Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет

ІДЕНТИФІКАЦІЯ І МОДЕЛЮВАННЯ ОБ’ЄКТІВ ТА СИСТЕМ БЕЗПІЛОТНИХ АПАРАТІВ

Методичні вказівки до лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами»
галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації
(G Інженерія, виробництво та будівництво)
спеціальності 174 Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка
(G7 Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка)
денної та заочної форм навчання

Луцьк 2025

УДК 519.85; 517.8
І-59

Рекомендовано до видання вченою радою факультету КІТ ЛНТУ, протокол № _ від «__» __________ 2025 року

Голова вченої ради факультету КІТ ________________ Інна КОНДІУС

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки _____________ Наталія ПОЛІЩУК

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри автоматизації та комп’ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ, протокол № _ від «__» ______ 2025 року.

Завідувач кафедри АКІТ	_______________	Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп’ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ
Укладач:	_______________	Лариса ГУМЕНЮК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автоматизації та комп’ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ
Рецензент:	_______________	Людмила САМЧУК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки та мехатроніки ЛНТУ
Відповідальний за випуск:	_______________	Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп’ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ

І-59 **Ідентифікація і моделювання об’єктів та систем безпілотних апаратів**: Методичні вказівки до лабораторних робіт для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 24 с.

У методичних вказівках викладено методику перевірки дослідів на відтворюваність, вивчення регресійних та кореляційних залежностей, методику побудови математичних моделей на основі повного факторного експерименту. Наведено методичні рекомендації до виконання робіт та приклад побудови математичної моделі.

Методичні вказівки укладено в результаті опрацювання опублікованих джерел.

ЗМІСТ

Лабораторна робота № 1

ВИЗНАЧЕННЯ ВІДТВОРЮВАНОСТІ ДОСЛІДІВ

Мета: Ознайомитись з методикою перевірки дослідів на відтворюваність.

Теоретичні відомості

При побудові математичних моделей справедливість тверджень перевіряється на основі відповідних експериментів, умови яких контролюються. Але перш ніж робити висновки по результатах експериментів, необхідно пересвідчитись в тому, що виконані досліди відтворювані, тобто, що результати дослідів, виконаних в однакових умовах, близькі. З цією метою використовують критерій Кохрена.

Для визначення відтворюваності проводять кілька серій паралельних дослідів. Умови реалізації дослідів кожної серії однакові, а різних серій – відрізняються одні від одних. Проте всі досліди проводять в області зміни впливаючих факторів.

Наприклад, якщо є два вхідні фактори – незалежні змінні X_1 та X_2 – то перша група (серія) дослідів проводиться при фіксованому X_1 зі зміною X_2, а друга група (серія) дослідів – при фіксованому X_2 зі зміною X_1. Кількість дослідів у кожній серії повинна бути однакова.

Результати цих дослідів зводять у таблицю 1.1

Таблиця 1.1. Експериментальні дані для перевірки відтворюваності

№ серії дослідів	Результати паралельних дослідів	Середнє значення	Оцінка дисперсії
1	y_{11} y_{12} …. $y_{1к}$	Y_{c1}	S^2_1
2	y_{21} y_{22} …. $y_{2к}$	Y_{c2}	S^2_2
…	… … …. …	…	
J	y_{j1} y_{j2} …. $y_{jк}$	Y_{cj}	S^2_j

Для кожної серії паралельних дослідів обчислюють середнє арифметичне значення функції відгуку:

$$\overline{Y}\overline{Y}_c = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_{ji}, \qquad /1.1/$$

де j – номер серії,

k – кількість паралельних дослідів, проведених при однакових умовах.

Далі для кожної серії паралельних дослідів визначають оцінку дисперсії.

Дисперсія, яка обчислюється по вибіркових даних, називається вибірковою дисперсією, позначається S_j^2 і обчислюється по формулі:

$$S_j^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} (Y_{ji} - \overline{Y}_j)^2, \qquad /1.2/$$

де y_{ji} – біжуче значення i-го досліду j-ї серії.

Серед всіх оцінок дисперсії знаходять найбільшу, її позначають через $\max S_j^2$. Також знаходять суму всіх оцінок дисперсії $\sum_{j=1}^{N} S_j^2$.

Обчислюють відношення найбільшої оцінки дисперсії до суми всіх оцінок дисперсій:

$$G_p = \frac{\max S_j^2}{\sum_{j=1}^{N} S_j^2} \qquad /1.3/$$

Величина G_p називається розрахунковим значенням критерію Кохрена. Критичні або гранично допустимі значення критерію Кохрена приведено в таблиці 2.

Для знаходження G необхідно знати загальну кількість оцінок дисперсії і так зване число ступенів свободи f, пов’язаних з кожною з них, причому

$$f = k - 1 \qquad /1.4/$$

Досліди вважаються відтворюваними, коли виконується нерівність

$$G_p \le G \qquad /1.5/$$

Якщо досліди невідтворювані, то необхідно досягнути відтворюваності шляхом виявлення і усунення джерел нестабільності експерименту, а також за рахунок використання точніших вимірювальних приладів.

