Міністерство освіти та науки України
Луцький національний технічний університет

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки до практичних занять

**для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
освітньої програми «Інформаційні системи
та технології охорони і безпеки»
галузі знань F Інформаційні технології
спеціальності F6 Інформаційні системи та технології
денної та заочної форм навчання**

Луцьк 2026

004.896
Д 126

Рекомендовано до видання вченою радою факультету КІТ ЛНТУ
протокол №________від «_____»_________________20_______року.
Голова вченої ради факультету КІТ _____________________ І. С. Кондіус
(підпис)

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ

директор
бібліотеки ___________ Наталія ПОЛІЩУК
(підпис)

Затверджено вченою радою факультету КІТ,

протокол № _____ від « ____» _____________ 20__ року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри комп’ютерних наук ЛНТУ,

протокол № ______ від « ____» ___________________ 20______ року.

Завідувач кафедри комп’ютерних наук _____________________ Валерій ЛІЩИНА
(підпис)

Укладач: __________ (підпис) Ніна ЗДОЛБІЦЬКА, кандидат технічних наук, доцент кафедри комп’ютерних наук ЛНТУ

Рецензент: __________ (підпис) Катерина МЕЛЬНИК, кандидат технічних наук, доцент кафедри комп’ютерної інженерії та охоронних систем ЛНТУ

Відповідальний за випуск: __________ (підпис) Валерій ЛІЩИНА, кандидат технічних наук, доцент кафедри комп’ютерних наук ЛНТУ

Д126 Дискретна математика: Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти вищої освіти освітньої програми «Інформаційні системи та технології охорони і безпеки» галузі знань F Інформаційні технології спеціальності F6 Інформаційні системи та технології денної та заочної форм навчання / уклад. Н.В. Здолбіцька, Луцьк, ЛНТУ, 2026. 56 с

Методичні вказівки складено відповідно до діючої програми курсу Комп’ютерна дискретна математика з метою використання здобувачами спеціальності 126 Інформаційні системи та технології охорони і безпеки при вивченні даної дисципліни.

Н. В. Здолбіцька

Зміст

Тема 1. Множини. Операції над множинами

Операції над множинами

Об'єднання $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

Перетин $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

Різниця $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.

Симетрична різниця

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$

$\{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$.

Доповнення $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$.

Існує універсальна множина U: $\overline{A} = U \setminus A$.

Властивості операцій над множинами:

1. ідемпотентність

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

2. комутативність

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

3. асоціативність

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. дистрибутивність

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. поглинання

$(A \cap B) \cup A = A$ $\qquad$ $(A \cup B) \cap A = A$

6. властивість нуля

$A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

7. властивість одиниці

$A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap U = A$

8. інволютивність (закон заперечення заперечення)

$\overline{\overline{A}} = A$

9. Закони де Моргана:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

10. властивість доповнення

$A \cup \overline{A} = U$ $\qquad$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$

11. вираз для різниці

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Завдання до виконання

Завдання 1. Перерахувати елементи наступних множин:

1. $A = \{x | (x \in Z) \wedge (1 \leq 10x \leq 17)\}$.
2. $A = \{x | x \text{ } \textit{прості числа} < 20\}$.
3. $A = \{x | (x \in Z) \wedge (x^2 < 24)\}$.
4. $A = \{x | x \in Z \wedge x - \textit{парні числа}\}$
5. $A = \{x | x \in Z \wedge 6x^2 + x - 1 = 0\}$.
6. $A = \{x | x \in N \wedge x \leq 15\}$.
7. $A = \{x | x \in R \wedge 1.2x \leq 6\}$.
8. $A = \{x | x \in Z \wedge x \textit{ дільник } 100\}$.
9. $A = \{x | x \in N_0 \wedge x \leq 7\}$.
10. $A = \{x | x \in Z \wedge 3x > 0\}$.

Завдання 2. Для кожної з наведених нижче множин використайте діаграми Венна для множин і заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

1. $(A \cup B) \setminus (\overline{B} \cap C)$.
2. $\overline{A \cap C} \cap B$.
3. $C \setminus (A \cap B)$.
4. $\overline{A} \cap (B \cup C)$.
5. $(A \oplus B) \setminus C$.
6. $A \cup (B \cap C)$.
7. $B \setminus (A \cup C)$.
8. $(A \cup B \cup C) \setminus (B \cap C)$.
9. $(A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C)$.
10. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

Завдання 3. Записати множину P(A), елементами якої є всі підмножини множини A.

1. $A = \{c, b, d, a\}$.
2. $A = \{1,2,3,4\}$.
3. $A = \{r, t, k, l\}$.
4. $A = \{f, g, h, k\}$.

5. $A = \{q, w, r, t\}$.

6. $A = \{m, n, x, z\}$.

7. $A = \{*, +, -, /\}$.

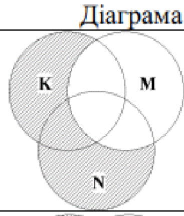
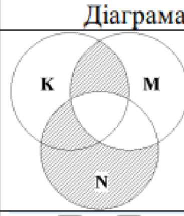
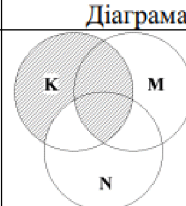
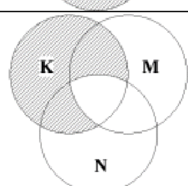
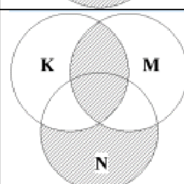
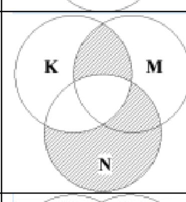
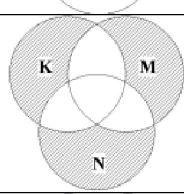
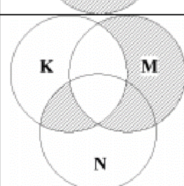
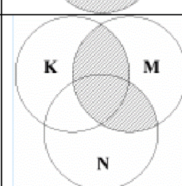
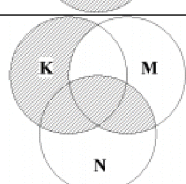
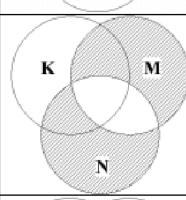
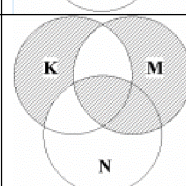
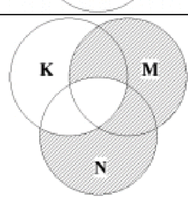
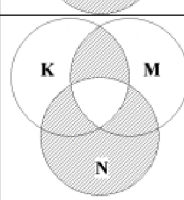
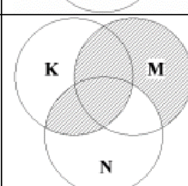
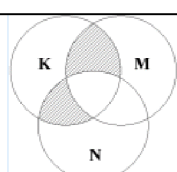
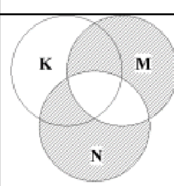
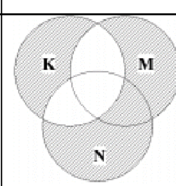
8. $A = \{i, j, k, n\}$.

9. $A = \{2,4,6,8\}$.

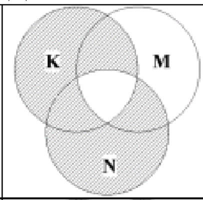
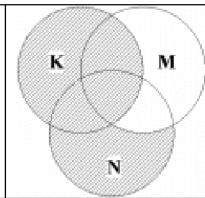
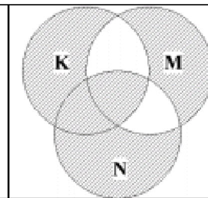
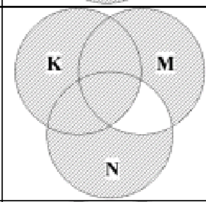
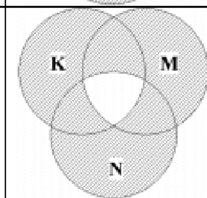
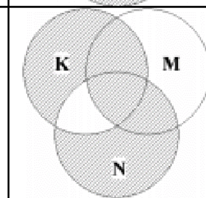
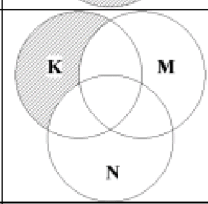
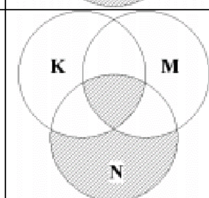
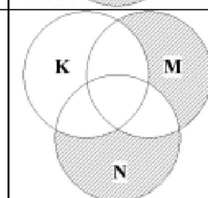
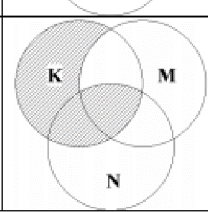
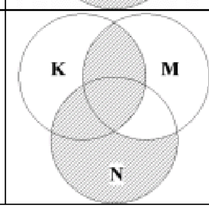
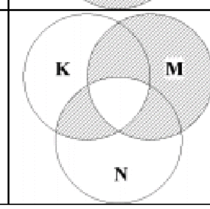
10. $A = \{v, w, z, x\}$.

Завдання 1. Записати формули, відповідні до діаграм Венна, які наведено у таблиці 1.

Таблиця 1 – Діаграми Венна

№	Діаграма		Діаграма	№	Діаграма
1.		2.		3.	
4.		5.		6.	
7.		8.		9.	
10.		11.		12.	
13.		14.		15.	
16.		17.		18.	

Продовження таблиці 1

19.		20.		21.	
22.		23.		24.	
25.		26.		27.	
28.		29.		30.	

