Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет

Моделювання динамічних процесів у складних системах

Конспект лекцій з дисципліни Моделювання динамічних процесів у складних системах для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти освітньої програми «Прикладна математика» галузі знань F Інформаційні технології спеціальності F1 «Прикладна математика» денної та заочної форм навчання (перша частина)

ЛУЦЬК 2026

УДК 517.53/.55
К 21
До друку
Голова вченої ради факультету робототехніки та штучного інтелекту __________________ А. Ткачук
Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки _________________ Н.Поліщук
Рекомендовано до видання вченою радою факультету робототехніки та штучного інтелекту ЛНТУ, протокол № ____ від «____» ______________ 2026 року.
Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання
протокол № ____ від «____» ______________ 2026 року.
Завідувач кафедри _________________ О. Мікуліч
Укладач: ______________О. Бондарський, кандидат технічних наук, доцент кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання ЛНТУ
Рецензент: ______________ О. Приходько, кандидат технічних наук, доцент кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання ЛНТУ
Відповідальний за випуск: ______________О. Мікуліч, доктор технічних наук, завідувач кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання ЛНТУ

Моделювання динамічних процесів у складних системах: Конспект лекцій для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти освітньої програми «Прикладна математика» галузі знань F Інформаційні технології спеціальності F1 «Прикладна математика» денної та заочної форм навчання (перша частина) / укладач О. Бондарський. – Луцьк: ЛНТУ, 2026. –51 с.

Конспект лекцій складений відповідно до діючої програми курсу Моделювання динамічних процесів у складних системах для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти освітньої програми «Прикладна математика» галузі знань F Інформаційні технології спеціальності F1 «Прикладна математика» денної та заочної форм навчання. Наведені мета, завдання та програма навчальної дисципліни та теоретичний матеріал курсу.

Мета і завдання дисципліни «Моделювання динамічних процесів у складних системах»

Мета вивчення дисципліни.

Як навчальна дисципліна «Моделювання динамічних процесів у складних системах» забезпечує формування у студентів практичних навичок моделювання, формалізації та розв'язання інженерних задач динаміки за допомогою сучасних методів аналітичної, чисельної та штучно-інтелектуальної обробки даних.

Завдання вивчення дисципліни

Формування у студентів комплексного бачення про методи розв'язання інженерних задач динаміки, застосування математичного моделювання для вирішення реальних практичних задач, вивчення основних прийомів та методів, ознайомлення з необхідним програмним забезпеченням.

Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1

«Застосування в моделюванні динамічних процесів диференціальних рівнянь та загальних теорем динаміки».

Тема 1. Моделювання динаміки систем за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Тема 2. Використання загальних теорем динаміки для моделювання руху складних механічних систем.

Тема 3. Вивчення динаміки механічної системи з використанням теореми про зміну кінетичної енергії.

Змістовий модуль 2

«Моделювання динаміки механічних систем за допомогою різноманітних методів та теорій».

Тема 4. Застосування у моделюванні задач динаміки методу кінетостатики.

Тема 5. Моделювання динаміки твердого тіла у випадку його поступального, обертального, плоскопаралельного або сферичного руху.

Тема 6. Застосування в моделюванні динаміки систем наближеної теорії гіроскопів.

ДИНАМІКА

Динаміка - це розділ механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних об’єктів з урахуванням сил, що діють на ці об’єкти.

Вперше термін „динаміка” ввів німецький математик Г.Лейбніц.

Основні поняття динаміки

Основними поняттями динаміки є: матеріальна точка, сила, маса, абсолютно тверде тіло. Тут нове поняття - це поняття маси.

Маса - це фізична величина, яка є мірою інертних і гравітаційних властивостей речовини.

Сили в динаміці будемо поділяти на сталі і змінні. В загальному випадку будемо вважати, що сила є функцією часу, радіуса-вектора і швидкості матеріальної точки, до якої вона прикладена, тобто

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V}). \tag{1}$$

У класичній механіці рух матеріальних об’єктів розглядається за допомогою моделей реальних фізичних тіл: матеріальної точки, системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла. Тому динаміка поділяється на динаміку матеріальної точки, динаміку механічної системи (системи матеріальних точок) і динаміку абсолютно твердого тіла.

ДИНАМІКА ТОЧКИ

Аксіоми динаміки

В основу динаміки покладено чотири аксіоми, закони динаміки точки, які встановлено шляхом узагальнення результатів цілого ряду експериментів і спостережень, присвячених вивченню руху тіл і перевірці їх суспільно-виробничою практикою. Ці аксіоми вперше були сформульовані Г.Галілеєм і І.Ньютоном в XVII столітті і викладені в класичному творі І.Ньютона „Математичні начала натуральної філософії.” (1687).

Аксіоми динаміки формулюються для матеріальної точки.

Аксіома 1 (перший закон Ньютона). Існують такі системи відліку, відносно яких матеріальна точка знаходиться у стані спокою, або рухається рівномірно і прямолінійно, якщо на неї не діють ніякі сили, або діє система взаємно зрівноважених сил.

Перший закон Ньютона (закон інерції) виражає критерій наявності системи відліку, у якій можна розглядати рух матеріальних тіл.

Інерціальною системою відліку називається система відліку в якій справджується закон інерції.

У класичній механіці постулюється існування інерціальної системи відліку. Слід відмітити, що неможливо виділити строго інерціальну систему відліку. Разом з тим, її існування з деяким ступенем точності підтверджується експериментально. Для того, щоб у конкретному випадку вияснити, чи можна вибрану систему відліку прийняти за інерціальну, необхідно перевірити, чи у цій системі відліку справджується закон інерції. При вивченні руху тіл на Землі, за інерціальну можна прийняти геоцентричну систему відліку, що незмінно пов'язана із Землею. Похибка, яка вноситься при цьому в дослідження багатьох явищ, невелика.

Інерціальну систему відліку будемо ще називати умовно нерухомою.

Аксіома 2 (другий закон Ньютона). Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку, тобто

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F} \,. \tag{2}$$

Якщо маса точки стала, то формула (2) набуде вигляду

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{3}$$

де $\vec{a}$ - пришвидшення точки відносно інерціальної системи відліку. У цьому частковому випадку другий закон Ньютона формулюється так: добуток маси матеріальної точки на її пришвидшення дорівнює силі, яка діє на цю точку.

Другий закон Ньютона має місце тільки в інерціальній системі відліку.

Аксіома 3 (третій закон Ньютона). Сили взаємодії двох матеріальних точок рівні за величиною і протилежні за напрямком, тобто (рис. 1)

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}. \tag{4}$$

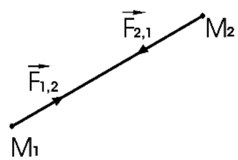


Рис. 1

Аксіома 4 (закон незалежності дії сил). Пришвидшення, яке отримує матеріальна точка від одночасної дії на неї декількох сил, дорівнює векторній сумі пришвидшень, які точка отримує від дії окремо кожної сили.

Це значить, що у випадку одночасної дії на матеріальну точку декількох сил $\vec{F}_k$ $(k = \overline{1,n})$, постулюється справедливість рівності

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \tag{5}$$

Рівняння (5) - це ***основне рівняння динаміки вільної матеріальної точки.***

Закон незалежності дії сил потрібно розуміти як закон суперпозиції сил, тобто як закон додавання пришвидшень від дії окремих сил. Це не означає, що прикладені до точки сили є незалежними, особливо, якщо серед прикладених сил є сили реакцій в'язей, які завжди залежать від активних сил.

Основне рівняння динаміки вільної матеріальної точки залишається справедливим і для невільної матеріальної точки, на яку накладено в'язі. Потрібно тільки до числа прикладених сил додати і реакції в'язей, тобто

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{m} \vec{R}_k \ , \tag{6}$$

де $\vec{R}_k$ - реакція k - тої в’язі.

Рівняння (6) - ***основне рівняння динаміки невільної матеріальної точки.***

У подальшому не будемо виділяти окремо рівняння (5) і (6), а будемо користуватися одним основним рівнянням динаміки точки

$$m\vec{a} = \vec{F} \ , \tag{7}$$

де m – маса матеріальної точки, $\vec{a}$ - її пришвидшення відносно інерціальної системи відліку, $\vec{F}$ - рівнодійна активних сил, що діють на точку і реакцій в’язей, накладених на неї.