Таблиця 1.2. Критичні значення критерію Кохрена

Кількість серій дослідів	F=k-1			
	1	2	3	4
2	0,999	0,975	0,939	0,906
3	0,967	0,871	0,798	0,746
4	0,907	0,768	0,684	0,629
5	0,841	0,684	0,598	0,544
6	0,781	0,616	0,532	0,480
7	0,727	0,561	0,480	0,431
8	0,680	0,516	0,438	0,391
9	0,639	0,478	0,403	0,358
10	0,602	0,445	0,373	0,331

Хід роботи

1. Згенерувати початкові дані з використанням комп'ютерної програми «Визначення відтворюваності дослідів» [1], результати внести у таблицю 1.1.
2. Для кожної серії паралельних дослідів обчислити середнє арифметичне значення функції відгуку по формулі /1.1/.
3. Для кожної серії паралельних дослідів обчислити оцінку дисперсії по формулі /1.2/.
4. Обчислити розрахункове значення критерію Кохрена по формулі /1.3/.
5. З таблиці 1.2 вибрати критичне значення критерію Кохрена для заданої кількості дослідів та числа ступенів свободи.
6. Порівняти розрахункове значення критерію Кохрена з критичним значенням.
7. Порівняти отриманий результат з результатом комп'ютерної програми «Визначення відтворюваності дослідів» [1].
8. Зробити висновок.

Лабораторна робота № 2

ВИВЧЕННЯ РЕГРЕСІЙНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

Мета: Навчитись визначати коефіцієнти регресії та стандартну помилку передбачень.

Теоретичні відомості

Функція $y= f(x)$ називається регресійною, якщо кожному значенню аргумента відповідає ряд значень функції. Статистичні залежності описуються математичними моделями процесу, тобто регресійними виразами, які пов'язують незалежні значення x (фактори) з залежною змінною y (функцією).

Регресійний аналіз встановлює форми залежності між факторами x і функцією y і визначає рівняння регресії, що містять кілька невідомих параметрів.

Найважливіший етап регресійного аналізу – вибір підходящої регресійної моделі, тобто математичного виразу, випадкової величини y і значення незалежної величини x.

В найпростішому випадку пропонується лінійна залежність, виражена рівнянням $y=a+bx$ (рис.2.1.)

Це рівняння задає пряму лінію в прямокутній системі координат.

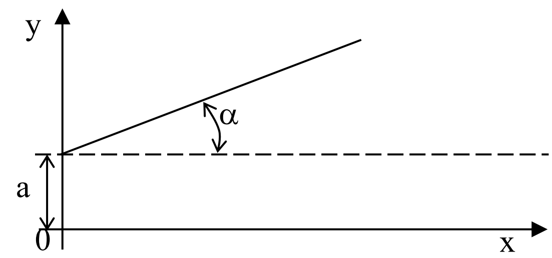


Рисунок 2.1. Графік лінійної залежності.

Регресійна пряма перетинає вісь y в точці $y=a$ а параметр b- це тангес кута нахилу α прямої до осі x $(b=tg\ \alpha)$.

Для кожного значення x_i виміряні значення y_i наносяться на графік. Пряму лінію стараються провести так, щоб сума квадратів відхилень розрахункових значень y_p від експериментального y_e була мінімальна для всіх *n* розглядуваних дослідів:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_p - y_e)^2 \rightarrow \min \qquad /2.1/$$

Математично строго доказано, що цю умову задовольняють коефіцієнти рівняння, що обчислюються для випадку прямої лінії по формулах:

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \qquad /2.2/$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad /2.3/$$

Рівняння *y=a+bx*, в яке підставлені знайдені значення коефіцієнтів, прийнято називати рівнянням лінійної регресії. Користуючись цим рівнянням можна, не проводячи подальших дослідів, розрахувати для заданого *x* відповідне значення *y*. Звичайно, такий прогноз не буде абсолютно точним. Близькість прогнозованого значення *y* до фактичного залежить в основному від точності виконання експерименту і від того, наскільки існуюча залежність між *y* та *x* близька дійсно до лінійної. Отже, прогнозування здійснюється з деякою ймовірністю. Мірою якості наближеного опису реальної залежності між величинами *x* та *y* з допомогою рівняння лінійної регресії є ***стандартне відхилення*** значень y_i від регресійної прямої. Воно обчислюється по формулі:

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - a \sum y_i - b \sum x_i y_i}{n-2}} \qquad /2.4/$$

S_{yx} є мірою точності передбачення значень випадкової величини *y* по заданих значеннях величини *x*, тому S_{yx} називають також стандартною помилкою передбачення.

Припустимо, ми маємо вибірку значень випадкових величин *x* та *y*, отриману експериментальним шляхом.

Обчисливши по формулах коефіцієнти регресії a та b отримаємо рівняння регресії виду $y=a+bx$. Отримане рівняння описує пряму 1 (рис.2.2).

