинними** (або хвильовими) параметрами лінії, оскільки вони визначаються через первинні параметри лінії.

Для реально існуючих повітряних ліній електропередачі числове значення хвильового опору $\underline{Z}_C = Ze^{j\varphi}$ знаходиться в межах $Z = 300\text{--}600$ Ом, кабельних $Z = 50\text{--}200$ Ом, а кут φ має ємнісний характер.

Для лінії постійного струму $\omega = 0$, а отже,

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0},$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Надалі напругу та струм на початку лінії ($x = 0$) позначатимемо нижнім індексом "1", а в кінці ($x = l$) – індексом "2" (рис. 9.2 *Ошибка! Источник ссылки не найден.*).

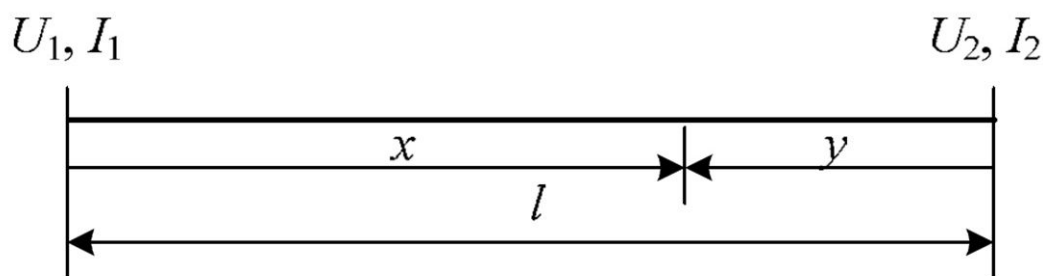


Рисунок 9.2

Визначимо сталі інтегрування \underline{A}_1 та \underline{A}_2 , які входять до рівнянь (9.7) та (9.9), використовуючи граничні умови. Підставивши у зазначені рівняння $x = 0$, одержуємо систему рівнянь

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{Z}_C^{-1} (\underline{A}_1 + \underline{A}_2),$$

з яких знаходимо

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_1}{2}; \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_C \underline{I}_1}{2}. \quad (9.11)$$

Підставивши (9.11) у (9.7) і (9.9), одержуємо рівняння, які дають змогу визначити напругу \underline{U} та струм \underline{I} в будь-якій точці лінії на відстані x від її початку через їх значення \underline{U}_1 та \underline{I}_1 на початку лінії

$$\underline{U} = \frac{1}{2} (\underline{U}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} (\underline{U}_1 - \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{2\gamma x};$$

$$\underline{I} = \frac{1}{2} (\underline{I}_1 + \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_1) e^{-2x} + \frac{1}{2} (\underline{I}_1 - \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_1) e^{2x}. \quad (9.12)$$

Користуючись рівняннями . (9.12), можна визначити напругу та струм у довільній точці лінії через їх значення \underline{U}_2 та \underline{I}_2 в кінці лінії. Для цього необхідно замінити в рівнянні . (9.12) координату x на $y = (l - x)$, тобто відлік вести від кінця лінії (рис. 9.2). У результаті одержимо формули для визначення напруги та струму на відстані y від кінця лінії через їх значення \underline{U}_2 , \underline{I}_2 в кінці лінії

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{2y} + \frac{1}{2} (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{-2y}, \\ \underline{I} &= \frac{1}{2} (\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Z}_C) e^{2y} + \frac{1}{2} (\underline{I}_2 - \underline{U}_2 \underline{Z}_C) e^{-2y}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

9.3 Лінія як чотириполюсник

Використовуючи гіперболічні функції

$$\operatorname{sh} \gamma x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}; \quad \operatorname{ch} \gamma x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2};$$

рівняння . (9.12)

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2} (\underline{U}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{-2x} + \frac{1}{2} (\underline{U}_1 - \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{2x}; \\ \underline{I} &= \frac{1}{2} (\underline{I}_1 + \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_1) e^{-2x} + \frac{1}{2} (\underline{I}_1 - \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_1) e^{2x} \end{aligned}$$

можна записати компактніше

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_C \underline{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x; \\ \underline{I} &= \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_1 \operatorname{sh} \gamma x. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Відповідно рівняння (9.13)

$$\underline{U} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{2y} + \frac{1}{2} (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{-2y},$$

$$\underline{I} = \frac{1}{2} (\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Z}_C) e_{\gamma y} + \frac{1}{2} (\underline{I}_2 - \underline{U}_2 \underline{Z}_C) e^{-\gamma y}.$$

з використанням гіперболічних функцій мають вигляд

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma y;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_2 \operatorname{sh} \gamma y.$$

(9.15)

Підставивши в рівняння (9.15) $y = l$, одержуємо рівняння, які зв'язують між собою напругу і струм на початку та в кінці лінії.

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \gamma l;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2 \underline{Z}_C^{-1} \operatorname{sh} \gamma l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l. \quad (9.16)$$

Порівнюючи (9.16) з рівняннями чотиріполюсника в А-формі

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2,$$

доходимо висновку, що однорідну лінію можна розглядати як симетричний чотиріполюсник, коефіцієнти якого визначають за формулами

$$\underline{A} = \operatorname{ch} \gamma l; \quad \underline{B} = \underline{Z}_C \operatorname{sh} \gamma l;$$

$$\underline{C} = \underline{Z}_C^{-1} \operatorname{sh} \gamma l; \quad \underline{D} = \operatorname{ch} \gamma l$$

його можна подати Т- або П-подібною заступною схемою. Однак розглядати всю лінію як чотиріполюсник можна лише для визначення співвідношення між напругами та струмами на початку та в кінці лінії. Для дослідження розподілу напруги та струму уздовж лінії її необхідно розглядати як однорідну ланцюгову схему з великою кількістю елементарних ланок. Чим з більшої кількості ланок складатиметься ланцюгова схема, тим точнішими будуть результати розрахунку.