Тема 2. Комбінаторика

Розміщенням без повторень з n елементів по r називаються впорядковані r-вибірки без повторень. Їх число позначають A_n^r і обчислюються за формулою:

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, r \le n$$

Звичайно розміщення без повторень з n елементів по n називаються **перестановками** з n елементів. Їх число обчислюється за формулою

$$P(n,n) = A_n^n = n!$$

Розміщення з повтореннями з n елементів по r впорядковані r-вибірки з n елементів з повтореннями. Їх число позначається

$$\overline{A_n^r} = n^r\ .$$

Сполучення без повторень з n елементів по r називаються невпорядковані r-вибірки з n елементів без повторень. Їх число позначається C_n^r і обчислюється за формулою:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \ r \le n .$$

Сполучення без повторень з n елементів по r утворюють k-елементні підмножини вихідної множини потужності n.

Числа C_n^r називаються ***біноміальними коефіцієнтами***.

Сполучення з повтореннями з n елементів по r називаються невпорядковані r-вибірки з n елементів з повтореннями.

Їх число позначається $\overline{C_n^r}$ і обчислюється за формулою:

$$\overline{C_n^r} = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}, \ \forall r, n \in N .$$

Перестановки з повтореннями. Розглянемо задачу: Маємо предмети r різних видів. Скільки різних комбінацій (перестановок) можна зробити з n_1 предметів 1-го виду, з n_2 предметів 2-го виду, …, з n_r предметів r-го виду? Число предметів в кожній перестановці $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Такі комбінації називаються **перестановками з повтореннями.** Їх число позначається $P(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ і обчислюється за формулою:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!} .$$

Завдання до виконання

Завдання 1.

1. Скількома способами можна вибрати старосту та його заступника у навчальній групі з 20 здобувачів?
2. Скількома способами можуть 7 людей стати в чергу за квитками в театральній касі.
3. Здобувачу необхідно здати 4 екзамени за 10 днів. Скількома способами можна скласти йому розклад, якщо в день можна здавати тільки один екзамен.
4. Скільки існує різних п’ятизначних парних чисел, які починаються цифрою «2» і закінчуються цифрою «4», якщо використовуються цифри 1,2,3,4,5.
5. З 20 студентів треба назначити 5 чергових. Скількома способами це можна зробити?
6. Скількома способами можна скласти бригаду з чотирьох робочих якщо маємо пропозиції від 10 чоловік?
7. Чотири автори повинні написати книжку з 17 розділів, причому перший і третій повинні написати по 5 розділів, другий – 4 розділи, а четвертий – 3 розділи книжки. Скількома способами можна розприділити розділи між авторами.

8. У одного здобувача є 6 друзів. Щодня його відвідати приходять троє друзів таким чином, що компанія друзів жодного разу не повторюється. Скільки потрібно днів, щоб його відвідали усі можливі варіанти компаній?
9. Скільки різних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4, якщо числа мають починатися цифрою 2?
10. Скількома способами можна переставити цифри числа 12345234?
11. Скількома способами можна вибрати із повної колоди карт (52 карти) по одній карті з кожної масті?
12. Скількома способами можна скласти список із 9 студентів?
13. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр 1,2,4,6,7,8 якщо жодну цифру не можна використовувати більше одного разу.
14. Скількома способами читач може вибрати 3 різні книги із 15?
15. У магазині є в наявності 10 видів тортів та 15 видів пачок печива. Скільки всього є способів вибору у цьому магазині або одного торта, або трьох різних пачок печива для святкової вечері?
16. Скільки різних слів можна скласти, переставляючи букви в слові «мама»? Написати ці слова.
17. Скільки всього існує різних двоцифрових чисел, у яких перша цифра є парною, а друга – непарною?
18. Софійка зірвала на клумбі 9 нарцисів і 4 тюльпани. Скільки всього існує способів вибору із цих квітів 3 нарциси і 2 тюльпанів для букета?
19. Скільки різних дробів m/n, якщо m набуває значень 1,2 або 4, а n набуває значень 5,7,11,13 або 17?
20. Скільки різних слів отримаємо в результаті перестановки букв в слові «комбінаторика»?

Розв'язування рекурентних рівнянь

Завдання 2. Знайти загальний розв'язок рекурентних співвідношень і розв'язати дане рекурентне співвідношення, що задовольняє початковим умовам.

1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$. $a_0 = 2, a_1 = 5,$
2. $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$. $a_0 = 2, a_1 = 4,$
3. $a_n = 9a_{n-1} - 20a_{n-2}$. $a_0 = 0, a_1 = 5,$
4. $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$. $a_0 = 2, a_1 = 5,$
5. $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 2a_n = 0$. $a_0 = 2, a_1 = 1,$
6. $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. $a_0 = 2, a_1 = 1,$
7. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$. $a_0 = 3, a_1 = 21,$
8. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$. $a_0 = 2, a_1 = 6,$
9. $a_{n+2} = -4\,a_{n+1} - 4\,a_{n+1}$. $a_0 = 2, a_1 = 6,$
10. $a_n = 2\,a_{n-1} - a_{n-2}$. $a_0 = -3, a_1 = 1,$
11. $a_n = -2\,a_{n-1} - a_{n-2}$. $a_0 = 2, a_1 = 6,$
12. $a_n = 4a_{n-2}$. $a_0 = 3, a_1 = 4,$
13. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. $a_0 = 1, a_1 = 2,$
14. $a_n = 16a_{n-2}$. $a_0 = 5, a_1 = 4,$

15. $a_n = -2\sqrt{2}\, a_{n-1} - 4a_{n-2}$. $a_0 = 1, a_1 = 0$,
16. $a_n = 6a_{n-1} - 9\, a_{n-2}$. $a_0 = 0, a_1 = 3$,
17. $a_n = 2a_{n-2} - a_{n-1}$. $a_0 = 1, a_1 = 2$,
18. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. $a_0 = -\frac{1}{4}, a_1 = \frac{1}{2}$,
19. $a_n = 2a_{n-1} + 3\, a_{n-2}$. $a_0 = 2, a_1 = 8$,
20. $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$. $a_0 = -\frac{1}{4}, a_1 = -\frac{1}{2}$,
21. $a_n = -3a_{n-1} + 10\, a_{n-2}$. $a_0 = 0, a_1 = 3$,
22. $a_n = -4a_{n-1} - 12\, a_{n-2}$. $a_0 = 2, a_1 = 5$,
23. $a_n = 2a_{n-1} + 8\, a_{n-2}$. $a_0 = 3, a_1 = 6$,
24. $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}$. $a_0 = 1, a_2 = 9$,
25. $a_n = -3a_{n-1} - 2\, a_{n-2}$. $a_1 = 1, a_2 = 0$,
26. $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}$. $a_0 = 2, a_1 = 4$,
27. $a_n = 9a_{n-2}$. $a_0 = 1, a_1 = 9$
28. $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}$. $a_0 = 2, a_1 = 4$,
29. $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 10a_n = 0$. $a_0 = 0, a_1 = 2$,
30. $a_{n+2} - 4a_{n+1} - 13a_n = 0$. $\mathrm{a}_0 = 2, \mathrm{a}_1 = 4$,

Тема 3. Основи теорії відношень

Якщо R – бінарне відношення на множинах X, Y, то факт $(x, y) \in R$ часто записується у вигляді xRy . і говорять, що елемент $x \in X$ знаходиться у відношенні R з елементом $y \in Y$.

1. Будь-яке бінарне відношення може бути задане у вигляді ***списку,*** елементами якого є пари, з яких складається відношення.
2. Бінарне відношення R на множинах X і У може бути задане ***за допомогою матриці*** $(W = W(R))$, рядки якої відповідають елементам множини X, стовпці – елементам множини У. Якщо $n = |X|$, $m = |Y|$ – кількість елементів множин X і Y відповідно, то довільна матриця W має розмір $n \times m$. Елемент w_{ij} матриці відповідає парі $(x_i, y_j) \in A \times B$ декартового добутку множин, причому $w_{ij} = 1$, якщо $(x_i, y_j) \in R$, і $w_{ij} = 0$, якщо $(x_i, y_j) \notin R$, тобто відношення R не містить пару (x_i, y_j).
3. Бінарне відношення R на множинах X, Y може бути задане ***графічно***.

На площині зобразимо точками x_i, y_j елементи множин X і Y. Якщо пара (x_i, y_j) належить відношенню R, з'єднаємо точки x ,y лінією, яка спрямована від першого елемента пари до другого. Позначивши таким чином всі пари, що належать відношенню R, одержимо фігуру, яка називається **графом** відношення.

Спрямовані лінії, що з'єднують пари точок називаються ***дугами***, а точки, що зображують елементи множин – ***вершинам***и графа.

Якщо бінарне відношення R задане на одній множині $X\left(R \subseteq X^2\right)$ то вершинами графа будуть елементи множини X.

Бінарні відношення можна задавати ***графічно*** за допомогою **діаграм Хассе.**

Операції над відношеннями

Областю визначення бінарного відношення називають множину $X_R = \{x | \exists y : xRy\}$. *Областю значень* бінарного відношення називають множину $Y_R = \{x | \exists x : yRx\}$. *Доповненням* $\overline{R}$ до R називають множину $\overline{R} = (A \times B) \setminus R$, тобто $x\overline{R}y$ виконується для всіх пар *(x,y)*, які не належать R. Нехай R – бінарне відношення. ***Обернене*** відношення позначається R^{-1}. Нехай R і S – відношення, такі, що $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, де X, Y, Z – деякі множини. ***Композицією відношень*** R і S називається відношення, що складається з упорядкованих пар *(x,z)*, $x \in X$, $z \in Z$, для яких існує елемент $y \in Y$, такий, що виконуються умови $(x, y) \in R$, $(y, z) \in S$. Композиція відношень R і S позначається $S \circ R$.

Завдання до виконання

Завдання 1. Для заданого відношення R знайти: R^{-1}, $R \circ R$, $R^{-1} \circ R$.

