

# МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ



## ОПР МАТЕРІАЛІВ

Конспект лекцій  
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня  
галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво  
спеціальності G19 Будівництво та цивільна інженерія  
освітньої програми «Будівництво та цивільна інженерія»  
денної та заочної форм навчання

Луцьк 2025

УДК 519.87

О 34

До друку

Голова вченої ради факультету архітектури, будівництва та дизайну

\_\_\_\_\_ О. АНДРІЙЧУК

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ

Директор бібліотеки \_\_\_\_\_ Н. ПОЛЩУК

Рекомендовано до видання вченою радою факультету архітектури, будівництва та дизайну ЛНТУ,

протокол № \_\_\_ від «\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри прикладної математики та механіки

протокол № \_\_ від «\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 року.

Завідувача кафедри \_\_\_\_\_ О. МІКУЛІЧ

Укладач: \_\_\_\_\_ О. МІКУЛІЧ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Рецензент: \_\_\_\_\_ М. ДЕЛЯВСЬКИЙ, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Відповідальний за випуск: \_\_\_\_\_ О. МІКУЛІЧ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ.

*Опір матеріалів:* Конспект лекцій для студентів спеціальності  
О 34 «Будівництво та цивільна інженерія» денної та заочної форми навчання /  
уклад. О.А. Мікуліч. — Луцьк: ЛНТУ, 2025. — 60 с.

У конспекті лекцій викладено основи курсу «Опір матеріалів». Матеріал згрупований за основними темами дисципліни. Матеріал конспекту лекцій відповідає робочій програмі курсу.

Конспект лекцій призначений для студентів освітньої програми «Будівництво та цивільна інженерія» денної та заочної форм навчання.

Конспект лекцій містить низку необхідних додатків, а також перелік літератури.

© О.А. Мікуліч, 2026

## Зміст

<b>Вступ.....</b>	<b>4</b>
<b>Основні поняття.....</b>	<b>5</b>
<b>Розтяг і стиск.....</b>	<b>9</b>
<b>Основи теорії напруженого та деформованого стану у точці .....</b>	<b>15</b>
<b>Критерії (теорії) міцності.....</b>	<b>24</b>
<b>Геометричні характеристики плоских перерізів....</b>	<b>31</b>
<b>Зсув.....</b>	<b>38</b>
<b>Кручення.....</b>	<b>41</b>
<b>Згин.....</b>	<b>44</b>
<b>Складний опір.....</b>	<b>46</b>
<b>Стійкість стиснутих стрижнів.....</b>	<b>50</b>
<b>Питання для самоконтролю.....</b>	<b>55</b>
<b>Література.....</b>	<b>57</b>
<b>ДОДАТКИ.....</b>	<b>58</b>

## **Вступ**

*Дисципліна «Опір матеріалів» є базовою ланкою у підготовці бакалаврів освітньої програми «Будівництво та цивільна інженерія». Вона дозволяє реалізувати теоретичні розрахунки з практикою проектування реальних елементів конструкцій, формуючи в майбутніх інженерів-будівельників здатність забезпечувати надійність, довговічність та економічність об'єктів.*

*Курс опору матеріалів насичений складним математичним апаратом. Даний конспект структурований таким чином, щоб спростити перехід від абстрактних розрахункових схем до реальних елементів конструкцій.*

*У конспекті реалізовано логічну послідовність викладу: від аналізу простих видів деформацій: розтяг-стиск, зсув, кручення, згин до складних навантажень та втрат стійкості*

*У конспекті лекцій викладено основні теоретичні відомості з головних тем опору матеріалів. Також є питання для самоконтролю, що допомагають студенту оцінити рівень засвоєння матеріалу.*

*При складанні конспекту основна увага була спрямована на ті питання, які у подальшому знаходять безпосереднє теоретичне і практичне застосування у загальнотехнічних і спеціальних дисциплінах, що вивчаються у Луцькому національному технічному університеті.*

*Даний конспект лекцій складено з метою допомоги студентам освітньої програми «Будівництво та цивільна інженерія» денної та заочної форм навчання при підготовці до занять, контрольних робіт, модульного контролю, захисту розрахункових робіт, заліків та іспитів з опору матеріалів.*

## Основні поняття

**Опір матеріалів** – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

**Міцність** – здатність конструкцій витримувати певне навантаження, не руйнуючись.

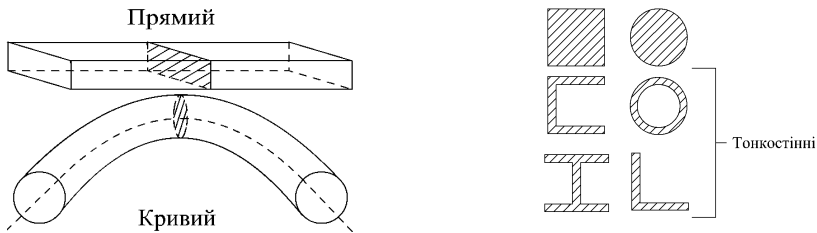
**Жорсткість** – здатність конструкцій чинити опір деформуванню. Деформації не повинні перевищувати певну величину.

**Стійкість** – здатність конструкцій зберігати початкову форму.

Конструкція повинна задовольняти усім цим вимогам. Тоді вона буде надійною в експлуатації. Проектування повинно бути раціональним і оптимальним. Зайва вага спричиняє збільшення навантаження (у тому числі за рахунок інерційних сил), зайвий розхід матеріалу, підвищення вартості.

Деталі мають складну форму, але їх можна розкласти на прості елементи. Найбільш поширені із них є:

а) **стрижень** – тіло, у якого один розмір значно більший двох інших.

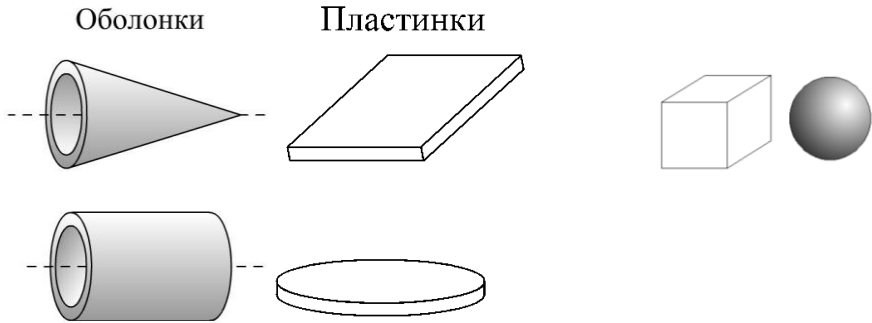


Стрижні можуть бути зі сталим і змінним поперечним перерізом. Якщо стрижень має суцільний, не тонкостінний переріз, його називають **брусом**.

б) **Пластинки і оболонки** – тіла, обмежені двома поверхнями, що знаходяться на невеликій відстані одна від іншої.

Поверхня що проходить через середину їх товщини називається **серединою**. В пластинках серединна поверхня є площиною, а в оболонках – кривою поверхнею.

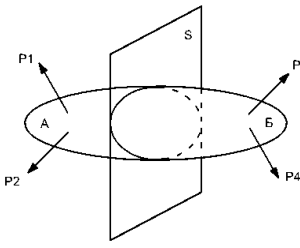
в) **Масивні тіла (масиви)** – тіла, у яких усі розміри одного порядку.



### **Гіпотези науки про опір матеріалів**

1. Гіпотеза про суцільність: матеріал суцільно заповнює форму тіла.
2. Гіпотеза про однорідність: в будь-якій точці тіла властивості матеріалу однакові
3. Гіпотеза про ізотропність: в будь-якому напрямку властивості матеріалу однакові.
4. Гіпотеза про ідеальну пружність тіла: після навантаження і розвантаження залишкові деформації відсутні..
5. Гіпотеза про малість деформацій тіла: деформації малі порівняно з розмірами тіла.
6. Принцип суперпозиції (принцип незалежності і складання дій сил): результат дії на конструкцію системи сил дорівнює сумі результатів дій кожної сили окремо і не залежить від порядку прикладання сил.
7. Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі): поперечні перерізи бруса, плоскі до прикладання навантаження, залишаються плоскими і при дії навантаження.

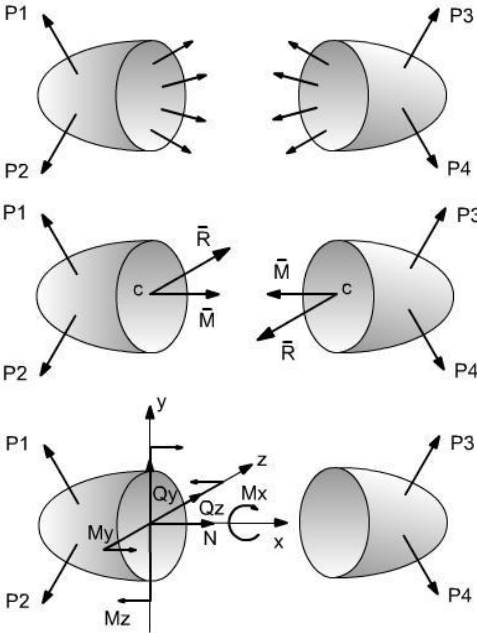
## Внутрішні сили. Метод перерізів



**Внутрішні сили** – сили взаємодії між частинами твердого тіла. Вони існують і в не навантаженому тілі. Під час навантаження виникають. Для визначення внутрішніх сил використовують метод перерізів.

Порядок визначення внутрішніх сил наступний:

1. Розріжемо умовно тіло площиною  $S$  на дві частини. Дію однієї частини на іншу замінимо системою внутрішніх сил, розподілених по площі перерізу. В перерізах кожної частини діють сили рівні за величиною і протилежні за напрямом.



2. Системи внутрішніх сил приведемо до однієї точки – центра ваги перерізу  $C$ . В результаті одержимо головний вектор  $\vec{R}^1$ ; головний момент внутрішніх сил  $\vec{I}^1$ .

3. Спроектуємо головний вектор і головний момент на осі координат.

Одержимо наступні проекції:

$Q_z, Q_y$  – поперечні сили;  $N$  – поздовжня сила;

$M_z, M_y$  – згинальні моменти;

$M_x \cdot (M_{кр})$  – крутний момент;

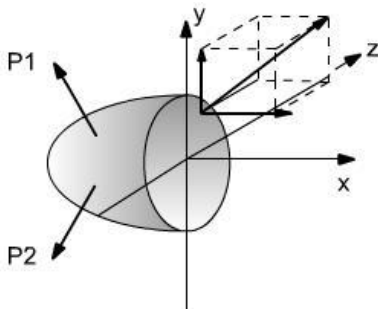
Проекції сил і моментів називають **внутрішніми силовими факторами**, або **внутрішніми зусиллями**.

4. Для визначення внутрішніх силових факторів потрібно записати рівняння рівноваги для однієї з частин тіла.

$dR$  - внутрішня сила, що діє на площадку  $dA$ ;  
 $dQ_y, dQ_z, dN$  - проекції сили  $dR$  на осі координат;  
 $dQ_y, dQ_z$  - поперечні сили;  
 $dN$  - поздовжня (нормальна) сила.

### Поняття про напруження

Напруження- це міра інтенсивності внутрішніх сил.



**Повне напруження** – в т.А перерізу – це внутрішнє зусилля, що діє на одиницю площі перерізу:

$$\vec{p} = \frac{d\vec{R}}{dA}, \quad \vec{p} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}.$$

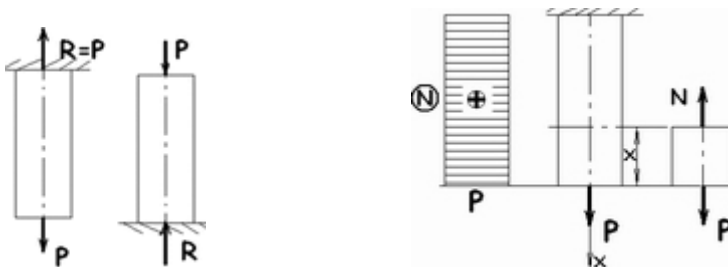
Тут  $\vec{\sigma}$  – **нормальне напруження** (перпендикулярне до перерізу),  $\vec{\tau}$  – **дотичне напруження** (лежать в площині перерізу).