9.4 Вхідний опір однорідної лінії

Для дослідження процесів, які відбуваються в лінії, необхідно знати її вхідний опір. Під останнім розуміють комплексний опір \underline{Z}_{ex} , яким можна замінити всю лінію разом зі споживачем \underline{Z}_2 у кінці лінії. Його можна визначити за формулою

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{U_1}{I_1},$$

або з урахуванням (9.16)

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \gamma l;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2 \underline{Z}_C^{-1} \operatorname{sh} \gamma l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l,$$

можна записати

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_C \operatorname{tg} \gamma l}{\underline{Z}_2 \operatorname{tg} \gamma l + \underline{Z}_C} \quad (9.17)$$

За відсутності навантаження в кінці лінії (неробочий режим) ($\underline{Z}_2 = \infty$, $\underline{I}_2 = 0$) з рівнянь (9.16) знаходимо

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{ex0} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = \underline{Z}_C \operatorname{cth} \gamma l = \frac{\underline{Z}_C}{\operatorname{th} \gamma l} \quad (9.18)$$

За короткого замикання ($\underline{Z}_2 = 0$, $\underline{U}_2 = 0$)

$$\underline{Z}_k = \underline{Z}_{exk} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = \underline{Z}_C \operatorname{th} \gamma l. \quad (9.19)$$

Комплексні опори неробочого режиму \underline{Z}_0 та короткого замикання \underline{Z}_k можна визначити експериментально, а, користуючись ними, визначити хвильовий опір та коефіцієнт поширення γ з формул

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Z}_k}; \quad \operatorname{tg} \gamma l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_0}} \quad (9.20)$$

Виходячи з (9.17), (9.18), (9.19), вхідний опір \underline{Z}_{ex} лінії під час навантаження \underline{Z}_2 можна виразити через опори неробочого режиму (\underline{Z}_0) та короткого замикання (\underline{Z}_k) за формулою

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_0 \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \quad (9.21)$$

Якщо опір \underline{Z}_2 навантаження дорівнює хвильовому \underline{Z}_C , то такий режим лінії називають *узгодженням*. У цьому разі відношення комплексів напруги \underline{U} і струму \underline{I} в довільній точці лінії дорівнює хвильовому опоріві

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_C.$$

9.5 Біжучі хвилі в лінії та коефіцієнт відбиття хвилі

Рівняння . (9.12)

$$\underline{U} = \frac{1}{2} (\underline{U}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{-2x} + \frac{1}{2} (\underline{U}_1 - \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{2x};$$

$$\underline{I} = \frac{1}{2} (\underline{I}_1 + \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_1) e^{-2x} + \frac{1}{2} (\underline{I}_1 - \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_1) e^{2x}.$$

дають змогу визначити комплексні значення напруги і струму в довільній точці лінії з координатою x на підставі їх значень \underline{U}_1 , \underline{I}_1 на початку лінії, а рівняння (9.13)

$$\underline{U} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{2y} + \frac{1}{2} (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{-2y},$$

$$\underline{I} = \frac{1}{2} (\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Z}_C^{-1}) e^{2y} + \frac{1}{2} (\underline{I}_2 - \underline{U}_2 \underline{Z}_C^{-1}) e^{-2y}$$

– на підставі значень напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2 в кінці лінії.

Для аналізу електромагнітного процесу в лінії перейдемо від символічного зображення напруги та струму до їх миттєвих значень. Для цього комплексні величини \underline{A}_1 та \underline{A}_2 рівнянь (9.11)

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_1}{2}; \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_C \underline{I}_1}{2}.$$

запишемо у вигляді

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_1 e^{j\omega t}; \quad \underline{A}_2 = \underline{A}_2 e^{j\omega t},$$

і підставимо їх у (9.7):

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{+\gamma x}.$$

Зважаючи, що $\gamma = \alpha + j\beta$, одержуємо

$$\underline{U} = A_1 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_1 - \beta x)} + A_2 e^{\alpha x} e^{j(\psi_2 + \beta x)}.$$

Звідси для миттєвих значень напруги отримаємо вираз

$$u(x, t) = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) = u_\varphi(x, t) + u_\psi(x, t). \quad (9.22)$$

Отже, напругу в довільній точці лінії можна розглядати як суму двох складових u_φ і u_ψ , кожна з яких за фіксованого значення x ($x = \text{const}$) є синусоїдною функцією часу. Для фіксованого значення часу ($t = \text{const}$) амплітуда першої складової ($\sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x}$) зменшується (рис. 9.3 *Ошибка! Источник ссылки не найден.*), а другої ($\sqrt{2} A_2 e^{\alpha x}$) збільшується у разі переміщення від початку до кінця лінії. Складові $u_\varphi(x, t)$ та $u_\psi(x, t)$ називають **біжучими** хвилями в лінії, перша з яких називається **прямою (падаючою)** і поширюється від початку до кінця лінії, а друга – **зворотною (відбитою)** і поширюється від кінця до початку лінії, причому кожна з них згасає у напрямку руху. Отже, кожна складова в фіксований час змінюється уздовж лінії за законом згасаючої хвилі.