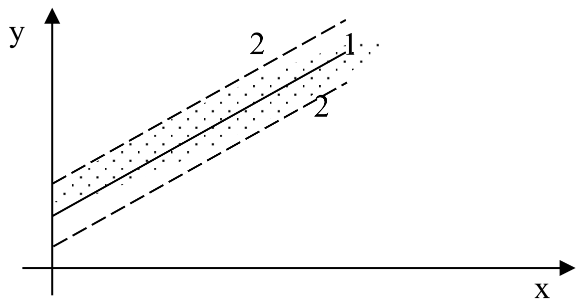


Рисунок 2.2. Ілюстрація стандартної помилки передбачень.

Це рівняння можна використовувати для прогнозування поведінки функції при зміні x. Проте будь-який прогноз має ймовірність помилки. Обчислимо стандартну похибку S_{yx}. Дві прямі лінії, віддалені від прямої регресії на $\pm S_{yx}$ (на рис. 2.2 – прямі 2) обмежують зону навколорегресійної прямої, у яку попадають експериментальні значення з деякою ймовірністю. Ймовірність попадання оцінюється як 100% - S_{yx}. Тобто, приблизно (100% - S_{yx}) всіх значень y_i буде попадати в зону, обмежену двома прямими.

Якщо в результаті проведеної перевірки не доводиться сумніватись в адекватності лінійної моделі, то необхідно перевірити значимість коефіцієнта регресії.

Значимість перевіряється за допомогою критерію Стьюдента (t-критерію). Значення t -критерію обчислюється по формулі:

$$t=\frac{|b|}{S_{yx}\Big/\sqrt{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}}, \qquad /2.5/$$

де $|b|$- модуль коефіцієнта регресії b;

S_{yx} - стандартна помилка передбачення.

Обчислене значення критерію порівнюється з табличними при рівні значимості α і кількості ступенів свободи $\nu=n-2$.

Якщо значення критерію розраховане $t \geq t_\alpha$, то коефіцієнт регресії b вважається статистично значимим.

Хід роботи

1. Згенерувати виборку значень випадкових величин x та y з використанням комп'ютерної програми «Визначення регресійних залежностей» [2].
2. Для заданої виборки по формулах /2.2/ і /2.3/ обчислити коефіцієнти лінійної залежності $y=a+bx$.
3. Записати рівняння лінійної регресії.
4. Обчислити стандартну помилку передбачення по формулі /2.4/.
5. За допомогою критерію Стьюдента по формулі /2.5/ перевірити значимість коефіцієнта регресії.
6. Порівняти отриманий результат з результатом комп'ютерної програми «Визначення регресійних залежностей» [2].
7. Зробити висновок.

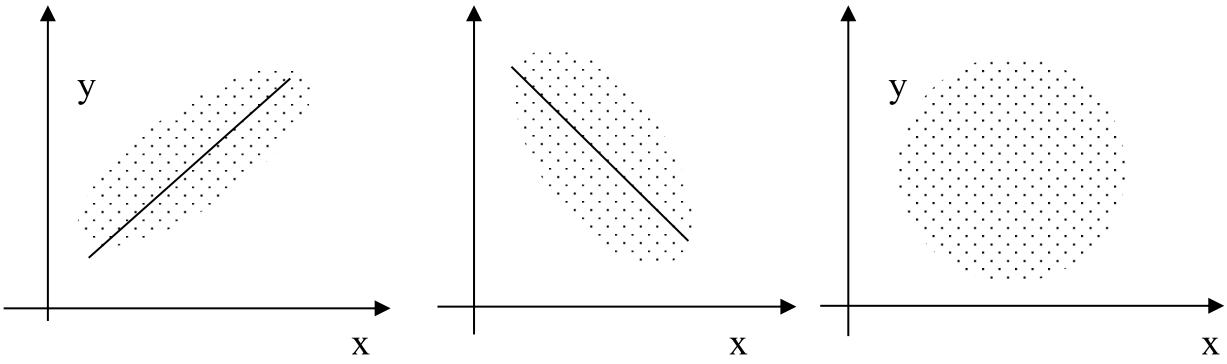
Лабораторна робота № 3
ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА КОРЕЛЯЦІЇ

Мета: Навчитись визначати кількісну характеристику міри ступеню зв'язку між ознаками.

Теоретичні відомості

Кореляційний аналіз полягає у визначенні ступеню зв'язку між випадковими величинами x та y. В якості міри зв'язку використовуються коефіцієнти кореляції.

Завдяки розсіюванню, точки на графіку розміщені в деякій області, що здебільшого має форму еліпса. Чим тісніший зв'язок між розглядуваними величинами, тим більш еліпс витягнутий вздовж однієї з своїх осей (рис.3.1, а, б). І навпаки, якщо зв'язок між x та y відсутній, то розкид точок на діаграмі розсіювання наближається до круга (рис.6, в):



а) б) в)

Рисунок 3.1. Розкид точок на діаграмі розсіювання.

Кореляційний зв’язок між величинами називається додатнім, якщо при збільшенні однієї з них зростає і інша.

Від’ємним називають такий кореляційний зв’язок, коли при збільшенні значень однієї з величин, інша зменшується.