Напруження визначаються у

$$\frac{H}{m^2} = Па; \quad \frac{MH}{m^2} = МПа; \quad \frac{H}{mm^2} = МПа.$$

## Розтяг і стиск

**Центральний розтяг (стиск)** має місце тоді, коли рівнодійна навантаження напрямлена вздовж осі стрижня. При розтягу (стиску) стрижня в поперечних перерізах діє один внутрішній силовий фактор-поздовжня сила  $N$ .



Графік, що показує зміну внутрішніх сил при переході від одного до другого поперечного перерізу називається **епюрою**. Величина зусилля відкладається в якомусь масштабі у вигляді відрізків, перпендикулярних до осі стрижня. Внутрішня **поздовжня сила  $N$**  у довільному поперечному перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь стрижня усіх зовнішніх сил, взятих по одну сторону від перерізу. Сили розтягу (напрявлені від перерізу) вважають **додатними**, сили стиску (напрявлені до перерізу) – **від’ємними**.

### Напруження при розтягу (стиску)

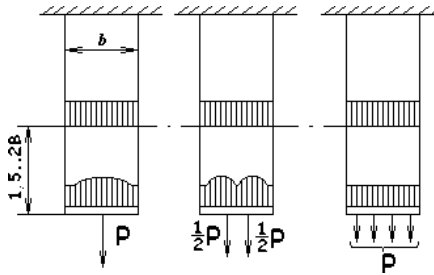
Поздовжня сила  $N$  є рівнодійною внутрішніх сил, розподілених по площі поперечного перерізу. Звідси:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

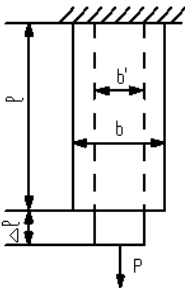
Одиниці вимірювань  $\frac{H}{m^2}$  (Па);  $\frac{kH}{m^2}$  (кПа);  $\frac{MH}{m^2}$  (МПа).

Розтягувальні нормальні напруження – додатні, а стискувальні – від’ємні.

**Принцип Сен-Венана:** якщо тіло навантажувється еквівалентними системами сил, то в поперечних перерізах, досить віддалених від місць прикладання сил, напруження мало залежить від способу навантаження.



### Деформації при розтягу (стиску)



$\Delta l$  - абсолютне видовження (укорочення)

стрижня;  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  - відносне видовження

(відносна поздовжня деформація);

$\varepsilon' = \frac{b' - b}{b} = \frac{\Delta b}{b}$  -- відносне звуження ( відносна

поперечна деформація);

$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$  - коефіцієнт Пуассона.

Для різних матеріалів  $\mu = 0..0,5$ . Для сталей  $\mu \approx 0,3$ .

### Закон Гука

При розтягу(стиску) відносна лінійна деформація  $\varepsilon$  пропорційна напруженню  $\sigma$ :  $\sigma = E\varepsilon$ .

Коефіцієнт пропорційності  $E$  - модуль пружності 1-го роду (модуль Юнга).

Сталь -  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа; Мідь -  $E = 1 \cdot 10^5$  МПа;

Алюміній -  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа .

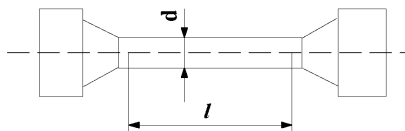
Підставимо  $\sigma = \frac{N}{A}$ ,  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  в формулу (2), отримаємо

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Ця формула називається **законом Гука** для абсолютних деформацій. Вона справедлива для стрижня або ділянок стрижня, у яких  $N = \text{const}$  і  $A = \text{const}$ . Величину  $EA$  називають жорсткістю поперечного перерізу,  $EA/l$  – жорсткістю стрижня.

## Діаграма розтягу. Механічні характеристики матеріалу

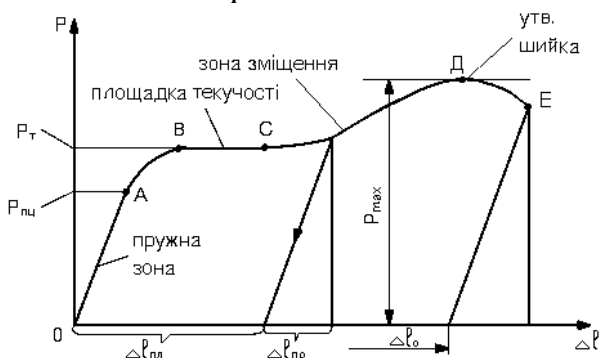
Для визначення механічних властивостей матеріалу його випробовують на спеціальних машинах. Найбільш поширене випробовування на розтяг на розривних машинах. Для цього з матеріалу виготовляють зразки: довгий зразок:  $\lambda = 10d$ ;  $l = 11,3\sqrt{A}$ ; короткий зразок:  $\lambda = 5d$ ;  $l = 5,66\sqrt{A}$ .



Графік залежності між розтягувальною силою  $P$  і видовженням зразка  $\Delta l$  називається **діаграмою розтягу**.

Вигляд цієї діаграми залежить не тільки від властивостей матеріалу, а й від розмірів випробуваного зразка. Тому початкову діаграму розтягу перебудовують у координатах  $\sigma$ - $\epsilon$

Характерні ділянки діаграми:



OA – пружна ділянка: деформація повністю зникає після розвантаження, існує пропорційна залежність між напруженням і деформацією, тобто справедливий закон Гука;

AB – перехідна ділянка: поряд з пружною виникає пластична (залишкова) деформація;

BC – площадка текучості: матеріал пластично деформується при постійному навантаженні;

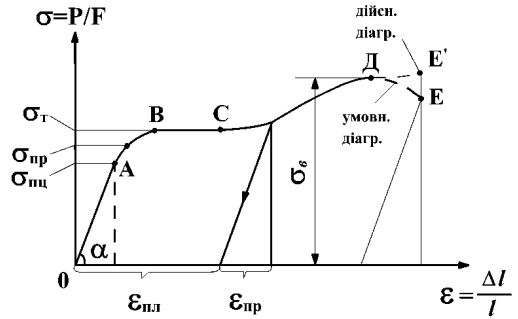
CD – ділянка зміцнення: опір матеріалу зростає;

$D$  – локалізація пластичної деформації і утворення на зразку шийки;

$DE$  – ділянка знеміцнення :  $DE$  - умовна діаграма (без врахування зменшення площі поперечного перерізу);  $DE'$  – “дійсна” діаграма (з врахуванням зменшення площі поперечного перерізу);

$E$  – руйнування зразка.

Розвантаження з будь-якої точки діаграми відбувається по прямій, паралельній  $OA$ . Після розвантаження  $\Delta\lambda_{np}(\varepsilon_{np})$  зникає, а залишається  $\Delta\lambda_{nl}(\varepsilon_{nl})$  (залишкова деформація).



### Характеристики міцності матеріалу

**Границя пропорційності**  $\sigma_{nc}$  – найбільше напруження, до якого зберігається лінійна залежність між напруженнями і деформаціями;  $\sigma_{nc} = P_{nc}/A$ .

**Границя текучості**  $\sigma_T$  – напруження, при якому зразок деформується при постійній розтягувальній силі (напруження, що відповідає площадці текучості);  $\sigma_T = P_T/A$ .

**Границя міцності**  $\sigma_B$  (тимчасовий опір) – напруження, що відповідає максимальній силі  $P$  (найбільше умовне напруження, яке може витримати зразок);  $\sigma_B = P_{max}$

### Характеристики пружності матеріалу

**Модуль пружності**  $E$  – відношення напруження до відносної деформації на пружній ділянці  $OA$ ;  $E = \sigma / \varepsilon = \tan \alpha$ .

**Коефіцієнт Пуассона**  $\mu$  – відношення відносної поперечної деформації до поздовжньої на пружній ділянці;  $\mu = |\varepsilon' / \varepsilon|$ .

### Характеристики пластичності матеріалу

**Відносне залишкове видовження**  $\delta$  після розриву – відношення в процентах приросту довжини зразка після розриву до його початкової довжини:

$$\delta = \Delta l_0 / l \cdot 100\% .$$

**Відносне залишкове звуження після розриву  $\psi$**  – відношення в процентах абсолютного зменшення площі поперечного перерізу в шийці до початкової площі.

$$\Psi = \frac{F_0 - F_{ш}}{F_0} \cdot 100\% ,$$

$F_0$  – початкова площа

$F_{ш}$  – площа в шийці.

Для конструкційних сталей

$$\delta = 8...20\% ; \psi \leq 60\% .$$

Матеріали, для яких  $\delta < 5\%$  , вважають **крижкими**, а для яких  $\delta > 5\%$  – **пластичними**.

Пластичні матеріали руйнуються після великих пластичних деформацій. У крижких пластичні деформації при руйнуванні незначно перевищують пружні деформації.

### **Розрахунок на міцність при розтягу (стиску)**

Небезпечні (граничні) напруження:  $\sigma^0$  ;

для пластичних матеріалів –  $\sigma^0 = \sigma_T$  ;

для крижких матеріалів –  $\sigma^0 = \sigma_s$  .

Допустиме напруження  $[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}$  ,

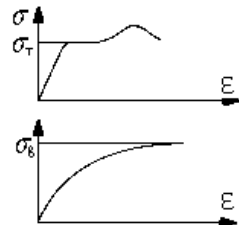
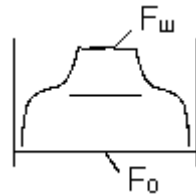
де  $n$  – коефіцієнт запасу міцності.

Коефіцієнт запасу міцності показує,

в скільки разів допустиме напруження менше небезпечного.

На вибір  $n$  впливають наступні фактори:

- 1) стан матеріалу (пластичний, крижкий, неоднорідний і т.д.);
- 2) вид навантаження (статичне, динамічне);
- 3) неточність визначення зовнішнього навантаження;
- 4) наближення розрахункових схем і розрахункових формул;
- 5) відповідальність конструкції (які наслідки після руйнування).



Для пластичних матеріалів:  $[\sigma] = \sigma_T / n_T$ . Коефіцієнт запасу відносно границі текучості  $n_T = 1,4 \dots 1,6$  (в машинобудуванні  $n_T = 1,5$ ).

У деяких випадках допустиме напруження обчислюють за формулою  $[\sigma] = \sigma_a / n_a$ . Коефіцієнт запасу відносно границі міцності  $n_e = 2,4 \dots 2,6$  (в машинобудуванні  $n_e = 2,4$ ; в енергомашинобудуванні –  $n_e = 2,6$ ).

Для крихких матеріалів:  $[\sigma] = \sigma_a / n_a$ ;  $n_e = 2,5 \dots 3,0$ .

Для пластичних матеріалів допустимі напруження на розтяг і стиск однакові,  $[\sigma_p] = [\sigma_c]$

Для крихких матеріалів  $[\sigma_c] > [\sigma_p]$ .

**Умова міцності:**

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq [\sigma]$$

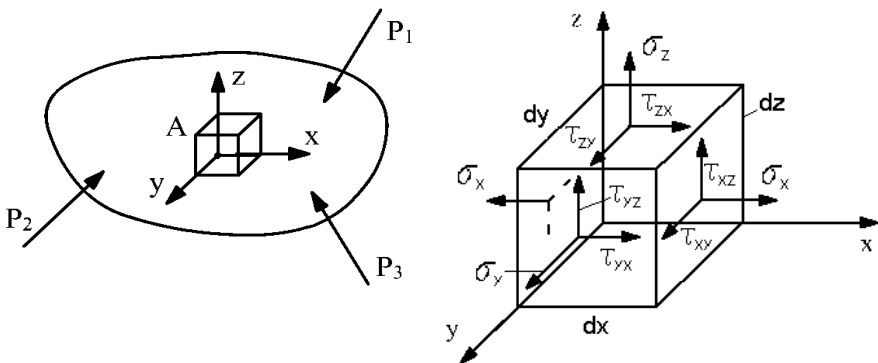
**Умова жорсткості:**

$$\Delta l = \sum \frac{Nl}{EA} \leq [\Delta l]$$

$[\Delta l]$  – допустима величина зміни розмірів.

## Основи теорії напруженого та деформованого стану у точці

Під дією системи зовнішніх сил в кожній точці тіла виникають дотичні та нормальні напруження, що характеризують напружений стан. При зміні площинок, що проведені через дану точку, відбувається зміна напружень. Для того, щоб охарактеризувати напружений стан в точці  $A$ , виділимо навколо неї елементарний паралелепіпед з ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , паралельними відповідним координатним осям. На його гранях діють повні напруження, які можна розкласти на нормальні  $\sigma$  та дотичні  $\tau$ . Кожне дотичне напруження, у свою чергу, можна розкласти на дві складові, що паралельні відповідним координатним осям.