Рівняння (7) - ***основне рівняння динаміки точки***, яке можна сформулювати так: добуток маси точки на її пришвидшення відносно інерціальної системи відліку дорівнює рівнодійній сил (активних сил і реакцій в’язей), які прикладені до точки.

Дві основні задачі динаміки точки

Перша основна задача динаміки вільної матеріальної точки (пряма задача). Знаючи закон руху матеріальної точки і її масу, встановити рівнодійну сил, під дією яких відбувається цей рух.

Друга основна задача динаміки вільної матеріальної точки (обернена задача). Знаючи масу матеріальної точки і сили, які діють на неї, а також початкові умови (початкове положення і початкову швидкість), встановити закон її руху.

Перша основна задача динаміки невільної матеріальної точки (пряма задача). Знаючи закон руху матеріальної точки, активні сили, які діють на неї, а також її масу, визначити рівнодійну реакцій в'язей, накладених на неї.

Друга основна задача динаміки невільної матеріальної точки (обернена задача). Знаючи активні сили, які діють на матеріальну точку, її масу, а також початкові умови і рівняння в'язей, визначити закон руху невільної матеріальної точки, а також реакції в'язей, накладених на неї.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

З кінематики точки відомо, що рух матеріальної точки можна описати трьома способами: векторним, координатним і натуральним. Кожному із цих способів відповідають диференціальні рівняння руху матеріальної точки, які встановлюються на основі основного рівняння динаміки точки (7).

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі. Якщо рух матеріальної точки масою $\boldsymbol{m}$ описується векторним способом, тобто її положення у просторі визначається радіусом-вектором $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$, тоді диференціальне рівняння руху цієї точки має вигляд:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V}), \tag{8}$$

де $\vec{\boldsymbol{F}}$ - рівнодійна сил, які діють на матеріальну точку $\boldsymbol{M}$ (рис. 2).

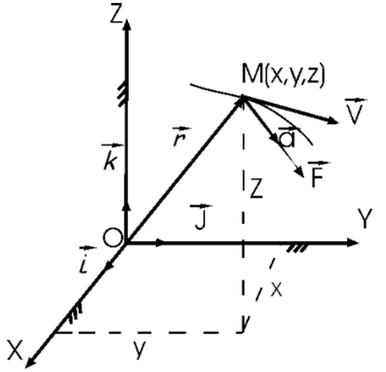


Рис. 2

Рівняння (8) називається диференціальним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у координатній формі. Якщо рух матеріальної точки масою m описується координатним способом, тобто її положення у просторі визначається координатами $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$ тоді диференціальні рівняння руху цієї точки мають вигляд:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases} \tag{9}$$

де $\vec{F}(F_x, F_y, F_z), \quad \vec{V}(V_x, V_y, V_z).$

Рівняння (9) називаються диференціальними рівняннями руху матеріальної точки у координатній формі (декартова система координат).

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у (натуральній формі) проекціях на осі натурального тригранника. Якщо рух матеріальної точки масою m описується натуральним способом (рис. 3), тобто її положення на траєкторії визначається дуговою координатою $s = s(t)$, тоді диференціальні рівняння руху цієї матеріальної точки у проекціях на осі натурального тригранника $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ мають вигляд:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_\tau}{dt} = F_\tau(t, s, \dot{s}); \\ m\dfrac{V^2}{\rho} = F_n(t, s, \dot{s}); \\ F_b(t, s, \dot{s}) = 0, \end{cases} \qquad (10)$$

де $V_\tau = \dot{s}$, ρ $-$ радіус кривини траєкторії у точці M, C - центр кривини траєкторії.

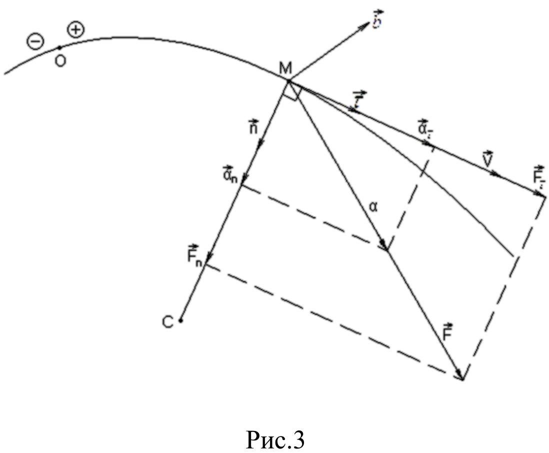


Рис.3

Рівняння (10) називаються диференціальними рівняннями руху матеріальної точки у натуральній формі, або у формі Ейлера.

Розв'язування першої основної задачі динаміки

вільної матеріальної точки

Залежно від того, у якій формі заданий закон руху матеріальної точки, для визначення рівнодійної сили можна використати диференціальні рівняння руху точки у векторній, координатній або натуральній формі.

Розглянемо рух вільної матеріальної точки, якщо задані кінематичні рівняння її руху у декартовій системі координат:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}); \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}); \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}). \end{cases}$$

Візьмемо двічі похідну за часом від кожного з цих співвідношень і підставимо їх у рівняння (9), тоді шукані проекції сили будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_x = \boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{x}}; \\ \boldsymbol{F}_y = \boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{y}}; \\ \boldsymbol{F}_z = \boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{z}}. \end{cases} \tag{11}$$

Модуль сили $\vec{\boldsymbol{F}}$ і напрямні косинуси кутів цієї сили з осями координат визначаються за формулами:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{F} = \sqrt{\boldsymbol{F}_x^2 + \boldsymbol{F}_y^2 + \boldsymbol{F}_z^2} = \boldsymbol{m}\sqrt{\ddot{\boldsymbol{x}}^2 + \ddot{\boldsymbol{y}}^2 + \ddot{\boldsymbol{z}}^2}; \\ \cos(\vec{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}_x / \boldsymbol{F}; \quad \cos(\vec{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{F}_y / \boldsymbol{F}; \\ \cos(\vec{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{F}_z / \boldsymbol{F}. \end{gathered} \tag{12}$$

Розв'язування другої основної задачі динаміки вільної матеріальної точки

Наведемо алгоритм розв'язування цієї задачі, використовуючи диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки у координатній формі (9).

Встановлення закону руху матеріальної точки у цьому випадку зводиться до інтегрування системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку (9), у яких невідомими функціями є координати $\boldsymbol{x, y, z,}$ а аргументом є час $\boldsymbol{t}$. Інтегруючи цю систему диференціальних рівнянь, отримаємо величини $\boldsymbol{x, y, z}$ як функції часу $\boldsymbol{t}$ і шести довільних сталих $\boldsymbol{C_k} (\boldsymbol{k} = 1,6)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t, C_1, C_2, ..., C_6);} \\ \boldsymbol{y = y(t, C_1, C_2, ..., C_6);} \\ \boldsymbol{z = z(t, C_1, C_2, ..., C_6).} \end{cases} \tag{13}$$

Для визначення довільних сталих $C_k (k = 1, 6)$ необхідно задати початкові умови: початкове положення і початкову швидкість точки у момент часу $\boldsymbol{t = t_0}$. Зазвичай, початковий момент часу приймають за нульовий, тобто $\boldsymbol{t_0 = 0.}$ Початкові умови можна задати у вигляді:

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0; \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0; \quad \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0. \tag{14}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \dot{\boldsymbol{x}}_0; \quad \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \dot{\boldsymbol{y}}_0; \quad \dot{\boldsymbol{z}}(0) = \dot{\boldsymbol{z}}_0. \tag{15}$$

Візьмемо похідну за часом від рівнянь (13), отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, ..., C_6); \\ \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, ..., C_6); \\ \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, ..., C_6). \end{cases} \tag{16}$$

