

**Міністерство освіти і науки України**  
**Луцький національний технічний університет**

(повне найменування вищого навчального закладу)

**Факультет транспорту та механічної інженерії**

(повне найменування факультету)

**Кафедра прикладної механіки та мехатроніки**

(повна найменування кафедри)

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**  
**ЗА СТУПЕНЕМ ВИЩОЇ ОСВІТИ «МАГІСТР»**

**Дослідження факторів формування точності фіксації**  
**заготовки в цанговому затискному патроні**

спеціальність 131 Прикладна механіка

(шифр і назва спеціальності)

освітня програма «Прикладна механіка»

(назва освітньої програми)

Виконав: здобувач вищої освіти  
групи ІМм-21  
Музика Ігор Іванович

\_\_\_\_\_

(підпис)

Керівник:  
к.т.н., доцент  
Придальний Борис Іванович

\_\_\_\_\_

(підпис)

Кваліфікаційну роботу  
допущено до захисту  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 р.  
к.т.н., доцент  
Гарант освітньої програми:  
Четвержук Тарас Іванович

\_\_\_\_\_

(підпис)

Луцьк – 2025 року

**Луцький національний технічний університет**

**Факультет** Транспорту та механічної інженерії  
**Кафедра** Прикладної механіки та мехатроніки  
**Другий (магістерський) рівень**  
**освітньо-професійної програми «Прикладна механіка»**  
**Спеціальність** 131 Прикладна механіка

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач

кафедри

РЕДЬКО

2025 р.

\_\_\_\_\_  
“ ”  
\_\_\_\_\_ Р.

**ЗАВДАННЯ**

**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ МАГІСТРА**

Музики Ігоря Івановича

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи «Дослідження факторів формування точності фіксації заготовки в цанговому затискному патроні», керівник кваліфікаційної роботи магістра Придальний Борис Іванович к.т.н., доц. каф. ПМіМ затверджені наказом вищого навчального закладу від від «14» червня 2025 р. № 391/01-07
2. Строк подання студентом роботи 02.12.2025 р.
3. Вихідні дані до роботи: звіт з переддипломної практики, технічна документація токарного автомата, технічна документація цангового патрона, конструкторська документація, нормативні дані.
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)  
1. Загальна постановка задачі та огляд попередніх досліджень. 2. Модель центральної точності пружинної цанги. 3. Оптимізація кінцевого кута пружинної цанги. 4. Фактори формування точності фіксації заготовки в цанговому затискному патроні.
5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)  
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Консультант	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання

24.06.2025 р.

Керівник

\_\_\_\_\_ (підпис)

Завдання прийняв до виконання

\_\_\_\_\_ (підпис)

***КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН***

№	Назва етапів виконання кваліфікаційної роботи магістра	Термін виконання етапів виконання кваліфікаційної роботи магістра	Примітка
1.	<i>Загальна постановка задачі та огляд попередніх досліджень</i>	<i>01.10.2025</i>	
2.	<i>Модель центральної точності пружинної цанги</i>	<i>10.10.2025</i>	
3.	<i>Оптимізація кінцевого кута пружинної цанги</i>	<i>30.10.2025</i>	
4.	<i>Фактори формування точності фіксації заготовки в цанговому затискнутому патроні</i>	<i>29.11.2025</i>	
6.	<i>Електронний варіант кваліфікаційної роботи магістра</i>	<i>16.12.2025</i>	
7.	<i>Представлення роботи до захисту</i>	<i>20.12.2025</i>	

Студент

\_\_\_\_\_ (підпис)

*Музика І.І.*  
(прізвище та ініціали)

Керівник роботи

\_\_\_\_\_ (підпис)

*Придальний Б.І.*  
(прізвище та ініціали)

## АНОТАЦІЯ

Музика І.І. Д.В. Дослідження факторів формування точності фіксації заготовки в цанговому затискному патроні. Рукопис.

Атестаційна магістерська робота на здобуття кваліфікації другого (магістерського) рівня вищої освіти із спеціальності 131 – Прикладна механіка. – Луцький національний технічний університет. – Луцьк, 2025.

Робота присвячена виявленню факторів, що визначають можливість підвищення точності фіксації пруткових заготовок у пружинних цангах токарних верстатів шляхом аналітичного моделювання та оптимізації геометрії затискного вузла. Актуальність роботи зумовлена високими вимогами до розмірної та формоутворюючої точності при комбінованих операціях точіння та фрезерування довгих прутків, де навіть незначні радіальні зазори та похибки установки в вузлі «направляюча гільза – пружинна цанга – пруток» багаторазово підсилюються на відстані від опори.

У роботі побудовано кінематико-аналітичну модель центрувальної точності, яка описує перетворення сумарного радіального зазору і похибок базування в радіальне зміщення осі заготовки в точці різання. Показано, що ключовим узагальненим параметром є коефіцієнт чутливості, ефективна довжина контактної зони пелюстків цанги з конічною поверхнею гільзи. На основі цієї моделі сформульовано задачу оптимізації геометрії пружинної цанги за критерієм мінімізації чутливості до зазорів при збереженні допустимого рівня контактних напружень.

Ключові слова: токарний верстат, цанга, центрувальна точність, контактний тиск, кут конічної поверхні.

## ANNOTATION

Muzyka I.I. Study of the factors of formation of the accuracy of fixation of the workpiece in the collet clamping chuck. Manuscript.

Attestation master's thesis for obtaining the qualification of the second (master's) level of higher education in specialty 131 - Applied mechanics. - Lutsk National Technical University. - Lutsk, 2025.

The work is devoted to issues of development the fixation accuracy of bar stock workpieces in spring collets of turning lathes by means of analytical modelling and optimisation of the clamping unit geometry. The relevance of the work is determined by the stringent requirements for dimensional and form accuracy in combined turning and milling operations on long bars, where even minor radial clearances and setup errors in the “guide sleeve – spring collet – bar” assembly are multiplied at the distance from the support.

A kinematic–analytical model of centering accuracy is developed in the thesis, which describes the transformation of the total radial clearance and locating errors into the radial displacement of the workpiece axis at the cutting point. It is shown that the key generalized parameters are the sensitivity coefficient and the effective length of the contact zone between the collet fingers and the conical surface of the sleeve. On the basis of this model, the problem of optimising the spring collet geometry is formulated using the criterion of minimising sensitivity to clearances while maintaining an admissible level of contact stresses.

Keywords: lathe, collet, centering accuracy, contact pressure, taper angle.

## ЗМІСТ РОБОТИ

ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1 ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ОГЛЯД ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ	9
1.1 Роль самоустановлюваних направляючих гільз у токарних верстатах	9
1.2 Формалізована постановка задачі забезпечення центрувальної точності прутка	11
1.2.1 Числовий приклад для типових положень точіння та фрезерування	12
1.3 Огляд попередніх досліджень	13
1.3.1 Конструкції направляючих гільз і систем затиску у верстатах	13
1.3.2 Аналітичний аналіз точності пружинних цанг	14
1.3.3 Моделі сил затиску та контактної деформації цанг	15
1.3.4 Контактна зона пружинної цанги в направляючій гільзі	16
1.4 Узагальнення та наукова ніша даного дослідження	17
РОЗДІЛ 2 МОДЕЛЬ ЦЕНТРУВАЛЬНОЇ ТОЧНОСТІ ПРУЖИННОЇ ЦАНГИ	19
2.1 Кінематична схема та допущення моделі	19
2.2 Виведення аналітичного виразу центрувальної похибки	21
2.3 Фізична інтерпретація параметрів та коефіцієнта чутливості	22
2.4 Вплив основних факторів на центрувальну точність	24
2.5 Ілюстративні числові приклади впливу параметрів	26
2.6 Проміжні висновки до розділу	28
РОЗДІЛ 3 ОПТИМІЗАЦІЯ КОНІЧНОГО КУТА ПРУЖИННОЇ ЦАНГИ	30
3.1 Формулювання цілі та критерію оптимізації	30
3.2 Параметризація чутливості похибки центрування	32

3.3 Алгоритм підбору кінчного кута $\alpha$ як одномірний пошук	33
3.4 Результат оптимізації та його інтерпретація	34
3.5 Порівняння точності для точіння та фрезерування	35
3.6 Окремі параметри конструкції цангових патронів	36
РОЗДІЛ 4 ФАКТОРИ ФОРМУВАННЯ ТОЧНОСТІ ФІКСАЦІЇ	
ЗАГОТОВКИ В ЦАНГОВОМУ ЗАТИСКНОМУ ПАТРОНІ	
4.1 Постановка та ключові змінні точності фіксації	45
4.2 Формалізація впливу поля тиску на силові та геометричні похибки	46
4.3 Конструктивні та контактні фактори, що визначають точність фіксації	47
4.4 Окремі параметри контактних зон та елементів конструкції	48
ВИСНОВКИ	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	54

## ВСТУП

Токарні верстати посідають ключове місце в сучасному високоточному машинобудуванні для обробки довгих пруткових заготовок малого та середнього діаметра. Поєднання операцій точіння, фрезерування та свердління в одному установі при високих швидкостях різання й подачі висуває жорсткі вимоги до стабільності розмірної точності, форми та взаємного розташування поверхонь. Визначальним елементом такої технологічної системи є вузол підтримки прутка поблизу зони різання, який у Swiss-type верстатах реалізується у вигляді направляючої гільзи з вбудованою пружинною цангою.

У вузлі адаптивна направляюча гільза – пружинна цанга – пруток вирішується дві суперечливі задачі: з одного боку, необхідно забезпечити достатнє зусилля затиску для демпфування коливань та обмеження прогину довгої заготовки; з іншого – мінімізувати радіальну деформацію та ексцентриситет затиску, що безпосередньо впливають на центрувальну точність та формування похибок у зоні різання. Особливо чутливою є ситуація, коли в межах одного налаштування верстата виконується як точіння поблизу торця цанги, так і фрезерування на значному виносі від опори: одна й та сама похибка центрування в вузлі перетворюється на різні за величиною відхилення в точці контакту інструмента з заготовкою.

На формування центрувальної похибки впливають допуски на діаметр прутка, радіальні зазори між зовнішнім циліндром цанги та направляючим циліндром гільзи, похибки співвісності й биття при складанні, а також силові й деформаційні фактори – жорсткість пелюстків, розподіл контактних напружень на конічних поверхнях, тертя та зношування. В умовах серійного та масового виробництва прутки надходять із полем допуску діаметра, яке цанга повинна «поглинати» за рахунок власної пружності.

Традиційні підходи до проектування пружинних цанг базуються переважно на забезпеченні необхідного діапазону затискних зусиль та

технологічності виготовлення, тоді як вплив геометрії конуса та форми пелюстків на ефективну довжину контакту й центрувальну точність, як правило, враховується лише в спрощеній, якісній формі. В результаті потенціал цілеспрямованої оптимізації геометрії пружинної цанги для мінімізації центрувальної похибки, особливо в умовах комбінованих режимів обробки (точіння/фрезерування), використовується недостатньо.

Разом з тим розвиток обчислювальних засобів і методів моделювання дає можливість поєднати аналітичні моделі центрувальної точності з тривимірним скінченно-елементним аналізом напружено-деформованого стану пелюстків цанги та зон контакту. Це відкриває шлях до раціонального вибору кінцевого кута, довжини та положення тонкостінної деформованої ділянки пелюстків, орієнтованого саме на збільшення ефективної довжини контакту та зниження чутливості вузла до конструктивних і монтажних похибок без надмірного ускладнення конструкції.

Таким чином, підвищення центрувальної точності пруткової заготовки у вузлі «адаптивна направляюча гільза – пружинна цанга – пруток» поздовжньо-токарного верстата шляхом науково обґрунтованої оптимізації геометрії пружинної цанги, зокрема її кінцевого кута, є актуальною науково-прикладною задачею. Її розв'язання є суттєвим для забезпечення стабільної точності операцій точіння та фрезерування на Swiss-type верстатах, підвищення ресурсу елементів направляючого вузла та розширення області ефективного використання таких верстатів у високоточному машинобудуванні.

# РОЗДІЛ 1

## ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ОГЛЯД ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

### 1.1 Роль самоустановлюваних направляючих гільз у токарних верстатах

Токарні верстати орієнтовані на високоточну обробку довгих пруткових заготовок малого та середнього діаметра. На відміну від класичних токарних верстатів, ключовим конструктивним елементом Swiss-type є направляюча гільза (guide sleeve), яка виконує функцію радіальної опори прутка безпосередньо поблизу зони різання. Завдяки цьому ефективна довжина вільної консольної ділянки прутка істотно зменшується.

У типовій схемі роботи пруток затиснутий у патроні шпиндельного вузла, проходить крізь направляючу гільзу з вмонтованою пружинною цангою та виступає з неї на довжину, що визначається поточним положенням зони різання. Головний рух (обертання) може здійснюватися:

- тільки шпинделем (геліза нерухома);
- або одночасно шпинделем і направляючою гільзою (синхронно обертіві).

У такій компоновці:

- направляюча гільза забезпечує радіальну підтримку прутка;
- пружинна цанга, вбудована в гільзу, автоматично компенсує зміну діаметра прутка в межах поля допуску, реалізуючи самоустановлення;
- у схемах з адаптивною синхронно обертовою гільзою механізм із тарілчастими пружинами, рухомою втулкою та пружинною цангою підтримує приблизно сталий рівень контактного зусилля в широкому діапазоні діаметрів.

Для пояснення ролі направляючої гільзи розглянемо просту балкову модель прутка як консольної балки Ейлера–Бернуллі. При поперечній силі різання ( $F$ ), прикладеній на відстані ( $L$ ) від торця гільзи (тобто між гільзою й точкою різання), максимальний прогин у зоні різання оцінюється як

$$y_{max} \approx \frac{FL_f^3}{3EI},$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу прутка,  $I$  – момент інерції поперечного перерізу. Для круглої заготовки діаметра  $d$ :

$$I = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Важливим є кубічний характер залежності  $y_{max} \sim L_f^3$ . Якщо, наприклад, внаслідок переходу від точіння до фрезерування відстань між гільзою та точкою різання збільшується вдвічі  $L_f^2 = 2L_f^1$ , то відношення прогинів становить

$$\frac{y_{max}^2}{y_{max}^1} = \left(\frac{L_f^2}{L_f^1}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

Тобто навіть помірне збільшення вильоту заготовки за гільзу приводить до багаторазового (у прикладі – восьмикратного) зростання пружної складової радіального відхилення. Це робить систему істотно чутливішою до:

- початкової центрувальної похибки прутка в гільзі;
- радіальної жорсткості опори (гільза + пружинна цанга);
- зміни діаметра прутка в межах допуску.