У позначенні нормальних напружень індекс вказує на напрямок нормалі до площини, в якій вони діють, дотичних — перший індекс вказує на напрямок нормалі до площини, другий — на напрямок самого напруження.

Сукупність напружень, що діють на всіх гранях паралелепіпеда, визначає напружений стан в точці, який можна представити у вигляді тензора напружень:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1)$$

Для напружень, що виникають на гранях паралелепіпеда, приймають таке **правило знаків**:

— **нормальні напруження** вважаються **додатними**, якщо вони спричиняють розтяг елемента, **від'ємними** — стиск.

— **дотичні напруження** вважаються **додатними**, якщо вони намагаються повернути елемент за ходом стрілки годинника, **від'ємними** — проти ходу.

### **Закон парності дотичних напружень**

На двох довільних взаємно перпендикулярних площинках, дотичні напруження рівні за величиною і протилежні за знаком.

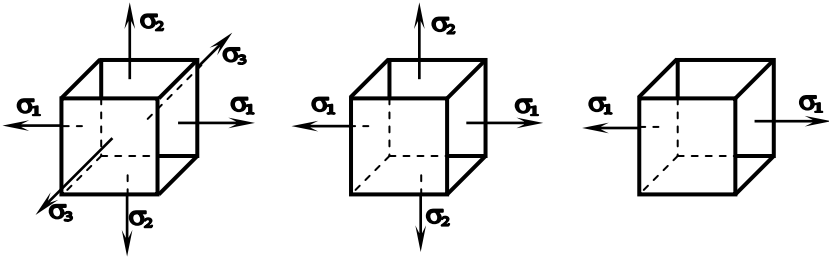
### **Головні площинки, головні напруження.**

Під час зміни напрямку координатних осей напруження на гранях паралелепіпеда змінюються. У точці твердого тіла завжди існують три взаємно перпендикулярні площинки, через які передаються лише нормальні напруження, а дотичні напруження відсутні. Такі площинки називаються **головними**, а напруження, що на них діють — **головними напруженнями**.

Головні напруження позначаються:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ; при цьому  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

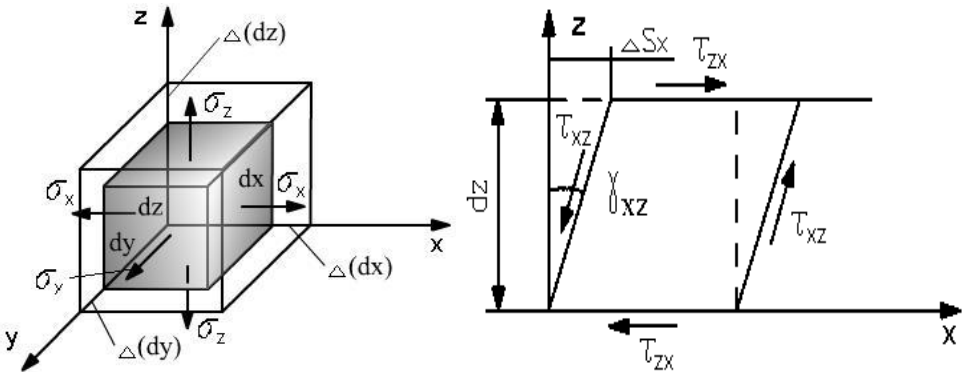
Деякі з головних напружень можуть дорівнювати нулю. У залежності від кількості діючих головних напружень розрізняють наступні види напруженого стану :

- об'ємний (тривісний) — ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ );
- плоский (двовісний) — ( $\sigma_3 = 0, \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$ );
- лінійний (одновісний) — ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 \neq 0$ ).



### **Деформований стан у точці**

Визначимо деформації, що виникають від дії нормальних та дотичних напружень.



Від дії нормальних напружень паралелепіпед змінює свої лінійні розміри. При цьому  $\Delta(dx), \Delta(dy), \Delta(dz)$  – **абсолютні лінійні деформації**,  $\epsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}$ ;  $\epsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}$ ;  $\epsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}$  – **відносні лінійні деформації**.

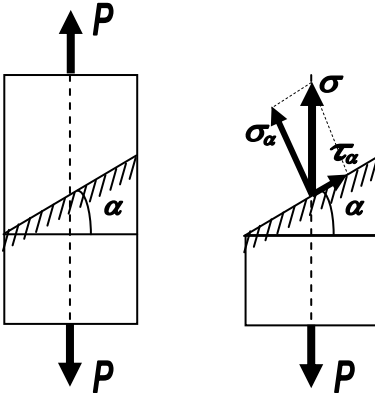
Від дії дотичних напружень відбувається зміна кутів між гранями паралелепіпеда. Тут  $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$  – **абсолютні зсуви**,  $\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  – **кутові деформації** (кути зсуву) в трьох взаємно перпендикулярних площинках.

Між абсолютним зсувом та кутовою деформацією існує зв'язок:  $\operatorname{tg} \gamma_{xz} = \frac{\Delta S_x}{dz}$ . Для малих кутів маємо, що  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ , тому

$$\gamma_{xz} \approx \frac{\Delta S_x}{dz}; \quad \gamma_{yx} \approx \frac{\Delta S_y}{dx}; \quad \gamma_{zx} \approx \frac{\Delta S_z}{dy}.$$

На головних площинках, де діють головні напруження, зсуви відсутні, а відносні лінійні деформації називаються **головними** і позначаються  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

### Напруження на нахилених площинках



Прийmemo **правило**

**знаків:**

$\alpha > 0$ , якщо поворот від вектора головного напруження до нормалі  $\vec{n}_\alpha$  нахиленої площинки відбувається проти ходу стрілки годинника,  $\alpha < 0$  — за ходом стрілки годинника.

Для **лінійного** напруженого стану ( $\sigma_1 = \sigma$ ) напруження на площинці, що нахилена під кутом  $\alpha$  до нормального перерізу,

визначаються (згідно з методом перерізів) за формулами:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha, \quad \text{де } \sigma = \frac{P}{F}. \quad (2)$$

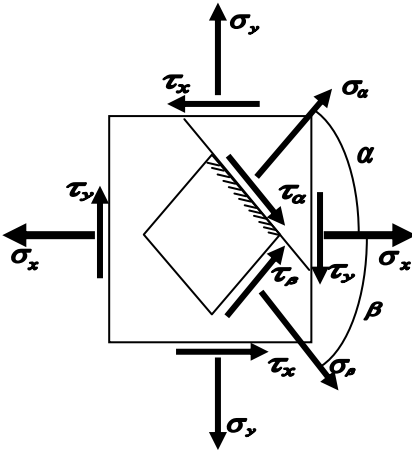
У випадку **плоского** напруженого стану, для визначення якого достатньо задати значення двох нормальних напружень  $\sigma_x, \sigma_y$  та дотичного —  $\tau_x$  (оскільки закон парності дотичних напружень у цьому випадку має вигляд:  $\tau_x = -\tau_y$ ) напруження на нахиленій площинці визначаються на основі залежностей:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_x \sin 2\alpha; \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Відмітимо, що на площинці, нахилений під кутом  $\beta = (90 - \alpha)$ , перпендикулярній до площинки, що нахилена під кутом  $\alpha$ , напруження визначатимуться на основі аналогічних залежностей:

$$\sigma_\beta = \sigma_y \cos^2 \alpha + \sigma_x \sin^2 \alpha + \tau_y \sin 2\alpha; \quad (3')$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha - \tau_y \cos 2\alpha.$$



Сумуючи відповідно перші та другі залежності формул (3) та (3') отримаємо:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y \quad (4)$$

сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площинках не залежить від нахилу цих площадок і є сталою;

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta \quad -$$

закон парності дотичних напружень.

### **Головні напруження та положення головних площинок для плоского напруженого стану**

Для визначення положення головних площинок використовуємо умову відсутності дотичних напружень. Для цього прирівнюємо до нуля другу залежність з формули (3). В результаті отримаємо представлення для визначення положення **головних площинок**:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (5)$$

Підставивши залежність (5) у формули (3) отримаємо значення головних напружень:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \quad (6)$$

### **Площинки зсуву**

Максимальні значення дотичних напружень, що називаються **екстремальними**, досягаються на площинках, які нахилені під кутом  $45^\circ$  до напрямку головних напружень  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  і рівні

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7)$$

Площинки, на яких виникають екстремальні дотичні напруження називаються **площинками зсуву**. У випадку, коли на цих площинках відсутні нормальні напруження, їх називають **площинками чистого зсуву**.

### **Узагальнений закон Гука**

Розглянемо лінійний напружений стан:  $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . При цьому деформований стан буде об'ємний (рис. 8):  $\varepsilon_1 > 0; \varepsilon_2 < 0; \varepsilon_3 < 0$ . Враховуючи закон Гука при осьовому навантаженні будемо мати:

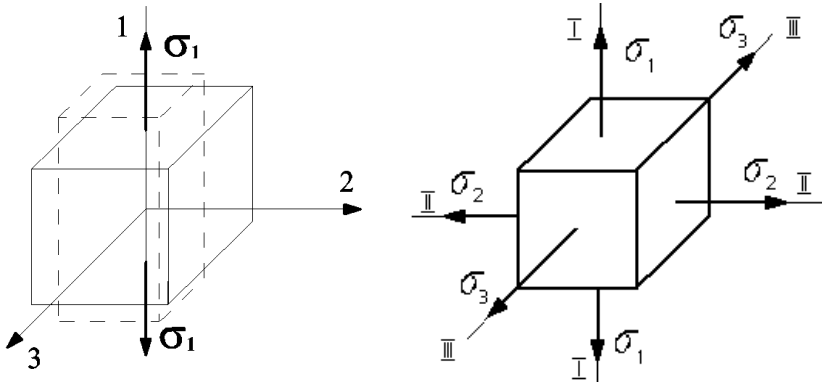
$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1 = -\mu\frac{\sigma_1}{E}. \quad (**)$$

Для об'ємного напруженого стану (рис. 9) на основі принципу суперпозиції деформацію в першому напрямку представимо у вигляді:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1'''$ , де  $\varepsilon_1'$  відносна деформація лише від дії  $\sigma_1$ ,  $\varepsilon_1''$  — лише від дії  $\sigma_2$ ,  $\varepsilon_1'''$  — тільки від дії  $\sigma_3$ . Враховуючи формули (\*\*) для лінійного напруженого стану, отримаємо:

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \varepsilon_1'' = -\mu\frac{\sigma_2}{E}; \varepsilon_1''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E},$$

тому

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}.$$



Аналогічно отримуємо представлення для деформацій  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Залежності між напруженнями та деформаціями за об'ємного напруженого стану утворюють **узагальнений закон Гука**:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\quad (8)$$

### **Зміна об'єму**

Розглянемо призматичний елемент із сторонами  $a, b, c$ , об'єм якого до деформації становив  $V_0 = abc$ . Після навантаження об'єм змінився:

$$\begin{aligned}V &= (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = \\ &\approx V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).\end{aligned}$$

**Відносна зміна об'єму (об'ємна деформація) визначається:**

$$\varepsilon_v = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (9)$$

Підставляючи у (9) значення деформацій  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  з закону Гука (8), одержимо:

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (10)$$

Позначивши середнє напруження  $\sigma_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ , отримаємо:

$$\varepsilon_v = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \sigma_c; \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)},$$

де  $K$  – об'ємний модуль пружності. В результаті матимемо:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_c}{K} \quad \text{або} \quad \sigma_c = K\varepsilon_v \quad (11)$$

– **об'ємний закон Гука.**

### **Потенціальна енергія деформації**

**Потенціальна енергія деформації  $U$**  – це енергія, яка накопичується в тілі за його пружного деформування.

Потенціальна енергія деформації, що приходить на одиницю об'єму, називається **питомою потенціальною енергією деформації** і позначається  **$u$** .