Підставляючи у (13) і (16) початкові умови (14) і (15), отримаємо систему шести алгебраїчних рівнянь відносно шести невідомих $C_k (k = 1,6)$, тобто:

$$\begin{cases} x_0 = x(0, C_1, C_2, ..., C_6); \\ y_0 = y(0, C_1, C_2, ..., C_6); \\ z_0 = z(0, C_1, C_2, ..., C_6); \end{cases} \cup \begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{x}(0, C_1, C_2, ..., C_6); \\ \dot{y}_0 = \dot{y}(0, C_1, C_2, ..., C_6); \\ \dot{z}_0 = \dot{z}(0, C_1, C_2, ..., C_6). \end{cases} \tag{17}$$

Розв'язуючи систему шести алгебраїчних рівнянь (17), визначимо шість невідомих сталих $C_k (k = 1,6)$ і, підставивши їх у співвідношення (13), отримаємо загальний розв'язок задачі:

$$\begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{cases} \tag{18}$$

Динаміка невільного руху матеріальної точки

Основне рівняння динаміки невільної матеріальної точки (6), а також її диференціальні рівняння руху (8), (9), (10) мають такий самий вигляд, як і для вільної матеріальної точки, тільки до активних сил, що діють на неї, додаються реакції в'язей накладених на дану точку. У цьому випадку при розв'язуванні першої і другої основних задач динаміки виникають відповідні особливості, оскільки реакції в'язей наперед невідомі і їх необхідно додатково визначити за заданими рівняннями в'язей, які накладені на рухому матеріальну точку.

При розв'язуванні першої основної задачі динаміки невільної матеріальної точки визначається рівнодійна усіх сил, що діють на точку, із диференціальних рівнянь її руху. Потім із цієї рівнодійної сили відділяється рівнодійна реакцій в'язей.

Розв'язування другої основної задачі динаміки невільної матеріальної точки розглянемо окремо для руху точки по гладкій кривій.

Диференціальні рівняння руху точки по заданій гладкій нерухомій кривій. Нехай матеріальна точка масою $\boldsymbol{m}$ рухається уздовж гладкої нерухомої кривої, яку можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0; \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

під дією заданих сил, рівнодійна яких дорівнює $\vec{\boldsymbol{F}}$.

Запишемо диференціальні рівняння руху цієї точки у декартовій системі координат. Повна реакція гладкої кривої лінії

$$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{N}}_1 + \vec{\boldsymbol{N}}_2,$$

де $\vec{\boldsymbol{N}}_1$ $\boldsymbol{i}$ $\vec{\mathrm{N}}_2$ - нормальні реакції відповідно першої і другої поверхні.

Оскільки розглядається гладка крива, то сила тертя відсутня. Запишемо диференціальні, рівняння руху точки уздовж кривої:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x + N_{1x} + N_{2x}; \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y + N_{1y} + N_{2y}; \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z + N_{1z} + N_{2z}. \end{cases} \tag{20}$$

З диференціальної геометрії відомо, що косинуси кутів зовнішньої нормалі до поверхні з осями координат, тобто і сили $\vec{N}$, яка паралельна до головної нормалі, можна обчислити за формулами:

$$\begin{cases} \cos(\vec{N}, x) = \dfrac{1}{\Delta f} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}; \\ \cos(\vec{N}, y) = \dfrac{1}{\Delta f} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}; \\ \cos(\vec{N}, z) = \dfrac{1}{\Delta f} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

де

$$\Delta f = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}.$$

Тоді у нашому випадку маємо:

$$\begin{cases} N_{kx} = N_k \cdot \cos(\vec{N}_k, x) = \dfrac{N_k}{\Delta f_k} \cdot \dfrac{\partial f_k}{\partial x}; \\ N_{ky} = N_k \cdot \cos(\vec{N}_k, y) = \dfrac{N_k}{\Delta f_k} \cdot \dfrac{\partial f_k}{\partial y}; \\ N_{kz} = N_k \cdot \cos(\vec{N}_k, z) = \dfrac{N_k}{\Delta f_k} \cdot \dfrac{\partial f_k}{\partial z}. \end{cases}$$

Позначивши $\lambda_k = N_k / \Delta f_k$ і, підставивши значення $N_{kx}, N_{ky}, N_{kz} \quad (k = 1,2)$ у (20), отримаємо:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x + \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x}; \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y + \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial y}; \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z + \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial z}. \end{cases} \qquad (21)$$

Рівняння (21) - це диференціальні рівняння Лагранжа першого роду для руху невільної матеріальної точки.

Із цих трьох диференціальних рівнянь (21) і двох рівнянь поверхонь (19) можна визначити п’ять невідомих: координати точки x, y, z і невизначені множники Лагранжа λ_1, λ_2 як функції часу і довільних сталих інтегрування. Довільні сталі інтегрування визначаються із початкових умов задачі. Ця задача може бути розв'язана і при урахуванні сили тертя.

Динаміка відносного руху матеріальної точки

Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки. Постановка задачі. Нехай маємо інерціальну систему відліку $O_1x_1y_1z_1$ і вільне тверде тіло А, яке може довільним чином рухатися у просторі відносно інерціальної системи відліку. З тілом А незмінно пов'язана неінерціальна система відліку $Oxyz$ (рис. 4).

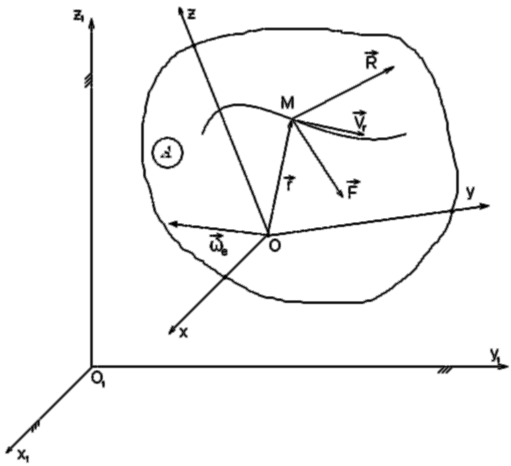


Рис.4

Матеріальна точка М масою m рухається уздовж тіла А під дією заданих активних сил, рівнодійна яких дорівнює $\vec{F}$.

Необхідно встановити рівняння руху матеріальної точки відносно неінерціальної системи відліку $Oxyz$ (рис. 4).

Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки у векторній формі має вигляд:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c, \qquad (22)$$

де $\vec{R}$ - рівнодійна реакцій в’язей, які накладені на точку M,

$\vec{\Phi}_e, \vec{\Phi}_c$ - відповідно переносна і коріолісова сили інерції, які визначаються за формулами:

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e; \quad \vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c. \tag{23}$$

Тут $\vec{a}_r, \vec{a}_e, \quad \vec{a}_c = 2\cdot(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$ відповідно відносне, переносне і коріолісове пришвидшення точки М.

Величина переносної і коріолісової сили інерції дорівнює добутку маси точки на величину відповідно переносного і коріолісового пришвидшення. Сили інерції $\vec{\Phi}_e$ і $\vec{\Phi}_c$ мають напрямок протилежний до напрямку відповідних пришвидшень.

Сили інерції $\vec{\Phi}_e$ і $\vec{\Phi}_c$ ще називаються ейлеровими силами інерції.

Ейлерові сили інерції суттєво відрізняються від ньютонових фізичних сил, оскільки їх поява не є результатом взаємодії цієї матеріальної точки з тілами, які її оточують; вони не інваріантні відносно переходу від однієї системи відліку до іншої; вони не мають незалежних від співвідношень (23) способів вимірювання. Тому у рамках класичної механіки ці сили розглядаються як фіктивні.

Ньютонова сила $\vec{F}$ виражає міру механічної взаємодії даної матеріальної точки з тілами, які її оточують, і не змінюється при переході від однієї системи відліку до іншої, яка рухається довільним чином.

Із сказаного вище випливає, що рівність (22) лише формально відповідає другому закону Ньютона для абсолютного руху і її можна сформулювати так: ***добуток маси матеріальної точки на пришвидшення її відносного руху дорівнює векторній сумі ньютонових (активних) сил, які діють на неї, реакцій в’язей і двох ейлерових сил - переносної і коріолісової, умовно прикладених до цієї точки.***

Отже, задача про визначення руху матеріальної точки відносно неінерціальної системи відліку формально зводиться до задачі про визначення руху цієї точки відносно інерціальної системи відліку, якщо до сил, які діють на матеріальну точку, приєднати переносну і коріолісову сили інерції.

Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки у проекціях на осі декартової системи координат набуде вигляду:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + R_x + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}; \\ m\ddot{y} = F_y + R_y + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}; \\ m\ddot{z} = F_z + R_z + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}. \end{cases} \tag{24}$$

Часткові випадки динаміки відносного руху

матеріальної точки

Відносний рух по інерції. Для того, щоб точка М відносно рухомої системи відліку рухалась рівномірно і прямолінійно ($\vec{a}_r = 0$) потрібно, щоб виконувалась умова:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c = 0. \tag{25}$$

Відносна рівновага (відносний спокій**)**. При відносному спокої матеріальної точки $\vec{V}_r = 0, \quad \vec{a}_r = 0.$ Тоді умова відносного спокою має вигляд:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e = 0. \tag{26}$$

Рівність (26) виражає умову відносного спокою матеріальної точки і формулюється так: ***при відносному спокої матеріальної точки векторна сума усіх активних сил, що діють на неї, реакцій в'язей та переносної сили інерції дорівнює нулю.***

Поняття рівноваги сил, які діють на матеріальну точку, в інерціальній і неінерціальній системах відліку, суттєво відрізняються.

Якщо в ініціальній системі відліку умова рівноваги означає, що матеріальна точка може знаходитись або у спокої, або рівномірно і прямолінійно рухатись, то в неінерціальній системі відліку рівняння (26) визначає лише умову відносного спокою матеріальної точки. Якщо точка здійснює рівномірний і прямолінійний рух, то має місце умова (25).

Поступальний рух рухомої системи відліку ($\vec{\omega}_e = 0$ ***) по відношенню до інерціальної системи відліку.*** У даному випадку $\vec{\Phi}_c = 0$ і рівняння (23) набуде вигляду:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e. \tag{27}$$

Інерціальні системи відліку. Нехай рухома система відліку увесь час рухається відносно основної інерціальної системи відліку поступально, рівномірно і прямолінійно У цьому випадку $\vec{a}_e = 0, \quad \vec{\omega}_e = 0$ і відповідно $\vec{\Phi}_e = 0, \quad \vec{\Phi}_c = 0.$

Рівняння відносного руху точки має такий самий вигляд, як і відносно інерціальної системи відліку, тобто

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R}. \tag{28}$$

Усі рухомі системи відліку, які рухаються поступально, рівномірно і прямолінійно відносно основної інерціальної системи відліку будуть також інерціальними.

Принцип відносності класичної механіки - принцип Галілея-Ньютона. Усі механічні явища в різних інерціальних системах відліку протікають однаково, або ніякими механічними експериментами неможливо виявити, чи знаходиться система відліку у спокої, чи здійснює поступальний, рівномірний і прямолінійний рух.

Усі інерціальні системи відліку з механічної точки зору еквівалентні між собою.

ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Механічна система. ***Механічною системою називається сукупність матеріальних точок положення і рух яких взаємопов'язані***. Механічну систему ще називають системою матеріальних точок (СМТ).

Механічні системи поділяються на вільні і невільні.

Механічна система називається невільною, якщо рух її точок обмежений накладеними на них в'язями.

Класифікація сил. Усі сили, які діють на невільну механічну систему, поділяються на задані (активні) сили і реакції в'язей.

Усі сили, які діють на точки довільної механічної системи, як вільної, так і невільної, поділяються на зовнішні і внутрішні.

Зовнішніми силами називаються сили, які діють на точки механічної системи з боку матеріальних точок, які не входять до даної системи.

Внутрішніми силами називаються сили взаємодії між точками даної механічної системи.

Зовнішні сили будемо позначати з індексом **e**, тобто $\vec{F}_k^e$ - к-та зовнішня сила , а внутрішні – з індексом **i,** тобто $\vec{F}_k^i$ **-** к-та внутрішня сила.

Одна і та сила може бути як зовнішньою, так і внутрішньою залежно від того, яка механічна система розглядається.

Отже, довільна сила, яка діє на точку механічної системи згідно з двома класифікаціями сил є зовнішньою або внутрішньою, і в той же час вона є заданою (активною) силою, або реакцією в'язі.

Рух точок механічної системи залежить як від зовнішніх, так і від внутрішніх сил.

Властивості внутрішніх сил. ***Векторна сума (головний вектор) усіх внутрішніх сил механічної системи дорівнює нулю, тобто***

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i} = 0. \qquad (1)$$

Сума векторних моментів усіх внутрішніх сил механічної системи відносно довільної точки дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_k^{\,i}) = 0. \qquad (2)$$

Механічна система називається замкнутою (ізольованою), якщо на її точки не діють зовнішні сили.

Геометрія мас

Маса системи. Центр мас системи і її координати. Розглянемо механічну систему, яка складається із n матеріальних точок M_k, маси яких m_k $(k = \overline{1,n})$. Положення кожної точки визначається радіусом-вектором $\vec{r}_k$ (рис. 5).

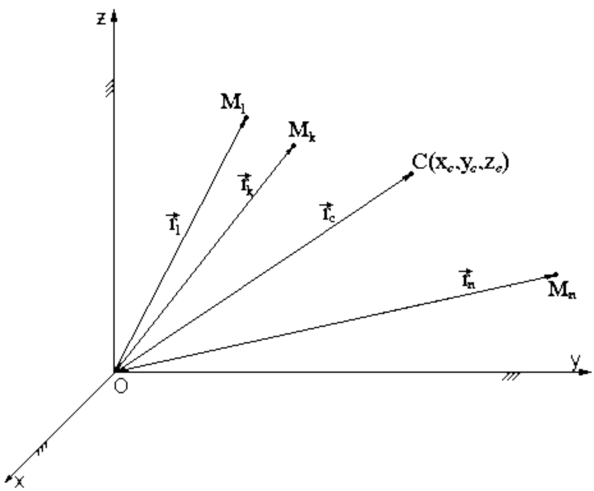


Рис.5

Масою механічної системи називається сума мас усіх точок, які входять у цю механічну систему, тобто

$$\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m_k}. \tag{3}$$

Центром мас (центром інерції) механічної системи називається геометрична точка С, радіус-вектор якої визначається за формулою:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_c = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m_k} \vec{\boldsymbol{r}}_k / \boldsymbol{M}. \tag{4}$$

Проектуючи рівність (4) на осі декартової системи координат, отримаємо формули для координат центра мас:

$$\begin{cases} x_c = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k / M; \\ y_c = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k / M; \\ z_c = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k / M. \end{cases} \tag{5}$$

Для механічної системи, яка знаходиться в однорідному полі земного тяжіння, положення центра мас і центра ваги збігаються.

Моменти інерції механічної системи і твердого тіла відносно осі, площини і полюса. Для характеристики розподілу мас у тілах при розгляді обертальних рухів потрібно ввести поняття моментів інерції.

Моментом інерції механічної системи відносно осі називається величина, яка дорівнює сумі добутків мас точок механічної системи на квадрат їх відстаней до цієї осі тобто:

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2, \tag{6}$$

де h_k - відстань від k - тої точки до осі z , I_z - момент інерції механічної системи відносно осі z .

Момент інерції механічної системи відносно осі завжди більший нуля і його розмірність - $кг \cdot м^2$.

Твердим тілом називається геометрично незмінна механічна система.

Момент інерції твердого тіла відносно осі визначається за формулою:

$$I_z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta m_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k h_k^2 = \int_{(m)} h^2 dm. \tag{7}$$

У випадку ***однорідного тіла***

$$I_z = \gamma \int_{(V)} h^2 dV, \tag{8}$$

де γ -густина, маса одиниці об'єму тіла.

Для ***однорідної матеріальної поверхні***, тобто для механічної системи, маса якої рівномірно розподілена тонким шаром по деякій поверхні,

$$I_z = \gamma_\sigma \int_{(\sigma)} h^2 d\sigma, \tag{9}$$

де γ_σ - маса одиниці площі поверхні, $d\sigma$ - елемент площі поверхні.