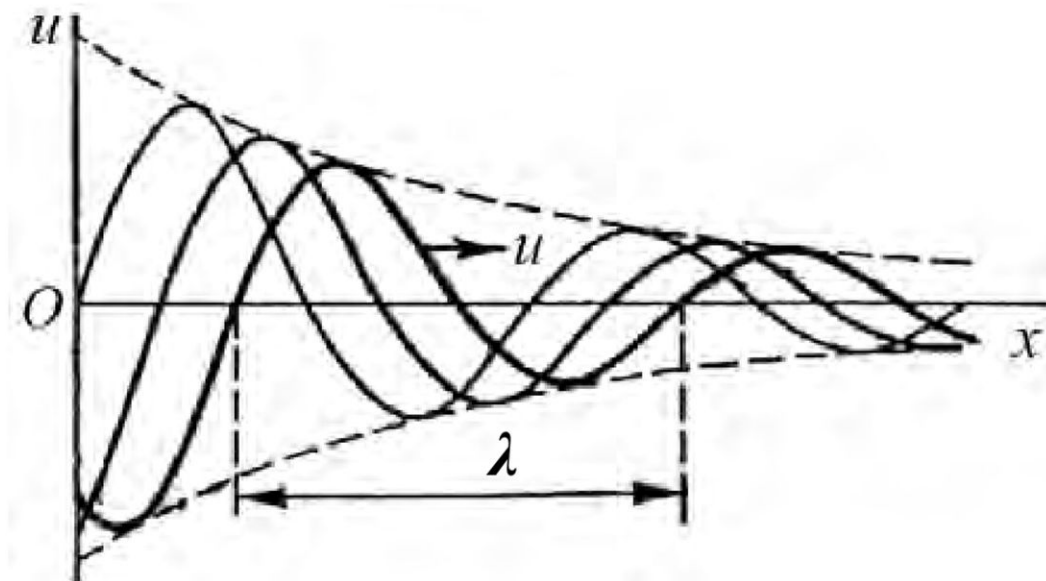


Рисунок 9.3

Аналогічно можна одержати у вигляді падаючої і відбитої хвиль вираз для миттєвого значення струму

$$i(x, t) = \sqrt{2} A_1 \underline{Z}_C^{-1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi) + \\ + \sqrt{2} A_2 \underline{Z}_C^{-1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi) = i_\varphi(x, t) + i_\psi(x, t), \quad (9.23)$$

де $i_\varphi(x, t)$ – пряма хвиля струму, $i_\psi(x, t)$ – зворотна, а φ – аргумент хвильового опору $\underline{Z}_C = Ze^{j\varphi}$.

Зворотні хвилі в лінії можна розглядати як результат відбиття прямих хвиль від кінця лінії. Розподіл біжучої прямої хвилі напруги уздовж лінії для кількох моментів часу наведено на рис. 9.3. Аналогічний вигляд має розподіл відбитих хвиль.

Для оцінювання співвідношення між прямою і зворотною хвилями напруги та струму використовують комплексний коефіцієнт відбиття хвилі, який визначають як відношення комплексних значень напруг (струмів) відбитої до падаючої хвилі в довільній точці лінії.

Комплексний коефіцієнт відбиття хвилі напруги визначається відношенням

$$\underline{k}_u = \frac{\underline{U}_\psi e^{-2\gamma x}}{\underline{U}_\varphi e^{2\gamma x}} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_C} e^{-2\gamma x}. \quad (9.24)$$

Коефіцієнт відбиття хвилі струму обчислюють за формулою

$$\underline{k}_i = \frac{\underline{Z}_C - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_2} e^{-2\gamma x}. \quad (9.25)$$

У разі узгодженого навантаження $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$, отже $\underline{k}_u = \underline{k}_i = 0$, а це означає, що відбиті хвилі відсутні. Однак, якщо в лінії є з'єднання ділянок з різними параметрами, тобто лінія неоднорідна, то в місці з'єднання біжуча хвиля розпадається на дві, одна з яких переходить з однієї ділянки до другої, а друга відбивається від стику ліній. За аналогією з оптичними поняттями першу називають **заломленою** хвилею, другу – **відбитою**. Під час відбиття хвилі від кінця лінії заломленої хвилі бути не може.

9.6 Довжина хвилі в лінії та фазова швидкість

Хвиля напруги (струму) поширюється уздовж лінії з постійною швидкістю v , яка називається *фазовою*. Якщо переміщуватись уздовж лінії зі швидкістю v , то спостерігатимемо незмінну фазу напруги. Інакше кажучи, значення напруги в деякій точці з координатою x залишатиметься незмінним, якщо ця точка буде переміщуватись уздовж лінії зі швидкістю v . За такої умови фаза хвилі спостерігається незмінною, тобто

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const.} \quad (9.26)$$

Продиференціювавши (9.26) по t та враховуючи, що $v = \frac{dx}{dt}$, одержуємо формулу для визначення фазової швидкості

$$v = \frac{\omega}{\beta}. \quad (9.27)$$

Як видно з (9.27), довжина хвилі у довгій лінії залежить лише від коефіцієнта фази β . Аналогічне значення, але з протилежним знаком, можна одержати для швидкості переміщення зворотної хвилі напруги (струму). Це підтверджує той факт, що ці хвилі рухаються в протилежних напрямках.