У випадку лінійного напруженого стану питома потенціальна енергія деформації визначається у вигляді:

$u = \frac{\sigma\varepsilon}{2}$ . Проводячи аналогію, можна отримати відповідні

представлення і для об'ємного напруженого стану:

$$u = \frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\varepsilon_3}{2}.$$

Підставляючи в останню залежність значення відносних деформацій  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  з узагальненого закону Гука (8), одержимо:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (12)$$

Питому потенціальну енергію деформації представляють у вигляді суми

$$u = u_v + u_\phi,$$

де  $u_v$  — питома потенціальна енергія зміни об'єму;

$u_\phi$  — питома потенціальна енергія зміни форми, причому

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad \text{або} \quad u_v = \frac{\sigma_c \varepsilon_v}{2}, \quad (13)$$

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] \quad (14)$$

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

## **Критерії (теорії) міцності**

Міцність та надійність конструкції залежить від матеріалу, з якого вона виготовлена та від навантаження, що вона зазнає. Під **міцністю матеріалу** розуміють його здатність протидіяти руйнуванню. Для цього використовують оцінки, визначені основі аналізу напружено-деформованого стану в елементах конструкції.

Завданням теорії міцності є формування умов виникнення в елементах конструкцій граничних напружених станів за довільних навантажень (складного напруженого стану), коли відомі механічні характеристики матеріалу, отримані за його випробування в умовах лінійного деформування.

Результати експериментальних та теоретичних досліджень показують, що успішність застосування теорій міцності залежить від матеріалів – крихких чи пластичних, та від виду руйнування – крихкого чи пластичного. У якості основного критерію такого дослідження обирають величину залишкової деформації при руйнуванні.

**Крихким** називають таке руйнування твердих тіл, коли пластичні деформації після руйнування не перевищують пружних, а граничний опір матеріалу пов'язаний із досягненням границі міцності. Руйнування у цьому випадку відбувається відривом однієї частини тіла від іншої. Граничне напруження для такого виду руйнування є границя міцності (тимчасовий опір).

**Пластичним** вважається руйнування, пов'язане з великими пластичними деформаціями, що в десятки разів перевищують пружні деформації. За такого руйнування граничний стан пов'язують з границею текучості, а саме руйнування відбувається шляхом зсуву (зрізу). Тому граничним напруженням слід вважати напруження, що відповідає границі текучості матеріалу.

За лінійного напруженого стану діє одне головне напруження  $\sigma$ . Умова міцності у цьому випадку записується у вигляді

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma],$$

де  $[\sigma]$  — допустиме напруження.

За плоского та об'ємного напружених станах діють декілька головних напружень:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Тому і записати умову міцності не просто. Ця задача розв'язується введенням **критеріїв міцності**.

**Критерій міцності** — це величина (напруження, деформація, потенціальна енергія, комбінація напруження і т.д.), що відповідає за руйнування (критичний стан) матеріалу.

Вважається, що небезпечний стан для матеріалу за будь-якого виду навантаження настає тоді, коли критерій міцності досягає граничної величини. Граничне значення критерію визначають експериментально за певного виду напруженого стану (як правило під час розтягу, стиску або кручення).

### **Класичні критерії міцності**

**1) Критерій найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності)**. Відповідно до цієї теорії, руйнування настає тоді, коли найбільше за абсолютною величиною нормальне напруження досягає граничного значення.

Умова руйнування має вигляд:

$$|\sigma_{\max}| = \sigma_i,$$

де  $\sigma_n$  — небезпечне значення напружень.

Умова міцності для пластичних матеріалів записується у вигляді:

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma], \quad (15)$$

де  $[\sigma]$  — допустиме напруження.

Для крихких матеріалів (з неоднаковими властивостями на розтяг і стиск) умови міцності формулюються:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq [\sigma_p], \\ |\sigma_3| &\leq [\sigma_c]. \end{aligned} \quad (16)$$

Тут  $[\sigma_p]$ ,  $[\sigma_c]$  — допустимі напруження на розтяг та стиск відповідно.

До недоліків даної теорії відносять не врахування впливу двох інших напружень  $\sigma_2, \sigma_3$ .

Перша теорія міцності використовується для розрахунку на міцність деталей з крихких матеріалів (кераміка, загартована сталь, камінь, цегла та ін.)

**2) Критерій найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності).** За цією теорією руйнування матеріалу в загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли найбільше лінійне відносне видовження  $\varepsilon_{\max}$  досягає граничного значення  $\varepsilon_n$ .

Умова руйнування записується у вигляді:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_i,$$

а умова міцності —

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon],$$

де  $[\varepsilon]$  — допустиме значення лінійної деформації.

Для об'ємного напруженого стану за узагальненим законом Гука (8) максимальне значення відносної лінійної деформації становить:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

де  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коефіцієнт Пуассона.

Враховуючи, що за лінійного напруженого стану допустиме значення відносної лінійної деформації згідно з законом Гука виражається:

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma_p]}{E},$$

де  $[\sigma_p]$  — допустиме напруження на розтяг, то умова міцності за II теорією матиме вигляд:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma_p]. \quad (17)$$

Еквівалентне напруження у цьому випадку запишеться:

$$\sigma_{еквII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (18)$$

Застосування другої теорії міцності недопустиме для матеріалів, що не відповідають закону Гука або тих, що перебувають за границею пропорційності.

Область використання цієї теорії – крихкі стани матеріалів (високоміцна сталь, легований чавун), для яких справедливий закон Гука.

**3) Критерій найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності).** Тут критерієм міцності вважають найбільші дотичні напруження. Згідно з цією теорією міцності небезпечний стан (руйнування або виникнення пластичних деформацій) настає тоді, коли найбільше дотичне напруження  $\tau_{\max}$  досягає граничного значення  $\tau_n$ .

Умова міцності для III теорії записується у вигляді:

$$\tau_{\max} \leq [\tau],$$

де  $[\tau]$  – значення допустимих дотичних напружень матеріалу.

Для об'ємного напруженого стану максимальні значення дотичних напружень згідно формули (7) визначається:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

За лінійного напруженого стану максимальні дотичні напруження становлять:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2},$$

тому допустимі дотичні напруження рівні:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Звідси можна записати умову міцності за III-ю теорією:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (19)$$

та формулу для визначення еквівалентного напруження:

$$\sigma_{\text{екв}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (20)$$

Недоліком III теорії є те, що вона не враховує вплив на міцність проміжного головного значення  $\sigma_2$ .

Теорія найбільших дотичних напружень добре підтверджується дослідами для пластичних матеріалів. Цей критерій розглядають як умову виникнення пластичних (залишкових) деформацій.

**4) Критерій питомої потенціальної енергії зміни форми (четверта теорія міцності).** Відповідно до цієї теорії небезпечний стан (руйнування або виникнення пластичних деформацій) настає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми  $u_\phi$ , накопленої деформованим елементом, досягає граничного значення  $[u_\phi]$ .

Умова міцності для цього випадку формулюється у вигляді:

$$u_\phi \leq [u_\phi].$$

У випадку об'ємного напруженого стану питома потенціальна енергія формозміни визначається на основі залежностей (14):

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

де  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коефіцієнт Пуассона.

За лінійного напруженого стану формули для визначення питомої та допустимої питомої потенціальної енергії зміни форми мають вигляд:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} \sigma^2; [u_\phi] = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma]^2.$$

Умова міцності за IV-ю теорією записується:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma], \quad (21)$$

а еквівалентні напруження визначаються:

$$\sigma_{еквIV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (22)$$

Для плоского напруженого стану ( $\sigma_3 = 0$ ) матимемо:

$$\sigma_{еквIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}.$$

Експерименти добре підтверджують четверту теорію для пластичних матеріалів. Вона визначає більш точно появу в матеріалі малих пластичних деформацій, ніж третя теорія.

**5) Критерій Мора** базується на припущенні, що міцність матеріалу у загальному випадку напруженого

стану залежить від значення та знаку найбільшого  $\sigma_1$  та найменшого  $\sigma_3$  головних напружень.

Умова міцності згідно до цього критерію записується у вигляді:

$$\sigma_1 - \chi\sigma_3 \leq [\sigma_p], \quad (\chi = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}), \quad (23)$$

де  $[\sigma_p]$ ,  $[\sigma_c]$  – допустимі напруження на розтяг та стиск відповідно.

При  $\chi = 1$  (для пластичних матеріалів) критерій Мора збігається з критерієм найбільших дотичних напружень (19).

Недоліком критерію Мора, аналогічно до третьої теорії міцності, є те, що не враховується вплив на міцність проміжного головного значення  $\sigma_2$ .

Областю використання критерію Мора є крихкі матеріали, що мають різний опір розтягу і стиску.

### **Нові критерії міцності**

**Критерій Писаренка-Лебедева.** Представником нових критеріїв міцності, запропонованих, в основному, для крихких матеріалів, є критерій Писаренка-Лебедева, згідно з яким настання граничного стану матеріалу обумовлене його здатністю чинити опір як нормальним, так і дотичним напруженням.

Умова міцності для цього критерію записується у вигляді:

$$\chi\sigma_i + (1 - \chi)\sigma_1 \approx [\sigma_p], \quad (24)$$

де  $\sigma_i$  – інтенсивність напружень,  $\sigma_i = \sigma_{еквIV}$ ;  $\chi = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$ ,  $[\sigma_p]$ ,  $[\sigma_c]$  – допустимі напруження на розтяг та стиск відповідно.

Для пластичних матеріалів  $\chi = 1$  і критерій Писаренка-Лебедева збігається з критерієм IV теорії міцності (21) – (22):  $\sigma_{еквIV} \leq [\sigma_p]$ .

Для крихких матеріалів допустимі напруження на розтяг набагато менші допустимих напружень на стиск:

$[\sigma_p] \ll [\sigma_c]$ , тому  $\chi = 0$  і критерій збігається з критерієм I теорії міцності (16):  $\sigma_1 \leq [\sigma_p]$ .

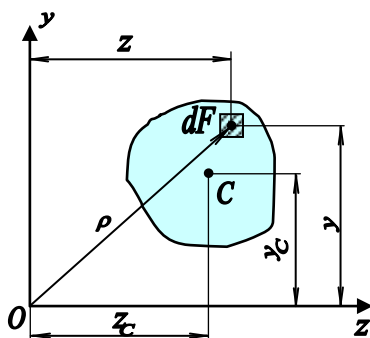
Дослідна перевірка показала, що критерій добре узгоджується з результатами випробувань широкого класу конструкційних матеріалів.

## Геометричні характеристики плоских перерізів

При різних видах навантаження: розтязі (стиску), згині, зсуві та крученні стрижнів напруження та деформації виражаються через деякі величини, що залежать від форми, та розмірів поперечного перерізу. Ці геометричні величини носять назву **геометричних характеристик** поперечного перерізу. Такими характеристиками, крім площі поперечного перерізу, є статичні моменти, моменти інерції, моменти опору та радіуси інерції.

Вміння визначати геометричні характеристики є необхідним для розрахунків стрижнів на міцність та жорсткість за різних видів навантажень.

Розглянемо поперечний переріз стрижня, для якого відомо положення центру ваги  $C$ . Віднесемо його до системи координат  $y, z$ . Визначимо координати центру ваги  $y$  у вибраній системі  $C(z_c, y_c)$ . Виділимо елемент площі  $dF$  з координатами  $z, y$ . Позначимо через  $\rho$  відстань від початку координат до центру вибраного елемента площі – полярну відстань.



### **Статичні моменти**

**Статичними моментами** перерізу відносно осей  $y, z$  (рис. 11) називаються величини

$$S_y = \int_F z dF; \quad S_z = \int_F y dF, \quad (1)$$

де  $F$  – площа фігури,  $y, z$  – відстані до відповідних осей.

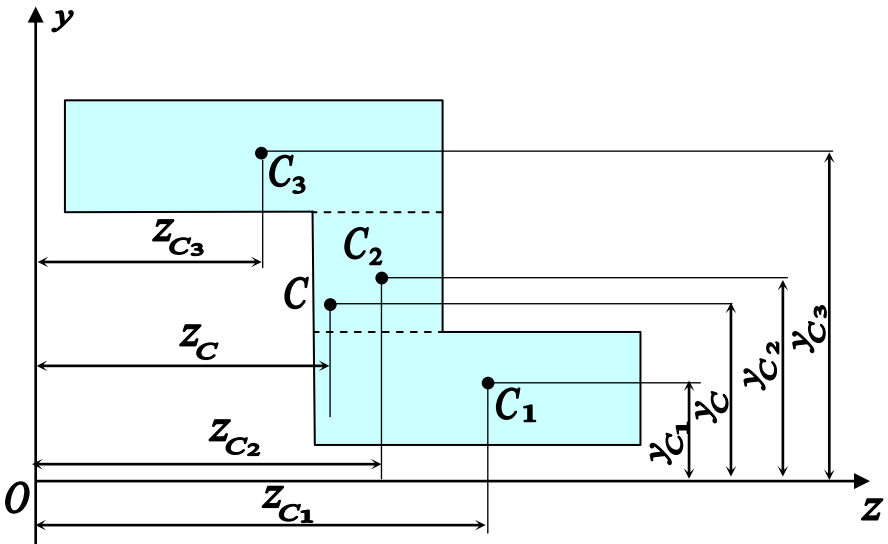
Якщо відомо положення центра ваги перерізу – його координати  $(z_c, y_c)$ , то співвідношення (1) можна записати у вигляді:

$$S_y = z_c \cdot F ; S_z = y_c \cdot F . \quad (2)$$

Статичні моменти є величинами третього порядку, тобто вимірюються у  $\text{мм}^3, \text{см}^3, \text{м}^3$ .