У випадку ***однорідної матеріальної лінії***

$$I_z = \gamma_l \int\limits_{(l)} h^2 dl, \tag{10}$$

де γ_l - маса одиниці довжини лінії, dl - елемент довжини лінії. Інтеграл береться по усій довжині лінії.

Момент інерції механічної системи (твердого тіла) можна також представити у вигляді

$$I_z = M \cdot i_z^2, \tag{11}$$

де i_z - відстань, яка називається радіусом інерції механічної системи (твердого тіла) відносно осі z.

Звідки

$$i_z = \sqrt{I_z / M.} \tag{12}$$

Моментом інерції механічної системи відносно площини (планарним моментом інерції) називається величина, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки системи на квадрат відстані від цієї точки до площини (рис.6), тобто:

$$\begin{cases} I_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k^2; \\ I_{11} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k^2 \quad ; \\ I_{111} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k^2, \end{cases} \tag{13}$$

де I_1, I_{11}, I_{111} - моменти інерції відносно площин ***xoy***, ***xoz***, ***yoz*** відповідно.

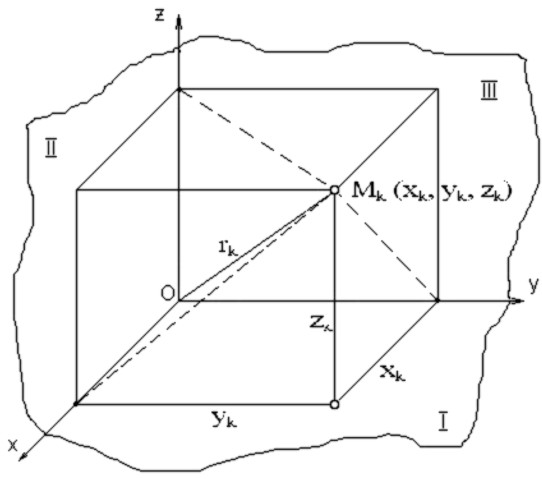


Рис.6

У випадку твердого тіла маємо:

$$\begin{cases} I_1 = \int\limits_{(m)} z^2 dm; \\ I_{11} = \int\limits_{(m)} y^2 dm; \\ I_{111} = \int\limits_{(m)} x^2 dm. \end{cases} \tag{14}$$

Наведемо формули для визначення моментів інерції механічної системи відносно координатних осей:

$$\begin{cases} I_x = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2); \\ I_y = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2); \\ I_z = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{cases} \tag{15}$$

У випадку твердого тіла

$$\begin{cases} I_x = \int\limits_{(m)} (y^2 + z^2) dm; \\ I_y = \int\limits_{(m)} (x^2 + z^2) dm; \\ I_z = \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2) dm. \end{cases} \tag{16}$$

Моментом інерції механічної системи відносно полюса (полярним моментом інерції) називається величина, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки системи на квадрат відстані від цієї точки до полюса, тобто

$$I_o = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \qquad (17)$$

У випадку твердого тіла

$$I_o = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm. \qquad (18)$$

Між полярними, осьовими і планарними моментами інерції існують такі залежності:

$$I_x + I_y + I_z = 2 \cdot I_o. \qquad (19)$$

$$I_1 + I_{11} + I_{111} = I_o. \qquad (20)$$

Теореми Гюйгенса-Штейнера про моменти інерції

Теорема 1 (про моменти інерції відносно паралельних осей). ***Момент інерції механічної системи (твердого тіла) відносно довільної осі дорівнює сумі момента інерції механічної системи (твердого тіла) відносно паралельної осі, яка проходить через її центр мас, і добутку маси механічної системи (твердого тіла) на квадрат відстані між цими осями, тобто***

$$I_z = I_{cz'} + Md^2, \qquad (21)$$

де М - маса механічної системи (твердого тіла), d - відстань між паралельними осями z i Cz' (рис. 7).

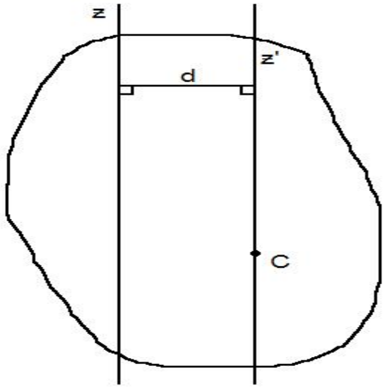


Рис.7

Із цієї теореми випливає, що для сукупності паралельних осей момент інерції буде найменшим відносно осі, яка проходить через її центр мас.

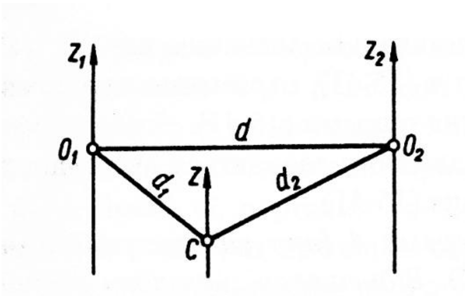
Теорема 2 (про моменти інерції відносно двох паралельних не центральних осей). ***Момент інерції тіла відносно довільної не центральної осі дорівнює сумі момента інерції відносно іншої паралельної до неї не центральної осі і добутку маси тіла на різницю квадратів відстаней від цих осей до паралельної центральної осі, тобто (рис. 8, а):***

$$I_{z_2} = I_{z_1} + m(d_2^2 - d_1^2).$$

Теорема 3 (про відцентрові моменти інерції). ***Відцентрові моменти інерції твердого тіла відносно заданих довільних осей координат дорівнюють сумі відцентрових моментів інерції відносно центральних осей координат, які паралельні до осей заданої системи координат і добутку маси тіла на відповідні координати його центра мас, тобто (рис. 8,б):***

$$\begin{cases} I_{xy} = I_{x_1y_1} + mx_c y_c; \\ I_{yz} = I_{y_1z_1} + my_c z_c; \\ I_{xz} = I_{x_1z_1} + mx_c z_c. \end{cases}$$

а)



б)

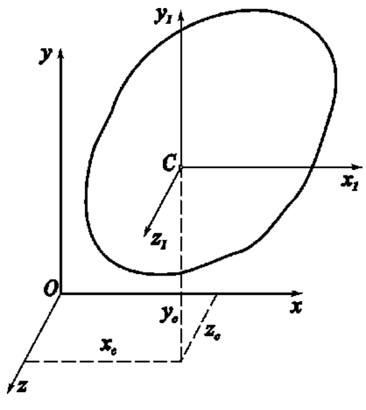
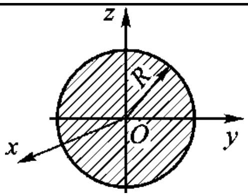
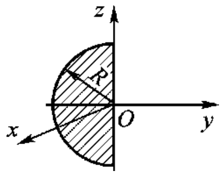
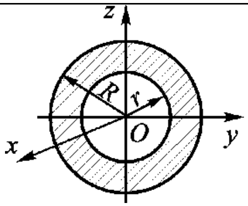
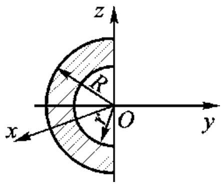
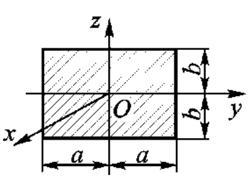
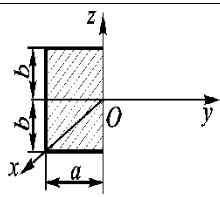
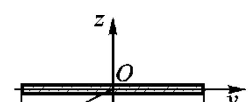
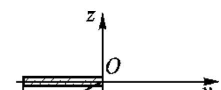
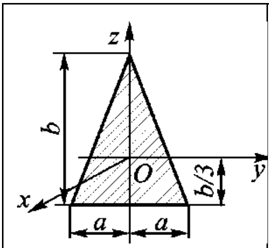
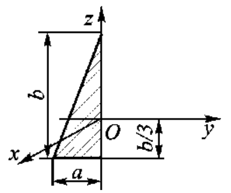


Рис.8

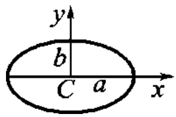
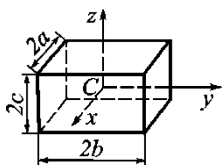
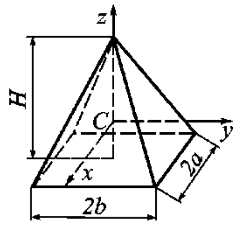
Осьові моменти інерції деяких однорідних тіл. Моменти інерції деяких однорідних тіл зведемо у таблицю1, та - 2.