Бачачи на графіку кореляційний зв’язок між величинами, ми можемо йому дати якісну оцінку. Для кількісної оцінки використовують коефіцієнт кореляції.

Але кореляція є мірою тільки лінійного зв’язку.

Таким чином, коефіцієнт кореляції є критерієм близькості залежності між x та y до лінійної функціональної залежності.

В якості коефіцієнту кореляції використовується ***коефіцієнт Браве-Пірсона.*** Він показує ступінь лінійності зв’язку x та y:

$$r=\frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right]\cdot\left[n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}}, \qquad /3.1/$$

Де n -кількість вимірювань.

Значення коефіцієнта кореляції завжди < 1. Чим ближче абсолютне значення коефіцієнта до 1, тим сильніший лінійний зв’язок між x та y. При $r=1$ між x та y лінійного кореляційного зв’язку не існує, але може існувати нелінійна регресія. При $-1< r <+1$ кореляційний зв’язок може бути як додатнім, так і від’ємним і характеризується різним ступенем тісноти зв’язку.

Звичайно вважають тісноту зв'язку задовільною при $r \geq 0.5$, хорошою при $r=0.8\text{-}0.85$.

Для визначення проценту розкиду (мінливості) шуканої функції у відносно її середнього значення, що визначається мінливістю фактора *x*, обчислюють ***коефіцієнт детермінації***:

$$d = r^2 \qquad /3.2/$$

Чим більший коефіцієнт детермінації тим менше значення *y* відхиляються від лінії регресії. Так, наприклад при $r=0.9$ $d=0.81$, тобто 81% загального розкиду значень визначається мінливістю *x*, а решта 19% - іншими причинами.

Грунтуючись тільки на значенні вибіркового коефіцієнта кореляції, особливо якщо це значення не дуже близьке до ± 1, не можна зробити висновок про достовірність кореляції між ознаками. Цей висновок може бути зроблений з допомогою відповідних критеріїв значимості кореляції.

Застосування стандартних критеріїв значимості кореляції базується на припущенні про двомірний нормальний розподіл генеральної сукупності, з якої отримані експериментальні дані.

Якщо прийняти припущення про наявність лінійного зв'язку між досліджуваними ознаками, то гіпотезу про нормальний розподіл можна перевірити з допомогою ***критерію Стьюдента***.

Для перевірки значимості кореляції критерій Стьюдента обчислюється по формулі:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad /3.3/$$

де *r* - коефіцієнт кореляції;

n - об'єм виборки.

Обчислене по формулі значення *t*-критерію порівнюється з критичним значенням і кількості ступенів свободи $\nu = n\text{-}2$.

Для спрощення застосування *t*- критерію, складено таблиці критичних значень r_α коефіцієнта кореляції. При наявності цієї таблиці відпадає необхідність в обчисленнях. Достатньо просто порівняти вибірковий коефіцієнт кореляції з критичним r_α при рівні значимості α і об'ємі вибірки n. Якщо виявиться, що $|r| < r_\alpha$, то роблять висновок про відсутність значимої кореляції. Якщо ж $|r| \geq r_\alpha$,, то це означає наявність значимої додатної чи від'ємної кореляції.

Хід роботи

1. Для заданої виборки по формулі /3.1/ обчислити коефіцієнт кореляції.
2. По формулі /3.2/ обчислити коефіцієнт детермінації.
3. Зробити висновок.
4. Перевірити значимість кореляції з допомогою критерію Стьюдента /3.3/.
5. Зробити висновок.

Лабораторна робота № 4

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ ПОВНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Мета: Навчитись складати математичну модель технологічного процесу.

Теоретичні відомості

Незалежні змінні величини, котрі впливають на хід технологічного процесу, звичайно називають факторами. Так, факторами можуть бути температура, тиск, твердість матеріалу і т.д. Ці величини при плануванні експерименту, як правило, позначають $X_1, \ldots X_n$.

Перебіг технологічного процесу кількісно характеризується однією або декількома величинами, наприклад, собівартістю продукції, продуктивністю обладнання і т.д. Такі величини в теорії планування експерименту називають функціями відгуку і позначають буквами $Y_1 \ldots Y_n$. Функції відгуку залежать від факторів впливу.

Під математичним описом процесу розуміють систему рівнянь, які пов'язують функції відгуку із факторами впливу. В найпростішому випадку це може бути одне рівняння. Часто математичний опис називають математичною моделлю**.** За допомогою математичних методів планування експерименту можна отримати математичну модель технологічного процесу навіть за відсутності відомостей про механізм його перебігу.

Цінність математичного опису полягає в тому, що він:

1) дає якісну та кількісну інформацію про вплив кожного фактора;

2) дозволяє розрахувати значення функції відгуку при заданому режимі ведення технологічного процесу;

3) може бути основою для оптимізації.

Математичні моделі, отримані за допомогою методів експерименту, називають експериментально – статистичними**.**

Метод повного факторного експерименту дає можливість отримати математичний опис технологічного процесу в деякій області факторного простору, розташованій в околі обраної точки з координатами $X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{0n}$, $i=1, n$, де n – кількість факторів.