Відповідно, конструкція направляючої гільзи та вбудованої пружинної цанги визначає:

- радіальну жорсткість опори прутка в околі зони різання;
- центрувальну точність (відхилення фактичної осі прутка від номінальної осі шпинделя);
- вібраційну стійкість при високих частотах обертання;
- зносостійкість контактних поверхонь «конус – пелюстки цанги – циліндр гільзи».

Самоустановлювані, зокрема адаптивні синхронно обертові гільзи, розглядаються як ключовий елемент для стабільного забезпечення точності при великих швидкостях обертання й значних варіаціях діаметра пруткових заготовок.

## 1.2 Формалізована постановка задачі забезпечення центрувальної точності прутка

У даній роботі центрувальну точність вузла «гільза – пружинна цанга і прутки» описуємо радіальною похибкою  $\Delta_j$  – відстанню між реальною віссю прутка та номінальною віссю шпинделя в перерізі, що відповідає точці контакту з різальним інструментом (точка різання при точінні або фрезеруванні).

На основі моделі, що використовується Zhang Bingquan і подальше розвинута Li Y. та співавт., центрувальна похибка в точці контролю має вигляд

$$\Delta_j = (Y + \sum \Delta_t) \frac{L_n}{2L_m}. \quad (1)$$

де  $Y$  – радіальний зазор між зовнішнім циліндром пружинної цанги та направляючим циліндром гільзи;

$\sum \Delta_t$  – сумарна радіальна похибка (биття) елементів «шпиндельний патрон – гільза – направляючий циліндр»;

$L_m$  – ефективна довжина контактної зони пелюсток пружинної цанги з конічною поверхнею обертової гільзи (відстань від центру цієї зони до середини направляючого циліндра);

$L_n$  – відстань від центру контактної зони до розглядуваної точки на прутку (зазвичай – до точки різання).

З (1) природно вводиться безрозмірний коефіцієнт чутливості до сумарного зазору:

$$k_\Delta = \frac{L_n}{2L_m},$$

який показує, у скільки разів сумарні радіальні похибки й зазор ( $Y + \sum \Delta_t$ ) «підсилюються» в зоні різання:

$$\Delta_j = (Y + \sum \Delta_t) \frac{L_n}{2L_m}$$

Таким чином, геометрично-кінематична задача забезпечення високої центрувальної точності зводиться до зменшення:

1. «вхідного» зазору та похибок ( $Y + \sum \Delta_t$ );
2. коефіцієнта чутливості  $k_{\Delta}$ , тобто відношення ( $\frac{L_n}{2L_m}$ ).

Перше досягається підвищенням точності виготовлення та складання, друге – конструктивною оптимізацією геометрії цанги й конуса гільзи, яка змінює положення та довжину контактної зони.

1.2.1. Числовий приклад для типових положень точіння та фрезерування  
Розглянемо умовний пруток діаметра ( $d = 10\text{мм}$ ) у направляючій гільзі Swiss-туре верстата. Припустимо, що:

- сумарний зазор і радіальні похибки

$$(Y + \sum \Delta_t) = 10\mu\text{м}$$

- ефективна довжина контактної зони пелюстками

$$L_m = 10\text{мм.}$$

1. Точіння. Точка різання розташована на відстані  $L_n \approx 1,5$  мм від торця цанги.  
Тоді

$$k_{\Delta,turn} = \frac{1,5}{2 \cdot 10} = 0,075,$$

$$\Delta_{j,turn} = 0,075 \cdot 10 \mu\text{м} = 0,75 \mu\text{м.}$$

2. Фрезерування. При фрезеруванні різальний інструмент віддалений від торця цанги, наприклад, на

$L_n \approx 16$  мм. У цьому випадку

$$k_{\Delta,mill} = \frac{16}{2 \cdot 10} = 0,8$$

$$\Delta_{j,turn} = 0,8 \cdot 10 \mu\text{м} = 8 \mu\text{м.}$$

Тобто при незмінному «вхідному» зазорі й похибках ( $Y + \sum \Delta_t$ ) зміна лише одного геометричного параметра – відстані  $L_n$  – більш ніж у 10 разів збільшує вихідну центрувальну похибку  $\Delta_j$ . Це добре узгоджується з експериментально-числовими результатами Лі У. та співавт., де для

фрезерувальної позиції фіксуються істотно більші нахили залежності  $\Delta_j(Y)$ , ніж для точильної.

З (1) та наведеного прикладу видно два ключові конструктивні важелі впливу:

- зменшення  $L_n$  (наближення зони різання до гільзи);
- збільшення  $L_m$  (зсув і «розтягування» контактних зон пелюстків до переднього торця гільзи).

У даній роботі саме другий механізм використовується як основний: за рахунок зміни напружено-деформованого стану пелюстків пружинної цанги (через геометрію конуса, довжину пелюстків, форму прорізів тощо) передбачається збільшити ефективну довжину контакту  $L_m$  без неприйняттого ускладнення технології виготовлення.

### 1.3 Огляд попередніх досліджень

1.3.1 Конструкції направляючих гільз і систем затиску у Swiss-type верстатах

Сучасні направляючі системи поздовжньо-точильних верстатів можна класифікувати на три основні групи:

1. Пасивні направляючі гільзи – жорстко закріплені втулки з цангою або без неї, що не обертаються разом із прутком. Вони забезпечують базову підтримку, однак характеризуються відносно високим ковзанням у зоні контакту та підвищеним тепловиділенням.
2. Синхронно обертові гільзи – гільзи, які обертаються разом із прутком. Це зменшує відносне ковзання, тертя та нагрів, що позитивно впливає на стабільність затиску та ресурс вузла.
3. Адаптивні синхронно обертові гільзи – системи, у яких пружинні елементи (зокрема тарілчасті пружини), важелі та спеціальний профіль конуса забезпечують автоматичну компенсацію зміни діаметра прутка в межах допуску при близько сталому контактному зусиллі.

У роботах автора Chen Lumin та співавт. побудовано тривимірні твердотільні та FEM-моделі таких адаптивних вузлів, що включають обертову гільзу, пружинний пакет, рухому втулку та пружинну цангу. Показано, що коректний підбір жорсткості пружин і геометрії конуса дозволяє:

- підтримувати контактний тиск у заданому діапазоні для різних діаметрів прутка;
- зменшити вібрації при високих частотах обертання;
- покращити центрувальну точність завдяки рівномірнішому розподілу напружень по довжині підтримуваної ділянки прутка.

Аналогічні підходи застосовуються і в конструкціях цангових патронів для утримання інструменту та заготовок, де також проводиться FEM-аналіз деформацій тримача та контактних елементів цанги під дією сил різання.

### 1.3.2. Аналітичний аналіз точності пружинних цанг

Одне з базових аналітичних досліджень точності пружинних цанг виконано Zhang Bingquan. У цій роботі систематизовано основні групи джерел похибок:

1. Геометричні похибки конуса й цанги : відхилення кута конуса ( $\alpha$ ), діаметрів, конусність, овальність.
2. Похибки розташування пелюстків : нерівномірність кроку прорізів, асиметрія товщини пелюстків, відхилення форми й ширини прорізів.
3. Похибки базування й установки : радіальне биття посадкових поверхонь, неспіввісність між конічною та циліндричною поверхнями, похибки різьбових з'єднань.

У найпростішому наближенні результуючу центрувальну похибку  $\Delta_c$  можна подати як квадратичну суперпозицію часткових складових:

$$\Delta_c^2 \approx \Delta_{geom}^2 + \Delta_{setup}^2 + \Delta_{clear}^2$$

де  $\Delta_{geom}$  відповідає геометричним відхиленням,  $\Delta_{setup}$  – похибкам установки,

$\Delta_{clear}$  – складовий, пов'язаний із зазорами та пружною деформацією пелюстків. Ця структура узгоджується з більш пізніми роботами, де деформаційний аналіз виконується методами скінченних елементів.

Для пруткових заготовок у Swiss-type верстатах навіть при високій точності виготовлення цанги істотний вплив мають:

- варіація діаметра прутка в межах поля допуску;
- неоднорідність жорсткості пелюстків по довжині та колу;
- реальне (деформаційно зумовлене) положення контактної області пелюстків й конуса гільзи.

Саме останній чинник безпосередньо пов'язаний із параметром  $L_m$  у формулі (1), а отже – з коефіцієнтом чутливості  $k_A$ .

### 1.3.3. Моделі сил затиску та контактної деформації цанг

У роботі Zhang Guozhi розроблено методику розрахунку зусилля затиску пружинної цанги в шпинделі прецизійного верстата та виконано аналіз надійності затиску з урахуванням розсіювання параметрів.

Пружинну цангу розглядають як клиновий механізм, що перетворює осьову силу натягу  $F_a$  на радіальне зусилля затиску  $F_r$ . Для безтертяного випадку:

$$F_r \approx F_a \tan \beta,$$

де  $\beta = \alpha/2$  – половина кута конуса. З урахуванням тертя з коефіцієнтом ( $\mu$ ) на конічній поверхні рівняння набуває вигляду

$$F_r \approx F_a \frac{\tan \beta + \mu}{1 - \mu \tan \beta}$$

Подальший розподіл контактної тиску по довжині пелюстка визначається його вигинною жорсткістю. Якщо пелюсток моделювати як консольну пластину товщини  $t(x)$ , ширини  $b$  та довжини  $L$ , то при локальному тиску  $p(x)$  прогин  $w(x)$  описується диференціальним рівнянням:

$$D(x) \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x), \quad D(x) = \frac{Et(x)^3}{12(1-\nu^2)},$$

де  $D(x)$  – згинна жорсткість перерізу,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона. Взаємозв'язок між  $p(x)$ ,  $w(x)$  та радіальними деформаціями визначає:

- зони максимумів напружень у пелюстку;
- положення основної контактної області з конусом;
- характер зміни  $L_m$  у відповідь на варіацію діаметра прутка.

У межах аналізу надійності параметри жорсткості пелюстків, коефіцієнт тертя, допуски на діаметр прутка тощо розглядаються як випадкові величини. Це дозволяє оцінити ймовірність того, що реальне зусилля затиску  $F_r$  не впаде нижче мінімально допустимого рівня для конкретної операції. Такі результати задають реалістичні діапазони сил затиску та обмеження на допустимі деформації пелюстків.

#### 1.3.4 Контактна зона пружинної цанги в направляючій гільзі

Подальший розвиток зазначених підходів представлено в роботі Li Y. та співавт., де об'єктом дослідження є саме пружинна цанга, розташована в адаптивній синхронно обертовій направляючій гільзі поздовжньо-точильного верстата.

Основні кроки цього дослідження:

1. Використання моделі (1) для кількісного зв'язку центрувальної похибки  $A_j$  із параметрами  $Y, \sum A_i, L_n, L_m$ .
2. Побудова 3D FEM-моделі однієї третини трипелюсткової цанги (з урахуванням симетрії) і аналіз контактних напружень на ділянці бокової поверхні пелюстка вздовж шляху  $AB$  від заднього до переднього торця конуса.
3. Встановлення, що в початковому варіанті конструкції контактна зона зміщена до задньої частини пелюстка (поблизу точки  $A$ ), тобто ефективна довжина  $L_m$  є недостатньо великою, а відношення  $(L_n / L_m)$  – підвищеним.
4. Пошук такого значення кінцевого кута  $\alpha$ , при якому контактна зона зміщується ближче до переднього торця (поблизу точки  $B$ ), забезпечуючи зростання  $L_m$  та зменшення чутливості до зазорів.

Оптимізація виконана методом скінченних елементів у поєднанні з параметричним варіюванням кута конуса. Для цанги, призначеної для обробки прутка  $\phi 10$ , отримано оптимізоване значення кінцевого кута  $\alpha_{opt} \approx 32,092^\circ$ , що дещо більше за вихідний кут  $32^\circ$ . За результатами розрахунків:

- для точки точіння (приблизно ( $L_n \approx 1,5$ мм) відхилення залежності  $\Delta_f(Y)$  зменшився приблизно на 75 %;

- для точки фрезерування (приблизно  $L_n \approx 16$ мм) – приблизно на 50 %.

Інакше кажучи, при фіксованому «вхідному» зазорі ( $Y + \sum \Delta_t$ ) центрувальна похибка в зоні різання зменшується в 2–4 рази залежно від положення інструмента. Водночас автори зазначають, що надмірне збільшення кута ( $\alpha$ ) може призводити до зростання напружень і прискореного зносу в зоні контакту поблизу переднього торця, що задає верхні межі для подальшої оптимізації.

Таким чином, робота Li Y. та ін. демонструє принципову ефективність перенесення контактної сфери пелюстків уперед і збільшення  $L_m$ , але не розглядає детально:

- варіювання товщини й форми пелюстків уздовж довжини;
- впливу конфігурації прорізів та їх параметрів на розподіл напружень;
- компроміс між підвищенням точності та ресурсом цанги при різних режимах навантаження.

#### 1.4 Узагальнення та наукова ніша даного дослідження

На основі викладеного можна сформулювати такі узагальнені висновки для постановки задачі:

1. Технологічна схема Swiss-type верстата робить точність обробки надзвичайно чутливою до центрувальної похибки прутка в направляючій гільзі, причому ця чутливість зростає при збільшенні вильоту заготовки за гільзу (режими фрезерування, комбіновані операції).

2. Формула (1) виділяє два фундаментальні важелі впливу – «вхідний» зазор  $(Y + \sum \Delta_t)$  і геометричний коефіцієнт чутливості  $k_{\Delta} = L_n / (2L_m)$ . Перший контролюється переважно точністю виготовлення та складання, другий – конструктивною геометрією вузла «гільза – пружинна цанга».