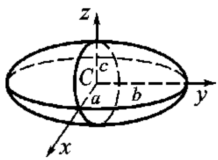
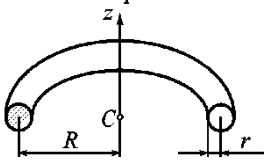
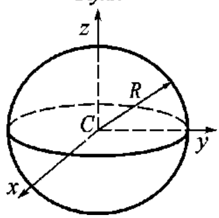
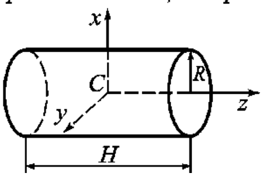
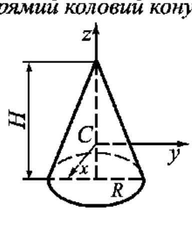
Таблиця 1

Тіло	**Моменти інерції**	**Тіло**
	$I_x = \dfrac{mR^2}{2};$ $I_y = I_z = \dfrac{mR^2}{4}.$	
	$I_x = \dfrac{m(R^2 + r^2)}{2};$ $I_y = I_z = \dfrac{m(R^2 + r^2)}{4}.$	
	$I_x = m(a^2 + b^2)/3;$ $I_y = mb^2/3;$ $I_z = ma^2/3.$	
	$I_x = I_z = ma^2/3;$ $I_y = 0.$	

	$I_x = m(3a^2 + b^2)/18;$ $I_y = mb^2/18;$ $I_z = ma^2/6.$	

Таблиця 2

Тіло	**Моменти інерції**
Еліпс 	$I_x = mb^2/4;$ $I_y = ma^2/4;$ $I_z = m(a^2 + b^2)/4.$
Прямокутний паралелепіпед 	$I_x = m(b^2 + c^2)/3;$ $I_y = m(a^2 + c^2)/3;$ $I_z = m(a^2 + b^2)/3.$
Прямокутна піраміда 	$I_x = m(3H^2/4 + 4b^2)/20;$ $I_y = m(3H^2/4 + 4a^2)/20;$ $I_z = m(a^2 + b^2)/5.$

Еліпсоїд 	$I_x = m(b^2 + c^2)/5;$ $I_y = m(a^2 + c^2)/5;$ $I_z = m(a^2 + b^2)/5.$
Тор 	$I_z = m(R^2 + 3r^2/4).$
Куля 	$I_x = I_y = I_z = 2mR^2/5.$
Прямий коловий циліндр 	$I_x = I_y = m(H^2/3 + R^2)/4;$ $I_z = mR^2/2.$
Прямий коловий конус 	$I_x = I_y = 3m(H^2/4 + R^2)/20;$ $I_z = 3mR^2/10.$

Продовження таблиці 2

Момент інерції відносно осі довільного напрямку. Відцентрові моменти інерції (добутки інерції). ***Відцентровим моментом інерції механічної системи називається величина, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки механічної системи на дві її координати, тобто:***

$$\begin{cases} I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k; \\ I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k; \\ I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k. \end{cases} \tag{22}$$

У випадку твердого тіла

$$\begin{cases} I_{xy} = \int_{(m)} xydm; \\ I_{xz} = \int_{(m)} xzdm; \\ I_{yz} = \int_{(m)} yzdm. \end{cases} \tag{23}$$

Відцентрові моменти інерції залежать від напрямку координатних осей і від вибору початку системи координат. Тому, якщо говориться про відцентрові моменти інерції у даній точці, то мається на увазі, що початок системи координат збігається з цією точкою.

Момент інерції механічної системи відносно довільної осі Ou, яка проходить через початок деякої системи координат $Oxyz$, визначається за формулою:

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma -$$
$$-2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma, \qquad (24)$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси, які визначають орієнтацію осі Ou у системі координат $Oxyz$ (рис. 9); I_x, I_y, I_z - моменти інерції механічної системи відносно координатних осей Ox, Oy, Oz; I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} - відцентрові моменти інерції механічної системи.

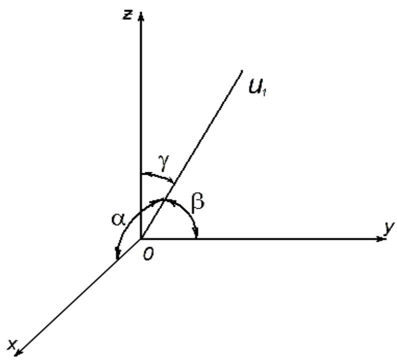


Рис.9

Еліпсоїд інерції. Головні осі і головні моменти інерції. Просте і наочне уявлення про те, як змінюється момент інерції тіла (механічної системи) відносно осі, яка проходить через дану точку залежно від зміни її положення у просторі, дає еліпсоїд інерції (рис. 10), рівняння якого має вигляд:

$$I_x \cdot x^2 + I_y \cdot y^2 + I_z \cdot z^2 - 2I_{xy} \cdot xy - 2I_{yz} \cdot yz -$$
$$-2I_{xz} \cdot xz = 0. \qquad (25)$$

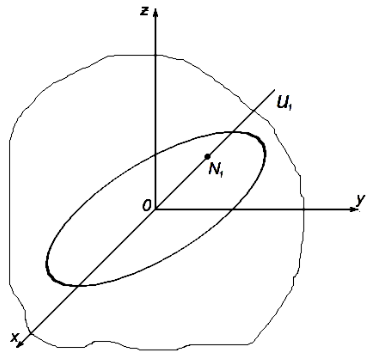


Рис.10

Кожній точці тіла відповідає визначений еліпсоїд інерції, який характеризує моменти інерції тіла відносно усіх осей, які проходять через цю точку. Маючи еліпсоїд інерції для деякої точки О (рис. 10), за відстанню $\boldsymbol{ON}_1$ від початку координат О до точки $\boldsymbol{N}_1$, у якій вісь $\boldsymbol{u}_1$ перетинає еліпсоїд інерції, можна визначити момент інерції тіла відносно цієї осі за формулою:

$$\boldsymbol{I_{u_1} = 1/(ON_1)^2.}$$

Головними осями інерції тіла для точки 0 називаються три осі симетрії еліпсоїда інерції, а моменти інерції відносно цих осей називаються головними моментами інерції.

Головною віссю інерції для точки 0 називається вісь, для якої відцентрові моменти інерції, які містять у своїх індексах назву цієї осі, дорівнюють нулю.

Наприклад, вісь $\boldsymbol{Oz}$ - головна вісь інерції тіла для точки О, якщо $\boldsymbol{I_{zx} = I_{zy} = 0.}$

Головною центральною віссю інерції називається головна вісь інерції для точки С - центра мас тіла.

У кожній точці тіла можна вказати три взаємноперпендикулярні головні осі інерції.

Момент інерції тіла (механічної системи) відносно довільної осі Ou в головних осях інерції $Oxyz$ дорівнює:

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma, \tag{26}$$

де I_x, I_y, I_z - головні осьові моменти інерції.

Властивості головних осей і головних центральних осей інерції.

Головна центральна вісь інерції є головною віссю інерції для усіх своїх точок.

Головна вісь інерції, яка не проходить через центр мас твердого тіла, є головною віссю інерції лише для однієї своєї точки.

Якщо тверде тіло (механічна система) має вісь матеріальної симетрії, то ця вісь є головною центральною віссю інерції.

Якщо тверде тіло (механічна система) має площину матеріальної симетрії, то довільна вісь, яка перпендикулярна до цієї площини, є головною віссю інерції для точки перетину осі з цією площиною.

Для однорідних тіл обертання вісь обертання і довільні дві взаємно перпендикулярні до неї осі утворюють систему головних осей інерції.