Перенесемо початок координат факторного простору в дану точку (рис.4.1).

З цією метою введемо нові змінні величини

$$X_i = \frac{x_i - x_{0i}}{\Delta x_i}, \qquad /4.1/$$

де Δx_i - обраний нами масштаб по осі X_i.

Величини X_i не мають розмірності і називаються кодованими змінними.

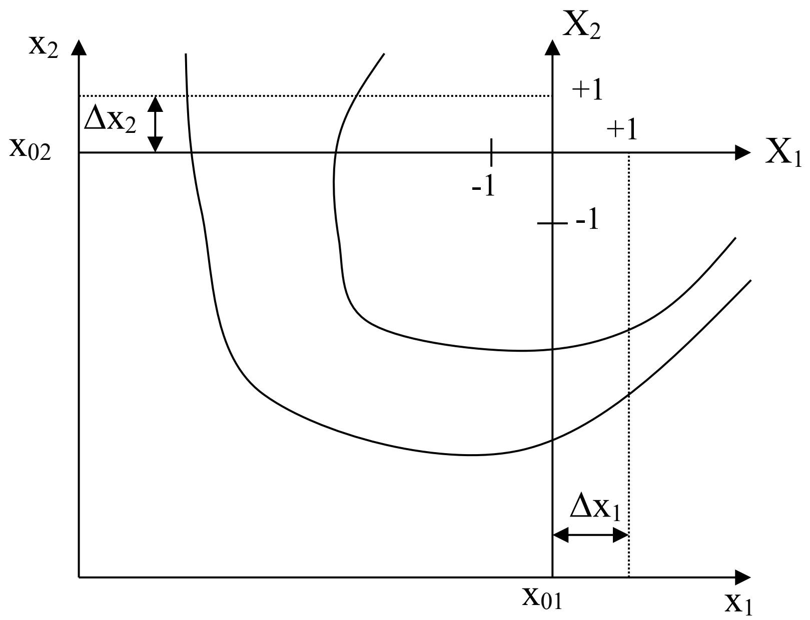


Рисунок 4.1. Перехід до кодованих змінних.

За допомогою повного факторного експерименту шукають математичний опис технологічного процесу у вигляді рівняння:

$$Y=b_0+b_1x_1+b_2\,x_2+\ldots+b_nx_n+b_{12}\,x_1\,x_2+\ldots+b_{(n-1)m}x_{n-1}x_m \qquad /4.2/$$

У нього входить вільний член b_0, члени у вигляді добутків коефіцієнтів регресії b_i на X_i та члени, котрі містять парні добутки кодованих змінних. Таким чином це квадратне рівняння.

Усі фактори на протязі повного факторного експерименту змінюються на двох рівнях, що відповідають значенням кодованих змінних +1 та –1. В табл.4.1 наведені умови дослідів повного двофакторного експерименту. Частина таблиці, обведена штриховими лініями, називається матрицею планування**.** Матриця містить повний набір усіх можливих комбінацій рівнів зміни факторів. Звідси повний факторний експеримент отримав свою назву.

Таблиця 4. 1. Матриця планування двофакторного експерименту

Номер досліду	Фактори		Функція відгуку
	X_1	X_2	
1	-1	-1	$У_1$
2	+1	-1	$У_2$
3	-1	+1	$У_3$
4	+1	+1	$У_4$

Як випливає з рис.4.2, результати дослідів, наведені в табл.4.1, відповідають на факторній площині вершинам квадрата з центром в початку координат.

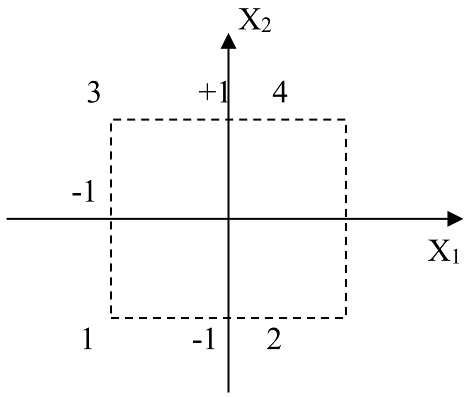


Рисунок 4.2. Поверхня відгуку двофакторного експерименту.

В табл.4.2 наведені умови дослідів повного трифакторного експерименту. Ці досліди відповідають у факторному просторі вершинам куба з центром в початку координат.

Таблиця 4.2. Матриця планування трифакторного експерименту

Номер досліду	Фактори			Функція відгуку
	X_1	X_2	X_3	
1	-1	-1	-1	Y_1
2	+1	-1	-1	Y_2
3	-1	+1	-1	Y_3
4	+1	+1	-1	Y_4
5	-1	-1	+1	Y_5
6	+1	-1	+1	Y_6
7	-1	+1	+1	Y_7
8	+1	+1	+1	Y_8

Основні принципи побудови матриць планування повного факторного експерименту :

1) рівні зміни першого фактора чергуються від досліду до досліду;

2) частота зміни рівнів варіювання кожного наступного фактора вдвічі менша, ніж у попереднього.