Другим параметром біжучих хвиль є їх *довжина* λ – найменша відстань між двома точками, взятими в напрямку поширення хвилі, в яких фази відрізняються на 2π . Інакше кажучи, довжина хвилі – це відстань, на яку поширюється хвиля за один період $T = \frac{1}{f}$ де T – період біжучої хвилі, який однаковий для прямої та зворотної хвиль, тобто пряма та зворотна хвилі мають однакові властивості щодо зміни їх амплітуд, фаз та швидкості поширення. Оскільки коефіцієнт β характеризує зміну фази напруги (струму) у разі зміни координати x , то довжину хвилі визначають за формулою

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (9.28)$$

З урахуванням (9.28) формулу (9.27) можна записати у вигляді

$$v = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{\lambda}{T} \quad (9.29)$$

У повітряних лініях пересилання електроенергії за частоти $f = 50$ Гц швидкість v близька до швидкості світла, тому довжина хвилі λ становить

$$\lambda = vT \approx \frac{c}{f} = 6000 \text{ км.}$$

Це означає, що навіть у лінії завдовжки 1000 км за частоти 50 Гц вміщується порівняно невелика частка довжини хвилі, і спостерігати в ній хвильові зміни напруги чи струму уздовж лінії неможливо, оскільки на такій довжині спостерігаємо монотонну їх зміну. Хвильову зміну напруги U і струму I уздовж лінії можна спостерігати лише в лініях зв'язку, зокрема, при $f = 50$ МГц $\lambda = 6$ м. В кабельних лініях швидкість поширення хвилі значно менша від повітряних.

9.7 Однорідна лінія в режимі узгодженого навантаження

Рівняння (9.15)

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma y;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_2 \operatorname{sh} \gamma y.$$

для напруги \underline{U} і струму \underline{I} у довільній точці лінії на відстані y від кінця лінії можна подати у вигляді

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \left(\operatorname{ch} \gamma y + \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_2} \operatorname{sh} \gamma y \right);$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \left(\operatorname{ch} \gamma y + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \gamma y \right). \quad (9.30)$$

Режим роботи лінії за будь-якого значення навантаження \underline{Z}_2 можна одержати накладанням двох граничних режимів – неробочого та короткого замикання. Справді, для неробочого режиму ($\underline{Z}_2 = \infty$), враховуючи

(9.30) маємо

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y; \\ \underline{I}_0 &= \underline{U}_2 \underline{Z}_2^{-1} \operatorname{sh} \gamma y,\end{aligned}\quad (9.31)$$

а для короткого замикання ($\underline{Z}_2 = 0$)

$$\begin{aligned}\underline{U}_k &= \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma y; \\ \underline{I}_k &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y.\end{aligned}\quad (9.32)$$

Отже, з урахуванням (9.31), (9.32) рівняння (9.15) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_0 + \underline{U}_k; \\ \underline{I} &= \underline{I}_0 + \underline{I}_k.\end{aligned}\quad (9.33)$$

Як випливає з (9.33), розподіл напруги та струму уздовж лінії можна знайти, користуючись розподілом їх складових за неробочого режиму та короткого замикання, а годографи комплексів напруги та струму в режимі заданого навантаження лінії можна побудувати за допомогою годографів цих складових.

Оскільки в режимі *узгодженого* навантаження $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$ відбиті хвилі відсутні, а відношення комплексів напруги і струму в довільній точці лінії дорівнює \underline{Z}_C , то режим роботи генератора, який живить таку лінію, не зміниться, якщо будь-яку частину лінії відрізати і замість неї під'єднати навантаження, що дорівнює хвильовому опорі \underline{Z}_C .

Для визначення напруги та струму в режимі узгодженого навантаження ($\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$) скористаємось формулами (9.14). У результаті одержимо

$$\underline{U} = \underline{U}_2 e^{2\gamma y}; \quad \underline{I} = \underline{I}_2 e^{2\gamma y}.\quad (9.34)$$

Формули (9.34) дають змогу визначити напругу і струм на початку однорідної лінії, навантаженої хвильовим опором, через їх значення в кінці лінії

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{\gamma l}; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 e^{\gamma l}.\quad (9.35)$$

Напруга і струм зсунені між собою на кут φ , що відповідає відстані уздовж лінії φ/β . Якщо прийняти початкову фазу напруги \underline{U}_2 в кінці лінії такою,

що дорівнює нулю, то миттєві значення напруги і струму в довільній точці лінії визначаються за формулами

$$u = U_{2m} e^{\alpha y} \sin(\omega t + \beta y);$$

$$i = I_{2m} e^{\alpha y} \sin(\omega t + \beta y - \varphi).$$

Потужність, яка пересилається по лінії за номінальної напруги в режимі узгодженого навантаження, називається **натуральною**. Зважаючи на те, що у разі узгодженого навантаження наявна в лінії тільки пряма хвиля, комплекс потужності, яка пересилається по лінії, визначають за відомими значеннями напруги \underline{U}_1 та струму \underline{I}_1 на початку лінії