3. Попередні роботи (Zhang Bingquan, Zhang Guozhi) дали якісні й кількісні моделі впливу геометрії цанги та сил затиску на точність і надійність, однак у загальному вигляді, без прив'язки до специфіки направляючих гільз поздовжньо-точильних верстатів.

4. FEM-дослідження Li Y. та ін. показало, що навіть відносно невелика зміна кінцевого кута пелюстків дозволяє істотно зменшити  $\Delta_j$  через зміщення контактної зони, однак:

- аналіз обмежується варіюванням одного параметра (кута  $\alpha$ );
- не розкривається повною мірою взаємодія геометрії пелюстків, параметрів прорізів і пружних властивостей матеріалу;
- питання ресурсу та зносостійкості цанги розглядаються лише якісно.

Отже, наукова ніша даної роботи полягає у поглибленому аналітико-числовому дослідженні напружено-деформованого стану пелюстків пружинної цанги в направляючій гільзі Swiss-type верстата з метою:

- побудови розширеної параметричної моделі, що пов'язує геометричні параметри цанги (кут конуса, довжину та товщину пелюстків, конфігурацію прорізів) із величинами  $L_m$ ,  $k_{\Delta}$  та реальним полем контактних напружень;
- виконання аналізу для набору варіантів геометрії з подальшою оптимізацією за критеріями мінімізації центрувальної похибки  $\Delta_j$  та обмеження максимальних контактних напружень;
- формування інженерних рекомендацій щодо конструкції пружинних цанг для направляючих гільз поздовжньо-точильних верстатів, які забезпечують підвищення точності без неприйняттого зменшення ресурсу.

## РОЗДІЛ 2

### МОДЕЛЬ ЦЕНТРУВАЛЬНОЇ ТОЧНОСТІ ПРУЖИННОЇ ЦАНГИ

#### 2.1 Кінематична схема та допущення моделі

Розглядається спрощена, але інженерно придатна аналітична модель перетворення радіальних зазорів і похибок установки вузла «направляюча гільза – пружинна цанга й пруткою» у центрувальну похибку в зоні різання. Модель ґрунтується на кінематичному наближенні та розглядається як основа для подальшої FEM-оптимізації геометрії пелюстків цанги та її кінечної частини. Об'єктом моделювання є вузол підтримання прутка в поздовжньо-токарному верстаті, який складається з направляючої гільзи (guide sleeve), пружинної цанги та пруткової заготовки. Для побудови компактної аналітичної моделі введемо низку спрощень і допущень, які дозволяють явно зв'язати геометричні параметри вузла з центрувальною похибкою.

##### 1. Осьова та геометрична схема

1. Вісь шпинделя розглядається як фіксована пряма – --номінальна вісь системи--. Всі центрувальні похибки визначаються відносно цієї осі.

2. Зовнішній циліндр пружинної цанги встановлений у направляючому циліндрі з номінальним радіальним зазором ( $Y$ ). Реальна взаємна орієнтація цих поверхонь може відхилятися від ідеальної співвісності внаслідок похибок обробки та складання.

3. Пруткова заготовка затиснута пелюстками цанги і в зоні затиску розглядається як жорстко зв'язана з тілом цанги (відсутні відносні зсуви між прутком і пелюстками).

4. Вздовж осі прутка вводиться поздовжня координата ( $z$ ), відлічувана від умовного центру контактної зони пелюстків з конусом (точка ( $M$ )) у напрямку до інструмента.

##### 2. Допуски, похибки та сумарне зміщення

Геометричні неточності вносять радіальну невідповідність між різними елементами вузла:

- відхилення форми й положення направляючого циліндра;
- відхилення зовнішньої циліндричної поверхні цанги;
- похибка конуса опорної гільзи, у яку встановлена;
- похибки складання (зміщення, кутові перекоси).

Еквівалентно ці впливи зручно агрегувати у величину сумарного радіального зміщення центрів  $\sum \Delta_t$ , що включає компоненти радіального биття, неспіввісності та локальних відхилень форми. Тоді реальна максимальна радіальна невідповідність між направляючим циліндром і зовнішнім циліндром цанги описується як

$$\Delta_r = Y + \sum \Delta_t$$

### 3. Механічна модель вузла

Щоб отримати аналітичну залежність, розглянемо вузол «пруток – пелюстки цанги – зовнішній циліндр цанги» як квазіжорстке тіло, що:

- спирається на конічну поверхню в межах ефективної контактної зони довжиною  $L_m$ ;
- може здійснювати малий кутовий поворот  $\varphi$  відносно умовного центра цієї зони (точки (М));
- передає цей кутовий поворот на пруток, який далі продовжується до точки різання.

Вважається, що:

- контакт пелюстків та конуса зосереджений у зоні довжиною  $L_m$ ; поза цією зоною контактними напруженнями можна знехтувати;
- точка різання (при точінні чи фрезеруванні) розташована на відстані  $L_n$  від точки (М) уздовж осі прутка.

### 4. Геометричні припущення малих кутів

Для забезпечення лінеаризації використовуються припущення малих кутів:

$$\varphi \ll 1, \sin \varphi \approx \varphi, \tan \varphi \approx \varphi.$$

При цьому деформацією пелюстків у радіальному напрямку на фоні геометричних зазорів ( $Y$ ) та зміщень  $\sum \Delta_i$  знехтувано, а основний внесок у радіальне зміщення осі прутка обумовлений саме кутовим поворотом вузла. У такому наближенні вузол «цанга – пруток» можна схематично уявити як – жорстку балку, що:

- спирається на конічну поверхню в межах контактної зони довжиною  $L_m$ ;
- зазнає малого кутового повороту  $\varphi$  внаслідок радіальної невідповідності  $\Delta_r$ ;
- передає в результаті в точці різання на відстані  $L_l$  радіальне зміщення  $\Delta_j$ .

## 2.2 Виведення аналітичного виразу центральної похибки

Для побудови компактного виразу скористаємося спрощеною плоскою схемою у площині найбільшої радіальної невідповідності.

### 1. Визначення характерних точок

- $O_s$  – центр направляючого циліндра;
- $O_c$  – центр зовнішнього циліндра цанги;
- $M$  – умовний центр контактної зони пелюстків із конусною поверхнею.

Унаслідок зазору ( $Y$ ) і сумарних похибок  $\sum \Delta_i$  центри ( $O_s$ ) та ( $O_c$ ) зміщені:

$$O_s O_c = \Delta_r, \quad \Delta_r = Y + \sum \Delta_i \quad (2.2)$$

### 2. Геометричний зв'язок між кутом повороту та зміщенням

Припустимо, що вузол «цанга – пруток» здійснює малий поворот на кут  $\varphi$  відносно точки ( $M$ ). Якщо розглядати відхилення в одному (найгіршому) радіальному напрямку, то:

- радіальне зміщення на відстані ( $L_m$ ) від точки ( $M$ ) (до умовного перерізу, де діє контакт із зовнішнім циліндром) у першому наближенні можна записати як

$$\Delta_r \approx L_m \varphi.$$

- однак, з урахуванням того, що при повороті відносно середини контактної зони протилежні її кінці зміщуються у протилежні сторони, характерна різниця радіальних зміщень між крайніми перерізами зони становить

приблизно

$$\Delta_r \approx L_m \varphi$$

Звідси одержуємо уточнений зв'язок:

$$\varphi \approx \Delta_r / 2L_m \quad (2.3)$$

### 3. Проекція кутового повороту у точці різання

Нехай точка різання знаходиться на відстані ( $L_n$ ) від точки (М) вздовж осі прутка. Тоді, за умови малих кутів, радіальне зміщення осі прутка в цій точці

$$\Delta_j \approx L_n \varphi. \quad (2.4)$$

Підставляючи (2.3) в (2.4), одержуємо:

$$\Delta_j \approx L_n \varphi (\Delta_r / 2L_m) = \Delta_r L_n / 2L_m \quad (2.5)$$

### 4. Підстановка сумарної невідповідності

З урахуванням (2.2)

$$\Delta_r = Y + \sum \Delta_t$$

підставимо це в (2.5):

$$\Delta_j = L_n / 2L_m (Y + \sum \Delta_t)$$

У підсумку отримуємо робочий аналітичний вираз для центрувальної похибки в точці різання:

$$\Delta_j = 0,5 (Y + \sum \Delta_t) L_n / L_m \quad (2.6)$$

Формула (2.6) формалізує чисто геометричний (кінематичний) механізм перетворення радіальних зазорів ( $Y$ ) та похибок  $\sum \Delta_t$  у центрувальну похибку  $\Delta_j$  у робочій зоні. У цьому наближенні силові фактори (зусилля затиску, жорсткість пелюстків, тертя) не входять у формулу явно, але їхній вплив приховано врахований через фактичне значення ефективної довжини контакту  $L_m$ , яке визначається реальним розподілом контактних напружень.

## 2.3 Фізична інтерпретація параметрів та коефіцієнта чутливості

Для подальшого аналізу зручно виділити коефіцієнт чутливості моделі, переписавши (2.6) у вигляді

$$\Delta_j = k_\Delta (Y + \sum \Delta_t), \quad k_\Delta = L_n / 2L_m \quad (2.7)$$

Тут:

- $(Y)$  – конструктивний радіальний зазор між зовнішнім циліндром цанги та направляючим циліндром;
- $\sum \Delta_i$  – ефективна сумарна радіальна похибка установки, що включає:
  - радіальне биття направляючого циліндра;
  - похибку співвісності і шпинделя;
  - похибку форми, положення та установки зовнішнього циліндра цанги;
- $L_m$  – ефективна довжина контактної зони пелюстків та конусом опорної гільзи, де фактично діють значущі контактні напруження та передається навантаження;
- $L_n$  – відстань до контрольного перерізу (точки різання) від умовного центра контактної зони.

#### 1. Коефіцієнт чутливості $k_\Delta$

Величина  $k_\Delta$  є безрозмірною та описує, наскільки сильно центрувальна похибка реагує на зміну радіального зазору або похибок установки. Диференціальний запис:

$$\partial \Delta_j / \partial Y = \partial \Delta_j / \partial (\sum \Delta_i) = k_\Delta = L_n / 2L_m \quad (2.8)$$

Таким чином:

- при фіксованих  $(Y)$  та  $\sum \Delta_i$  центрувальна похибка --лінійно зростає-- зі збільшенням відношення  $(L_n/L_m)$ ;
- зменшення  $k_\Delta$  можливе
  - шляхом зменшення  $L_n$  (наближення зони різання до торця цанги/центра контактної зони);
  - шляхом збільшення  $L_m$  (розширення зони фактичного контакту за рахунок оптимізації конуса цанги, геометрії пелюстків, жорсткісного профілю).

#### 2. Інтервал типових значень $L_n$ і $L_m$

У поздовжньо-точильних верстатах типові значення:

- для точіння торця або зовнішньої поверхні –  $L_n \sim 1-2\text{мм}$ ;
- для фрезерування (зокрема поперечного) –  $L_n \sim 15-20\text{мм}$ ;

Ефективна довжина контактної зони ( $L_m$ ) за результатами FEM-аналізу зазвичай знаходиться у діапазоні 8-20мм залежно від кінчного кута, довжини пелюстка та діапазону діаметрів прутка.

Тоді відношення ( $L_n/L_m$ ) може змінюватися в межах приблизно (0,05-2), що приводить до суттєво різної чутливості  $k_\Delta$  для різних технологічних операцій.

### 3. Інженерне тлумачення

З погляду інженерної практики:

- зменшення ( $Y$ ) і  $\sum \Delta_t$  вимагає підвищення точності виготовлення й складання вузла – це часто дорого й технологічно складно;

- натомість збільшення  $L_m$  шляхом раціональної геометрії цанги (зміна кінчного кута, профілю прорізів, товщини пелюстків) може бути реалізовано на етапі конструкторської оптимізації з меншими витратами;

- наближення інструмента до торця цанги (зменшення  $L_n$ ) обмежене компоновкою верстата і можливими колізіями, але також є важливим конструктивним резервом.

Таким чином, параметр  $k_\Delta$  є ключовим узагальненим показником, який безпосередньо пов'язує геометрію вузла та компоновку робочої зони з кінцевою центрувальною точністю.

## 2.4 Вплив основних факторів на центрувальну точність

З формули (2.6) випливає, що центрувальна точність зумовлена сукупністю геометричних, технологічних і експлуатаційних факторів. Узагальнено їх можна згрупувати так.

### 1. Геометрія цанги й конуса

Основні параметри:

- номінальний кінчний кут  $\alpha$ ;
- довжина кінчної частини й профіль переходу до циліндричної ділянки;
- розташування й геометрія прорізів пелюстків (ширина  $W$ , форма вирізів, радіуси заокруглень).

Вони визначають розподіл жорсткості пелюстків уздовж осі й по колу, а отже –реальну форму контактної зони:

- локалізований контакт у задній частині пелюстків -  $L_m$  малий -  $k_\Delta$  великий
- висока чутливість до зазорів;
- розподілений контакт ближче до переднього торця пелюстків із достатньою довжиною -  $L_m$  великий -  $k_\Delta$  менший - краща центрувальна точність.

2. Зазори та поля допусків. Суттєвими є:

- номінальний зазор  $Y$  між зовнішнім циліндром цанги й направляючим циліндром;
- допуски на діаметр прутка (наприклад,  $d = 10_{-0,00}^{+0,02}$  мм для шліфованого прокату);
- допуски на діаметри та конусність контактних поверхонь (цанга, опорна гільза).

Зменшення ( $Y$ ) лінійно знижує  $\Delta_j$ , але надто малий зазор:

- підвищує чутливість до забруднення та стружки;
- збільшує ризик заклинювання при тепловому розширенні;
- ускладнює збирання та регулювання.

Тому оптимізація  $Y$  повинна враховувати як міркування точності, так і надійності роботи.

3. Радіальне биття та співвісність

У  $\sum\Delta_i$  входять:

- радіальне биття направляючого циліндра відносно шпинделя;
- похибка співвісності посадкових конусів;
- похибка установки у корпусі шпиндельного вузла;
- зношування та локальні пошкодження посадкових поверхонь.