1. $R = \{(1,2), (1,3), (4,2), (2,3), (3,3)\}$;
2. $R = \{(2,2), (4,4), (1,2), (3,1), (3,4)\}$;
3. $R = \{(1,2), (2,3), (3,1), (2,2), (3,2)\}$;
4. $R = \{(3,3), (3,2), (2,2), (1,2), (3,1)\}$;
5. $R = \{(0,1), (1,1), (1,0), (0,2), (2,1)\}$;
6. $R = \{(4,3), (1,3), (4,2), (2,1), (3,3)\}$;
7. $R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$;
8. $R = \{(1,3), (3,1), (2,2), (1,2), (1,4)\}$;
9. $R = \{(3,5), (5,4), (4,4), (5,3), (4,3)\}$;
10. $R = \{(0,2), (0,3), (0,0), (1,2), (2,3)\}$;
11. $R = \{(1,5), (5,2), (2,2), (1,1), (1,3)\}$;

12. $R=\{(0,2),(2,3),(3,3),(3,0),(0,0)\}$;
13. $R=\{(1,3),(1,4),(4,2),(2,4),(3,4)\}$;
14. $R=\{(1,4),(2,3),(4,2),(2,1),(3,1)\}$;
15. $R=\{(1,2),(1,5),(5,2),(2,3),(3,3)\}$;
16. $R=\{(2,2),(2,3),(4,2),(2,3),(3,3)\}$;
17. $R=\{(0,3),(1,2),(0,2),(2,3),(3,3)\}$;
18. $R=\{(1,0),(1,3),(4,0),(0,3),(3,3)\}$;
19. $R=\{(1,3),(1,5),(4,2),(3,5),(5,5)\}$;
20. $R=\{(1,2),(2,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}$.

Завдання 2. Нехай задано множина A. Задати списком, матрицею, графом та графіком відношення R. Вказати, якими властивостями володіє дане відношення.

1. $A=\{1,5,6,25,36\}$, $R=\{(a,b)|b\neq\sqrt{a}\}$.
2. $A=\{3,6,8,9,12\}$, $R=\{(a,b)|3a=2b\}$.
3. $A=\{3,5,9,12,15\}$, $R=\{(a,b)|a\ \textit{дільник}\ \ b\}$.
4. $A=\{7,8,9,10,12\}$, $R=\{(a,b)|a\geq b\}$.
5. $A=\{2,4,5,10,13\}$, $R=\{(a,b)|a\neq 2b\}$.
6. $A=\{2,4,6,12,18\}$, $R=\{(a,b)|3a\neq 2b\}$.
7. $A=\{2,5,6,11,20\}$, $R=\{(a,b)|a\ \textit{взаємно}\ \ \textit{просте з}\ \ b\}$
8. $A=\{2,3,4,12,16\}$, $R=\{(a,b)|a<b\}$.
9. $A=\{7,8,14,15,17\}$, $R=\{(a,b)|a\geq 2b\}$.
10. $A=\{10,11,12,13,14\}$, $R=\{(a,b)|a=b\}$.
11. $A=\{2,5,10,15,20\}$, $R=\{(a,b)|a\ \textit{і}\ \ b\ \textit{мають спільний дільник}\}$.
12. $A=\{1,2,3,6,8\}$, $R=\{(a,b)|a+b<10\}$.
13. $A=\{4,5,7,8,10\}$, $R=\{(a,b)|a\leq b-3\}$.
14. $A=\{3,4,5,8,9\}$, $R=\{(a,b)|a\cdot b<25\}$.
15. $A=\{3,9,36,81,100\}$, $R=\{(a,b)|a=\sqrt{b}\}$.

16. $A=\{1,4,5,16,25\}$, $R=\{(a,b)|a^2=b\}$.

17. $A=\{0,1,2,3,4\}$, $R=\{(a,b)|a+b=4\}$.

18. $A=\{1,3,7,9,49\}$, $R=\{(a,b)|b=a^2\}$.

19. $A=\{5,6,20,26,30\}$, $R=\{(a,b)|a \text{ ділиться на } b\}$.

20. $A=\{21,42,63,84,85\}$, $R=\{(a,b)|b<a<3b\}$.

Тема 4. Логіка висловлювань

Логіка висловлювань застосовується до простих висловлювань, де базисні висловлювання – або істинні або хибні. Твердження, які мають одну або більше змінних, можуть бути істинними для деяких значень змінних і хибними для інших.

Предикатом називається твердження, в якому змінні приймають значення істинне чи хибне в залежності від значень змінних і позначають P(x).

Квантори «∀» і «∃» зв'язують змінну x, перетворюючи одномісний предикат у висловлення.

Вирази «для всіх» і «існує» називаються *кванторами* і позначаються відповідно $\forall$ і $\exists$.

Правила застосування кванторів

1. Однойменні квантори можна переставляти місцями

$\forall x\ \forall y\ P(x, y) = \forall y\ \forall x\ P(x, y)$; $\exists x\ \exists y\ P(x, y) = \exists y\ \exists x\ P(x, y)$

2. Різнойменні квантори в загальному випадку переставляти не можна $\forall x\ \exists y\ P(x, y) \neq \exists y\ \forall x\ P(x, y)$

3. Між кванторами спільності "∀" і існування "∃" мають місце співвідношення, що узагальнюють закони де-Моргана.

$\rceil(\forall x\ P(x)) = \exists x \rceil(P(x))$;

$\rceil(\exists x\ P(x)) = \forall x\ \rceil(P(x))$

«Завждиістинні» висловлювання (логічні закони) – висловлювання, істинність яких детермінується їх формою і не залежить від логічного значення простих висловлювань, їх складових.

«Завжди хибні» висловлювання (логічні суперечності) – висловлювання, хибність яких детермінується їх формою і не залежить від логічного значення їх складових.

Виконувані або невизначені висловлювання – висловлювання, логічне значення яких не можна визначити без врахування логічного значення (істинності чи хибності) простих висловлювань, які входять до їх складу.

Таблиця 1 – Таблиця істинності логічних зв’язок

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A}$
істинне	істинне	істинне	істинне	істинне	істинне	хибне
істинне	хибне	хибне	істинне	хибне	хибне	хибне
хибне	істинне	хибне	істинне	істинне	хибне	істинне
хибне	хибне	хибне	хибне	істинне	істинне	істинне

Завдання до виконання

Завдання 1. Записати наступне висловлювання за допомогою кванторів (на мові логіки предикатів) і визначити їх істинність.

1. Будь-яке натуральне число, що ділиться на 12, ділиться також на 2, 4 та 6.
2. Мешканці Швейцарії обов’язково володіють або французькою, або італійською або німецькою мовою.
3. Можна казати неправду декому весь час, можна казати неправду всім деякий час, але не можна казати неправду всім весь час.
4. Якщо кожен розумний філософ – цинік і тільки жінки є філософами, то тоді, якщо існують розумні філософи, то деякі з жінок – циніки.
5. Послідовність $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ має границю.
6. Можна казати неправду декому весь час, можна казати неправду всім деякий час, але не можна казати неправду всім весь час.
7. Число 5 більше числа 3.
8. Якщо всі люди смертні і Сократ Людина, то Сократ –смертний.
9. 3 ділиться на 7 і 3 більше ніж 7.
10. Якщо два на два чотири, то три на три вісім.
11. Якщо ми нагріваємо деяке тіло, то воно збільшується в об’ємі.
12. якщо 1 – просте число, більше за 2, то 1 – непарне.
13. У деяких чотирикутниках протилежні сторони рівні.
14. Існує найбільше натуральне число.
15. Існує таке число x, таке що $x^2 < 0$.
16. У слові мама 4 букви і в ньому є буква «а».
17. На пошті можна купити відкритку або підписатися на газету.
18. Трикутник є рівностороннім тоді і тільки тоді коли всі його кути рівні.
19. Не існує раціонального числа квадрат якого рівний два.
20. Всі прості числа непарні.

Завдання 2. Визначити до якого типу належить складне висловлювання:

1. $(A \to B) \vee \overline{C}$.
2. $(\overline{A} \vee B) \to \overline{C}$.
3. $(A \to B) \vee \overline{C}$.
4. $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{C} \wedge A)$
5. $(C \wedge B \wedge A) \vee \overline{C}$.
6. $\overline{B \wedge A} \leftrightarrow \overline{C}$.
7. $B \to (\overline{C} \wedge A)$.
8. $(B \leftrightarrow A) \to (\overline{C} \wedge A)$.
9. $A \leftrightarrow (\overline{C} \wedge A) \vee B$.
10. $B \vee (\overline{C} \wedge A \leftrightarrow B)$.
11. $(A \vee \overline{B}) \leftrightarrow (\overline{C} \wedge A)$.
12. $(A \to C) \leftrightarrow (\overline{C} \vee B)$.
13. $((A \leftrightarrow C) \to \overline{B}) \leftrightarrow A$.
14. $\overline{B \wedge A} \leftrightarrow B \to C$.
15. $\overline{B} \leftrightarrow \overline{C} \vee (B \wedge A)$.
16. $(A \to B \wedge C) \leftrightarrow A$.
17. $(A \to B) \to (\overline{C} \vee A)$.
18. $(B \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \vee B)$.
19. $(A \vee C) \leftrightarrow (\overline{C} \wedge B)$.
20. $(A \to C) \leftrightarrow (\overline{C} \to B)$.

Завдання 3. Вказати, які з виразів завдання 1 є законами алгебри логіки.

Тема 5. Булеві функції. Алгебри

Таблиця 2 – Елементарні булеві функції

№ п/п	Позначення функції	Назва функції	a			
			0	0	1	1
			b			
			0	1	0	1
1.	$f_1 = a \wedge b$	Кон'юнкція	0	0	0	1
2.	$f_2 = a \vee b$	Диз'юнкція	0	1	1	1
3.	$f_3 = a \rightarrow b$	Імплікація	1	1	0	1
4.	$f_4 = a \leftarrow b$	Обернена імплікація	1	0	1	1
5.	$f_5 = a \sim b$	Рівносильність	1	0	0	1
6.	$f_6 = a \oplus b$	Нерівносильність (сума за модулем 2)	0	1	1	0
7.	$f_7 = a \vert b$	Функція Шеффера (інверсія кон'юнкції)	1	1	1	0
8.	$f_8 = a \downarrow b$	Функція стрілка Пірса-Вебба (інверсія диз'юнкції)	1	0	0	0
9.	$f_9 = a \overline{\rightarrow} b$	Інверсія імплікації	0	0	1	0
10.	$f_{10} = a \overline{\leftarrow} b$	Інверсія, обернена імплікації	0	1	0	0
11.	$f_{11} = a$	Повторення a (змінна a)	0	0	1	1
12.	$f_{12} = \overline{a}$	Інверсія a (функція НЕ a)	1	1	0	0
13.	$f_{13} = b$	Повторення b (змінна b)	0	1	0	1
14.	$f_{14} = \overline{b}$	Інверсія b (функція НЕ b)	1	0	1	0
15.	$f_{15} = 1$	Одинична функція (константа 1)	1	1	1	1
16.	$f_{16} = 0$	Нульова функція (константа 0)	0	0	0	0

Завдання до виконання

Завдання 1.