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = U_1 e^{-2x} \frac{U_1^*}{Z_C^*} e^{-\gamma^* x} = \\ &= \frac{U_1^2}{Z_C} e^{-2\alpha x} e^{j\varphi} = \frac{U_1^2}{Z_C} U_{12}/Z_C e^{-2\alpha x} \cos\varphi + j \frac{U_1^2}{Z_C} e^{-2\alpha x} \sin\varphi, \end{aligned}$$

або $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ – у кінці лінії

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} * \underline{I}^* = U_2 e^{2x} \frac{U_2^*}{Z_C^*} e^{-\gamma^* x} = \\ &= \frac{U_2^2}{Z_C} e^{2\alpha y} e^{j\varphi} = \frac{U_2^2}{Z_C} e^{2\alpha y} \cos\varphi + j \frac{U_2^2}{Z_C} e^{2\alpha y} \sin\varphi. \end{aligned}$$

Значення активної та реактивної потужностей зменшується в міру поширення хвилі від початку до кінця лінії. Зменшення активної потужності зумовлено втратами на елементі dx в поздовжньому елементарному активному опорі $R_0 dx$ та поперечній активній провідності $G=dx$, а реактивної – змінами запасів енергії електричного і магнітного полів.

Активна потужність, яка пересилається через довільний перетин лінії, зменшується у разі збільшення віддалі від початку лінії за законом

$$P = UI \cos\varphi = \frac{U_2^2}{Z_2} e^{2\alpha x}. \quad (9.36)$$

Отже, потужність на початку $x = 0$ та в кінці $x = l$ лінії в умовах узгодженого навантаження визначають за формулами

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \varphi;$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi. \quad (9.37)$$

Коефіцієнт корисної дії однорідної лінії визначають як відношення активної потужності P_2 в кінці лінії до активної потужності P_1 на початку лінії, тобто

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \quad (9.38)$$

9.8 Лінія без спотворень та лінія без втрат

Хвильовий опір \underline{Z}_C

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

та коефіцієнт поширення γ

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

залежать від частоти.

Отже, якщо уздовж лінії поширюється несинусоїдний сигнал, то коефіцієнт згасання для різних гармонік різний. Вони поширюються уздовж лінії з різними швидкостями. Значить, під час поширення несинусоїдних хвиль напруг і струмів змінюється їхня форма, тобто відбувається спотворення, яке шкідливе для пересилання інформації, особливо звукової. Для усунення спотворення необхідно, щоб хвильові характеристики лінії не залежали від частоти. Це можливо, якщо для первинних параметрів виконується співвідношення

$$\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}. \quad (9.39)$$

Фазова швидкість для такої лінії не залежить від частоти, тобто хвилі всіх частот поширюються з однаковою фазовою швидкістю і всі однаково згасають (зменшуються за амплітудою). Лінія, для якої виконується співвідношення (9.39), називається *лінією без спотворень*. Хвильовий опір такої лінії визначається за формулою

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}, \quad (9.40)$$

тобто він не залежить від частоти і є активним.

Враховуючи (9.40), знаходимо коефіцієнт поширення хвилі для лінії без спотворень.

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (9.41)$$

Фазова швидкість у цьому разі має максимальне значення

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}, \quad (9.42)$$

і також не залежить від частоти (c – швидкість поширення світла в середовищі з магнітною сталою μ_r і діелектричною сталою ϵ_r).

Ліній без втрат не існує, однак можна створити лінію, в якій ці втрати будуть настільки малі, що ними можна знехтувати. *Лінію без втрат* можна розглядати як ідеалізацію реальної лінії. Отже, якщо $R_0 \ll \omega L_0$, а $G_0 \ll \omega C_0$ то можна прийняти $R_0=0$, $G_0=0$ і дослідити характер електромагнітних процесів за цієї умови. Зазначеним умовам з деяким наближенням відповідають лінії пересилання інформації і лінії пересилання електроенергії високих напруг (вище 330 кВ).

Коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$ лінії без втрат

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad (9.43)$$

тобто коефіцієнт згасання $\alpha = 0$, а коефіцієнт фази $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$. У цьому разі хвильовий опір

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

тобто є винятково активним і від частоти не залежить.

Довжина хвилі у лінії без втрат

$$v = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{T}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Фазова швидкість прямої та зворотної хвиль у цьому разі не залежить від частоти

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Для визначення напруги \underline{U} і струму \underline{I} в довільній точці лінії без втрат скористаємось формулами (9.14), (9.15)

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_C \underline{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_1 \operatorname{sh} \gamma x.$$

і врахуємо, що $\gamma y = j\beta y$; $\operatorname{ch} jx = \cos x$; $\operatorname{sh} jx = j \sin x$; $\operatorname{sh} j\beta y = j \sin \beta y$. У результаті одержимо рівняння лінії без втрат, які дають змогу визначити ці величини за їх значеннями ($\underline{U}_1, \underline{I}_1$) на початку лінії

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \cos \beta x + j \underline{Z}_C \underline{I}_1 \sin \beta x;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 \cos \beta x - j \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_1 \sin \beta x, \quad (9.44)$$

та за значеннями ($\underline{U}_2, \underline{I}_2$) в її кінці

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{Z}_C \underline{I}_2 \sin \beta y;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \cos \beta y + j \underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_2 \sin \beta y. \quad (9.45)$$