Навіть при невеликому конструктивному зазорі  $Y$ , недбала юстировка або зношення опорних посадок можуть призвести до  $\sum\Delta_i$  співмірної або більшої за  $Y$ , що суттєво погіршить центрувальну точність.

#### 4. Положення та довжина контактної зони пелюстків

За результатами FEM-аналізу:

- при короткій ефективній контактній зоні (локальний контакт біля середини пелюстка)  $L_m$  малий,  $k_A$  великий, система чутлива до зазорів;
- при зміщенні контактної зони ближче до переднього торця й розширенні її довжини  $L_m$  зростає, а  $k_A$  зменшується.

Це забезпечується раціональним вибором кінцевого кута  $\alpha$  та профілю пелюстків, як показано в роботах з оптимізації за допомогою FEM.

#### 5. Нерівномірність жорсткості пелюстків

Причини:

- неоднакова товщина пелюстків;
- відмінність у ширині й формі прорізів;
- наявність концентраторів напружень (гострі кути вирізів, технологічні надрізи).

Наслідки:

- несиметричний розподіл контактних сил по колу;
- поява ексцентриситету затиску навіть при нульових номінальних зазорах;
- додаткове динамічне биття при обертанні прутка.

У межах моделі (2.6) це проявляється як ефективне збільшення  $\sum \Delta_i$ .

#### 6. Режим затиску та експлуатаційні чинники

Важливі:

- величина осьового зусилля притиску цанги;
- коефіцієнт тертя в парі «пелюстки – прутку» та на кінчних поверхнях;
- стан мастила та ступінь забруднення;
- накопичене зношування.

Ці фактори змінюють реальний розподіл напружень, а отже й положення/довжину контактної зони  $L_m$ . Формально вони не входять у (2.6), але прямо впливають на ефективне значення  $L_m$ , що слід враховувати при інтерпретації розрахунків та плануванні експериментальної верифікації моделі.

## 2.5 Ілюстративні числові приклади впливу параметрів

Для якісної оцінки впливу окремих параметрів розглянемо умовний приклад, у якому:

- сумарний радіальний зазор і похибка установки становлять

$$Y + \sum \Delta_i = 10 \text{ мкм}$$

тобто

$$0,5(Y + \sum \Delta_i) = 5 \text{ мкм}$$

- аналізується декілька варіантів ефективної довжини контактної зони  $L_m$ ;

- розглядаються дві характерні відстані до точки різання:

- точіння:  $L_n = 1,5 \text{ мм}$ ;

- фрезерування:  $L_n = 16 \text{ мм}$ .

Тоді за формулою (2.6)

$$\Delta_j = 0,5 (Y + \sum \Delta_i) L_n / L_m = 5 \text{ мкм } L_n / L_m \quad (2.9)$$

1. Вплив зміни  $L_m$  при фіксованому  $L_n = 1,5 \text{ мм}$  (точіння)

Таблиця 1 Порівняння точіння та фрезерування для тих самих

$L_m$ , мм	$L_n$ , мм	$\Delta_j$ , мкм
8	16	10,00
10	16	8,00
12	16	6,67
16	16	5,00

Збільшення  $L_m$  від 8 до 16 мм майже вдвічі зменшує центрувальну похибку в точці різання при точінні, незважаючи на незмінний сумарний зазор  $Y + \sum \Delta_i$ .

## 2. Порівняння точіння та фрезерування для тих самих $L_m$

Таблиця 2 Вплив зміни  $L_m$  при фіксованому  $L_n=1,5$  мм (точіння)

$L_m$ , мм	$L_n$ , мм	$\Delta_j$ , мкм
8	1,5	0,94
10	1,5	0,75
12	1,5	0,63
16	1,5	0,47

Для фрезерування (велике  $L_n$ ) центрувальна похибка в 5–10 разів більша, ніж для точіння (малий  $L_n$ ) при однакових  $L_m$  і сумарному зазорі. Це наочно демонструє критичну роль відношення ( $L_n / L_m$ ) та пояснює, чому експериментально спостерігають більший нахил залежності  $\Delta_j$  – зазор» для фрезерувальної позиції.

## 3. Вплив зменшення зазору $Y+\sum\Delta_i$

Оскільки модель (2.6) лінійна за  $Y+\sum\Delta_i$ , то для тих самих  $L_n$  та  $L_m$ :

- при зменшенні  $Y+\sum\Delta_i$  удвічі (з 10 до 5 мкм)  $\Delta_j$  також зменшується удвічі;
- однак досягнення такого зменшення вимагає:
  - або переходу на більш точні класи обробки й вимірювання;
  - або застосування складних операцій юстування та регулювання.

На цьому фоні оптимізація геометрії цанги, яка збільшує  $L_m$ , часто є більш технологічно й економічно доцільним шляхом підвищення центрувальної точності.

## 2.6 Проміжні висновки до розділу

1. Побудовано кінематичну модель вузла «направляюча гільза і пружинна цанга – пруток», у якій вузол «цанга – пруток» розглядається як квазіжорстке тіло, що здійснює малий кутовий поворот відносно ефективної контактної зони довжиною  $L_m$ .

2. На основі геометричних міркувань отримано компактний аналітичний вираз центрувальної похибки в точці різання

$$\Delta_j = 0,5 (Y + \sum \Delta_i) L_n / L_m$$

який чітко пов'язує радіальні зазори й похибки установки з відношенням  $L_n/L_m$ .

3. Введено коефіцієнт чутливості

$$k_{\Delta} = L_n / 2L_m$$

що визначає, наскільки сильно центрувальна похибка реагує на зміну зазору й похибок. Зменшення  $k_{\Delta}$  може бути досягнуто як зменшенням  $L_n$ , так і збільшенням  $L_m$ .

4. Показано, що ключову роль у формуванні  $L_m$ , а отже й  $k_{\Delta}$ , відіграють геометрія пелюстків цанги, кінцевий кут, поля допусків і реальний розподіл контактних напружень, який доцільно досліджувати методами скінченних елементів.

5. Наведені числові приклади демонструють, що:

- збільшення  $L_m$  відчутно зменшує центрувальну похибку навіть при незмінних зазорах;
- збільшення  $L_n$  (перехід від точіння до фрезерування) різко погіршує центрувальну точність, що узгоджується з експериментальними спостереженнями.

Отримана аналітична модель є вихідною ланкою для подальшого FEM-моделювання й оптимізації геометрії пружинної цанги з метою максимального збільшення ефективної довжини контактної зони  $L_m$  у заданому діапазоні діаметрів прутка та підвищення центрувальної точності вузла цанга–пруток.

## РОЗДІЛ 3

### ОПТИМІЗАЦІЯ КОНІЧНОГО КУТА ПРУЖИННОЇ ЦАНГИ

#### 3.1 Формулювання цілі та критерію оптимізації

Ціль як загальна оптимізація по полю допуску діаметра. Для цього потрібно щоб оптимізація конічного кута  $\alpha$  зводиться до забезпечення суцільного контакту в передній зоні пелюстка (біля точки В) по всьому полю допуску діаметра прутка при обмеженні напружень; для цанги S20 під  $\varnothing 10$  мм отримано мінімально допустиме  $\alpha \approx 32,092^\circ$ , що зменшує чутливість похибки центрування (нахил  $L_n/(2L_m)$ ) на 75,66% у точці точіння та на 51,28% у точці фрезерування.

Передумови, позначення та область застосовності. Об'єкт: вузол «самоустановлювана (синхронно-обертюва) направляюча гільза та пружинна цанга – прутюк» верстата, де контакт пелюстків цанги з конічною поверхнею обертювої гільзи визначає положення (центрування) прутка.

Ключова модель центрувальної похибки. Для точки вимірювання/обробки використовується залежність

$$\Delta_j = 0,5 (Y + \sum \Delta_i) L_n / L_m$$

де:  $\Delta_j$  - зміщення центра в точці вимірювання (м);

$Y$  - радіальний зазор сполучення (м);

$\Delta_i$  - сумарна похибка радіального биття/похибок установки (м);

$L_n$  — відстань від центра контактної зони до точки вимірювання (м);

$L_m$  — «ефективне плече»/ефективна довжина, що пов'язана з положенням контактної зони відносно базової ділянки (м).

Розмірнісна перевірка:  $(Y + \sum \Delta_i)$  має розмірність довжини,  $L_n/L_m$  - безрозмірна величина, тому  $\Delta_j$  - довжина (коректно).

Фізичний сенс для оптимізації: при фіксованих  $(Y + \sum \Delta_i)$  та  $L_n$  зменшення  $\Delta_j$  досягається збільшенням  $L_m$  (тобто «вигідним» зміщенням/розширенням контактної зони). В роботі показано, що

наближення контакту до переднього кінця (до точки В) зменшує  $L_p/L_m$ , а отже й  $\Delta_j$ .

Область застосовності (прийняті допущення):

1. квазістатичний стан затиску (різальні сили не прикладаються);
2. пружна робота пелюстків (без пластичності);
3. зміни діаметра прутка розглядаються в межах допуску (для прикладу  $20\mu\text{m}$ ).
4. гільза (конічна опора) може прийматися жорсткою - як у вихідній постановці («не враховують деформації обертової втулки, враховують деформацію консольної частини пелюстка»).

Оскільки фактичний діаметр прутка  $D_b$  змінюється у межах поля допуску, задача має робастний характер: потрібно забезпечити потрібну якість контакту для всіх допустимих  $D_b$ . У розглянутій постановці контрольні діаметри беруться як три рівні:

$$D_b \in \{9,98; 10,00; 10,02\} \text{мм.}$$

Вводимо робастний критерій (мінімальна ефективна довжина контакту в найгіршому випадку):

$$J(\alpha) = \min L_m(\alpha, D_b),$$

і прагнемо  $J(\alpha)$  за умов контактної придатності та міцності.

Обмеження, що визначаються контактом та міцністю. Умова суцільного контакту у передній зоні (біля В). Вихідна ідея: контакт пелюстка з конусом має включати передній кінець; мертвий (безконтактний) кінець погіршує центрування.

Обмеження за напруженням. Встановлюємо вимогу

$$\sigma_{\text{eq}}(x; \alpha, D_b) \leq \sigma_{\text{доп}}$$

де  $\sigma_{\text{eq}}$  - еквівалентні напруження (за Мізесом),  $\sigma_{\text{доп}}$  - допустимі (за матеріалом і коефіцієнтом запасу).

### 3.2 Параметризація чутливості похибки центрування

Формула зручно переписується через коефіцієнт чутливості до зазорів биття:

$$k_{\Delta}(\alpha, D_b) = L_n / 2L_m(\alpha, D_b)$$

Тоді оптимізація  $\alpha$  фактично зменшує  $k_{\Delta}$ , що безпосередньо зменшує вплив зазорів/биття на  $\Delta_j$ . У вихідній роботі прямо зазначено, що нахил кривих на графіку «похибка-зазор» дорівнює  $L_n/2L_m$ .

Структура моделі, достатня для відтворюваності (з параметрами, які потрібно задати у FEM-пакеті).

Геометрія та симетрія. Цанга трипелюсткова; для зменшення розрахункових витрат береться сектор (1/3) як об'єкт аналізу.

Геометричні параметри прикладу S20 ( $\emptyset$  10) мм наведено в табличному вигляді:  $\theta=120^\circ$ ,  $W=2\text{мм}$ ,  $L=38\text{мм}$ ,  $D_1=29,5\text{мм}$ ,  $D_2=22\text{мм}$ ,  $D_{0c}=10,1\text{мм}$ ,  $\alpha=32^\circ$  (до оптимізації). Для власної конструкції ці параметри слід замінити на фактичні.

Матеріали. Граничні умови та навантаження. Потрібно задати  $E$ ,  $\nu$  (лінійно-пружна модель). Якщо є дані - також  $\sigma_{0,2}$  для визначення  $\sigma_{доп}$ . Постановка, що відтворює затиск:

Обертову втулку (конічну опору) фіксують, а на задньому торці цанги задають осьове переміщення (еквівалент дії пружин), як зазначено у вихідному описі моделі.

Контактні взаємодії мають бути односторонні («без проникнення») з можливістю ковзання (тертя — параметр моделі).

Контактні взаємодії. У моделі потрібні два контакти:

1. «пелюсток – конус гільзи» (визначає позиціонування);
2. «пелюсток – пруток» (визначає реальний затиск).

Для відтворюваності у робочому звіті варто явно фіксувати: тип формулювання контакту (penalty augmented Lagrange), «finite sliding» чи «small sliding», коефіцієнти тертя  $\mu$  та  $\mu_b$ , та критерії збіжності.

Сітка та контроль збіжності. Сітку згущують у тонкостінній зоні пелюстка і в області очікуваних контактних градієнтів (біля переднього краю). Рекомендований мінімум для наукової роботи: дослідження збіжності (наприклад, 2–3 рівні згущення) за метриками  $\sigma_{\text{ср, max}}$  та  $L_m$ . (Числові допуски збіжності задаються вами, бо у вихідному тексті вони не наведені.)

### 3.3 Алгоритм підбору кінцевого кута $\alpha$ як одномірний пошук

Оскільки змінна одна  $\alpha$ , застосовується послідовний підбір у два етапи:

1. Задання інтервалу:  $\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}}$  на основі конструктивних міркувань.
2. Грубий перебір з кроком  $\Delta\alpha_1$ : для кожного  $\alpha_k$  виконати розрахунки при  $D_b = \{9,98; 10,00; 10,02\}$  мм.
3. Відбір припустимих  $\alpha$ : залишити ті, що задовольняють контакт у зоні (В) та (за потреби) умову міцності.
4. Уточнення навколо мінімального припустимого  $\alpha^0$  з меншим кроком  $\Delta\alpha_2$ .
5. Результат:  $\alpha$  - мінімальний кут, що проходить обмеження для всіх контрольних  $D_b$ .

Ціль саме «мінімального кута» узгоджується з тим, що надмірне збільшення  $\alpha$  може погіршувати довговічність через концентрацію напружень зношування.