Побудувати таблицю значень функції $f(x, y, z)$.

1. $f(x, y, z) = (x \downarrow y) \vee \overline{z}$.
2. $f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \vee (y \leftarrow z)$.
3. $f(x, y, z) = \overline{y} \wedge (\overline{x} \sim z)$.

4. $f(x,y,z)=(x|y)\to(z\wedge y)$.

5. $f(x,y,z)=(z\to y)\sim(\bar{y}\vee x)$.

6. $f(x,y,z)=(y\to z)\sim\bar{x}$.

7. $f(x,y,z)=(y\downarrow z)\oplus\bar{x}$.

8. $f(x,y,z)=(x|\bar{z})\sim\bar{y}$.

9. $f(x,y,z)=(\bar{y}\wedge z)\sim(x\downarrow z)$.

10. $f(x,y,z)=(z\downarrow\bar{x})\to(y\vee z)$.

11. $f(x,y,z)=z\to(\bar{x}\vee y)$.

12. $f(x,y,z)=(x\wedge y)\leftarrow(y\vee z)$.

13. $f(x,y,z)=z\sim(x\vee\bar{y})$.

14. $f(x,y,z)=(x\oplus y)\sim\bar{z}$.

15. $f(x,y,z)=(x\to y)\leftarrow\bar{z}$.

16. $f(x,y,z)=(y\sim z)\wedge(y\to x)$.

17. $f(x,y,z)=\bar{x}\wedge(y\to\bar{z})$.

18. $f(x,y,z)=\bar{x}\to(y\oplus\bar{z})$.

19. $f(x,y,z)=(x\sim y)\vee(y\sim z)$.

20. $f(x,y,z)=(y\oplus x)\wedge(\bar{y}\to z)$.

Завдання 2. Отримати диз'юнктивне і кон'юнктивне розкладання функції.

Завдання 3. Побудувати ДДНФ і ДКНФ для функції $F(x,y,z)$, заданої на наборах аргументів таблицею.

Побудувати поліном Жегалкіна функції $F(x,y,z)$:

1. методом невизначених коефіцієнтів;
2. на основі рівносильних перетворень;
3. за ДДНФ булевої функції.

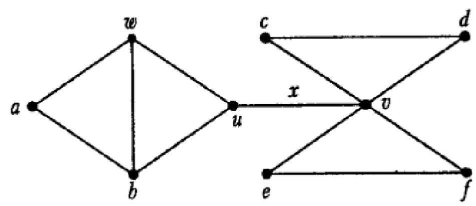
Тема 6. Основні поняття, способи подання неорієнтованих та орієнтованих графів

Завдання 1.

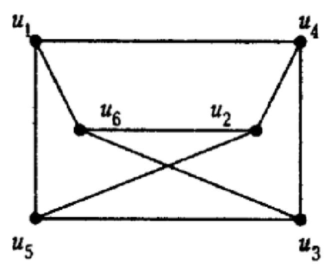
Записати множину вершин та множину ребер графа.

Знайти кількість вершин, ребер і степені кожної вершини.

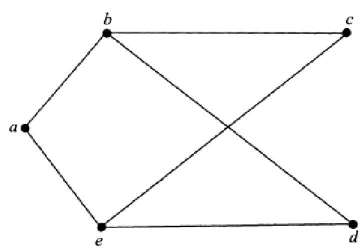
Знайти суму степенів вершин кожного з графів та переконатись, що вона вдвічі більша за кількість ребер графа.



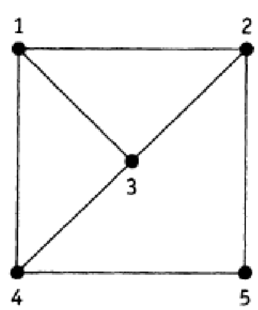
1.



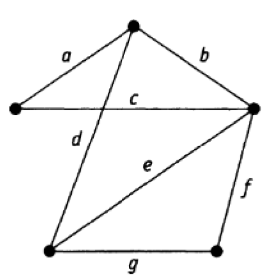
2.



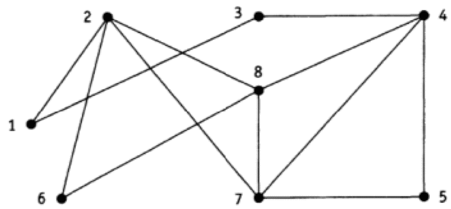
3.



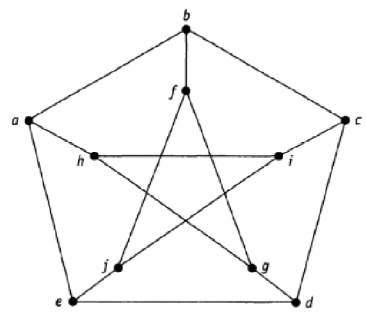
4.



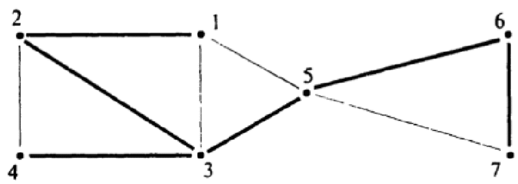
5.


2
3
4
8
1
6
7
5

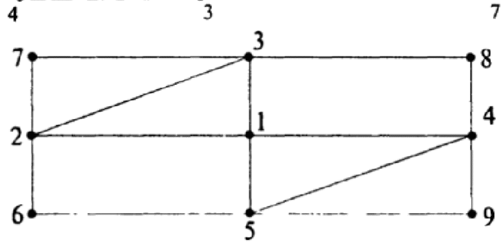
6.


b
f
a
c
h
i
j
g
e
d

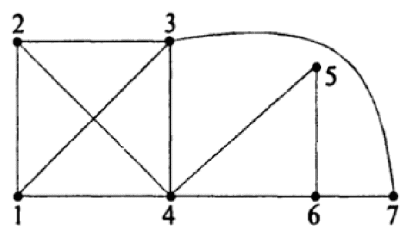
7.


2
1
6
5
4
3
7

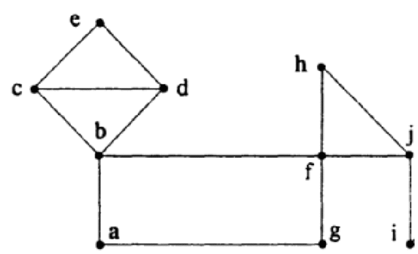
8.


7
3
8
2
1
4
6
5
9

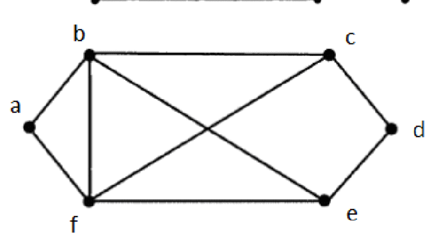
9.


2
3
5
1
4
6
7

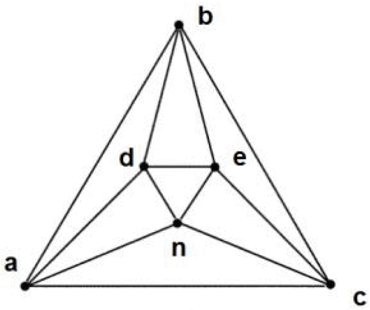
10.

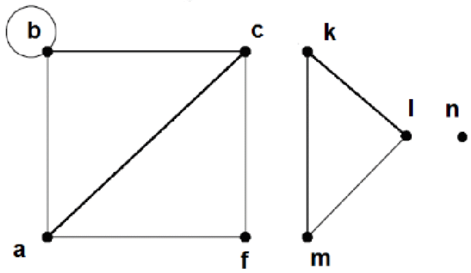

e
c
d
h
b
j
f
a
g
i

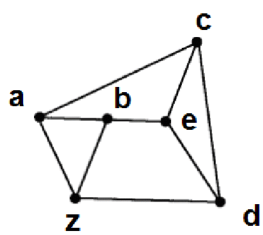
11.

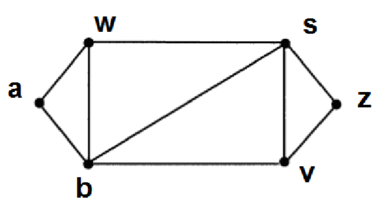

b
c
a
d
f
e

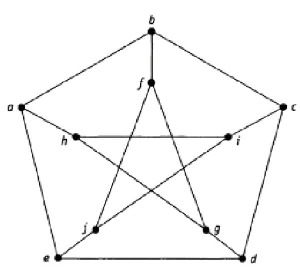
12.

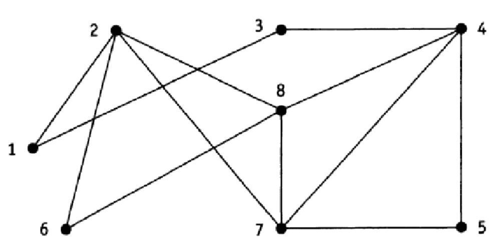
13. 