9.9 Стоячі хвилі в лінії

Стояча хвиля є результатом накладання прямої та зворотної хвиль з однаковими амплітудами. Математично рівняння стоячої хвилі можна подати добутком двох періодичних (тригонометричних) функцій, одна з яких є функцією часу, а друга – координати точки лінії. Для стоячих хвиль характерне

чергування *вузлів* та *пучностей* (рис. 9.4), причому стоячі хвилі напруги та струму завжди зсунені одна щодо іншої в часі на кут 90° , а в просторі – на одну четверту довжини хвилі. Стоячі хвилі в лінії виникають у лініях без втрат у неробочому режимі і за короткого замикання, а також у разі суто реактивного навантаження. Інакше кажучи, коли реактивна потужність, яка споживається навантаженням лінії, дорівнює нулю. Зокрема, за неробочого режиму ($\underline{I}_2 = 0$, $\underline{Z}_2 = \infty$) рівняння (9.45)- (9.46)

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos\beta y + j\underline{Z}_C \underline{I}_2 \sin\beta y;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \cos\beta y + j\underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_2 \sin\beta y.$$

має вигляд

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos\beta y;$$

$$\underline{I} = j\underline{Z}_C^{-1} \underline{U}_2 \sin\beta y.$$

Відповідно для миттєвих значень одержимо

$$u = U_{2m} \cos\beta y \sin\omega t;$$

$$i = \underline{Z}_C^{-1} U_{2m} \sin\beta y \cos\omega t. \quad (9.46)$$

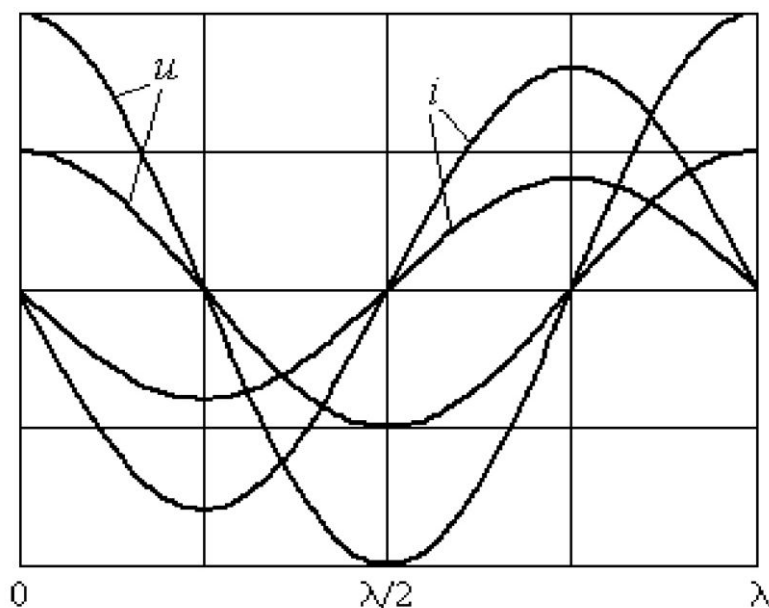


Рисунок 9.4

Кожне з рівнянь (9.46) можна подати у вигляді двох складових – прямої і зворотної хвиль, які мають однакові амплітуди.

$$u = \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta y) + \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t - \beta y);$$

$$i = \frac{U_{2m}}{2Z_C} \sin(\omega t + \beta y) - \frac{U_{2m}}{2Z_C} \sin(\omega t - \beta y). \quad (9.47)$$

Як видно з (9.47), в неробочому режимі в кінці лінії ($y = 0$), а також у точках з координатами

$$y = k \frac{\pi}{\beta} = k \frac{\lambda}{2},$$

де k – ціле число, в будь-який момент часу наявні максимуми (пучності) напруги і нулі (вузли) струму (рис. 9.4 *Ошибка! Источник ссылки не найден.*), а на відстанях

$$y = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

завжди спостерігаються вузли напруги і пучності струму. Зауважимо, що вузли струму збігаються з пучностями струму і навпаки.

У вузлах напруга (струм) дорівнює нулю в будь-який момент часу, тому потужність у них завжди дорівнює нулю і енергія через ці точки передаватись не може. У разі стоячих хвиль енергія може переміщуватись лише в межах між вузлом напруги і струму і пов'язана вона з обміном енергією між електричним і магнітним полями на кожній з цих ділянок.

Аналогічне спостерігаємо у разі короткого замикання кінця лінії без втрат. Відмінність електромагнітних процесів у неробочому режимі та в режимі короткого замикання лінії без втрат полягає в тому, що міняються місцями розташування вузлів і пучностей напруги та струму. Зокрема, в кінці розімкненої лінії є вузол струму ($I_2 = 0$) і пучність напруги, а в кінці короткозамкненої лінії – пучність струму і вузол напруги ($U_2 = 0$).

9.10 Вмикання лінії на постійну напругу

Якщо і кінці лінії ввімкнений (лінія навантажена) хвильовий опір Z_C відбиті хвилі відсутні, у лініях зв'язку завжди прагнуть досягти їх усунення. Умова відсутності відбитих хвиль близька до умови, за якої приймач одержує від генератора найбільшу потужність. Для узгодження опорів генератора і лінії або лінії і споживача, останній можна вмикати в лінію через трансформатор з відповідним коефіцієнтом трансформації.