Контрольний шлях А–В. У вихідній методиці вводиться шлях (АВ) на бічній поверхні пелюстка (А - ближче до «задньої» частини кінцевої зони, В - передній кінець). Спостереження для неоптимізованого випадку: напруження біля А високі, а біля В прямують до нуля, що інтерпретується як контакт «зсунений назад» і відрив переднього кінця .

Нормування напружень і функція контакту. Вводимо параметр  $s \in [0, L_{AB}]$  уздовж шляху та нормовану функцію:

$$q(s) = \sigma_{\text{ср}}(s) / \sigma_{\text{ср, max}} \quad \sigma_{\text{ср, max}} = \max \sigma_{\text{ср}}(s)$$

Порогове правило 10% (критерій «суцільний контакт відрив»). Приймається евристика: якщо локальна «контактна» напруга на шляху (АВ)

стає меншою за 10% від максимуму, це трактують як відрив контактних поверхонь.

Тобто:  $q_{\min}=0,10$  контакт значущий, якщо  $q(s) \geq q_{\min}$ .

А умова відсутності «мертвого» переднього кінця:

$$q(L_{AB}) \geq q_{\min}$$

Ефективну довжину контакту можна записати як:

$$L_m(\alpha, D_b) = \int_0^{L_{AB}} H(q(s) - q_{\min}) ds$$

де  $H$  - функція Хевісайда.

У сучасних FEM-пакетах більш прямим індикатором контакту є контактний тиск/статус контакту; однак у вихідному підході використано саме порогуювання напружень уздовж (AB).

### 3.4 Результат оптимізації та його інтерпретація

Оптимізований кут для S20,  $\varnothing 10$  мм. Після FEM-аналізу та підбору за отримано:

$$\alpha^* \approx 32,092^\circ$$

тобто кут трохи більший за початкові  $32^\circ$ .

Якісна зміна контактної картини при зміні  $D_b$ . Для оптимізованого кута описано таку тенденцію: при  $D_b=9,98$ мм максимальна та мінімальна напруга уздовж (AB) відрізняються на 7,2% (<10%), тому відрив не фіксується; еквівалентна контактна позиція близька до середини (AB),  $L_m$  збільшується; при  $D_b=10,00$ мм та 10,02мм відбувається концентрація в зоні (B), контакт у малому передньому осередку; при цьому зона біля (A) може втрачати контакт. Загальний висновок: зі збільшенням  $D_b$  «ефективна контактна позиція» зміщується від середини (AB) до точки (B), що підвищує точність центрування.

### 3.5 Порівняння точності для точіння та фрезерування

Через різні поздовжні координати інструментів  $L_n$  відрізняється: у прикладі точка точіння розташована приблизно за 1,5 мм від торця цанги, а точка фрезерування — приблизно за 16 мм. Оскільки  $k_\Delta = L_n / (2L_m)$ , то при одному й тому ж  $L_m$  фрезерування є «чутливішим» до зазорів. За табличними даними нахилу (тобто  $L_n / 2L_m$ ) до/після оптимізації:

точіння: 0,2551 → 0,0621 (зменшення на 75,66%);

фрезерування: 0,4971 → 0,2422 (зменшення на 51,28%).

Це є кількісна оцінка зменшення чутливості  $\Delta_j$  до  $(Y + \sum \Delta_j)$  при оптимізації  $\alpha$ .

Оптимізований кут у вихідній постановці визначається як мінімальний, що забезпечує контакт у зоні (B) по всьому допуску  $D_b$ . Водночас підкреслено, що подальше збільшення  $\alpha$  може прискорити зношування через концентрацію напружень у зоні (B) при малих переміщеннях, викликаних зміною діаметра прутка.

Для дисертаційного/статейного розвитку методу доцільно формалізувати це як двокритеріальну постановку, наприклад:

$$\max J_\alpha \text{ та } \min \sigma_{\text{eq,max}} \alpha,$$

або через штраф:

$$\max (J_\alpha - \lambda \sigma_{\text{eq,max}} \alpha)$$

де  $\lambda$  - ваговий коефіцієнт (за вимогами ресурсу/ризиком зношування).

Невизначеність та обмеження

1. Критерій 10% є евристикою (порогування за відносним рівнем напружень уздовж (AB)), а не прямим аналізом контактного тиску/статусу контакту; це може впливати на оцінку  $L_m$  та момент «появи суцільного контакту».

2. Жорстка гільза квазістатика: ігнорування деформацій гільзи та різальних сил обмежує застосовність результатів до етапу «геометрія затиску».

3. Числова похибка FEM (сітка, контактна нелінійність, тертя) потребує

окремого аналізу збіжності; без нього точність  $\alpha^*$  слід трактувати як «у межах прийнятої дискретизації».

### 3.6 Параметри конструкції цангових патронів

Рисунок 3.1 показує поздовжній розріз вузла “самоустановлюювана синхронно-обертова направляюча гільза (guide sleeve) – пружинна цанга – пруткова заготовка” та пояснює, як через тарільчасту пружину й регулювальну гайку компенсується розкид діаметра прутка і прибирається зазор у зоні центрування.

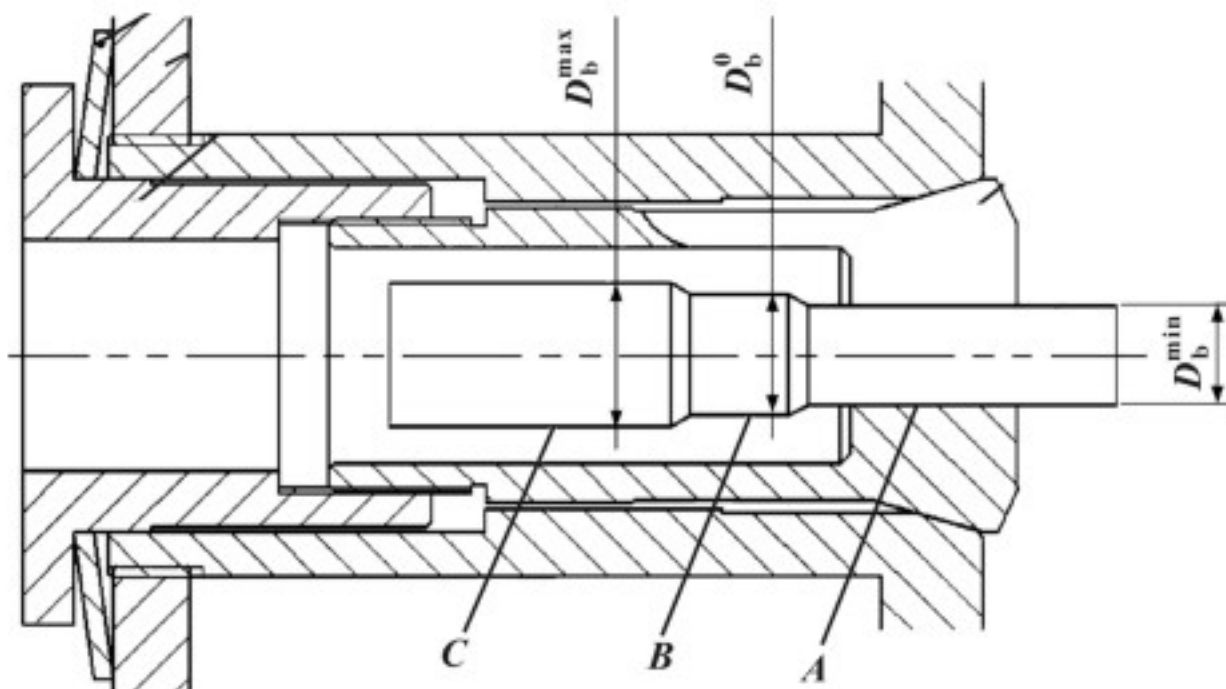


Рисунок 3.1 — Адаптивна синхронна поворотна напрямна конструкція втулки-пружини цангового стрижня

Тарільчаста пружина (disc spring) є джерелом пружного осьового зусилля. Працює як пружний компенсатор, що дозволяє вузлу “підлаштовуватись” під зміну діаметра прутка під час подачі. Опорна гайка тарільчастої пружини служить опорою для тарільчастої пружини та передає її

зусилля на суміжні деталі механізму. Регульовальна (підтискна) гайка використовується для попереднього підтиску: перед обробкою її затягують, щоб трипелюсткова цанга отримала радіальне стискання та затиснула пруток. Пружинна цанга (spring collet) безпосередній елемент центрування та затиску прутка. На рисунку видно її конічну зовнішню поверхню, через яку вона взаємодіє з конічною посадкою в механізмі направляючої гільзи (ця зона контакту далі є ключовою для аналізу точності).

Пруток (bar stock) пруткова заготовка, що подається вздовж осі типові  $\phi 3 \dots \phi 32$  мм, а для шліфованого прутка характерний розкид  $\pm 20 \mu\text{m}$  (це ілюструє сенс позначень  $D_{b\text{max}}$ ,  $D_{b0}$ ,  $D_{b\text{min}}$  на рисунку).

Позначення  $D_{b\text{max}}$ ,  $D_{b0}$ ,  $D_{b\text{min}}$  (що це означає на схемі)  $D_b$  - діаметр прутка (індекс  $b = \text{bar}$ ).  $D_{b\text{max}}$  - максимальний діаметр у межах допуску;  $D_{b0}$  - номінальний;  $D_{b\text{min}}$  - мінімальний. Їх нанесено, щоб показати: вузол має працювати коректно при зміні діаметра у допусковому полі, зберігаючи контакт/центрування без появи “вільного” зазору. Логіка компенсації описана в тексті одразу після рисунка.

Літери А, В, С підписують характерні місця вздовж конічної контактної зони між цангою та конічною посадкою в вузлі гільзи (умовні “варіанти/ділянки” положення еквівалентної зони контакту). Саме зміщення контактної ділянки надалі аналізується як фактор центрувальної точності.

Перед обробкою затягують регульовальну гайку цанга радіально стискається і затискає пруток. Під час подачі, якщо діаметр прутка збільшується, цанга “розкривається” (її деформація зменшується), а тарільчаста пружина додатково стискається (її деформація зростає).

Якщо діаметр прутка зменшується, завдяки пружному відновленню тарільчастої пружини цанга підтягується назад і зазор усувається, зберігаючи притиск/контакт.

Узагальнення: механізм забезпечує усунення зазору в межах допуску прутка і стабільність затиску/центрування, що зменшує ризик погіршення якості обробки через “люфт” у парі пруток–цанга. Рисунок 3.1 є схемою

розрізу для пояснення принципу роботи: він показує логіку взаємодії елементів і позначення допускових діаметрів, але не задає масштабу та не містить повного переліку розмірів/посадок, потрібних для конструкторського відтворення вузла.

Рисунок 3.2 відображає розрахунково-геометричну схему, яка показує, як зазор у направляючому циліндричному поясі та радіальне биття перетворюються на похибку центрування  $\Delta_j$  у заданій точці вимірювання через «плечі»  $L_m$  і  $L_n$ .

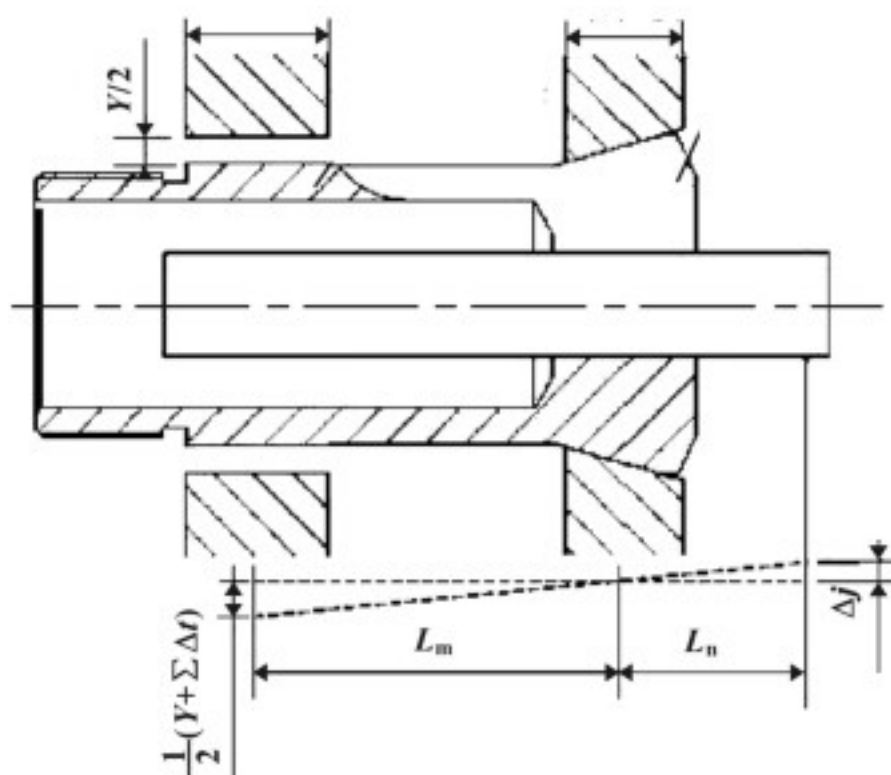


Рисунок 3.2 — Фактори, що впливають на точність центрування пружинного цангового затиску

Обертвий кожух/втулка (rotary sleeve), направляюча циліндрична ділянка. Це лівий (заштрихований) циліндричний пояс, який задає напрямок і має посадку з цангою (саме тут формуються зазор і вплив биття). Обертвий кожух втулка, конічна ділянка отвору. Це правий (заштрихований) конічний отвір, що контактує з конічною поверхнею пелюсток кулачків цанги.

Направляюча пружинна цанга (guide-sleeve spring collet). Показана як тонкостінний елемент між циліндричною та конічною зонами кожуха. Пружинна цанга бокова поверхня кулачка (пелюстки). Стрілка вказує на робочу конічну ділянку пелюстки, яка контактує з конічним отвором втулки. Пруток (bar stock), що проходить крізь цангу та є об'єктом базування затиску. Точка вимірювання. Це праворуч на прутку (поза зоною контакту), де оцінюють поперечне зміщення центра прутка відносно номінальної осі.