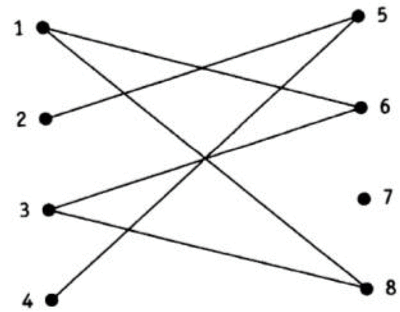
14. 

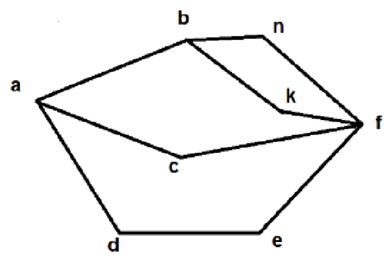
15. 

16. 

17. 

18. 

19. 

20. 

Способи подання графів

Матрицею інцидентності неорієнтованого графа G яка відповідає заданій нумерації вершин і ребер, називають булеву $n \times m$ матрицю M з елементами m ($i = 1\ldots,n, j = 1,\ldots m$), де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } v_1 \text{ та ребро } e_1 \text{ інцидентні,} \\ 0 \text{ у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Матрицею інцидентності орієнтованого графа G, яка відповідає заданій нумерації вершин і дуг, називають $n \times m$ матрицю M з елементами m_{ij} ($i = 1\ldots,n, j = 1,\ldots m$), де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо дуга } e_1 \text{ виходить з вершини} v_1, \\ -1, \text{якщо дуга } e_1 \text{ входить у вершину} v_1, \\ 2, \text{ якщо дуга } e_1 - \text{ це петля у вершині} v_{1,} \\ \ \ 0 \ \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Матриця суміжності

Нехай $G = (V, E)$ – простий граф, $|V| = n$. Припустимо, що вершини графа G занумеровані: $v_1, v_1, \ldots v_n$. Матрицею суміжності графа G (яка відповідає даній нумерації вершин) називають булеву $n \times n$ матрицю A з елементами $a_{ij}(i, j = 1,\ldots,n)$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 \text{ у протилежному випадку} \end{cases}$$

Для подання орієнтованих графів також використовують матрицю суміжності. Це булева $n \times n$ матриця A з елементами $a_{ij}(i, j = 1,\ldots,n)$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 \text{ у протилежному випадку} \end{cases}$$

Подання графа списком пар (списком ребер)

Економнішим щодо пам'яті, особливо якщо m (кількість ребер) значно менша, ніж n^2 (n – кількість вершин), є метод подання графа списком пар, які відповідають його ребрам (або дугам). Пара $[u,v]$ відповідає ребру $\{u,v\}$, якщо граф неорієнтований, і дузі (u,v), якщо граф орієнтований.

Подання графа списками суміжності

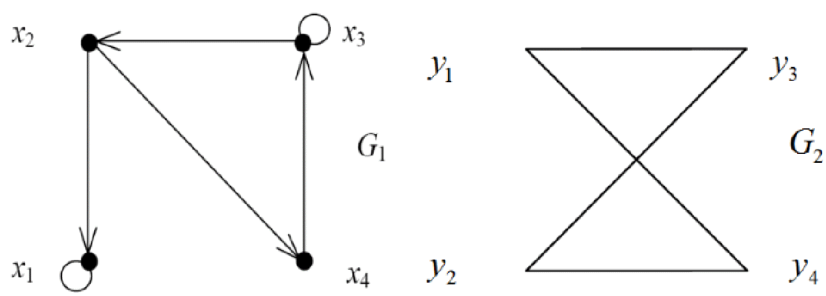
Орієнтовпний граф G (без кратних дуг. але, можливо, з петлями) можна подати, указавши скінченну непорожню множину вершин V і відповідність Г. котра вказує. Як зв'язані між собою вершини. Відповідність Г - багатозначне відображення множини V у V а граф у такому разі позначають парою $G = (V, \Gamma)$.

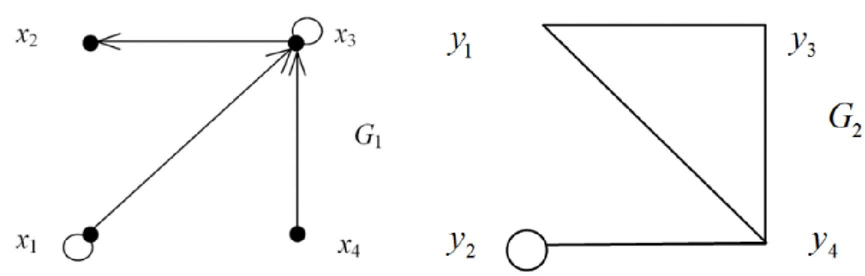
Завдання до виконання

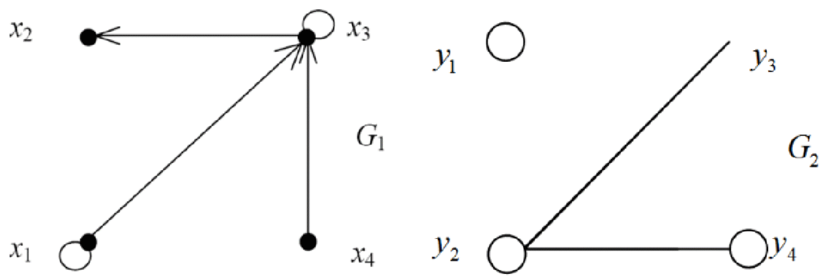
Завдання 2.

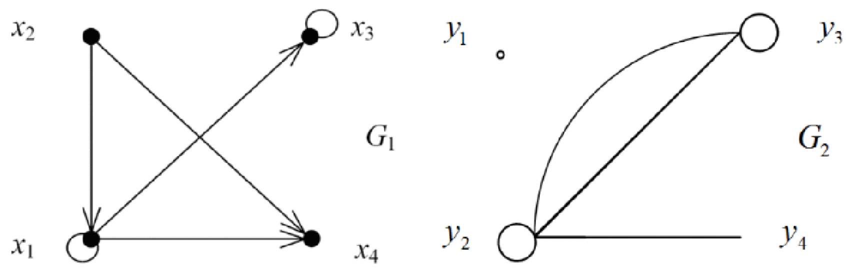
Для графів G_1 та G_2:

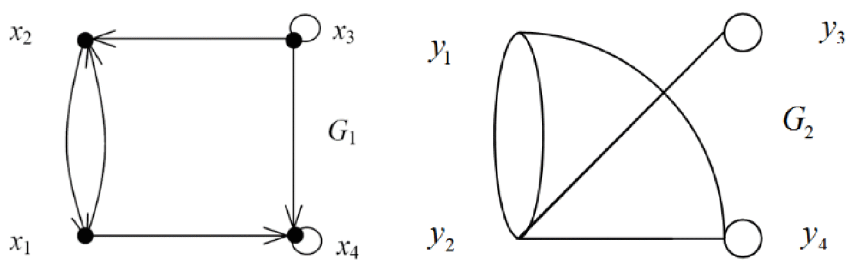
a) побудувати матриці інцидентності,
b) побудувати матриці суміжності,
c) подати графи списком пар,
d) подати графи списками суміжності.

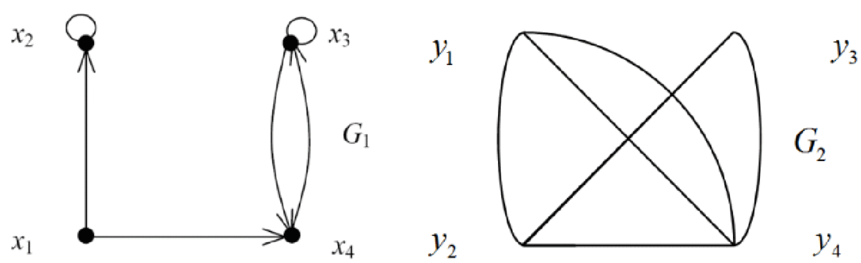
1. 

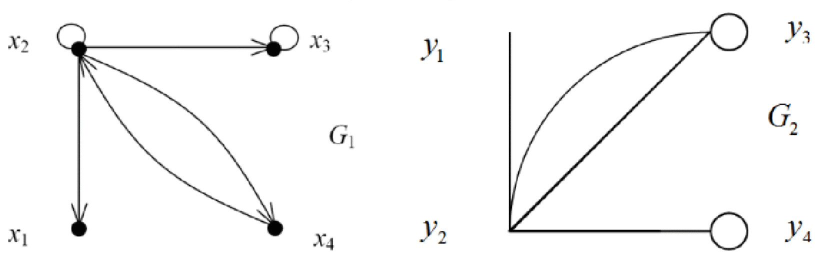
2. 