Загальна кількість дослідів повного факторного експерименту:

$$N = 2^n , \qquad /4.3/$$

де n – кількість факторів.

На основі результатів певного факторного експерименту обчислюють коефіцієнти регресії, користуючись формулами:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i , \qquad /4.4/$$

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} x_{ji} y_i , \qquad /4.5/$$

$$b_{im} = \frac{1}{N}\sum_{i,j,m=1}^{N} x_{ji} x_{im} y_j , \qquad (i \neq m) \qquad /4.6/$$

Деякі з коефіцієнтів можуть виявитись такими незначними, що їх величиною можна знехтувати. Щоб встановити, значимий коефіцієнт чи ні, необхідно, перш за все, обчислити оцінку дисперсії, з якою він визначається. Для цього спочатку визначають оцінку дисперсії для кожної серії дослідів:

$$s_j^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i,j=1}^{N} \left(y_{ji} - y_j^c \right)^2 , \qquad /4.7/$$

де k – кількість експериментів кожної серії (у прикладі $k=2$),

y_{ji} – біжуче значення експерименту,

y_j^c – середнє значення серії.

Середня величина оцінки дисперсії кількох серій паралельних дослідів

$$s_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} s_j^2 \quad , \qquad /4.8/$$

де N – кількість серій дослідів (у прикладі N =8).

Далі необхідно розрахувати оцінку дисперсії відтворюваності:

$$s_b^2 = \frac{s_y^2}{N} \qquad /4.9/$$

Необхідно відзначити, що за результатами повного факторного експерименту всі коефіцієнти визначаються з однаковою похибкою. Вважається, що коефіцієнт значимий, якщо виконується умова:

$$|\mathrm{b}| \geq s_b{}^2 \cdot t \quad , \qquad /4.10/$$

де t – значення критерію Стьюдента, взяте з табл.4.3.

Якщо перевірка показала, що коефіцієнт регресії не значимий, то відповідний член можна виключити з рівняння.

Для користування табл.1.3 необхідно знати число степенів волі f_{ad}, пов'язане з оцінкою дисперсії $S_y{}^2$:

$$f_{ad} = N - B \quad , \qquad /4.11/$$

де B – кількість значимих коефіцієнтів регресії,

N – кількість серій дослідів повного факторного експерименту.

Таблиця 4.3. Значення критерію Стьюдента

f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23

Отримавши рівняння регресії, необхідно перевірити його адекватність, тобто здатність достатньо добре описувати поверхню відгуку та прогнозувати результати дослідів. Для перевірки адекватності обчислюють оцінку дисперсії адекватності за формулою:

$$s_{ad}^2 = \frac{1}{N-B}\sum_{j=1}^{N}\left(y_j^c - y_j^p\right)^2 \quad , \qquad /4.12/$$

де y_j^c та y_j^p - середнє експериментальне та розрахункове значення функції відгуку в j – му досліді.

Потім знаходять розрахункове значення критерію Фішера:

$$F_p = \frac{s_{ad}^2}{s_y^2} \qquad /4.13/$$

Рівняння регресії вважається адекватним, якщо виконується умова:

$$F_p \le F, \qquad /4.14/$$

де F- критичне значення критерію Фішера (табл.4.4).

Для користування табл.4.4 необхідно знати числа степенів волі, пов’язані з чисельником та знаменником відношення Fp.

Таблиця 4.4. Значення критерію Фішера

Число степенів волі f_i (для знаменника)	Число степенів волі fi (для чисельника)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161. 4	199. 5	215. 7	224. 6	230. 2	234. 9	238. 9	243. 9
2	18. 51	19. 00	19. 16	19. 25	19. 3	19. 33	19. 37	19. 41
3	10. 13	9. 55	9. 28	9. 12	9. 01	8. 94	8. 84	8. 74
4	7. 71	6. 94	6. 59	6. 39	6. 26	6. 16	6. 04	5. 91
5	6. 61	5. 79	5. 41	5. 19	5. 05	4. 95	4. 82	4. 68
6	5. 99	5. 14	4. 79	4. 53	4. 39	4. 28	4. 15	4. 00
7	5. 59	4. 74	4. 35	4. 12	3. 97	3. 87	3. 73	3. 57
8	5. 32	4. 46	4. 07	3. 84	3. 69	3. 58	3. 44	3. 28
9	5. 12	4. 26	3. 86	3. 63	3. 48	3. 37	3. 23	3. 07
10	4. 96	4. 10	3. 48	3. 48	3. 33	3. 22	3. 07	2. 91

Приклад рішення

Розглянемо застосування повного факторного експерименту для отримання математичного опису технологічного процесу. Середнє значення швидкості різання позначимо як y^c. На хід процесу впливають такі фактори, як твердість матеріалу x_1 (HRC); подача x_2 (мм/хв); головний кут в плані x_3 (град).

Числові значення факторів впливу та функції відгуку наведені в табл.4.5.