Статичний момент складної фігури визначається як сума статичних моментів складових частин, причому отвори і вирізи можна розглядати як площі з від'ємним знаком:

$$S_y = \sum_{i=1}^n z_{C_i} \cdot F_i ; S_z = \sum_{i=1}^n y_{C_i} \cdot F_i . \quad (3)$$



### **Положення центру ваги**

Положення центру ваги складного перерізу, що можна розкласти на складові частини, для кожної з яких відома площа  $F_i$  та координати центра ваги  $(z_{C_i}, y_{C_i})$ , визначається за формулами:

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot z_{C_i}}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{z_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{C_i}}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

Осі, які проходять через центр ваги перерізу, називаються **центральними осями**. Очевидно, що відносно центральних осей статичні моменти дорівнюють нулю.

При визначенні положення центру ваги доцільно використовувати **правило симетрії**:

1) якщо переріз має вісь симетрії, то статичний момент відносно цієї осі дорівнює нулю;

а) вісь симетрії завжди є центральною віссю перерізу;

б) центр ваги перерізу завжди лежить на його осі симетрії, якщо вона є.

### **Моменти інерції**

Геометрична характеристика, яка чисельно дорівнює інтегралові

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF \quad (5)$$

називається **полярним моментом інерції** плоскої фігури з площею  $F$  відносно точки  $O$  (рис. 1).

Геометричні характеристики, що чисельно дорівнюють інтегралам

$$J_z = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F z^2 dF \quad (6)$$

називаються **осьовими моментами інерції** плоскої фігури відносно осей  $y, z$ .

Залежність між полярним та осьовими моментами інерції має вигляд:

$$J_\rho = J_z + J_y \quad (7)$$

Полярний і осьові моменти інерції набувають лише додатних значень; вимірюються в одиницях четвертого порядку:  $m^4$ ,  $см^4$ ,  $мм^4$ .

**Відцентровим моментом інерції** плоскої фігури (рис. 1) називається геометрична характеристика, яка чисельно дорівнює інтегралові

$$J_{yz} = \int_F z \cdot y \cdot dF. \quad (8)$$

Відцентровий момент інерції може набувати додатних і від'ємних значень, а також дорівнювати нулеві. Розмірність – одиниця довжини у четвертому степені.

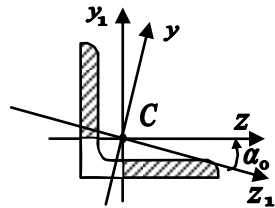
Для складного перерізу (рис. 2) момент інерції (відцентровий, осьовий чи полярний) є сумою моментів інерції складових частин відносно вибраної системи координат:

$$J_z = \sum_{i=1}^n J_z^{(i)}, \quad J_y = \sum_{i=1}^n J_y^{(i)}, \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^n J_{yz}^{(i)}, \quad J_\rho = \sum_{i=1}^n J_\rho^{(i)}. \quad (9)$$

Для випадку складних перерізів, що утворюються шляхом відтинання складових частин у рівності (9) використовують знак «мінус» для моментів інерції відсічених частин.

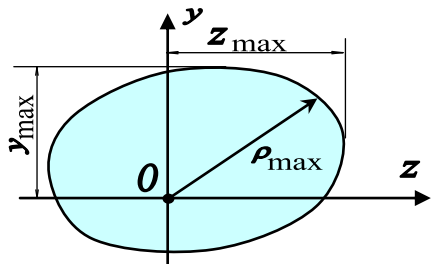
**Правило знаків відцентрового моменту інерції для кутника:** знак відцентрового моменту буде визначатися знаком моментів

заштрихованих частин кутника, які більші від моменту не заштрихованої частини. Якщо розглянути рис. 3., заштриховані частини кутника знаходяться у другій і четвертій чвертях координатної системи, їх відцентрові моменти інерції від'ємні, отже і відцентровий момент інерції таким чином розміщеного кутника мусить бути від'ємним.



### Моменти опору

Геометричні характеристики, що визначаються відношенням моментів інерції перерізу відносно осей z, y до максимальної відстані від точок перерізу до цих осей називаються **осьовими моментами опору**:



$$W_y = \frac{J_y}{z_{\max}}; W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} \quad (10)$$

**Полярним моментом опору** перерізу називається відношення полярного моменту інерції перерізу до максимальної полярної відстані:

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}} \quad (11)$$

Для моментів опору складених перерізів не можна використовувати принцип суперпозиції, аналогічний до рівності (9).

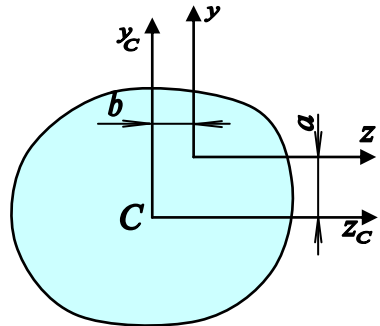
### **Радіуси інерції**

Осьові моменти інерції можна представити у вигляді добутку площі перерізу на квадрат **радіусів інерції**, тому **радіуси інерції** визначаються:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}, i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \quad (12)$$

### **Залежність між моментами інерції при паралельному переносі та при повороті осей.**

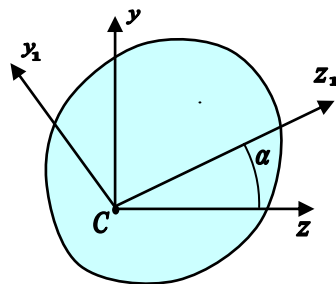
Якщо відома величина моментів інерції перерізу відносно центральних осей  $z_c, y_c$ , то моменти інерції відносно довільних осей  $z, y$ , паралельних до заданих центральних осей  $z_c, y_c$ , обчислюються за формулами:



$$\begin{aligned} J_z &= J_{z_c} + a^2 \cdot F; \\ J_y &= J_{y_c} + b^2 \cdot F; \\ J_{yz} &= J_{y_c z_c} + ab \cdot F, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $a, b$  — відстані між осями  $z_c, y_c$  та  $z, y$ ;  $F$  — площа поперечного перерізу.

Якщо відома величина моментів інерції перерізу відносно центральних осей  $z_1, y_1$ , то моменти інерції відносно осей  $z, y$  повернутих на кут  $\alpha$  відносно осей  $z_1, y_1$  обчислюються за формулами:



$$J_z = J_{z_1} \cos^2 \alpha + J_{y_1} \sin^2 \alpha - J_{y_1 z_1} \sin 2\alpha;$$

$$J_y = J_z \sin^2 \alpha + J_{y_1} \cos^2 \alpha + J_{y_1 z_1} \sin 2\alpha; \quad (14)$$

$$J_{yz} = \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_1 z_1} \cos 2\alpha.$$

При повороті осей сума осьових моментів не змінюється:

$$J_y + J_z = J_{y_1} + J_{z_1} \quad (15)$$

Залежності, виражені формулами (15), існують при повороті будь-яких осей, а не тільки центральних.

## Головні центральні осі інерції та головні моменти інерції

Існують такі центральні осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулеві. Це **головні центральні осі**. Відносно цих осей осьові моменти інерції набувають екстремальних значень.

Тому, **головними осями інерції** плоскої фігури називаються такі дві взаємно перпендикулярні осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулеві. Головні осі інерції, початок координат яких збігається з центром ваги фігури, називаються **головними центральними осями інерції**.

Якщо переріз має дві осі симетрії (або безліч осей симетрії), то ці осі є головними центральними. У перерізах, що мають одну вісь симетрії, то ця вісь і перпендикулярна до неї центральна вісь будуть головними центральними осями. Якщо переріз не має осей симетрії, то положення головних

центральных осей відносно довільних центральних осей  $z_c, y_c$  характеризується кутом  $\alpha$ , що знаходиться із співвідношення :

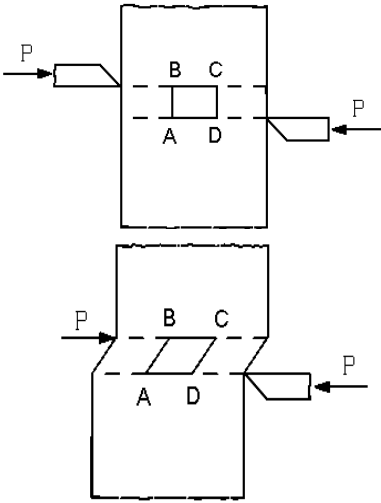
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{y_c z_c}}{J_{z_c} - J_{y_c}}. \quad (16)$$

Рівняння (16) має у межах  $(0; -\pi)$  два корені, а саме гострий і тупий кути, які відрізняються на  $\frac{\pi}{2}$ . Додатні кути  $\alpha_0$  відкладаються проти ходу стрілки годинника, від'ємні — за ходом.

**Головними моментами інерції** плоскої фігури називаються осьові моменти інерції, визначені відносно її головних центральних осей. Величини головних моментів інерції набувають екстремальних значень у порівнянні з моментами інерції відносно будь-яких центральних осей і знаходяться з співвідношення:

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{z_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{y_c z_c}^2}. \quad (17)$$

## Зсув



**Зсув** виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельних плоских перерізи один відносно другого при незмінній відстані між ними.

З шести внутрішніх силових факторів, що можуть діяти в перерізах стрижня, при зсуві відрізняються від нуля тільки поперечні сили  $Q_y$  і  $Q_z$ . Використовуючи метод перерізів маємо  $Q = P$ , де  $Q$  – рівнодійна поперечних сил.

### Напруження при зсуві

Розглянемо поперечний переріз стрижня. На кожну елементарну площадку  $dA$  діє сила  $\tau dA$ . Рівнодійна цих сил складає поперечну силу  $Q$ . В розрахунках приймають, що дотичні напруження  $\tau$  розподіляються рівномірно, тоді:

$$Q = \tau A; \tau = Q / A.$$

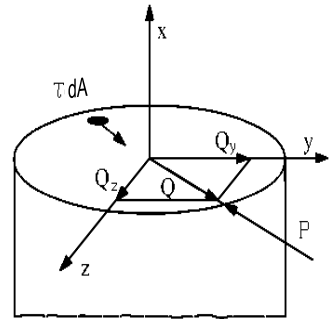
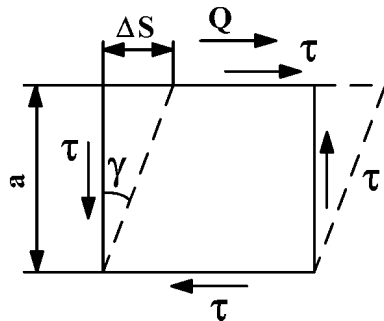
### Деформації при зсуві

$\Delta S$  – абсолютний зсув;  $\gamma$  – кутова деформація (кут зсуву);

$$tg \gamma = \frac{\Delta S}{a}; tg \gamma \approx \gamma; \gamma = \frac{\Delta S}{a}.$$

### Закон Гука при чистому зсуві

Дотичні напруження пропорційні кутовій деформації,



$$\tau = G \gamma,$$

$G$  – модуль пружності при зсуві (модуль зсуву, модуль пружності 2-Закон Гука можна представити в іншому виді:

$$\Delta S = \frac{Qa}{FG}.$$

### Умова міцності

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau].$$

$[\tau] \approx 0,6[\sigma_p]$  – для пластичних матеріалів;

$[\tau] \approx 0,7...0,8[\sigma_p]$  – для крихких матеріалів.

### Розрахунок заклепкових з'єднань

Дано: сила  $P$ ; товщина листів  $\delta$ ; кількість заклепок –  $n$ .

Обчислити діаметр заклепок.