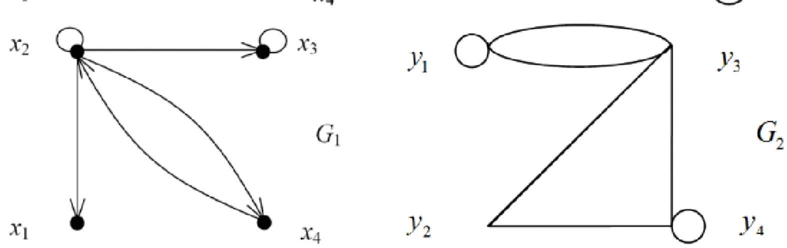
3.

x_2
x_3
G_1
x_1
x_4
y_1
y_3
G_2
y_2
y_4

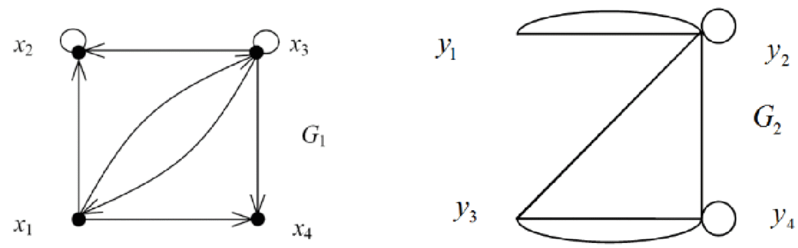
4.

x_2
x_3
G_1
x_1
x_4
y_1
y_3
G_2
y_2
y_4

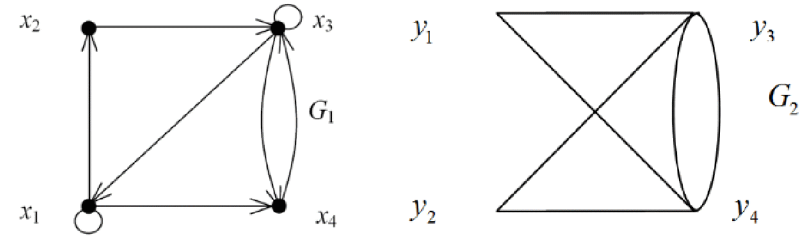
5.

x_2
x_3
G_1
x_1
x_4
y_1
y_3
G_2
y_2
y_4

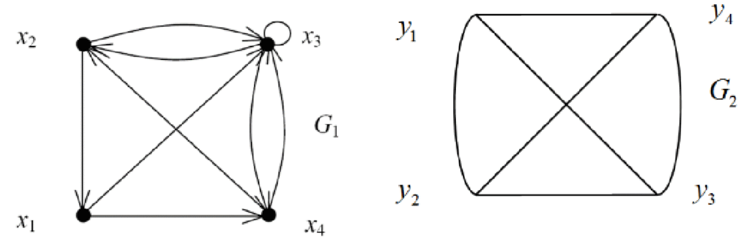
6.

x_2
x_3
G_1
x_1
x_4
y_1
y_3
G_2
y_2
y_4

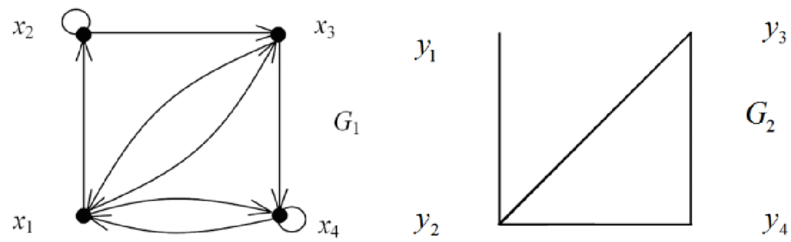
7.

x_2
x_3
G_1
x_1
x_4
y_1
y_3
G_2
y_2
y_4

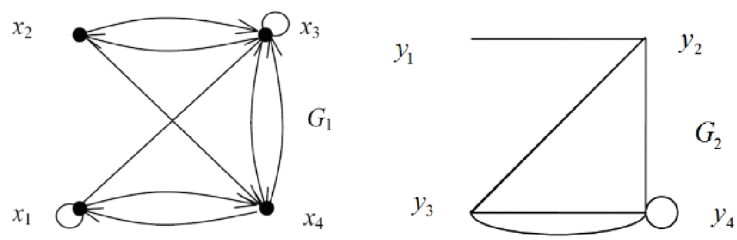
8.

x_2
x_3
G_1
x_1
x_4
y_1
y_3
G_2
y_2
y_4

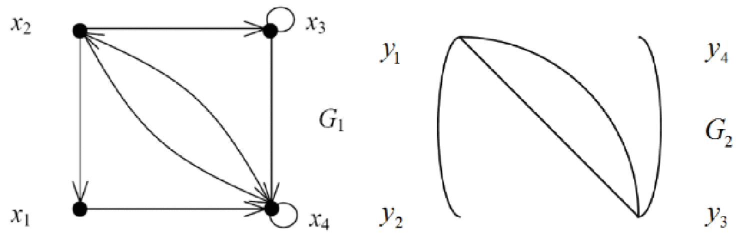
9.


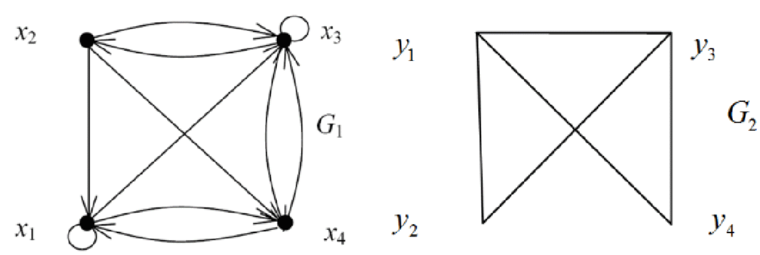
10.


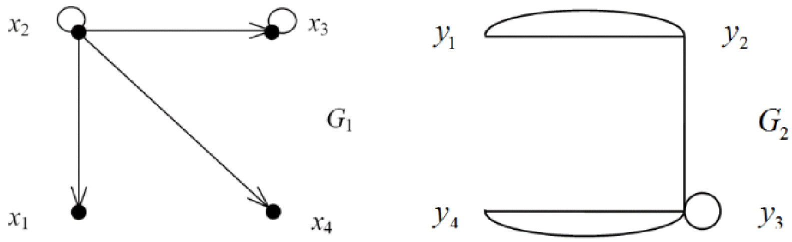
11.


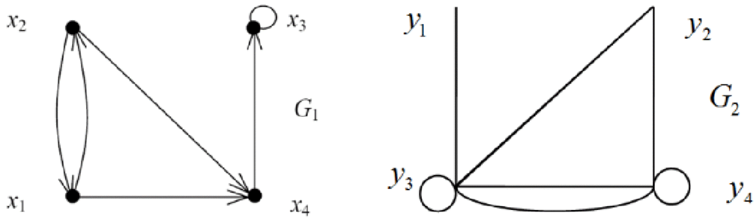
12.


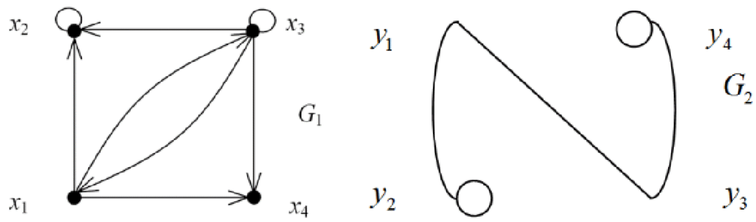
13.


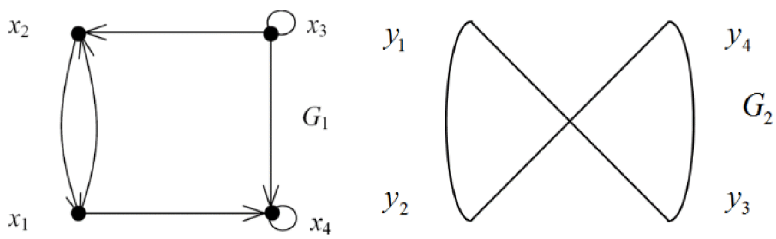
14.


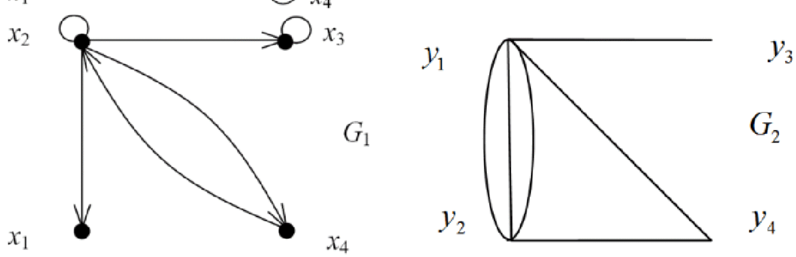
15.


16. 

17. 

18. 

19. 

20. 

Тема 7. Шляхи та цикли. Зв'язність. Ізоморфізм графів

Матриці досяжностей і контрдосяжностей

Матриця досяжностей $R=[r_{ij}]$ визначаються наступним чином:

$$r_{ij}=\begin{cases}1, \text{ якщо вершина } x_j \text{ досяжна із } x_i,\\ 0 \text{ в противному випадку.}\end{cases}$$

Множини вершин $R=(x_i)$ графа G, досяжних із заданої вершини x_i, складається з таких елементів x_j, для яких (i,j)-й елемент в матриці досяжностей рівний 1. Очевидно що всі діагональні елементи в матриці R рівні 1, оскільки кожна вершина досяжна із себе самої з допомогою шляху довжиною 0.

Оскільки $\Gamma(x_i)$ являється множиною таких вершин x_j, які досяжні із x_i з використанням шляхів довжиною 1 (тобто $\Gamma(x_i)$ – така множина вершин, для яких в графі існують дуги (x_i, x_j)) і оскільки $\Gamma(x_j)$ являється множиною вершин, досяжних із x_j з допомогою шляхів довжиною 1, то множина $\Gamma(\Gamma(x_i))=\Gamma^2(x_i)$ складається із вершин досяжних із x_i з використанням шляхів довжиною 2. Аналогічно $\Gamma^p(x_i)$ являється множиною вершин, які досяжні і x_i з допомогою шляхів довжиною р.

Так як будь-яка вершина графа G, яка досяжна із x_i, повинна бути досяжна з використанням шляху (або шляхів) довжиною 0, або 1, або 2,…, або р (з деякими кінцевими, але, можливо достатньо більшим значенням р), то множина вершин, досяжних із x_i, можна представити в вигляді

$$R(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^2(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup ... \cup \Gamma^p(x_i). \qquad (1)$$

Таким чином, множина $R(x_i)$ може бути получено отримано послідовним виконанням (зліва на право) операція об'єднання в співвідношенні (1), до тих пір, поки «протікаюче» не перестане збільшуватися по розміру при наступній операції об'єднання. З цього моменту наступні операції не будуть давати нових членів множині і, таким чином буде утворено досяжна множина $R(x_i)$. Число об'єднань, яке потрібно виконати, залежить від графа, але, очевидно, що число р менше числа вершин в графі.

Матрицю досяжностей можна вистроїти так. Знаходимо досяжні вершини $R(x_i)$ для всіх вершин $x_i \in X$ способом, наведеним вище покладемо $r_{ij} = 1$, якщо $x_j \in R(x_i)$, і r_{ij}=0 в протилежному випадку. Отримана таким образом матриця R являється матрицею досяжностей.