Геометричні величини та «позиції», що прямо підписані на рисунку 1. Номінальна вісь показана штрих-пунктирною горизонтальною лінією (база відліку).  $(Y/2)$  (вертикальна стрілка в зоні направляючого циліндричного пояса): половина посадкового зазору ( $Y$ ) між циліндричною ділянкою втулки та цангою (на рисунку показано саме «півзазор», як радіальну складову).

$0,5(Y+\sum\Delta_i)$  (ліва вертикальна розмірна стрілка внизу): узагальнена початкова радіальна невизначеність у направляючій зоні, яка складається із: ( $Y$ ) — зазор спряження в направляючому циліндричному поясі;  $\sum\Delta_i$  - сумарна похибка/складова радіального биття цього пояса.

$L_m$  (нижня горизонтальна розмірна лінія зліва до «межі»): відстань від центра зони контакту до середини направляючої циліндричної ділянки (тобто «коротке плече», через яке зазор/биття впливають на нахил/зсув).

$L_n$  (нижня горизонтальна розмірна лінія справа): відстань від центра зони контакту до точки вимірювання. Це «довге плече», на якому проявляється похибка центрування.

$\Delta_j$  (права вертикальна стрілка): зміщення центра прутка в точці вимірювання відносно номінальної осі (похибка центрування в цій точці).

Похила штрихова лінія внизу (від лівої зони до правого краю) - ілюстрація того, що малий радіальний «вхідний» зсув у направляючій зоні переходить у більший/менший зсув у віддаленій точці (через відношення плечей).

У направляючому циліндричному поясі існує радіальна свобода через зазор ( $Y$ ) і похибки форми/биття  $\sum\Delta_i$ . Це задає можливий радіальний зсув порядку

$0,5(Y+\sum\Delta_i)$ . Далі система передає цей зсув до точки вимірювання як геометричне підсилення/ослаблення, пропорційне відношенню плечей  $L_n/L_m$ . Це і зафіксовано формулою моделі на сторінці з рисунком 2:

$$\Delta_j=0,5 (Y+\sum\Delta_i) L_n /L_m$$

Інтерпретація за формулою:  $\Delta_j$  зростає при збільшенні  $(Y)$ ,  $\sum\Delta_i$  або  $L_n$  і зменшується при збільшенні  $L_m$ .

Рисунок 3.3 демонструє спрощену конструктивну схему пружинної цанги з нанесеними ключовими геометричними параметрами, які далі використовуються в -моделі; підкреслено, що пружна деформація зосереджена переважно в тонкостінній ділянці пелюстки (каржі).

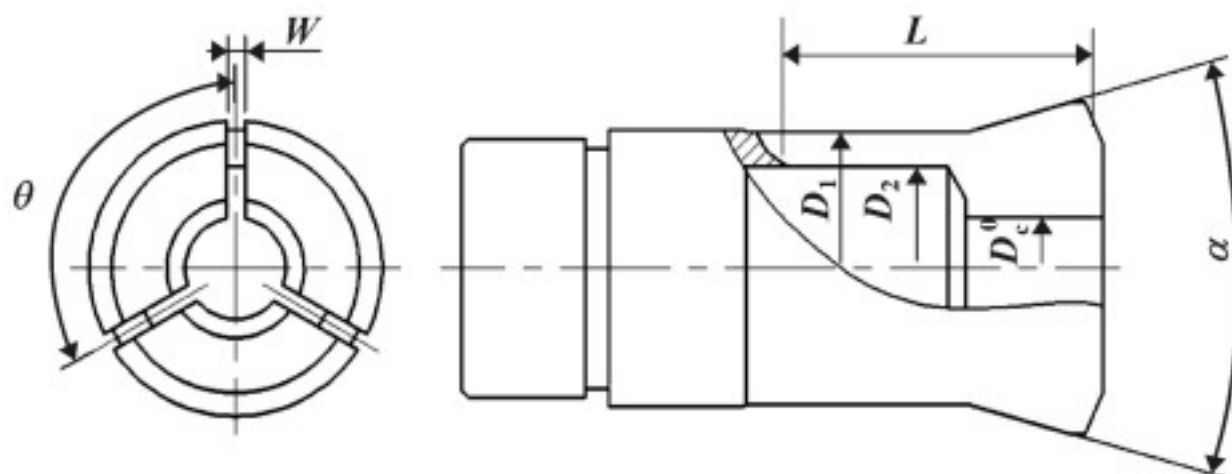


Рисунок 3.3 — Принципова схема конструкції пружинного цангового кріплення

На рисунку наведено (конструктивну схему) пружинної цанги. Цанга має трилопатеву симетричну структуру (три пелюстки “каржі”).

Для прикладу в роботі обрана цанга для обробки прутка ( $\varphi 10.0$ ) мм, матеріал 65Mn ; саме для неї наведена схема й параметри.

Ліворуч показано торцевий вигляд цанги з трьома рівномірно розташованими осьовими прорізами (слотами) біля “переднього” (конічного) кінця. Це ілюструє крок (кут) розміщення прорізів та їхню ширину. Праворуч показано поздовжній вигляд/переріз пелюстки: видно конічну робочу

поверхню, тонкостінну (пружну) ділянку та розмірні параметри діаметрів і довжини. Про те, що пружна деформація головно в тонкостінній зоні, прямо зазначено в тексті.

Під рисунком 3 однозначні означення:

$\theta$  - окружний кут між будь-якими двома з трьох рівномірно розміщених осьових прорізів біля конічного кінця цанги.

W - ширина осьового прорізу .

L - довжина пелюстки (каржа) цанги .

$\alpha$  кут конуса конічної поверхні цанги .

$D_1$  - зовнішній діаметр тонкостінної (пружної) ділянки пелюстки .

$D_2$  - внутрішній діаметр тонкостінної (пружної) ділянки пелюстки .

$D_0$  - внутрішній діаметр затискної ділянки в недеформованому стані (тобто базовий діаметр отвору цанги до стискання).

Числові значення параметрів (пов'язані з рисунком 3.3)

$\theta=120^\circ$ ,  $W=2\text{мм}$ ,  $L = 38\text{мм}$ ,  $\alpha= 32$ ,  $D_1 = 29,5 \text{ мм}$ ,  $D_2 = 22 \text{ мм}$ ,  $D_{0c} = 10,1 \text{ мм}$ .

Рисунок 3 схема (не кресленик): фіксує структуру та параметри, але не містить повного набору розмірів посадок для виготовлення і не гарантує масштабність.

На рис. 3.4 показано введення контрольної траєкторії АВ уздовж бічної кромки конічної поверхні пелюстки цанги: точка А приймається початком траєкторії, точка В - її кінцем; ця траєкторія використовується як “лінійний датчик” для подальшого зчитування напружено-деформованого стану в зоні контакту.

У рамках скінченно-елементного аналізу контактної взаємодії «пружинна цанга – роторна (обертаюча) втулка гільза» побудовано спрощену FEM-модель: з огляду на трьохпелюсткову симетрію цанги аналізували 1/3 геометрії, деформацією ротора втулки нехтували, а пружну роботу цанги зводили до згинної пружної деформації консольної (пелюсткової) частини. Граничні умови задавали як повне закріплення ротора/втулки та прикладання до заднього торця цанги осьового переміщення (displacement load), що

моделює затягування вузла і формування контактної зони в парі конічних поверхонь. Важливо, що аналіз траєкторії АВ безпосередньо пов'язується з моделлю центрувальної похибки: зі збільшенням параметра  $L_m$  (відстані від центра контактної зони до середини напрямної ділянки) центрувальна точність зростає; отже, переміщення контактної зони у напрямку до В розглядається авторами як бажаний напрям оптимізації, оскільки зменшується відношення  $L_n/L_m$  та відповідно знижується  $\Delta j$ .

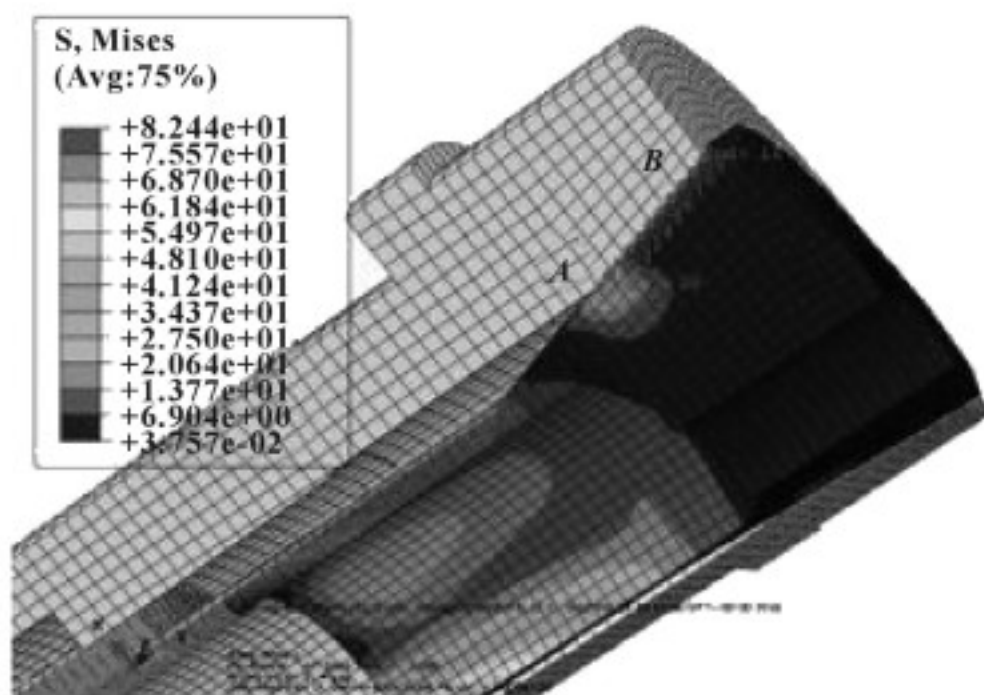


Рисунок 3.4 — Бічна поверхня АВ та розподіл напружень у ній

Рисунок 3.5 схематично пояснює різниці поздовжнього (осьового) розташування точок різання для токарного (точіння) та фрезерного інструментів відносно торця пружинної цанги, що прямо впливає на центрування: чим далі інструмент від торця цанги, тим гірша центрувальна точність у цій точці. Рисунок є пояснювальним, тому геометрія подана без масштабу. Позиції 1–8 (за легендою на рисунку)

1 - фрезерний різцетримач тримач фрези Опорний елемент, який установлює та фіксує фрезерний інструмент (позиція 4) у робочій зоні.

2 - різцетримач токарного різця Опорний елемент для установлення токарного різця (позиція 3).

3 - токарний різець інструмент для операцій точіння; на схемі його точка різання розташована дуже близько до торця цанги (позиція 6). У тексті до рисунка вказано порядок величини:  $\approx 1,5$  мм від торця цанги.

4 – фреза інструмент для фрезерних операцій; через компоновку вузлів на Swiss-type верстаті точка фрезерування віднесена далі від торця цанги (позиція 6). У тексті вказано порядок величини:  $\approx 16$  мм від торця цанги.

5 – пруток пруткова заготовка оброблювана заготовка, що проходить через вузол направляючої та затискається й центрується цангою (позиція 7). На схемі це довгий циліндричний елемент уздовж осі.

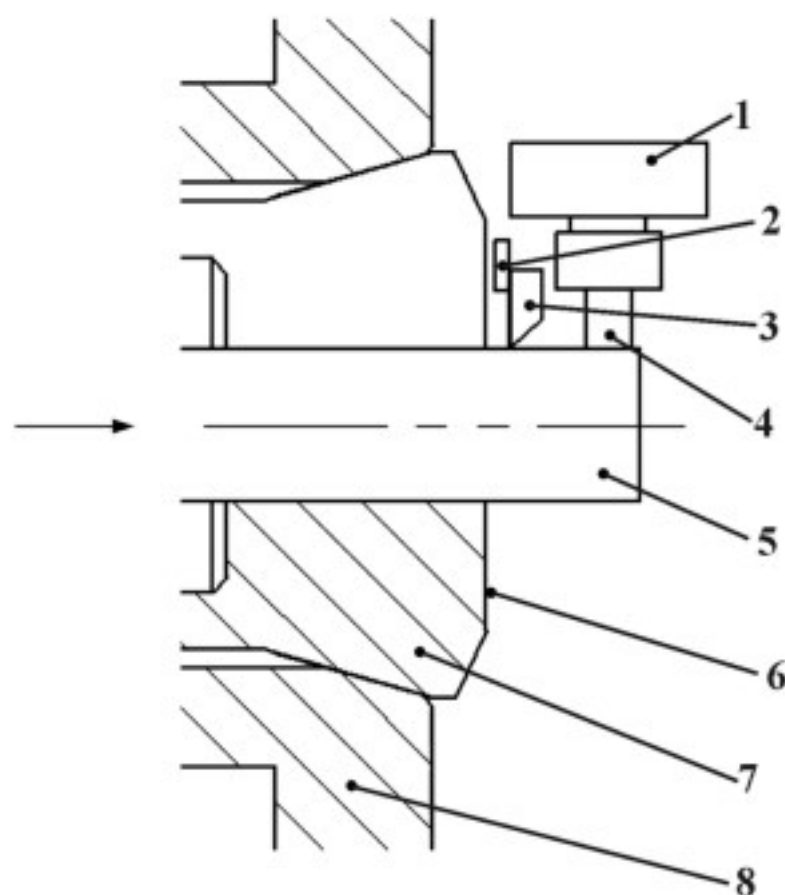


Рисунок 3.5 — Поздовжнє положення ріжучих інструментів на верстатах для поздовжнього різання

6 - торець пружинної цанги Опорна/відлікова торцева площина, від якої на рисунку і в поясненні порівнюються поздовжні відстані до точок різання для 3 (точіння) і 4 (фрезерування). Саме віддалення точки різання від цього торця використано авторами для пояснення відмінностей центрування

7 - пружинна цанга пружний затискний елемент (типово “spring collet”), який стискається радіально, утримує та центрує пруток (позиція 5) у направляючому вузлі.