#### Розрахунок заклепок на зріз:

$$\tau = \frac{Q}{F} \leq [\tau];$$

$$Q = P; F = \frac{\pi d^2}{4} n;$$

$$\frac{4P}{\pi d^2 n} \leq [\tau].$$

Розрахунок заклепок і листів на зминання (проводять наближено):

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{F_{зм}}; F_{зм} = d\delta n; \sigma_{зм} = \frac{P}{d\delta_{\min} n} \leq [\sigma_{зм}]; d \geq \frac{P}{\delta_{\min} [\sigma_{зм}] n};$$

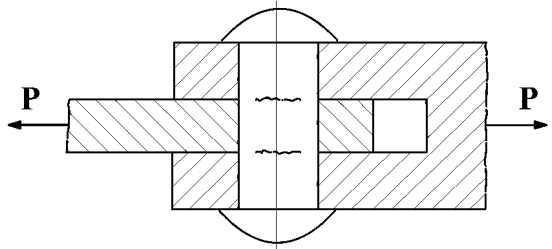
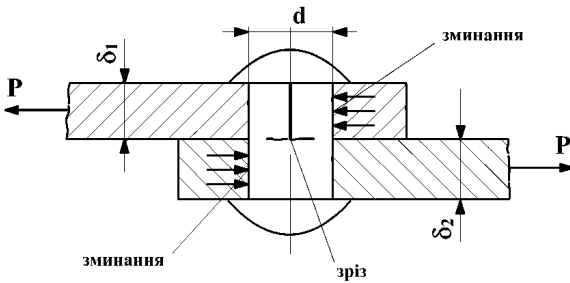
$$[\sigma_{зм}] = (2...2,5)[\sigma_p].$$

З розрахунку на зріз і зминання вибирають більший діаметр.

Якщо заклепки зрізаються по  $i$  площинах (на рис.  $i=2$ ), тоді площа зрізу усіх заклепок

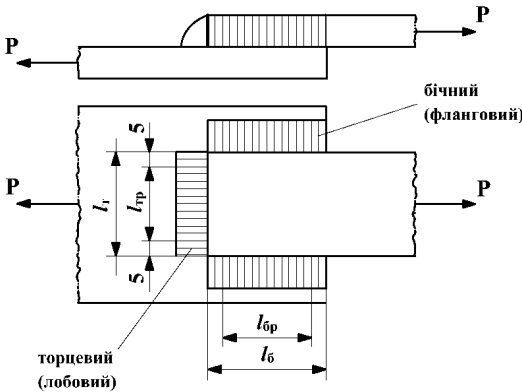
$$F = \frac{\pi d^2}{4} ni, d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi [\tau] ni}}.$$

### Розрахунок зварних з'єднань, виконаних кутовими швами



Типи зварних швів: стикові та кутові (валикові). Стикові шви розраховуються на розтяг, а кутові – на зріз.

### **Розрахунок кутових швів.**



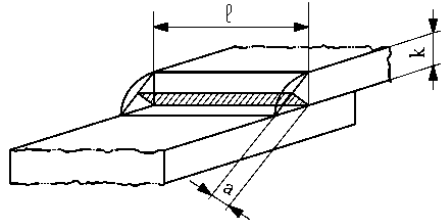
Зварні шви бувають **торцеві** (перпендикулярні до напрямку дії сили) та **бічні** (паралельні напрямку дії сили). Вважаючи, що шов зрізається по його мінімальному поперечному перерізу, одержимо розрахункову площу зрізу

$$F = a\lambda_p.$$

$a = k \cos 45^\circ \approx 0,7k$  ;  $k$  – катет

шва.  $F = 0,7k\lambda_p$  ;  $\lambda_p = \lambda - 10\text{мм}$  ,

$\lambda_p$  – розрахункова, а  $\lambda$  – фактична довжина шва,  $10$  мм враховує непровар шва з двох його кінців.



Умова міцності одного шва 
$$\tau = \frac{P}{0,7k(\lambda - 10\text{мм})} \leq [\tau_e],$$

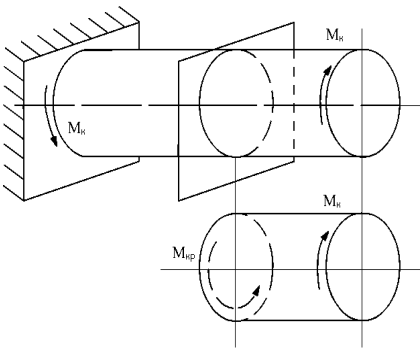
де  $[\tau_e]$  - допустиме напруження для зварних швів.

Для випадку, представленою на рисунку

$$\tau = \frac{P}{\sum F} = \frac{P}{0,7k_T(\lambda_T - 10\text{мм}) + 2 \cdot 0,7k_B(\lambda_B - 10\text{мм})} \leq [\tau_e].$$

## Кручення

**Кручення** – це такий вид деформації стрижня, який спричиняється моментами, що діють в площині, перпендикулярній до його осі.



Методом поперечних перерізів визначаємо, що внутрішній силовий фактор – крутний момент  $M_{кр}$ .  $M_{к1}, M_{к2}, \dots$  – зовнішні моменти;  $M_{кр1}, M_{кр2}, \dots$  – внутрішні моменти.

**Крутний момент** в будь-якому поперечному перерізі дорівнює сумі зовнішніх моментів, взятих по одну сторону від перерізу. Причому  $M_{кр}$  вважається додатнім, якщо при спостереженні зі сторони перерізу він повертає частину вала проти годинникової стрілки.

Для побудови епюри розбиваємо вал на ділянки.

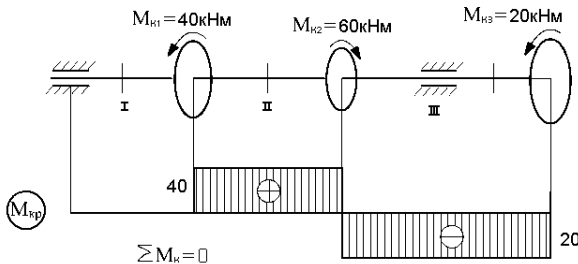
I діл.  $M_{крI} = 0$ ;

II діл.  $M_{крII} = M_{к1} = 40 \text{ кНм}$ ;

III діл.  $M_{крIII} = M_{к1} - M_{к2} = -M_{к3} = -20 \text{ кНм}$ .

Якщо задано потужність  $N$ , Вт на шківі чи шестерні, насаджених на валу, і частоту обертання  $n$ , об/хв або кутову швидкість вала  $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$ , крутний момент можна знайти за

формулами  $M_{кр} = 9550 \frac{N}{n} (\text{Нм})$ ;  $M_{кр} = \frac{N}{\omega} (\text{Нм})$ .



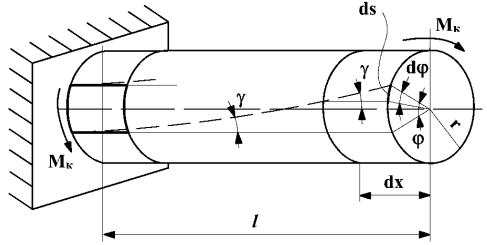
## Напруження і деформації при крученні круглих валів

Циліндричний вал навантажено крутним моментом  $M_{кр}$ . В закріпленні виникає момент реакції опори, рівний  $M_{ед}$ . Система знаходиться в рівновазі.

При крученні твірна стає спіральною лінією.

$\varphi$  – кут закручування ;

$\theta = \frac{\varphi}{\lambda}$  – відносний кут закручування;  $\gamma$  – кут зсуву.



**Закон Гука при крученні:**  $\theta = \frac{M_{кр}}{GI_p}$ ,

де  $GI_p$  – жорсткість поперечного перерізу при крученні.

$$\varphi = \theta\lambda; \quad \varphi = \frac{M_{кр}\lambda}{GI_p}.$$

**Напруження при крученні:**  $\tau = \frac{M_{кр}\rho}{I_p}$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_p} r; \quad \frac{I_p}{r} = W_p - \text{полярний момент опору}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}$$

### Умова міцності

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau].$$

$$\text{Суцільний вал: } W_p = \frac{I_p}{d/2}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Трубчастий (стрижень) вал:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad \alpha = \frac{d_1}{d}; \quad W_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

### Умова жорсткості

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GIp} \leq [\theta]_{max}$$

Допустимі відносні кути повороту:

$[\theta] = 0,3 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  - статичне навантаження;

$[\theta] = 0,25 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  - змінне навантаження;

$[\theta] = 0,15 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  - ударне навантаження.

## Згин

Багато деталей машин працює на згин (вали, осі, важелі, балки перекриття, кранів тощо). **Балка** – прямолінійний стержень, що працює на згин.

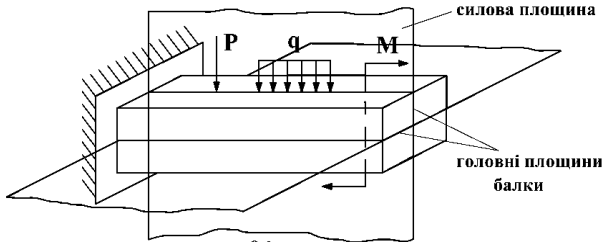


рис. 8.1.

Площини, що проходять через головні центральні осі інерції поперечних перерізів балки, називають **головними**.

Згин, при якому всі сили лежать в одній площині, що збігається з однією з головних площин балки, називається **плоским згином**.

На розрахунковій схемі балку заміняють віссю.

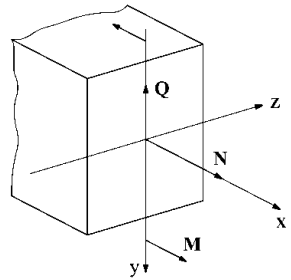
### Поперечні сили і згинальні моменти

При плоскому згині внутрішні сили:

$Q_y = Q$  – поперечна сила;

$M_z = M$  – згинальний момент.

**Поперечна сила** в будь-якому перерізі балки дорівнює сумі проєкцій на вісь  $Y$  усіх зовнішніх сил (включаючи реакції опор), що діють з однієї сторони від перерізу. При цьому сили, що намагаються повернути розглядувану частину балки відносно перерізу за годинниковою стрілкою, беруться зі знаком **плюс**, проти годинникової стрілки – зі знаком **мінус**.



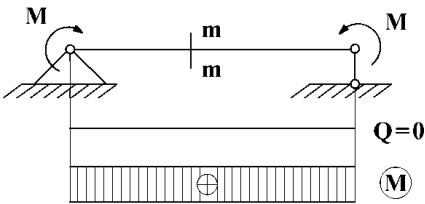
**Згинальний момент** в перерізі балки дорівнює сумі моментів відносно перерізу всіх зовнішніх сил, що діють з однієї сторони від перерізу. Моменти, що намагаються зігнути балку вгору (стискають верхні волокна), беруться зі знаком **плюс**. Моменти, що намагаються зігнути балку вниз

(стискають нижні волокна), беруться зі знаком **мінус**. Тобто епюра моментів будується зі сторони стиснутих волокон.

При згині частина волокон перерізу балки стискаються, частина — розтягується. Геометричне місце точок, що не змінюють своєї довжини називаються **нейтральним шаром**.

**Нормальні напруження при згині прямого стрижня**

Розглянемо випадок, коли в поперечних перерізах діє тільки згинальний момент  $M$ , а поперечна сила відсутня:  $Q = 0$ .



**Формула Нав'є:**

$$\sigma = \frac{M}{I_z},$$

де  $I_z$  — осьовий момент перерізу.

За формулою Нав'є напруження по висоті перерізу змінюються

за лінійним законом і досягають максимальних значень у

крайніх волокнах:  $\sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W}$ .

Величина  $I_z / y_{\max} = W$  - момент опору перерізу.

**Дотичні напруження при згинанні**

Наявність дотичних напружень  $\tau$  при згині зумовлює поперечна сила  $Q$ . Ці напруження визначаються за формулою **Журавського**:

$$\tau = \frac{QS_z(y)}{I_z b}.$$

Тут  $S_z(y)$  — статичний момент відсіченої частини перерізу.

**Розрахунок на міцність при згині**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \text{ — у крайніх точках перерізу.}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{z \max}}{I_z b} \leq [\tau] \text{ — біля нейтрального шару.}$$

## Складний опір

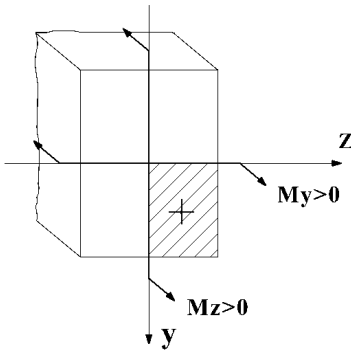
Розтяг, стиск, кручення, згин спричиняються простими видами навантаження. **Складне навантаження** – це комбінація простих видів навантаження.