Матриця контрдосяжностей Q=$[q_{ij}]$ виявляється наступним чином:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо із вершини } x_j \text{ можна досягнути вершину } x_i. \\ 0 \text{ в противному випадку.} \end{cases}$$

Контрдосяжною множиною Q(x_i) графа G являється множина таких вершин, що із будь-якої вершини цієї множини можна досягнути вершину x_i. Аналогічно побудови досяжної множини $R(x_i)$ на основі відношення

(1) можна «сформулювати» множину $Q(x_i)$, використовуючи наступний вираз:

$$Q(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{=2}(x_i) \cup \ldots \cup \Gamma^{=p}(x_i). \qquad (2)$$

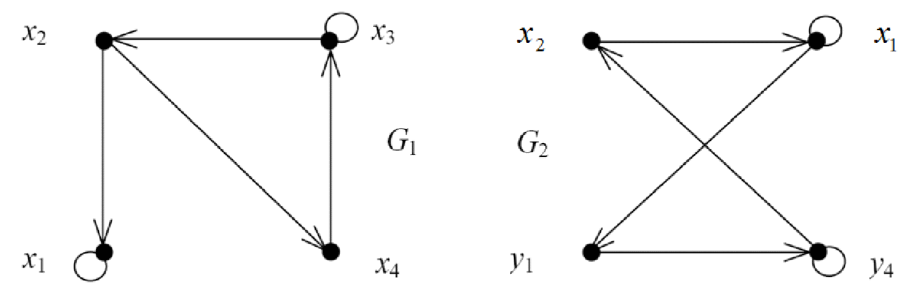
де $\Gamma^{-2}(x_i) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(x_i))$ і т. д.

Завдання до виконання

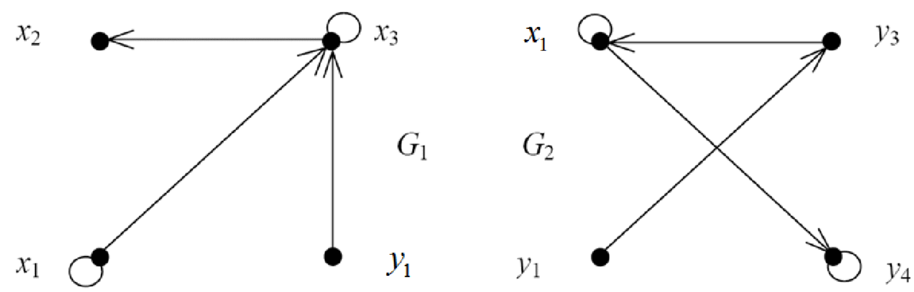
Завдання 1:

а) для графів G_1 та G_2 виконати операцію об'єднання графів в графічній та матричній формі;

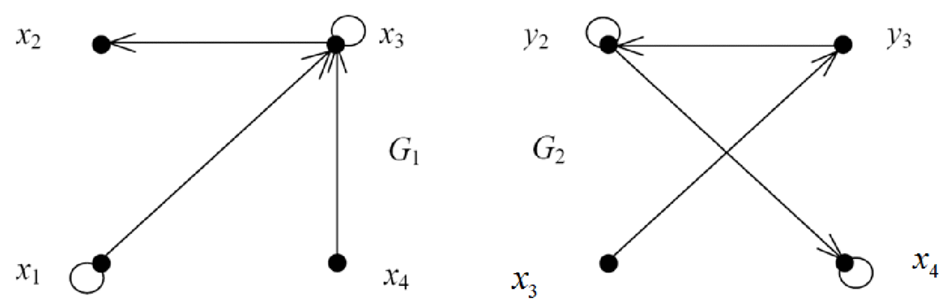
б) для отриманого графа записати множини досяжності, матриці досяжності і контрадосяжності.



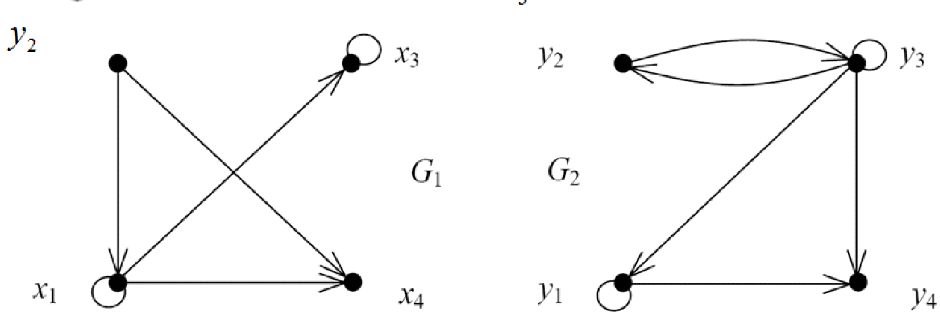
1.



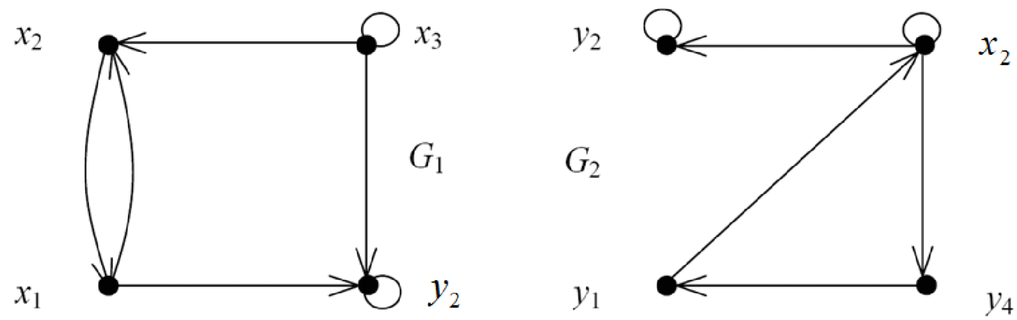
2.

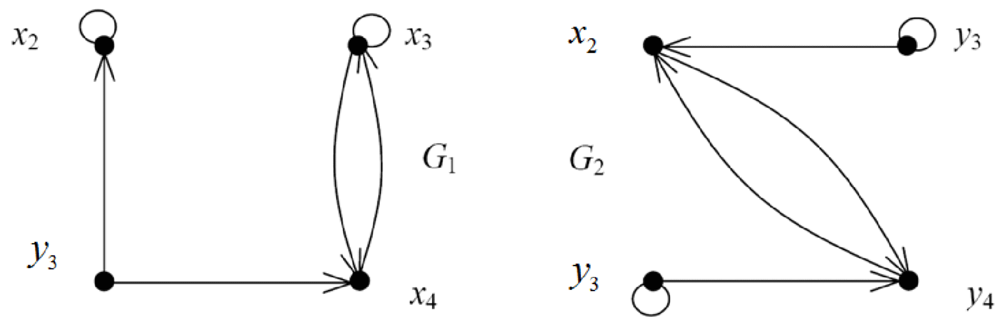


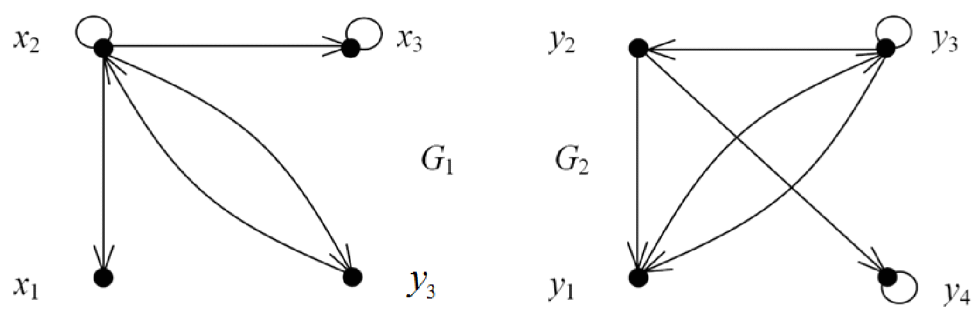
3.

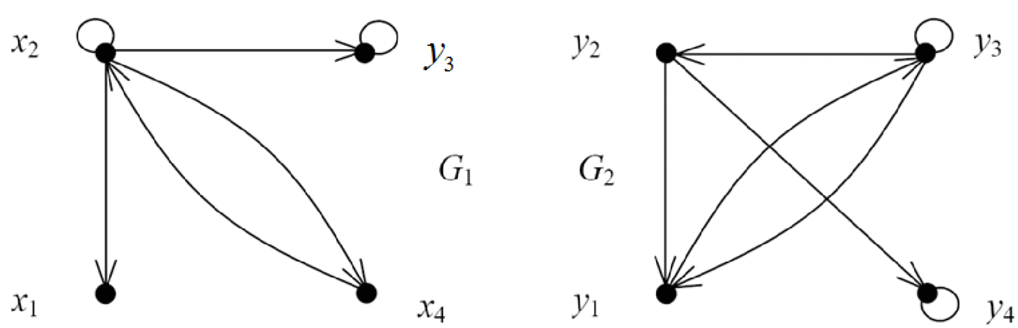


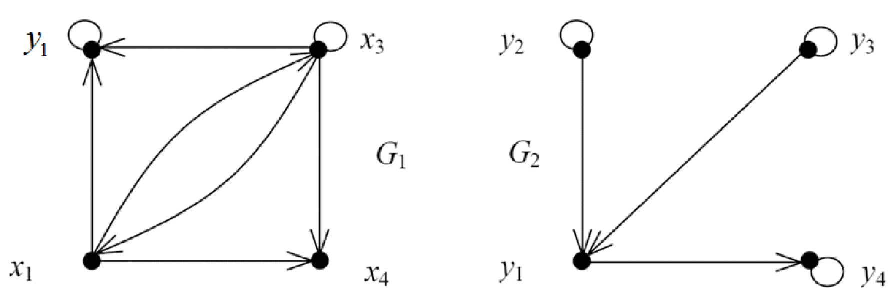
4.