Таблиця 4.5. Умови проведення експериментів

Номер досліду	Умова досліду			Результати вимірювання Швидкість різання		
	Подача	Головний кут в плані	Твердість матеріалу	I експе-римент	II експе-римент	y^c
1	0, 2	30	49	80, 5	80, 8	80, 65
2	0, 4	30	49	57, 5	59, 1	58, 3
3	0, 2	60	49	59, 4	61, 7	60, 55
4	0, 4	60	49	43, 7	43, 8	43, 75
5	0, 2	30	43	112, 5	113, 0	112, 75
6	0, 4	30	43	85, 2	85, 9	85, 55
7	0, 2	60	43	83, 9	85, 2	84, 55
8	0, 4	60	43	63, 8	64, 5	64, 15

Складемо матрицю планування трифакторного експерименту (табл.4.6).

Таблиця 4.6. Матриця планування трьохфакторного експерименту

Номер	X_1	X_2	X_3	y^c	y^p
1	-1	-1	+1	80, 65	80,77
2	+1	-1	+1	58, 3	58,29
3	-1	+1	+1	60, 55	60,51
4	+1	+1	+1	43, 75	44,03
5	-1	-1	-1	112, 75	112,43
6	+1	-1	-1	85, 55	85,71
7	-1	+1	-1	84,55	84,69
8	+1	+1	-1	64,15	63,97

Розрахуємо коефіцієнти регресії по формулах /4.4, 4.5, 4.6/:

1) коефіцієнти при факторах впливу:

$$b_1 = 1/8 \cdot \sum_{j=1}^{8} x_{j1} \cdot y_j = 1/8 \cdot \left(-80.65 + 58.3 - 60.55 + 43.75 - 112.75 + 85.55 - 84.55 + 64.15\right) = -12.9$$

$$b_2 = 1/8 \cdot \sum_{j=1}^{8} x_{j2} \cdot y_j = -10.8$$

$$b_3 = 1/8 \cdot \sum_{j=1}^{8} x_{j3} \cdot y_j = -10.5$$

2) коефіцієнти при парних добутках факторів:

$$b_{12} = 1/8 \cdot \sum x_{j1} \cdot x_{j2} \cdot y_j = 1/8 \cdot (80.65 - 58.3 - 60.55 + 43.75 + 112.75 - 85.55 - 84.55 + 64.15) = -1.6$$

$$b_{13} = 1/8 \cdot \sum_{j=1}^{8} x_{j1} \cdot x_{j3} \cdot y_j = 1.87$$

$$b_{23} = 1/8 \cdot \sum_{j=1}^{8} x_{j2} \cdot x_{j3} \cdot y_j = 1.5$$

3) вільний член рівняння регресії:

$$b_0 = 1/8 \cdot \sum_{j=1}^{8} y_j = 73.8$$

Розраховуємо величину оцінки дисперсії для кожної серії дослідів за формулою /4.7/:

$$s_1^2 = (80.65 - 80.5)^2 + (80.65 - 80.8)^2 = 0.045$$

$s_2^2 = 0.125$ $\quad$ $s_5^2 = 0.845$ $\quad$ $s_8^2 = 0.005$

$s_3^2 = 0.245$ $\quad$ $s_6^2 = 2.645$

$s_4^2 = 1.28$ $\quad$ $s_7^2 = 0.245$

Визначимо оцінку відтворюваності, тобто середню величину оцінки дисперсії кількох серій паралельних дослідів за формулою /4.8/:

$$s_y^2 = 0.68$$

Кількість степенів волі системи: $f=N\cdot(k-1)=8$

Оцінка дисперсії відтворюваності, згідно з формулою (4.9) S_b^2=0.085

Перевіримо значимість коефіцієнтів регресії. Для 8 серій дослідів критерій Стьюдента, по табл.4.3, $t = 2.31$

Коефіцієнт значимий, якщо:

$$|b| > s_b^2 \cdot t = 0.196$$

Отже, всі коефіцієнти значимі. Рівняння регресії в кодованих змінних має вигляд:

$$Y=73.8-12.9\cdot X_1-10.8\cdot X_2-10.5\cdot X_3+1.06\cdot X_1\cdot X_2+1.87\cdot X_1\cdot X_3+1.5\cdot X_2\cdot X_3$$

Перевіримо адекватність знайденого рівняння, підставляючи почергово для кожної серії дослідів значення кодованих змінних:

$y_1=73.8-12.9\cdot(-1)-10.8\cdot(-1)-10.5(+1)+1.06\cdot(-1)\cdot(-1)+1.87\cdot(-1)\cdot(+1)+1.5\cdot(-1)\cdot(+1)=$ $=80.77$

$y_2 = 58.29$ $y_5 = 112.43$ $y_8 = 63.97$

$y_3 = 60.51$ $y_6 = 85.71$

$y_4 = 44.03$ $y_7 = 84.69$

Розраховані значення y^P розмістимо в табл.4.6.

Розрахуємо оцінку дисперсії адекватності. Оскільки всі коефіцієнти значимі, то B = 7, а $S_{ad}^2 = 0.27$.