Під час вмикання кола з розподіленими параметрами виникає пряма хвиля, яка поширюється уздовж лінії і заряджає лінію. Для джерела напруги синусоїдної форми промислової частоти довжина хвилі становить 6000 км, тому впродовж достатньо великої ділянки напругу можна вважати постійною. З цієї причини явище поширення електромагнітної хвилі якісно можна розглянути на прикладі хвилі з прямокутним фронтом (рис. 9.5 Ошибка! Источник ссылки не найден.) у лінії без втрат. Для такої хвилі характерне те, що у всіх точках лінії, розташованих до фронту хвилі, напруга і струм дорівнюють нулю, а в точках, розташованих за фронтом хвилі, напруга і струм незмінні.

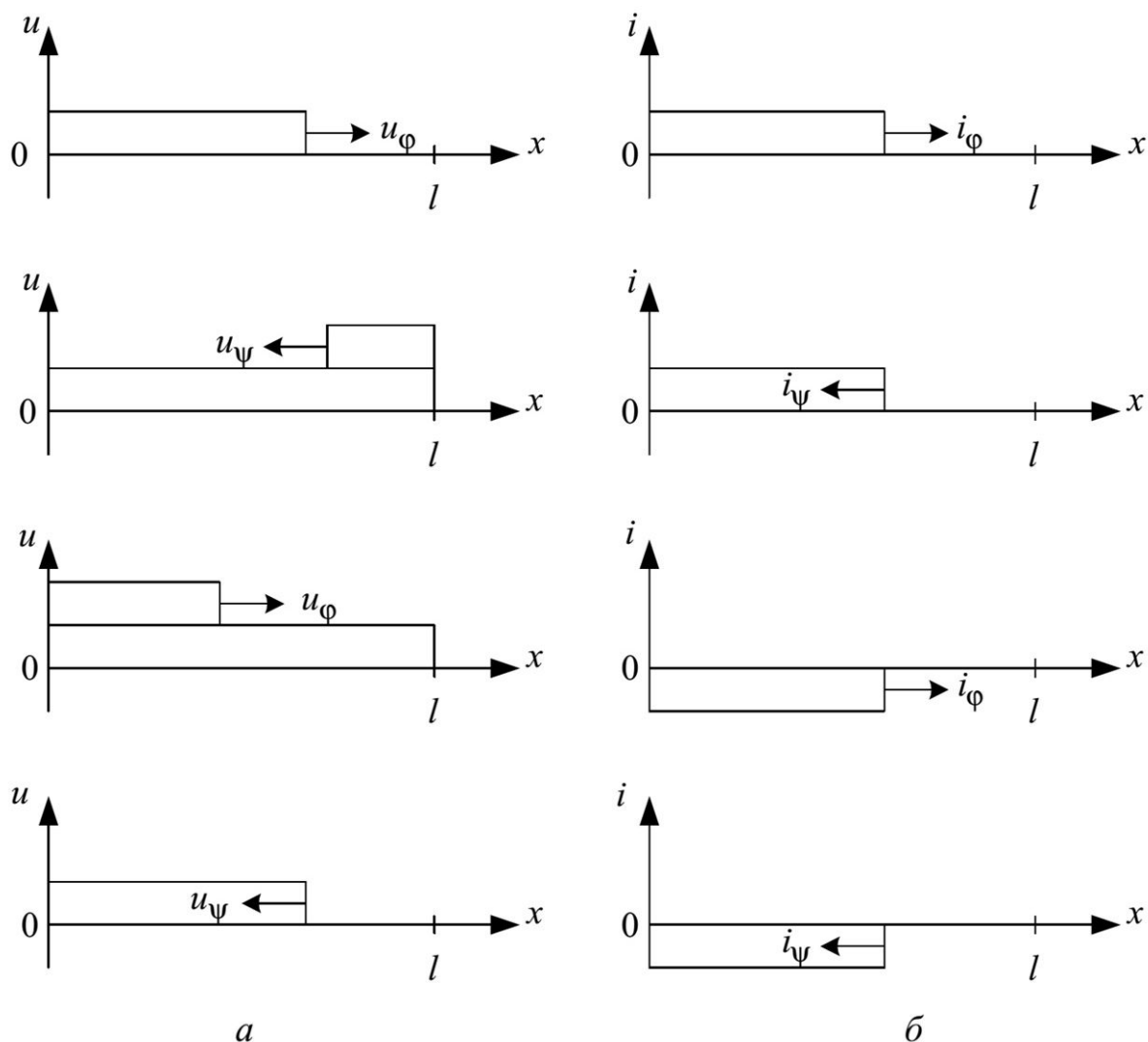


Рисунок 9.5

Поширення хвилі з прямокутним фронтом необхідно розглядати як ідеалізацію реального процесу, оскільки поширення електромагнітної хвилі з прямокутним фронтом означає, що напруга і струм у кожній точці лінії стрибкоподібні, а це неможливо в колах з індуктивностями та ємностями.

Поширення хвилі в лінії є сумою прямої (φ) і відбитої (ψ) хвиль. У разі розімкненої лінії відбита хвиля напруги має таке ж значення, як і пряма, а хвиля струму відбивається зі зміною знака $u_\psi = u_\varphi$; $i_\psi = -i_\varphi$.