Загальні теореми динаміки матеріальної точки

та механічної системи

Диференціальні рівняння руху механічної системи. У цьому розділі будемо вивчати рух механічної системи, яка складається із $\boldsymbol{n}$ матеріальних точок $\boldsymbol{M_k}$ масою $\boldsymbol{m_k}$ $(\boldsymbol{k} = 1, \boldsymbol{n})$. На кожну точку механічної системи діють зовнішні сили рівнодійна яких дорівнює $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}}$ і внутрішні сили, рівнодійна яких дорівнює $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{i}}$ $\quad (\boldsymbol{k} = 1, \boldsymbol{n})$.

Рух такої механічної системи (рис. 11) описується системою диференціальних рівнянь

$$\boldsymbol{m}_k \frac{\boldsymbol{d}^2 \vec{\boldsymbol{r}}_k}{\boldsymbol{dt}^2} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{i}}, \quad (\boldsymbol{k} = 1, \boldsymbol{n}). \tag{27}$$

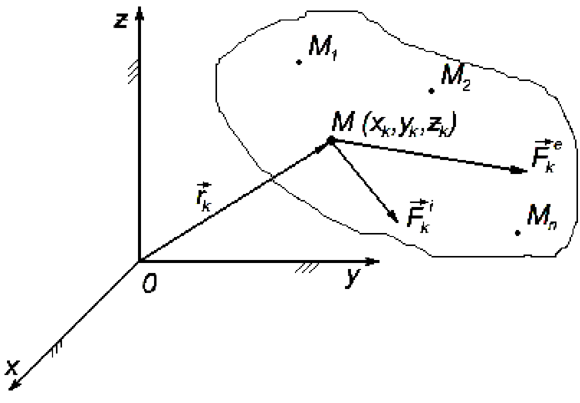


Рис.11

Система диференціальних рівнянь (27) називається диференціальними рівняннями руху механічної системи у векторній формі.

Для визначення руху механічної системи потрібно проінтегрувати систему $3n$ диференціальних рівнянь. Цю задачу не вдається точно розв'язати в загальному випадку навіть для однієї точки.

У деяких випадках для диференціальних рівнянь руху механічної системи можна отримати перші інтеграли, тобто співвідношення, у які не входять похідні другого порядку від координат за часом.

Перші інтеграли системи диференціальних рівнянь зручно отримувати із так званих загальних теорем динаміки.

Загальні теореми динаміки є наслідками системи диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, або відповідно системи матеріальних точок (механічної системи).

Теореми про зміну кількості руху матеріальної точки та механічної системи

Кількість руху матеріальної точки та механічної системи. Першою динамічною характеристикою руху є кількість руху.

Кількістю руху матеріальної точки називається векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки на її швидкість, **тобто**

$$\vec{q} = m\vec{V}, \tag{28}$$

де $\vec{q}$ - кількість руху матеріальної точки, m - маса матеріальної точки, $\vec{V}$ - її швидкість.

Кількість руху матеріальної точки у фізиці часто називають імпульсом матеріальної точки.

Вектор кількості руху матеріальної точки спрямований по дотичній до траєкторії у бік її руху (рис. 12). Розмірність кількості руху - $кг \cdot м/с$, або $Н \cdot с$.

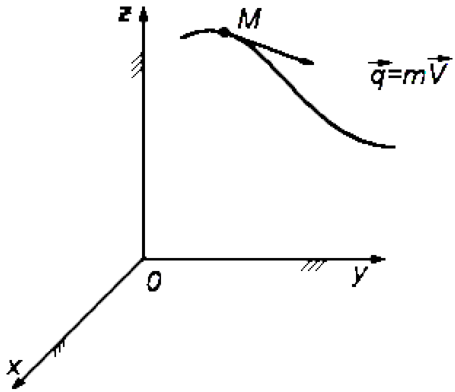


Рис.12

Проекції вектора кількості руху матеріальної точки на осі декартової системи координат мають вигляд:

$$\begin{cases} q_x = mV_x = m\dot{x}; \\ q_y = mV_y = m\dot{y}; \\ q_z = mV_z = m\dot{z}, \end{cases} \tag{29}$$

де $\vec{q}(q_x, q_y, q_z), \quad \vec{V}(V_x, V_y, V_z)$.

Кількістю руху механічної системи називається векторна сума кількостей руху усіх точок механічної системи, тобто

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k. \tag{30}$$

Проекції вектора кількості руху механічної системи на осі декартової системи координат мають вигляд:

$$\begin{cases} Q_x = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k V_{kx}; \\ Q_y = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k V_{ky}; \\ Q_z = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k V_{kz}, \end{cases} \tag{31}$$

де $\vec{Q}(Q_x, Q_y, Q_z), \quad \vec{V}_k(V_{kx}, V_{ky}, V_{kz}) \quad (k = \overline{1, n}).$

Вектор кількості руху механічної системи $\vec{Q}$ на відміну від вектора кількості руху матеріальної точки $\vec{q}$ не має точки прикладання. Вектор кількості руху матеріальної точки вважається прикладеним до рухомої точки, а вектор $\vec{Q}$ є вільним вектором.

Кількість руху механічної системи можна виразити через масу механічної системи M і швидкість її центра мас - $\vec{V}_c$.

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_c. \tag{32}$$

У проекціях на осі декартової системи координат маємо:

$$\begin{cases} Q_x = MV_{cx} = M\dot{x}_c; \\ Q_y = MV_{cy} = M\dot{y}_c; \\ Q_z = MV_{cz} = M\dot{z}_c, \end{cases} \tag{33}$$

де $C(x_c, y_c, z_c)$ - центр мас механічної системи.

Елементарний і повний імпульс сили. Дія сили $\vec{F}$ на матеріальну точку упродовж часу dt характеризується елементарним імпульсом сили $d\vec{S}$.

Елементарним імпульсом сили називається векторна величина, яка дорівнює добутку сили на елементарний проміжок часу, тобто

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt. \tag{34}$$

Імпульсом сили, або повним імпульсом сили, за проміжок часу [0,t] ***називається векторна величина, яка дорівнює означеному інтегралу від елементарного імпульсу, взятому в межах від нуля до*** **t** ***, тобто***

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}(t)dt. \tag{35}$$

Проекції імпульсу сили на осі декартової системи координат виражаються формулами:

$$\begin{cases} S_x = \int_0^t F_x(t)dt; \\ S_y = \int_0^t F_y(t)dt; \\ S_z = \int_0^t F_z(t)dt, \end{cases} \tag{36}$$

Якщо за час t на точку діє стала за величиною та напрямком сила, тобто $\vec{F}(t) = \overrightarrow{const}$, тоді

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t. \tag{37}$$

Розмірність імпульсу сили - $H \cdot c$.

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі. Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної точки дорівнює векторній сумі (головному вектору) усіх сил, які діють на цю точку, тобто:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \tag{38}$$

У проекціях на осі інерціальної декартової системи координат (38) можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{d(mV_x)}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}; \\ \dfrac{d(mV_y)}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}; \\ \dfrac{d(mV_z)}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}. \end{cases} \tag{39}$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в скінченій (інтегральній) формі (теорема імпульсів). Зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює векторній сумі, імпульсів сил, що діють на цю точку за цей самий проміжок часу, тобто:

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}(\vec{F}_k), \tag{40}$$

де $\vec{V}$ - швидкість точки в момент часу t; $\vec{V}_0$ - швидкість точки в момент часу $t_0 = 0$; $\vec{S}(\vec{F}_k)$ - імпульс к-тої сили за час t (рис. 13).

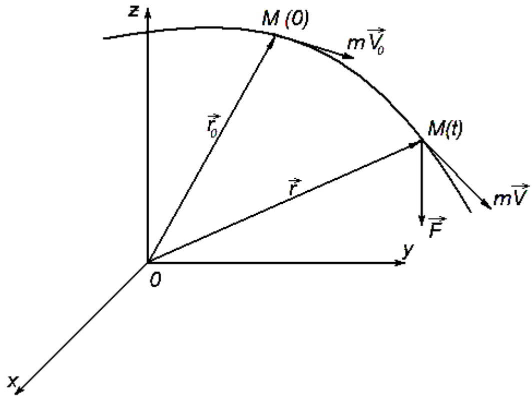


Рис.13

У проекціях на осі декартової системи координат цю теорему можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} mV_x - mV_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(\vec{F}_k); \\ mV_y - mV_{0y} = \sum_{k=1}^{n} S_y(\vec{F}_k); \\ mV_z - mV_{0z} = \sum_{k=1}^{n} S_z(\vec{F}_k). \end{cases} \tag{41}$$

Для матеріальної точки теорема про зміну кількості руху, по суті, не відрізняється від диференціальних рівнянь руху точки.