Опір матеріалів дії різних комбінацій простих навантажень називається **складним**.

Види складного опору:

1. Косий і складний згин.
2. Згин з розтягом (стиском).
3. Позацентровий розтяг (стиск).
4. Згин з крученням.

Для визначення напружень використовують принцип суперпозиції: напруження при складному опорі представляють як суму напружень, спричинених кожним видом простого навантаження окремо.



При обчисленні напружень використовують наступне правило знаків для згинальних моментів: згинальний момент будемо вважати додатнім, якщо він викликає в точці першого квадранта розтягуювальні

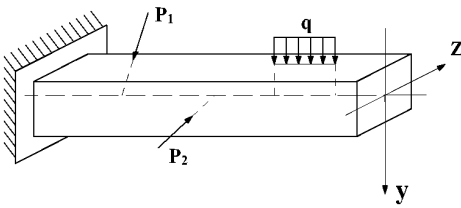
напруження.

### Косий і складний згин

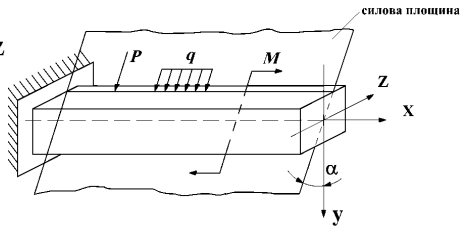
Згин, при якому всі зусилля діють в одній площині, що проходить через вісь балки, але не збігається з головними площинами балки, називається **косим**.

**Складний згин** створюється силами і моментами, що діють в різних площинах, які проходять через вісь балки.

Оскільки при складному згині вісь балки не є плоскою кривою, цей згин називається ще **неплоским** або **просторовим**.



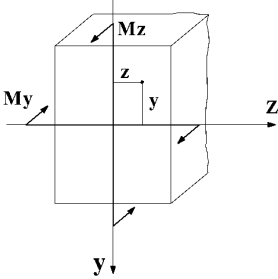
складний згин



косий згин

## Напруження при косому і складному згині.

В кожній із головних площин будемо епюри згинальних моментів  $M_Y, M_Z$ . Нормальні напруження в точці з координатами  $Y, Z$  в будь-якому перерізі визначаємо як суму напружень, спричинених моментами  $M_Y, M_Z$ , що діють в цьому перерізі:



$$\sigma = \frac{M_Z}{I_Z} Y + \frac{M_Y}{I_Y} Z.$$

Величина  $M_Z$  і  $M_Y$  визначається за епюрами. Напрямок дії моментів в перерізі визначаються по розміщенні епюр, які будуються на стиснутих волокнах. У формулі для визначення напружень  $M_Z, M_Y, y, z$  підставляються зі своїми знаками.

### Положення нейтральної лінії

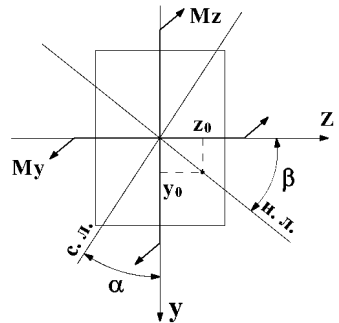
Геометричне місце точок, де напруження рівні нулю називається **нейтральною лінією перерізу**.

Положення нейтральної лінії визначається:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Y_0}{Z_0} = -\frac{M_Y}{M_Z} \frac{I_Z}{I_Y} = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_Z}{I_Y}.$$

Нейтральна лінія проходить через центр перерізу і повернута на  $\angle \beta$  відносно осі  $Z$  в ту ж сторону, в яку силова лінія повернута відносно осі  $Y$  на кут  $\alpha$ .

В загальному випадку нейтральна лінія не перпендикулярна до силової лінії. Тільки для поперечних



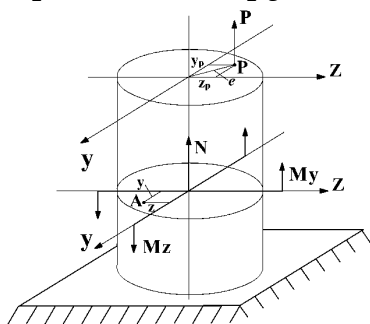
перерізів, у яких  $I_z$ ,  $I_y$  (квадрат, круг), нейтральна лінія перпендикулярна до силової лінії ( $\alpha = \beta$ ).

### Умова міцності при косому згині

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

### Позацентровий розтяг (стиск) прямого бруса

**Позацентровий розтяг (стиск)** має місце тоді, коли брус розтягується (стискується) силами, рівнодійна яких паралельна осі бруса, але не збігається з віссю.



Точка прикладання рівнодійної осевих сил називається полюсом сили і позначається  $P$ .

$Y_p, Z_p$  – координати полюса;

$e$  – ексцентриситет.

У будь-якому перерізі бруса діють:

$$N = P; \quad M_y = PZ_p; \quad M_z = PY_p.$$

Напруження в точці  $A$  з координатами  $Y, Z$  визначаються:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{PY_p}{I_z} Y + \frac{PZ_p}{I_y} Z,$$

де сила і координати підставляються зі своїми знаками.

Останню формулу можна представити у іншому вигляді:

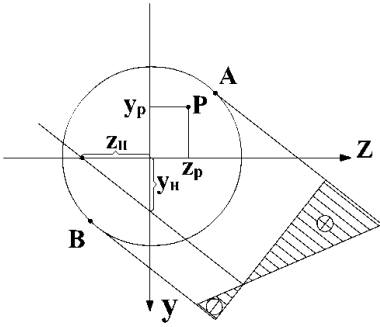
$$\sigma = \frac{P}{\bar{A}} \left( 1 + \frac{Y_p}{i_z^2} Y + \frac{Z_p}{i_y^2} Z \right),$$

де  $i_z = \sqrt{I_z / \bar{A}}$ ;  $i_y = \sqrt{I_y / \bar{A}}$  – радіуси інерції.

### Рівняння нейтральної лінії

$$1 + \frac{Y_p}{i_z^2} Y_0 + \frac{Z_p}{i_y^2} Z_0 = 0$$

Положення нейтральної лінії в перерізі будемо встановлювати за допомогою відрізків, які вона відсікає на осях координат  $Y, Z$ . Для їх визначення підставимо в рівняння по черзі  $Y_0=0, Z_0=0$ . Одержимо:



$$Z_H = -\frac{i_Y^2}{Y_P};; Y_H = -\frac{i_Z^2}{Y_P}.$$

### Розрахунок на міцність

Небезпечні точки – найбільш віддалені від нейтральної лінії.

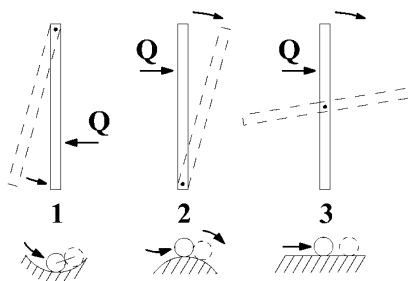
Умови міцності:

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{Z_P}{i_Y^2} Z_A + \frac{Y_P}{i_Z^2} Y_A \right) \leq [\sigma_P]$$

$$|\sigma_{\min}^-| = \left| \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{Z_P}{i_Y^2} Z_B + \frac{Y_P}{i_Z^2} Y_B \right) \right| \leq [\sigma_C]$$

## Стійкість стиснутих стрижнів

Рівновага твердого тіла буває **стійкою** (випадок 1), **нестійкою** (випадок 2) і **байдужою** (випадок 3):



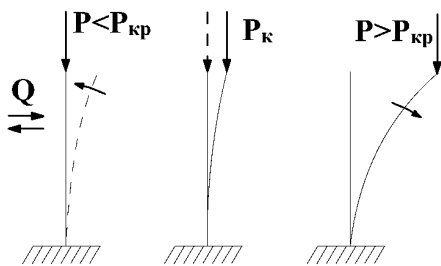
1. Стрижень або кулька, виведені боковою силою зі стану рівноваги, повертаються у початкове положення – стійка рівновага.

2. Стрижень і кулька продовжують відхилятися від початкового положення – нестійка рівновага.

3. Стержень або кулька можуть займати довільне положення рівноваги – байдужа рівновага.

З аналогічними випадками рівноваги зустрічаються при дії стискувальних сил на тверді тіла, що здатні деформуватися.

Пружна рівновага деформованого тіла є **стійкою**, коли після довільно малого відхилення від стану рівноваги тіло намагається повернутися у початковий стан.



Пружна рівновага є **нестійкою**, коли тіло продовжує деформуватися у напрямку наданого йому відхилення.

Між стійким і нестійким станом рівноваги існує перехідний, так званий **критичний стан**, у якому тіло може зберігати і початкову форму рівноваги і відхилятися від неї. Йому відповідає значення сили  $P_{кр}$ .

При  $P < P_{кр}$  – стійка прямолінійна форма тіла. Стрижень, відхилений від вертикального положення силою  $Q$ , повертається до нього, якщо силу  $Q$  усунути.

При  $P=P_{кр}$  – байдужий стан. Стрижень, виведений із прямолінійної форми, може повернутися до неї, але може також залишитися злегка зігнутим, коли сила  $Q$  перестане діяти.

При  $P>P_{кр}$  – прямолінійна форма рівноваги не зберігається, стержень набуває нової криволінійної форми рівноваги або руйнується.

Найменша стискувальна сила, при якій прямолінійна форма рівноваги стає нестійкою, називається **критичною**.

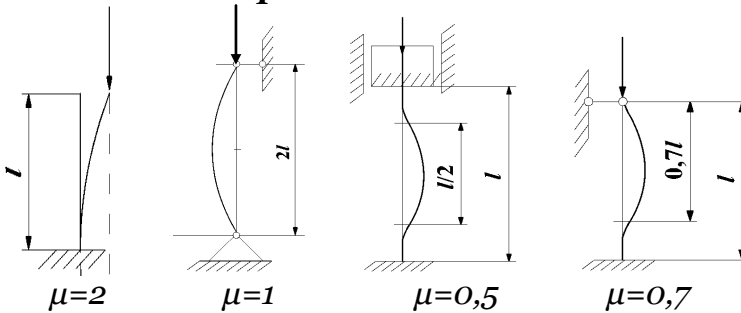
При  $P=P_{кр}$  напруження в стрижні менші границі текучості  $\sigma_{0,2}$  і тим більше границі міцності  $\sigma_v$ , але досягання  $P=P_{кр}$  рівносильне руйнуванню конструкції, яке відбувається раптово без попередніх ознак і тому є небезпечним, оскільки немає можливостей прийняти запобіжні заходи.

Згин стрижня, що відбувається після втрати стійкості його прямолінійної форми під дією осьових стискувальних сил, називається **поздовжнім згином**.

### Формула Ейлера для визначення критичної сили

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}$$

### Вплив умов закріплення стрижня на величину критичної сили



### Критичні напруження

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу стрижня. Враховуючи що

$\frac{I_{min}}{F} = i_{min}^2$ , де  $i_{min}$  – мінімальний радіус інерції перерізу стрижня, одержимо

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

де  $\lambda = \frac{v \cdot l}{i_{\min}}$  — гнучкість стрижня.

За однакових умов закріплення кінців стрижня в обох головних площинах інерції при обчисленні  $\lambda$  потрібно брати  $i_{\min}$ . У випадку різних умов закріплення визначається два значення  $\lambda$  і розрахунок на стійкість проводиться за  $\lambda_{\max}$ .

Щоб забезпечити високу стійкість заданого стрижня, його поперечний переріз необхідно розташовувати відносно осей  $y, z$  так, щоб різниця між гнучкостями в обох площинах була найменша.

### Межі придатності формули Ейлера

Формула Ейлера справедлива в межах дії закону Гука тобто, коли  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ , де  $\sigma_{пц}$  — межа пропорційності матеріалу. Тому:  $\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{пц}}$ . Введемо поняття граничного значення гнучкості:  $\lambda_{ГР} = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{пц}}$ . Остаточно отримуємо умову придатності формули Ейлера:

$$\lambda \geq \lambda_{ГР}.$$

Формула Ейлера придатна для стрижнів, гнучкість яких більша граничного значення. Для мало вуглецевої сталі

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \sigma_{пц} = 200 \text{ МПа}; \lambda_{ГР} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

### **Розрахунок на стійкість за формулами Ейлера**

Умова стійкості:  $\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma_{СТ}]$ .