У разі короткого замикання лінії навпаки – хвиля напруги відбивається зі зміною знака, а хвиля струму має таке ж значення, як i пряма.

$$u_\psi = -u_\varphi; i_\psi = i_\varphi.$$

Розглянемо процеси вмикання розімкненої в кінці лінії на постійну напругу U_0 . Після вмикання джерела уздовж лінії поширюються хвилі напруги

з прямокутним фронтом і струму (рис. 9.5 Ошибка! Источник ссылки не найден.). Дійшовши до кінця, ці хвилі відіб'ються, причому хвиля наруги без зміни знака, а струму – з протилежним знаком. Якщо лінія розімкнена на кінці, то коефіцієнти відбиття наруги $k_u = 2$, а струму $k_i = 0$, отже, під час переміщення в напрямку джерела відбиті хвилі накладаються на падаючі, внаслідок чого наруга в лінії подвоюється ($u_2 = 2U_0$), а струм зменшується до нуля ($i_2 = 0$). Відбиті від розімкненого кінця хвилі, досягнувши джерела, знову відіб'ються, причому відбита хвиля наруги змінить знак, а струму ні (як у разі короткого замикання). Від'ємна хвиля наруги під час переміщення до кінця лінії знижує наругу в ній до значення, що дорівнює нарузі джерела, а струм буде протилежним до свого початкового значення. Досягнувши кінця лінії, хвилі втретє відіб'ються, в результаті чого до джерела поширяться від'ємна хвиля наруги, яка знизить наругу в лінії до нуля, і додатна хвиля струму, яка також знизить його до нуля. Цим завершується повний цикл, який надалі повторюється.

У разі короткого замикання лінії $k_u=0$, $k_i=2$. Відбита хвиля наруги відбивається від кінця лінії зі зміною знака і компенсує падаючу хвилю ($u_2 = 0$), а хвиля струму – без зміни і струм у лінії подвоюється. Оскільки під час всіх наступних відбивань від джерела і від короткозамкненого кінця лінії хвиля наруги відбивається зі зміною знака, то наруга в лінії дорівнюватиме або нарузі джерела, або нулю. Відбивання хвилі струму і від кінця лінії, і від джерела відбувається без зміни знака. Тому струм у лінії після кожного відбивання зростає на величину початкового значення, і в результаті струм зростає.

Повний цикл процесу в лінії довжиною l відбувається за час

$$T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{LC}.$$

Цей період називають періодом власних коливань лінії. Зауважимо, що в контурі із еквівалентними зосередженими параметрами котушки індуктивністю L_0l і ємністю C_0l він дорівнював би $T_0 = 2\pi l\sqrt{L_0 C_0}$, тобто в $\pi/2$ разів більший.

У разі узгодженого навантаження ($Z_2 = Z_C$) $u_2 = U_{\text{пад.}}$, $i_2 = I_{\text{пад.}}$, тому відбитих хвиль немає, а енергію хвилі повністю поглинає навантаження.

Рекомендована література

1. Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки. Львів : Львівська політехніка, 2018. 416 с.

2. Хілов В.С. Теоретичні основи електротехніки: підручник. Д.: Національний технічний університет “Дніпровська політехніка”, 2021 р. 433 с.

3. Попова І.О., Курашкін С.Ф., Вовк О.Ю., Попрядухін В.С. Теоретичні основи електротехніки: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти закладів вищої освіти. Мелітополь: Видавничо–поліграфічний центр «Люкс», 2020. 221 с.

4. Теоретичні основи електротехніки: Частина 1. Електричні кола постійного та змінного струму. Чотиріполюсники [Електронний ресурс]: навч. посіб. Для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю. В. Перетятко, А. А. Щерба. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 115 с.

5. Теоретичні основи електротехніки: Нелінійні системи. Перехідні процеси. [Електронний ресурс]: практикум. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю. В. Перетятко. А. А. Щерба. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 140 с.

6. Теоретичні основи електротехніки. Нелінійні електричні і магнітні кола: [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Л.Ю. Спінул, М.П.Бурик. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 59 с.

7. Воробкевич А.Ю., Маляр В.С., Совин Р.Я., Соколовський М.О., Стахів П.Г., Шегедин О.І. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки : Навч. посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Львів: “Новий Світ–2000”, 2020. 224 с.

8. Карпов Ю.О., Кацив С.Ш., Кухарчук В.В. Теоретичні основи

електротехніки. Комп'ютерні розрахунки та моделювання лінійних електричних кіл. Одеса : Гельветика, 2019. 210 с.

9. Каців С.Ш., Ведміцький Ю.Г., Кухарчук В.В. Теоретичні основи електротехніки. Комп'ютерні розрахунки та моделювання нелінійних електричних кіл та кіл з розподіленими параметрами. Одеса : Гельветика, 2019. 148 с.

10. Карпов Ю.О., Ведміцький Ю.Г., Кухарчук В.В. Теоретичні основи електротехніки. Задачі та приклади розрахунку лінійних електричних кіл. Одеса : Гельветика, 2019. 346 с.

E50

Електротехніка в електроенергетиці [Текст] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво спеціальності G3 Електрична інженерія денної та заочної форм навчання / уклад. А.В. Гадай. Луцьк : ЛНТУ. 2025. 188 с.

Комп'ютерний набір та верстка: А. Гадай

Підп. до друку __.__. 2025р.
Формат 60×84/16. Папір офс. Гарн. Таймс.
Ум. друк.арк. 10,9. Обл.-вид.арк. 11,15.
Наклад 50 прим.

Відділ іміджу та промоції
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – Відділ іміджу та промоції ЛНТУ