Тоді розрахункове значення критерію Фішера дорівнює:

$$F_p = \frac{S_{ad}^2}{S_g^2} = 0.27/0.68 = 0.4$$

З табл. 4.4. видно, що табличне значення критерію Фішера $F_{табл.} = 5.32$.

Оскільки $F_p=0{,}4< F_{табл}= 5{,}32$, то рівняння регресії – адекватне.

Перейдемо від кодованих до фізичних величин. Для цього зведемо в табл.4.7. характеристику плану експерименту.

Таблиця 4.7. Характеристику плану експерименту

Характеристика плану	x_1	x_2	x_3
Основний рівень	0. 3	45	46
Інтервал вимірювань	0. 1	15	3
Верхній рівень	0. 4	60	49
Нижній рівень	0. 2	30	43

$$X_1 = (x_1 - 0.3) / 0.1, \qquad X_2 = (x_2 - 45) / 15, \qquad X_3 = (x_3 - 46) / 3$$

Підставимо ці величини в рівняння регресії в кодованих змінних. В результаті отримаємо рівняння:

$$y = 483.798 - 7.23\cdot x_1 - 315.538\cdot x_2 - 2.91\cdot x_3 + 3.53\cdot x_1\cdot x_2 + 0.042\cdot x_1\cdot x_3 + x_2\cdot x_3$$

Для перевірки підставимо будь-яку комбінацію значень x_1, x_2, x_3, наприклад: $x_1 = 0.2$, $x_2 = 30$, $x_3 = 43$, при яких $y=112,75$

$$y=483.78–7.23·43–315.53·0.2–2.91·30+3.53·43·0.2+0.042·43·30+0.2·30= 113.02$$

Як видно, значення, отримане по моделі, близьке до експериментального, отже, отримана математична модель достатньо добре описує досліджуваний технологічний процес.

Хід роботи

1. Згенерувати значення кількох серій паралельних дослідів з використанням комп'ютерної програми «Розробка математичної моделі на основі повного факторного експерименту» [3]. Умови реалізації дослідів кожної серії однакові, а різних серій – відрізняються одні від одних.
2. Для заданих значень обчислити середнє значення $y^{c.}$
3. Скласти матрицю планування трифакторного експерименту.
4. Розрахувати коефіцієнти регресії по формулах (4.4, 4.5, 4.6).
5. Розрахувати величину оцінки дисперсії для кожної серії дослідів.
6. Визначити середню величину оцінки дисперсії кількох серій паралельних дослідів по формулі (4.8).
7. Визначити оцінку дисперсії відтворюваності по формулі (4.9).
8. Перевірити значимість коефіцієнтів регресії.
9. Скласти рівняння регресії в кодованих змінних.
10. Розрахувати значення Y^P , записати в табл.4.6.
11. Обчислити розрахункове значення критерію Фішера, порівняти його з табличним.
12. Зробити висновок про адекватність моделі.
13. Скласти характеристику плану експерименту.
14. Отримати математичну модель досліджуваного технологічного процесу.
15. Порівняти отриманий результат з результатом комп'ютерної програми «Розробка математичної моделі на основі повного факторного експерименту» [3].
16. Зробити висновок.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір, № 75535. Комп'ютерна програма «Визначення відтворюваності дослідів» / В. В. Лотиш, Л. О. Гуменюк; авторські майнові права належать: Луцький національний технічний ун-т; дата реєстрації 22.12.2017.

2. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір, № 74699. Комп'ютерна програма «Визначення регресійних залежностей» / В. В. Лотиш, Л. О. Гуменюк; авторські майнові права належать: Луцький національний технічний ун-т; дата реєстрації 13.11.2017.

3. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір, № 74703. Комп'ютерна програма «Розробка математичної моделі на основі повного факторного експерименту» / В. В. Лотиш, Л. О. Гуменюк; авторські майнові права належать: Луцький національний технічний ун-т; дата реєстрації 13.11.2017.

4. Комп'ютерне моделювання. Методичні вказівки до виконання розрахунковографічної роботи. URL: https://tpza.kpi.ua/wp-content/uploads/manuals/sytnikov/Kompyuterne_modelyuvannya_IdentifIkatsIya_RGR.pdf (дата звернення 20.09.2025).

5. Ідентифікація та моделювання об'єктів автоматизації: метод. вказ. до виконання лаб. роб. для студ. спец. 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології / уклад. В. А. Зозуля. Кропивницький: ЦНТУ, 2021. 40 с.

6. Ідентифікація та моделювання об'єктів автоматизації. Лабораторний практикум. URL: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/6258/1/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC.pdf (дата звернення 20.09.2025).

Ідентифікація і моделювання об'єктів та систем безпілотних апаратів: Методичні вказівки до лабораторних робіт для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 24 с.

Комп'ютерний набір Л.О. Гуменюк

Редактор Л.О. Гуменюк

Підп. до друку «__» ____2025 р. Папір офс.
Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 1,5. Обл.-вид. арк. 1.
Тираж 30 прим.

Відділ іміджу та промоції
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – ВІП ЛНТУ