Допустиме напруження на стійкість  $[\sigma]_{СТ} = \frac{\sigma_{кр}}{n_{СТ}}$ ;

допустиме напруження на стиск, яке називають **основним**

**допустимим напруженням**,  $[\sigma]_С = \frac{\sigma_T}{n_T}$ .

Залежність між допустимими напруженнями:

$$[\sigma_{CT}] = \varphi[\sigma_c].$$

Величину  $\varphi < 1$  називають **коефіцієнтом зниження основного допустимого напруження** або **коефіцієнтом поздовжнього згину**.

Коефіцієнт  $\varphi$  залежить від матеріалу і гнучкості стрижня. Його значення наведені в таблицях.

Умова стійкості приймає вигляд

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma_c]$$

Гнучкість стрижня залежить від поперечного перерізу на всій довжині стрижня і тому місцеві послаблення (отвори, вирізи і т.д.) на стійкість стрижня в цілому не впливають. Тому в формулі використовується площа «брутто»

**Перевірний розрахунок.** Задано: розміри і форма поперечного перерізу, сила  $P$ , умови закріплення кінців стрижня. Перевірити на стійкість.

1. Визначаємо  $I_{\min}$ ,  $A$ ,  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ ,  $\lambda = \frac{\nu \cdot \lambda}{i_{\min}}$ .

2. За таблицями в залежності від матеріалу і  $\lambda$  знаходимо  $\varphi$ , а також  $\sigma_T$ .

Для даного матеріалу обчислюємо  $[\sigma_c]$ .

3. Перевіряємо виконання умови  $\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi[\sigma_c]$

**Проектувальний розрахунок.** Задано: навантаження  $P$ , довжина стрижня  $\lambda$ , форма перерізу, матеріал, умови закріплення. Підібрати поперечний переріз.

Оскільки  $\varphi$  залежить від розмірів поперечного перерізу, які ще невідомі, використовуємо метод послідовних наближень.

1) Задаємося значенням  $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$

2) З умови стійкості визначаємо  $A \geq \frac{P}{\varphi_1[\sigma_c]}$ .

Підбираємо переріз з необхідним профілем і визначаємо для нього  $i_{\min}$  і розраховуємо

$$\lambda = \frac{v \cdot \lambda}{i_{\min}}$$

3) За  $\lambda$  визначаємо  $\varphi'_1$  для підбраного профілю.

4) Якщо  $\varphi'_1$  відрізняється від  $\varphi_1$ , визначаємо  $\varphi_2 = \frac{\varphi'_1 + \varphi_1}{2}$ .

5) Знову підбираємо  $A$ , визначаємо фактичне значення  $\varphi'_2$ .

6) Якщо  $\varphi'_2$  відрізняється від  $\varphi_2$  знаходимо  $\varphi_3 = \frac{\varphi'_2 + \varphi_2}{2}$ .

Як правило, після 2-3 спроб досягаємо, що  $\varphi_n = \varphi'_n$ .  
Допускається відхилення 5%. Профіль підбрано.

## Питання для самоконтролю

1. Які предмет і завдання опору матеріалів?
2. Перерахуйте основні гіпотези опору матеріалів.
3. Опишіть суть методу перерізів.
4. Що таке напруження?
5. Які внутрішні сили виникають при розтязі?
6. Яка умова міцності при розтязі?
7. Що описує закон Гука при розтязі-стиску?
8. Яке призначення діаграми розтягу?
9. Які є механічні характеристики матеріалу?
10. Коли виникає деформація згину?
11. Як визначається згинальний момент та поперечна сила?
12. Для чого призначена формула Нав'є?
13. Що можна визначити з формули Журавського?
14. Як відбувається розрахунок балки на міцність?
15. Що таке деформація зсуву?
16. Як записується закон Гука при зсуві?
17. Як здійснюється практичний розрахунок заклепових і болтових з'єднань на зсув?
18. Які є види зварних швів?
19. Як відбувається практичний розрахунок зварних з'єднань на зсув?
20. Що таке кручення?
21. Як визначається крутний момент?
22. Як розрахувати Напруження та деформації при крученні стрижня круглого поперечного перерізу?
23. Як записується умова міцності та умова?
24. Як визначити напруження у циліндричній гвинтовій пружині при її розтягу чи стиску?
25. Коли виникає деформація позацентрального розтягу-стиску?
26. Як визначити напруження при позацентральному розтязі-стиску?
27. Що таке нейтральна лінія і як визначається її положення?

28. Яка умова міцності при позацентровому розтязі-стиску?
29. Як розподілені сили у точці зчеплення зубчастої передачі?
30. Які сили діють вздовж пасі пасової передачі?
31. Як відбувається розрахунок при згині з крученням?
32. Як розраховуються еквівалентні напруження?
33. Яка умова міцності при згині з крученням?
34. Опишіть поняття стійкої та нестійкої пружної рівноваги.
35. Запишіть формулу Ейлера для визначення критичної сили стиснутих стрижнів.
36. Розкажіть про вплив способів закріплення на величину критичної сили.
37. Як відбувається практичний розрахунок стрижнів на стійкість?

## Література

1. *Динамічні задачі в опорі матеріалів* [Навчальний посібник для студентів механічних та матеріалознавчих спеціально-стей] / В.І. Шваб'юк, В.М. Максимович, О.А. Мікуліч, М.І. Морозов. Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2010. 220 с.
2. *Корнілов О. А.* Опір матеріалів. Київ: Лотос, 2000. 551 с.
3. *Мошинський С.І., Примак О.П., Гуртовий О.Г.* Задачі і приклади з опору матеріалів. Навчальний посібник. К.: «Освіта України», 2009. 400 с.
4. *Огородніков В.А.* Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Частина 1 : Навчальний посібник / В.А. Огородніков, О.В. Грушко, М.І. Побережний. Вінниця : ВНТУ, 2003. 158 с
5. *Огородніков В. А.* Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Частина 2 : навчальний посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. Вінниця : ВНТУ, 2011. 146 с.
6. *Огородніков В.А.* Опір матеріалів. Теоретичні відомості і контрольні завдання. / В. А. Огородніков, І. О. Сивак, Г. О. Лебедева; Під загальною редакцією В.А. Огороднікова. Навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2004. 75 с.
7. *Ольховий І.М., Стасюк Б.М., Станкевич В .З.* Короткий курс опору матеріалів: Навчальний посібник. Львів: Вид-во «Національний університет "Львівська політехніка"», 2004. 196 с.
8. *Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С.* Опір матеріалів, К., “Вища школа”. 2003.
9. *Шваб'юк В.І.* Опір матеріалів. Навч. посіб. К.: Знання, 2015. 380 с.
10. *Шваб'юк В.І.* Основи опору матеріалів. Навчальний посібник. Луцьк: Вид-во ЛДТУ, 2005. 280 с.

## **ДОДАТКИ**

Додаток 1

### **Механічні характеристики конструкційних сталей**

Марка сталі	$\sigma_m$	$\sigma_T$	$\tau_T$	Відносне видовжен- ня $\delta$ , %	Ударна в'яз- кість КС, кДж/ м <sup>2</sup>	Границя витривалості, МПа		
	не менше					Згин $\sigma_{-1}$	Розтяг- стик $\sigma_{-1p}$	Круче-н- ня $\tau_{-1}$
	МПа							
10	340	210	140	31	2400	160-220	120-150	80-120
20	420	250	160	25	-	170-220	120-160	100-130
25	460	280	-	23	900	190-250	-	-
30	500	300	170	21	800	200-270	170-210	110-140
35	540	320	190	20	700	220-300	170-220	130-180
40	580	340	-	10	600	230-320	180-240	140-190
45	610	360	220	16	500	250-340	190-250	150-200
50	640	380	-	14	400	270-350	200-260	160-210
55	660	390	-	13	-	-	-	-
60	690	410	-	12	-	310-380	220-280	180-220
20Г	460	280	-	24	-	-	-	-
30Г	550	320	-	20	800	220-320	-	-
50Г	660	400	-	13	400	290-360	-	-
20Х	800	650	-	11	600	380	-	170-320
40Х	1000	800	-	10	600	350-380	250	225
45Х	1050	850	-	9	500	400-500	-	-
30ХМ	950	750	-	11	800	310-410	370	230
35ХМ	1000	850	-	12	800	470-510	-	-
40ХН	1000	800	390	11	700	400	290	240
50ХН	1100	900	-	9	500	550	-	-
40ХФА	900	750	-	10	900	380-490	-	-
38ХМЮА	1000	850	-	14	900	420-550	-	-
12ХН3А	950	700	400	11	900	390-470	270-320	220-260
20ХН3А	950	750	-	12	1000	430-450	300-320	245-255
30ХН3А	1000	800	-	10	800	520-700	-	320-400
40ХНМА	1000	950	-	12	1000	500-700	-	270-380
30ХГСА	1100	850	-	10	500	510-540	500-535	220-245

Примітка: При використанні сталей за ГОСТ 380-71 необхідно врахувати приблизну відповідність марок: Ст.3 відповідає сталі 20; Ст.4 – сталі 25; Ст.5 – сталі 35; Ст.6 – сталі 45.

Питома вага  $\gamma$  деяких матеріалів

Матеріал	$\gamma, \text{кН/м}^3$	Матеріал	$\gamma, \text{кН/м}^3$
Сталь (СТ 3)	78,5	Сосна, ялина, тополя, осика	5
Чавун	70		
Мідь	88	Дуб, береза, бук клен, ясен, граб	7
Бронза	83		
Дюралюміній	27	Пробка	2,2-2,6
Титан	45	Кладка цегляна	19-20
Сплави манію	18	Кладка кам'яна	20-22
Склопластик	14-19	Бетон	22-24
текстоліт	13-14	Базальт	27-33
Скло органічне	11,8	Пісковик	21-28
Пінопласти	0,2-2,2	СВАМ 1:1	19
Каучук	9,1	Лід (при 0°C)	9,17

## Модулі пружності і коефіцієнт Пуассона

Матеріал	Модуль пружності, МПа		Коефіцієнт Пуассона, $\mu$
	E	G	
Чавун сірий, білий	$(1,15-1,60) \times 10^5$	$4,5 \times 10^4$	0,23-0,27
Сталі вуглецеві	$(2,0-2,1) \times 10^5$	$(8,0-8,1) \times 10^4$	0,24-0,28
Сталі леговані	$(2,1-2,2) \times 10^5$	$(8,0-8,1) \times 10^4$	0,25-0,30
Мідь прокатна	$1,1 \times 10^5$	$4,0 \times 10^4$	0,31-0,34
Мідь холоднотягнута	$1,3 \times 10^5$	$4,9 \times 10^4$	-
Мідь лита	$0,84 \times 10^5$	-	-
Бронза фосфориста катана	$1,15 \times 10^5$	$4,2 \times 10^4$	0,32-0,35
Бронза марганцевиста катана	$1,1 \times 10^5$	$4,0 \times 10^4$	0,35
Бронза алюмінієва лита	$1,06 \times 10^5$	$4,2 \times 10^4$	-
Латунь холоднотягнута	$(0,91-0,99) \times 10^5$	$(3,5-3,7) \times 10^4$	0,32-0,42
Латунь катана	$1,0 \times 10^5$	-	0,36
Алюміній канатний	$0,69 \times 10^5$	2,6-2,7	0,32-0,36
Дріт алюмінієвий тягнутий	$0,7 \times 10^5$	-	-
Дюралюміній катаний	$0,71 \times 10^5$	$2,7 \times 10^4$	-
Цинк катаний	$0,84 \times 10^5$	$3,2 \times 10^4$	0,27
Свинець	$0,17 \times 10^5$	$0,70 \times 10^4$	0,42
Скло	$0,56 \times 10^5$	$22 \times 10^4$	0,25

**Опір матеріалів:** Конспект лекцій для студентів спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія» денної та заочної форми навчання / уклад. О.А. Мікуліч. — Луцьк: ЛНТУ, 2025. — 60 с.

Комп'ютерний набір

О.А. Мікуліч

Редактор

О.А. Мікуліч

Підп. до друку «\_\_\_»\_\_\_\_\_ 2025 р.

Формат А4. Папір офс.

Ум. друк. арк. 4. Обл.-вид. арк. 3,75.

Тираж 10 прим.

Інформаційно-видавничий відділ  
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75  
Друк – кафедра ПММ ЛНТУ