8 - обертовий кожух/втулка, “rotary sleeve” Елемент вузла направляючої, що в цій конструктивній ідеї працює як обертовий “супровідний” елемент навколо зони цанги , пов’язаний з її роботою та умовами контакту (у статті саме взаємодія “цанга–обертовий елемент” розглядається як суттєва для точності).

Рисунок спеціально показує, що точіння відбувається ближче до торця цанги ( $\approx 1,5$  мм), а фрезерування — суттєво далі ( $\approx 16$  мм), і тому в авторській моделі центрувальна похибка чутливість у точці фрезерування гірша , бо інструмент віддаленіший від базового вузла центрування (цанги).

## РОЗДІЛ 4

### ФАКТОРИ ФОРМУВАННЯ ТОЧНОСТІ ФІКСАЦІЇ ЗАГОТОВКИ В ЦАНГОВОМУ ЗАТИСКНОМУ ПАТРОНІ

#### 4.1 Постановка та ключові змінні точності фіксації

Четвертий розділ побудований навколо формалізованого ланцюга «контактний тиск  $p(z, \theta)$  - деформація овалізація - еквівалентний ексцентриситет - похибка центрування в робочій точці», доповнивши його експериментальною верифікацією (тензодатчиковий детектор) та моделлю чутливості похибки до зазорів і биття через відношення  $L_n/L_m$ .

Точність фіксації заготовки в цанговому затискному патроні розглядається як здатність вузла забезпечувати стає положення осі заготовки відносно базової осі шпинделя/патрона під дією затискних і технологічних навантажень. Первинним «носієм» якості затиску є поле контактного тиску між цангою та циліндричною поверхнею заготовки. Для закритих контактів (closed type joint) експериментальна ідентифікація тиску є ускладненою: класичні методи мають обмеження або не дозволяють отримати розподіл тиску в реальному режимі навантаження.

Введемо основні позначення (SI):

$z$  - осьова координата вздовж контактної зони, м;  $\theta$  — кутова координата, рад;

$p(z, \theta)$  - локальний контактний тиск, Па;

$A$  - площа контакту, м<sup>2</sup>;  $p$  - середній тиск, Па;

$F_N$  — рівнодійна нормальна сила затиску, Н;

$Q$  - момент затягування (керуюча дія), Н·м;

$\mu$  - коефіцієнт тертя в контакті;

$\delta_r(z, \theta)$  - радіальна деформація/зміна форми посадкової поверхні, м;

$e_x, e_y$  - еквівалентний ексцентриситет осі заготовки, м;

$\Delta_j$  - похибка центрування (зміщення центра) в робочій/контрольній точці, м.

## 4.2 Формалізація впливу поля тиску на силові та геометричні похибки

Середній тиск і нормальна сила затиску

Середній тиск визначимо як

$$P=1/A \left( \iint_{\Delta} p(z,\theta) dA \right), F_N = \iint_{\Delta} p(z,\theta) dA = pA$$

Ці співвідношення дозволяють зв'язати експериментально виміряне поле  $p(z,\theta)$  з інтегральною здатністю затиску сприймати навантаження без зсуву/провертання.

Ексцентриситет як перший момент тиску (причина биття/зміщення осі)

Нерівномірність тиску по колу породжує відмінні перші моменти навантаження відносно геометричного центра. Ексцентриситет можна формально оцінити як

$$e_x = 1/F_N \left( \iint_{\Delta} p(z,\theta) r(\theta) \cos\theta dA \right), e_y = 1/F_N \left( \iint_{\Delta} p(z,\theta) r(\theta) \sin\theta dA \right)$$

За  $e^2 = e_x^2 + e_y^2$ , одержуємо міру зміщення рівнодійної затиску, що в практиці проявляється як зростання похибок базування та напрямної залежності жорсткості.

Обґрунтування спеціалізованого вимірювання. Для closed type joint (включно з цанговими вузлами) зазначено відсутність додатних технік прямого вимірювання тиску; зокрема плівкові методи обмежені реєстрацією максимуму та не відтворюють розподіл при зміні навантаження, а також проблемні щодо встановлення в малих зазорах.

Принцип тензодатчикового детектора та калібрування. Для даного напрямку дослідження доцільно використовувати детектор на базі тензорезисторів: циліндричний елемент ( $\varnothing 41.990\text{мм}$ ), ( $L=95\text{мм}$ ), із системою канавок, що формують «зубці» (локальних елементів контакту); калібрування виконується прикладанням нормальної сили до зубця через датчик навантаження.

Залежність «нормальна сила - деформація/сигнал» апроксимується прямою лінією, що підтверджує робочу лінеаризацію каналу вимірювання (за наявності малого гістерезису навантаження–розвантаження).

## Повторюваність та джерела розкиду

Очікувано, що варіації вимірів істотно залежать від способу затягування зовнішнього елемента; у серії 30 вимірювань відхилення вкладалися в 6%, тому застосовано усереднення трьох вимірювань. Це безпосередньо формалізує фактор методу затягування як складову невизначеності у задачі точності фіксації.

### 4.3 Конструктивні та контактні фактори, що визначають точність фіксації

Вплив конструктивної піддатливості (пази/отвори) на деформативність і тиск. Описані виконання з локальними ослабленнями (глибокі отвори, прямокутні канавки), що підвищують деформативність тонкостінної частини і змінюють досяжний рівень тиску.

Експериментально в осьовому напрямку: для СТ1 характерні три піки тиску з максимумом близько 40МПа, тоді як для варіантів СТ3 максимальні значення перевищують 150МПа (СТ3В - найвищий максимум, СТ3А - найширша зона підвищеного тиску). Коловий розподіл тиску та точки деформації як причина овалізації. По колу тиск розподіляється регулярно; мінімум припадає на зони отворів канавок, а максимум між ними. За профілями круглості встановлено, що отвори канавки працюють як точки, між якими деформація внутрішньої поверхні зростає; таким чином, періодична овалізація є очікуваним наслідком конструктивних ослаблень.

Формально це означає, що  $p(z, \theta)$  має виражену гармонічну складову за  $\theta$ , яка зумовлює ненульові перші моменти  $i$ , відповідно,  $e$  не дорівнює 0. Кореляція «розподіл тиску -- деформація отвору» як механізм похибки. Вимірювання внутрішнього діаметра вільного та затягнутого станів показали: форма деформації відповідає формі розподілу тиску, а більша деформація внутрішньої поверхні відповідає вищому тиску затиску. Це є прямим доказом причинного зв'язку - контактний тиск - геометричне відхилення базової поверхні - похибка фіксації.

Для контрольної оцінки середнього тиску застосовано залежність

$$p \approx P = 2Q/\mu dA$$

де  $Q$  - максимальний момент затягування,  $d$  - діаметр затисненого циліндричного тіла,  $A$  - площа контакту, ( $\mu = 0.4$ ). Показано узгодження ( $P$ ), обчисленого за моментом, із ( $P$ ), отриманим інтегруванням виміряного розподілу тиску, що підтверджує придатність детектора для задач аналізу контактного тиску.

Для вузла типу «напрямна/опорна ділянка – цанга – пруток» (аналогічна логіка застосовна й до цангового патрона) використано модель:

$$\Delta_j = 0,5(Y + \sum \Delta_i) L_n/L_m$$

де  $\Delta_j$  - зміщення центра в точці контролю/обробки; ( $Y$ ) - зазор спряження;  $\sum \Delta_i$  - сумарна радіальна похибка (зокрема складова биття);  $L_n$  - відстань від центра контактної зони до робочої точки;  $L_m$  - відстань від центра контактної зони до «середини» опорної ділянки. З цієї формули випливають два принципові висновки для точності фіксації: 1. Лінійність за похибками спряження:  $\Delta_j \propto (Y + \sum \Delta_i)$ . 2. Геометричне підсилення похибки: збільшення відношення  $L_n/L_m$  підвищує чутливість центрування.

Експериментально-конструкторська інтерпретація підтверджується порівнянням різних положень інструмента: при віддаленні робочої точки від торця цанги (близько 1.5 мм для точіння та 16 мм для фрезерування) точність у цій точці погіршується саме через зростання ефективного  $L_n$ . Кількісна оцінка чутливості через нахил (який інтерпретується як  $L_n/2L_m$  показала: після оптимізації нахил зменшився з 0,2551 до 0,0621 для точки точіння та з 0,4971 до 0,2422 для точки фрезерування; відповідно, зниження чутливості становить 75,66% та 51,28%.

#### 4.4 Окремі параметри контактних зон та елементів конструкції

Показано, що зміщення еквівалентної контактної позиції ближче до переднього краю підвищує точність (зростає  $L_m$  або зменшується ефективне

відношення  $L_n/L_m$ , однак може формувати концентрацію напружень у локальній області контакту. Наголошено, що зі збільшенням оптимізованого кута конуса зростає ризик прискореного зношування через локальне напруження та мікропереміщення контакту, тобто виникає компроміс «точність–довговічність» .

Вплив розкиду сил тертя у контакті пелюсток цанги та шпинделя описується як лінійна (мала) пружна модель: суперпозиція моментів/деформацій коректна за малих переміщень і без урахування нелінійностей контакту (локальної пластики, зношування, температури).

Неоднорідність тертя та неоднорідність жорсткості пелюстків цанги (рис. 4.1) породжують асиметрію сил/деформацій, що приводить до повороту (перекосу) осі заготовки  $i$ , як наслідок, до погіршення точності фіксації. За умови нерівності коефіцієнтів тертя  $f_i$  або кутів тертя ( $\varphi_i$ ) при однаковій жорсткості пелюстків  $C_1=C_2=\dots=C_k$ , виникає різниця між силами тертя ( $F_1, F_2, \dots, F_k$ ), що створює нерівномірні моменти відносно характерної точки (O) і викликає кутове відхилення (поворот) осі деталі .

Математична форма. Для  $(i)$ -ї губки (пелюстка) кутовий внесок від сили тертя подано у вигляді лінійної (пружної) залежності «момент - кут».

Умови застосування розрахунків: розкид тертя при симетричній пружній основі дає асиметрію моментів і кутовий перекид. Позначення

$k$  - кількість пелюстків (губок) цанги;

$S_\Sigma$  - сумарна осьова сила натягу затиску (за схемою);

$\alpha$  - кут конічної поверхні (за схемою);

$R$  - ефективне плече (радіус) прикладання сил тертя;

$f_i$  - коефіцієнт тертя в  $(i)$ -й парі контакту;  $\varphi_i$  - відповідний кут тертя;

$M_{Fi}$  - момент від сили тертя ( $F_i$ );

$C_n$  - крутильна (кутова) жорсткість системи відносно точки O у прийнятій розрахунковій моделі.

$$g_{f_1} = \frac{M_{F_1}}{C_n} = \frac{S_\Sigma \cdot f_1 \cdot R}{C_n [k \cdot \sin \alpha + \cos \alpha (f_1 + f_2 + f_3 \dots + f_k)],}$$

$$g_{f_2} = \frac{M_{F_2}}{C_n} = \frac{S_\Sigma \cdot f_2 \cdot R}{C_n [k \cdot \sin \alpha + \cos \alpha (f_1 + f_2 + f_3 \dots + f_k)],}$$

$$g_{f_3} = \frac{M_{F_3}}{C_n} = \frac{S_\Sigma \cdot f_3 \cdot R}{C_n [k \cdot \sin \alpha + \cos \alpha (f_1 + f_2 + f_3 \dots + f_k)],}$$

$$g_{f_k} = \frac{M_{F_k}}{C_n} = \frac{S_\Sigma \cdot f_k \cdot R}{C_n [k \cdot \sin \alpha + \cos \alpha (f_1 + f_2 + f_3 \dots + f_k)]}$$

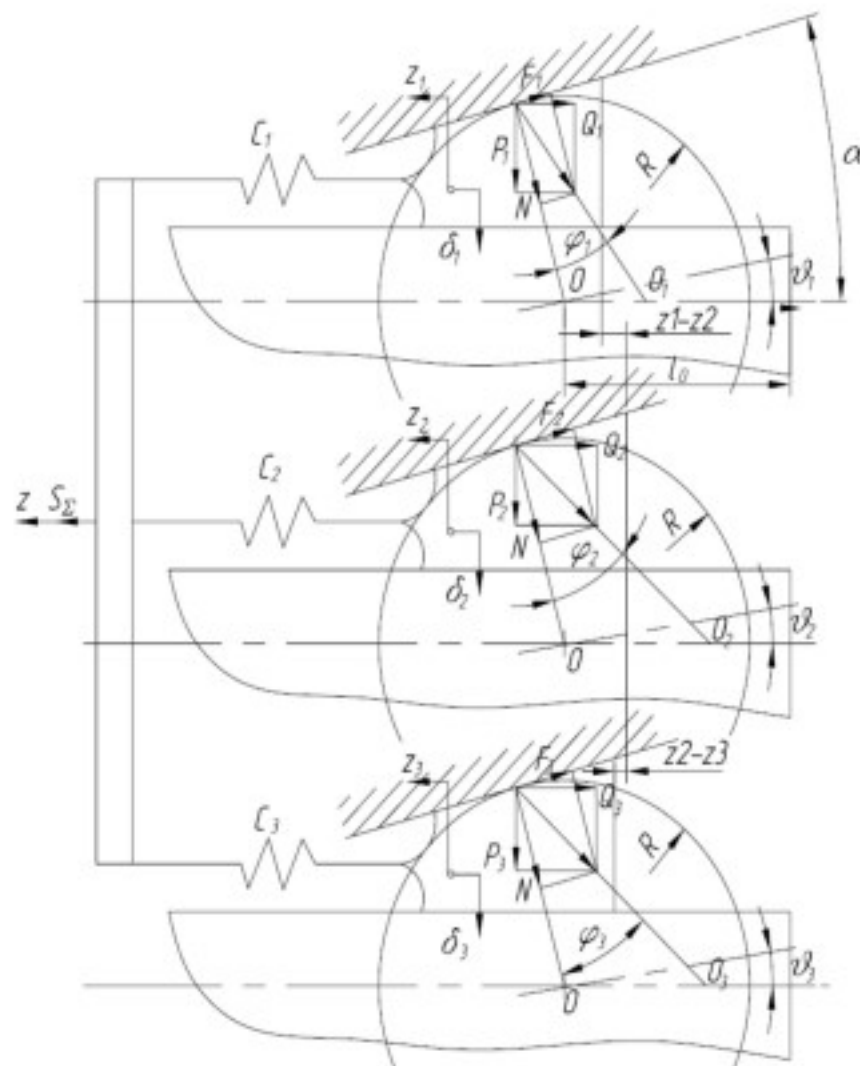


Рисунок 4.1 Ефект зміщення при розкладі сил тертя у контакті пелюсток цанги та шпинделя

Вплив розкиду жорсткості пелюстків цанги (рис. 4.2). За неоднакової жорсткості пелюстків  $C_1 \neq C_2 \neq C_3 \neq C_k$ , та при однаковій осьовій силі натягу  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_k$  переміщення (зсув) губок цанги стають різними, тобто контактна зона формується асиметрично. Це проявляється як нерівномірні радіальні деформації  $\delta_{Ci}$  і, відповідно, як перекіс осі заготовки. Тобто при однаковому натягу неоднакова податливість пелюстків породжує різні деформації та асиметрію сил/контакту.