Теорема про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі. Похідна за часом від кількості руху механічної системи дорівнює векторній сумі усіх зовнішніх сил, які діють на цю механічну систему, тобто

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e. \tag{42}$$

У проекціях на осі декартової системи координат маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}^e; \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}^e; \\ \dfrac{dQ_z}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}^e. \end{cases} \tag{43}$$

Теорема про зміну кількості руху механічної системи в скінченій (інтегральній) формі. Зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему за цей самий проміжок часу, тобто

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}(\vec{F}_k^e), \tag{44}$$

де $\vec{Q}_0$ - кількість руху механічної системи у початковий момент часу $t_0 = 0$; $\vec{Q}$ - кількість руху механічної системи в кінцевий момент часу t; $\vec{S}(\vec{F}_k^e)$ - імпульс рівнодійної зовнішніх сил, які діють на к - ту точку механічної системи за проміжок часу [0,t].

У проекціях на осі декартової системи координат, згідно з (44), маємо:

$$\begin{cases} Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(\vec{F}_k^e); \\ Q_y - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{n} S_y(\vec{F}_k^e); \\ Q_z - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{n} S_z(\vec{F}_k^e). \end{cases} \tag{45}$$

Внутрішні сили механічної системи не входять явно в теорему про зміну кількості руху механічної системи і не впливають безпосередньо на зміну кількості руху механічної системи. Вони можуть впливати на зміну кількості руху тільки неявно через зовнішні сили.

Закони збереження кількості руху. Розглянемо закони збереження кількості руху для матеріальної точки і механічної системи одночасно, вважаючи матеріальну точку механічною системою, яка складається із однієї точки. ***Якщо векторна сума (головний вектор) усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему, дорівнює нулю, то кількість руху механічної системи стала за величиною і за напрямком, тобто***

$$\vec{Q} = \overrightarrow{const}. \tag{46}$$

У проекціях на осі декартової системи координат (46) має вигляд:

$$\begin{cases} Q_x = C_1; \\ Q_y = C_2; \\ Q_z = C_3, \end{cases} \tag{47}$$

де C_1, C_2, C_3 - сталі величини.

Якщо сума проекцій усіх зовнішніх сил, які діють на систему, на деяку вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху механічної системи на цю вісь є сталою величиною, тобто

$$Q_x = const. \qquad (48)$$

Теорема про рух центра мас механічної системи

Добуток маси механічної системи на пришвидшення її центра мас дорівнює векторній сумі усіх зовнішніх сил, які діють на цю механічну систему, тобто

$$M \cdot \vec{a}_c = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e, \qquad (49)$$

де $\vec{a}_c$ - пришвидшення центра мас механічної системи.

Центр мас механічної системи рухається так само, як і матеріальна точка, маса якої дорівнює масі усієї механічної системи, якщо на цю точку діють усі зовнішні сили, які прикладені до розглядуваної механічної системи.

У проекціях на осі інерціальної декартової системи координат залежність (49) набуде вигляду:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e; \\ M\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e; \\ M\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e. \end{cases} \tag{50}$$

Закон збереження центра мас механічної системи. Якщо векторна сума усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему, дорівнює нулю, то центр мас цієї механічної системи рухається із сталою за величиною та напрямком швидкістю, тобто рівномірно і прямолінійно.

Якщо сума проекцій усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему, на довільну вісь дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас механічної системи на цю вісь є величина стала.

Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла

Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла у проекціях на осі інерціальної декартової системи координат мають вигляд:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \\ M\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \\ M\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}. \end{cases} \tag{51}$$

де M - маса тіла, x_c, y_c, z_c - координати центра мас тіла. У цих рівняннях замість x_c, y_c, z_c можна взяти координати довільної точки тіла.

Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла аналогічні до диференціальних рівнянь руху однієї матеріальної точки.

ЛІТЕРАТУРА

Базова

1. Махней О.В. Лабораторний практикум з імітаційного моделювання у GPSS: Метод рекомендації до проведення лабораторних занять. – Ів.-Франківськь: 2020. – 40 с.
2. Мурашиний алгоритм [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/ Мурашиний алгоритм. 2021.
3. Яворський Н.Б., Андрущак Н.А. Моделювання дисперсійних співвідношень пористих композиційних матеріалів на підставі коміркових мікрорівневих структурних моделей. Науковий вісник НЛТУ України, 2020, 30(1), 142-151.
4. Bargmann, S., Klusemann, B., Markmann, J., Schnabel, J., et al. (2018). Generation of 3D representative volume elements for heterogeneous materials: A review. Progress in Materials Science, 96, 322–384.
5. Li, S., Lin, H., Meng, F., Moss, D., et al. (2018). On-Demand Design of Tunable Complete Photonic Band Gaps based on Bloch Mode Analysis. Scientific Reports, 8, 14283.
6. Segovia-Chaves, F., Vinck-Posada, H., & Navarro-Barón, E. (2019). Photonic band structure in a two-dimensional hexagonal lattice of equilateral triangles. Physics Letters A, 383(25), 3207–3213.
7. Zohd, T. (2018). 1Rapid Voxel-Based Digital-Computation for Complex Microstructured Media. Arch. of Comp. Meth. in Eng., 1–16.

Допоміжна

1. Омаров М.А. Основи теоретичної механіки. Ч.1: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2018. – 184 с.
2. Пирогов В.В. Практикум з технічної механіки. Теоретична механіка: Навч. посібник. – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – 68 с.
3. Романюк О.Д. Теоретична та прикладна механіка: Навч. посібник. – Дніпро: ДДТУ, 2021. -283 с.
4. Черниш О.М. Теоретична механіка: Навч. посібник – Центр учбової літератури, 2022. – 760 с.
5. Цвіркун Л.О., Омельченко О.В. Теоретична механіка. Методичні рекомендації для вивчення дисципліни. – Кривий Ріг: Дон. НУЕТ, 2019. – 100 с.
6. Штанько П.К., Шевченко В.Г. та інші. Теоретична механіка: Навч. посібник. – Запоріжжя: НУ Запорізька політехніка, 2021, - 464 с.

7. Штефан Н.І., Гнатейко Н.В. та інші. Теоретична механіка: Конспект лекцій. Навч. посібник. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 143 с.
8. Янгулова О.Л. Теоретична механіка. Аналітична механіка: Навч. посібник. – Дніпро: Дніпров. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2019. – 75 с.
9. Alex Maas. Theoretical Mechanics. Lecture in WS 2016/17 at the KFU Graz. – 181 p.
10. Бондарський О.Г., Приходько О.С. Теоретична механіка. Статика. Методичні вказівки до практичних занять для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2018. – 28 с.
11. Бондарський О.Г., Приходько О.С. Теоретична механіка. Статика. Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2018. –30 с.
12. Бондарський О.Г. Теоретична механіка. Кінематика. Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2022. – 17 с.
13. Бондарський О.Г. Теоретична механіка. Динаміка. Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2022. –53 с.

Моделювання динамічних процесів у складних системах: Конспект лекцій для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти освітньої програми «Прикладна математика» галузі знань F Інформаційні технології Математика та статистика спеціальності F1 «Прикладна математика» денної та заочної форм навчання (перша частина)/ укладач О. Бондарський. – Луцьк: ЛНТУ, 2026. – 51 с.

Комп'ютерний набір О.Бондарський
Редактор О.Бондарський

Підп. до друку «___»________2025 р. Формат 60х84/16.Папір офс.
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 1,0.
Тираж 50 прим.

Відділ іміджу та промоцій
Луцького національного технічного університету
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – відділ іміджу та промоцій ЛНТУ