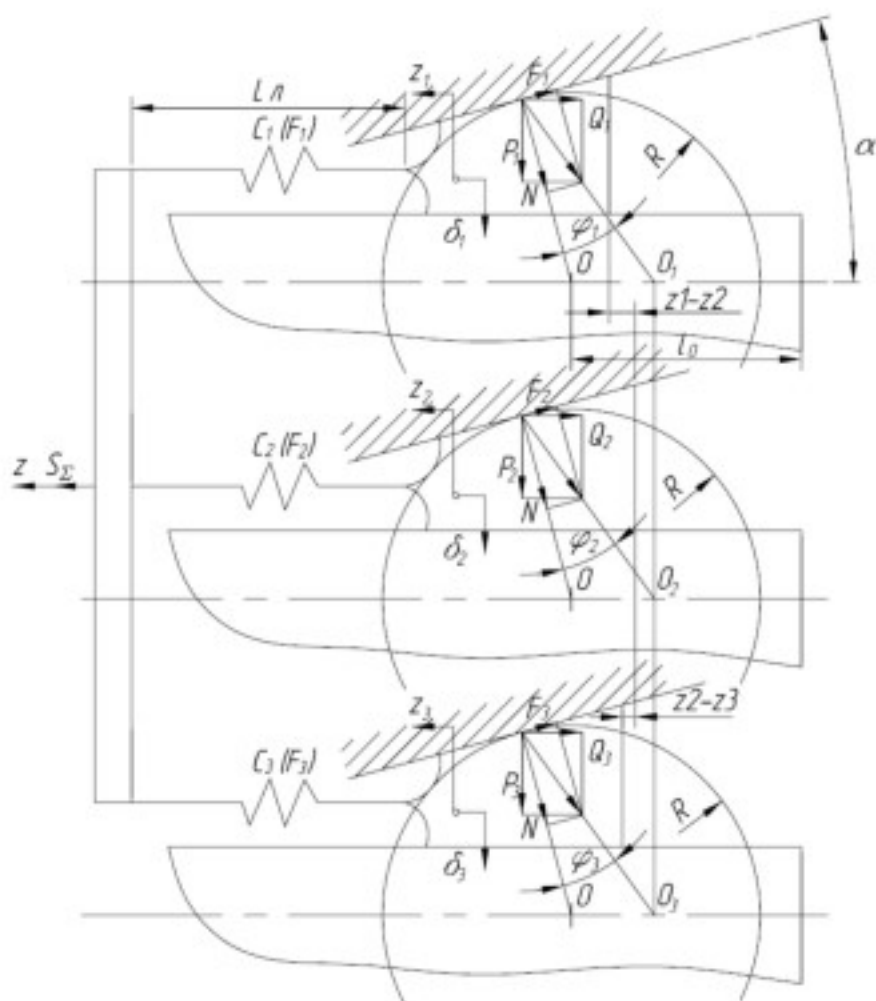


Рисунок 4.2 Ефект зміщення при розкиді жорсткості пелюсток цанги

## ВИСНОВКИ

1. Побудовано кінематико-аналітичну модель центральної точності вузла «пружинна цанга з прутком», у якій радіальна похибка в точці різання описується співвідношенням

$$\Delta_j = 0,5(Y + \sum \Delta_i) L_n / L_m$$

є мірою чутливості системи до сумарного зазору й похибок установки, а отже, головним узагальненим параметром, який визначає центральну точність у зоні різання.

2. На основі моделювання встановлено, що реальна ефективна довжина контактної зони  $L_m$  пелюстків пружинної цанги S20 для прутка  $\varnothing 10$  мм істотно залежить від кінцевого кута  $\alpha$  і положення тонкостінної деформованої ділянки. Для малих  $\alpha$  контакт концентрується в середній частині пелюстка, передній кінець працює в режимі часткового або відсутнього контакту, що приводить до малого  $L_m$  і підвищеної чутливості  $k_\Delta$ .

3. Ітераційною зміною кінцевого кута в тривимірній моделі (з урахуванням контакту з прутком у діапазоні діаметрів 9,98–10,02 мм) визначено оптимальне мінімальне значення  $\alpha^* \approx 32,092^\circ$  для цанги S20,  $\varnothing 10$  мм. За цього кута забезпечується суцільний контакт уздовж усього шляху А–В, включно з переднім кінцем пелюстка, для всіх значень діаметра в полі допуску, при цьому еквівалентні напруження не перевищують допустимого рівня для сталі 65Мп.

4. Показано, що оптимізація кінцевого кута приводить до суттєвого збільшення ефективної довжини контакту  $L_m$  та зменшення коефіцієнта чутливості  $k_\Delta$ . Для точки точіння (розташованої приблизно на 1,5 мм від торця цанги) нахил залежності  $\Delta_j$  від сумарного зазору зменшується з 0,2551 до 0,0621, тобто приблизно на 75,66 %. Це відповідає збільшенню  $L_m$  приблизно в 4 рази й зниженню центральної похибки при зазорі 10 мкм орієнтовно з 2,6 до 0,6 мкм.

5. Для точки фрезерування (розташованої приблизно на 16 мм від торця цанги) ефект оптимізації менш виражений, але все ще істотний: нахил залежності  $\Delta_j$  від зазору зменшується з 0,4971 до 0,2422 ( $\approx 51,28\%$ ), що відповідає збільшенню ефективної довжини контакту приблизно вдвічі та зниженню похибки при 10 мкм сумарного зазору з  $\approx 5$  до  $\approx 2,4$  мкм. Разом з тим, через значно більшу відстань  $L_n$  фрезерувальна позиція залишається більш чутливою до зазорів порівняно з точильною.

6. Отримані результати підтверджують ключову роль положення й довжини контактної зони пелюстків відносно конічної поверхні в механізмі формування центрувальної точності. Оптимізація геометрії конуса, спрямована на максимізацію  $L_m$  і зміщення контактної зони до переднього кінця пелюстка, виявляється більш ефективним способом підвищення точності, ніж суто технологічне зменшення зазорів  $Y + \sum \Delta_i$ .

7. З технологічної точки зору, для адаптивних направляючих гільз верстатів із цангами типу S20 для прутка  $\varnothing 10$  мм доцільно застосовувати конічний кут, близький до  $\alpha^* \approx 32,092^\circ$ , який забезпечує суттєве зниження чутливості до зазорів як у зоні точіння, так і в зоні фрезерування. При проектуванні й виготовленні пружинних цанг слід орієнтуватися на критерій максимізації  $L_m$  при обмеженні контактних напружень і врахуванні ресурсу цанги.

8. Водночас оптимізація конічного кута супроводжується зростанням локальної концентрації напружень і потенційної чутливості до зношування в передній частині пелюстка. Це вимагає додаткового аналізу довговічності, вибору матеріалу, термообробки та шорсткості конічних поверхонь. Перспективними напрямками подальших досліджень є поширення запропонованого підходу на інші типорозміри цанг і діаметри прутка, урахування деформації самої направляючої гільзи, повноцінне 3D-моделювання контактної взаємодії та зношування в зоні контакту «пелюстки конусна поверхня та пруток».

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Li Y. H., Yang Q. S., Huang J., Chen L. M. Optimization of Centering Accuracy of Spring Collet in Guide Sleeve Mechanism of Swiss Type Machine Tool by FEM // *Machine Tool & Hydraulics*. – 2018. – Vol. 46, No. 4. – P. 37–40. – DOI: 10.3969/j.issn.1001-3881.2018.04.010.
2. Zhang B. Analysis of Accuracy of Spring Collets // *Mechanical Technologist*. – 1983. – No. 11. – P. 33–35. .
3. Zhang G. Clamping Force Calculation Method for Spring Collets in Precision Machine Tool Spindles // *Machine Tool & Hydraulics*. – 2014. – Vol. 42, No. 8. – P. 44–46. –.
4. Chen L., Tan Y., Huang J. FEM-based Optimal Design of Adaptive Synchronous Rotary Guide Sleeve Mechanism for Swiss-type Machine Tools // *Journal of Light Industry*. – 2016. – Vol. 31, No. 3. – P. 57–62.
5. Soriano-Heras E., et al. Mathematical Analysis of the Process Forces Effect on the Contact Elements of the Collet Chuck Holder // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9, No. 5. – Article 492. – DOI: 10.3390/math9050492.
6. Soriano E., Rubio H., García-Prada J.C. Analysis of the Clamping Mechanisms of Collet-Chucks Holders for Turning // *New Trends in Mechanism and Machine Science*. – Dordrecht: Springer, 2013. – Vol. 7. – P. 391–398. – DOI: 10.1007/978-94-007-4902-3\_42.
7. Soriano E., Rubio H., García-Prada J.C. Models for Determining the Static Stiffness of Collet Sleeves // *New Advances in Mechanisms, Transmissions and Applications*. – Dordrecht: Springer, 2014. – (Mechanisms and Machine Science, Vol. 17). – P. 375–383. – DOI: 10.1007/978-94-007-7485-8\_46.
8. Omar M.H., Allias M.F., Radzi R., Abdul Halim M.N. Static and Dynamic Analyses of Spindle Collet Made of Different Materials Using Finite Element Modeling // *JMPM (Jurnal Material dan Proses Manufaktur)*. – 2024. – Vol. 8, No. 1. – P. 1–9. – DOI: 10.18196/jmpm.v8i1.20467.

9. Ismartaya K., Wijaya T.G., Purnomo R., Karyadi G.B. Design and Manufacture of Automatic Collet Clamping Systems for Sprocket-CAM Handling on CNC Lathes // SINTEK Jurnal: Jurnal Ilmiah Teknik Mesin. – 2024. – Vol. 18, No. 2. – P. 99–112. – DOI: 10.24853/sintek.18.2.99-112.

10. Prydalnyi B.I., Sulym H.T. Mathematical Model of the Tensioning in the Collet Clamping Mechanism with the Rotary Movable Input Link on Spindle Units // Journal of Engineering Sciences. – 2021. – Vol. 8, No. 1. – P. E23–E28. – DOI: 10.21272/jes.2021.8(1).e4.

11. Tsutsumi M. Chucking Force Distribution of Collet Chuck Holders for Machining Centers // Journal of Mechanical Working Technology. – 1989. – Vol. 20. – P. 491–501. – DOI: 10.1016/0378-3804(89)90056-9.

12. Song Q. H., Liu Z. Q., Wan Y., Ai X. Instability of Internal Damping due to Collet Chuck Holder for Rotating Spindle–Holder–Tool System // Mechanism and Machine Theory. – 2016. – Vol. 101. – P. 95–115. – DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.03.007.

13. Rahman M., Tsutsumi M. Effect of Spindle Speed on Clamping Force in Turning // Journal of Materials Processing Technology. – 1993. – Vol. 38, Issues 1–2. – P. 407–415. – DOI: 10.1016/0924-0136(93)90213-P.

14. Rahman M. Factors Affecting the Machining Accuracy of a Chucked Workpiece // Precision Engineering. – 1986. – Vol. 8, No. 1. – P. 34–40. – DOI: 10.1016/0141-6359(86)90008-5.

15. Alquraan T., Kuznetsov Yu., Tsvyd T. High-speed Clamping Mechanism of the CNC Lathe with Compensation of Centrifugal Forces // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 150. – P. 689–695. – DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.081.

16. Prydalnyi B.I., Sulym H.T. Mathematical model of the tensioning in the collet clamping mechanism with the rotary movable input link on spindle units. Jour. of Engineering Sciences, Vol.8(1), pp.E23–E28, doi: 10.21272/jes.2021.8(1).e4

17. Prydalnyi B.I. Mechatronic clamping mechanism with electro-hydraulic actuator for machine spindle units. Perspective technologies and devices, №18. Lutsk: LNTU. pp.124-128. DOI 10.36910/6775-2313-5352-2021-18-18

18. Prydalnyi B. Mechatronic device for two-stage clamping of cylindrical objects in machine tool spindles. Journal of Mechanical Engineering and Transport, vol.13, no.1, pp.118-123. <https://doi.org/10.31649/2413-4503-2021-13-1-118-123>

19. Prydalnyi B., Kuznetsov Y. Synthesis of structures of spindle units with electromechanical actuators of clamping mechanisms as complex combined axisym-metric system. Jour. of the Techn. University of Gabrovo (Bulgaria), Vol.60, p.66-69

20. Kuznetsov Y, Prydalnyi B., Xingmin Gao. Section of the monograph Prospective Directions of Scientific and Practical Activity. International science project (ISP). Publ. «GS Publishing Services» Sherman Oaks, California (USA). 4.5 Author's sheets. <https://doi.org/10.51587/9798-9866-95921-2023-011-239-332>

21. Кузнецов Ю.М., Придальний Б.І., Гао Сінмін. Технологічне оснащення фрезерних верстатів: проектування, теорія, практика (Technological Equipment of Milling Machines: Design, Theory and Practice). Монографія (Monograph). ISBN 978-966-940-449-7. Луцьк: Вежа-Друк, 2023. – 292 с.