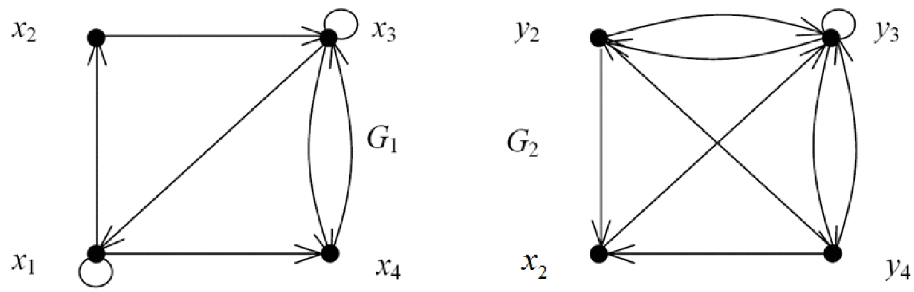
5.

x_2
x_3
G_1
x_1
y_2
y_2
x_2
G_2
y_1
y_4

6.

x_2
x_3
G_1
y_3
x_4
x_2
y_3
G_2
y_3
y_4

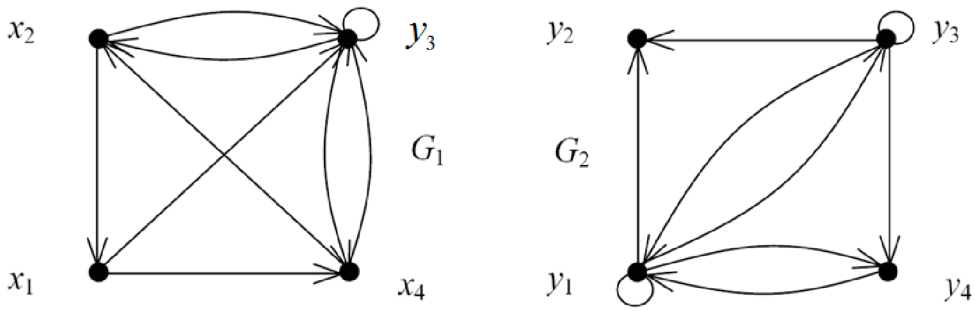
7.

x_2
x_3
G_1
x_1
y_3
y_2
y_3
G_2
y_1
y_4

8.

x_2
y_3
G_1
x_1
x_4
y_2
y_3
G_2
y_1
y_4

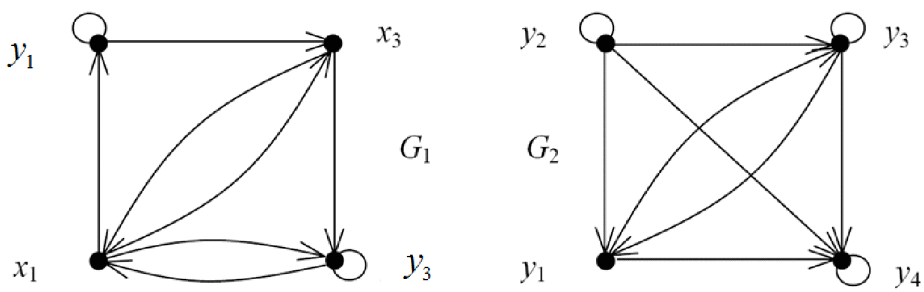
9.

y_1
x_3
G_1
x_1
x_4
y_2
y_3
G_2
y_1
y_4

10.


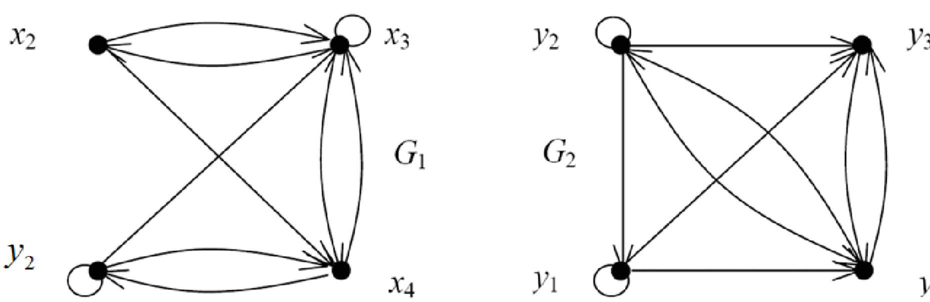
x_2
x_3
G_1
x_1
x_4
y_2
y_3
G_2
x_2
y_4

11.


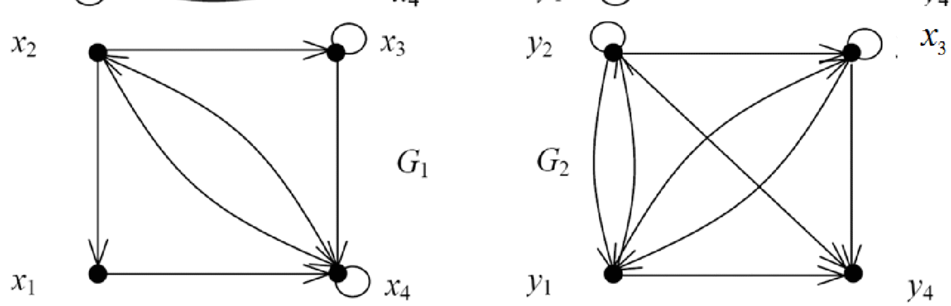
x_2
y_3
G_1
x_1
x_4
y_2
y_3
G_2
y_1
y_4

12.


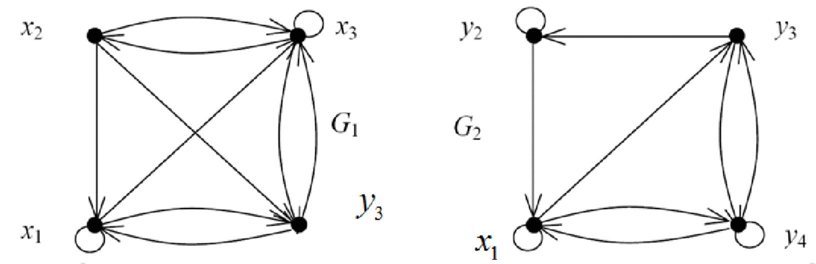
y_1
x_3
G_1
x_1
y_3
y_2
y_3
G_2
y_1
y_4

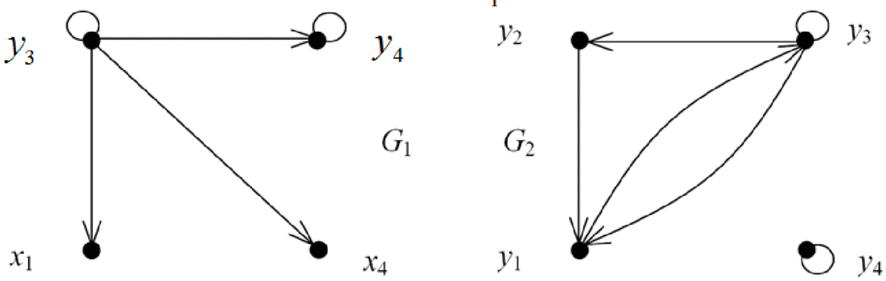
13.


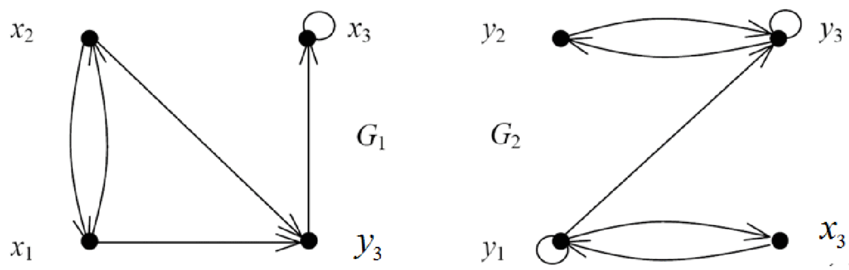
x_2
x_3
G_1
y_2
x_4
y_2
y_3
G_2
y_1
y_4

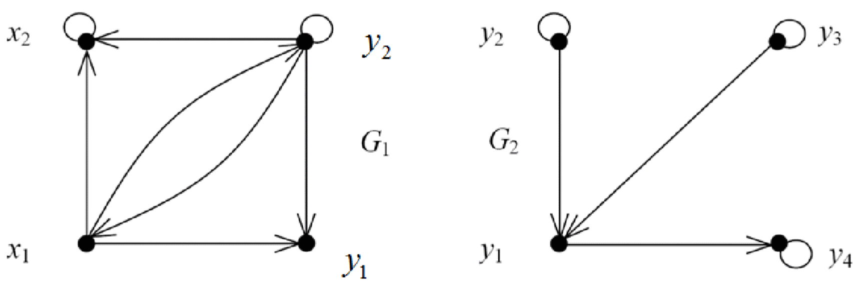
14.


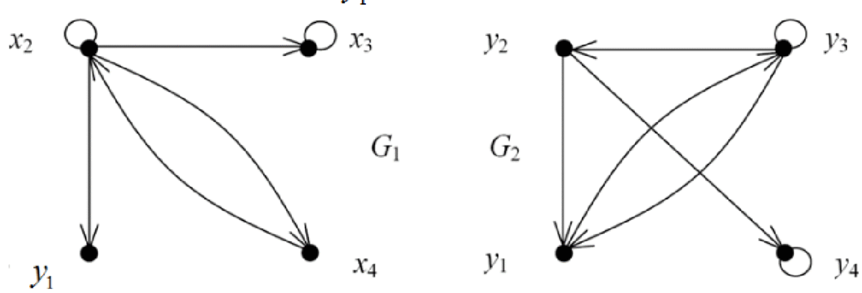
x_2
x_3
G_1
x_1
x_4
y_2
x_3
G_2
y_1
y_4

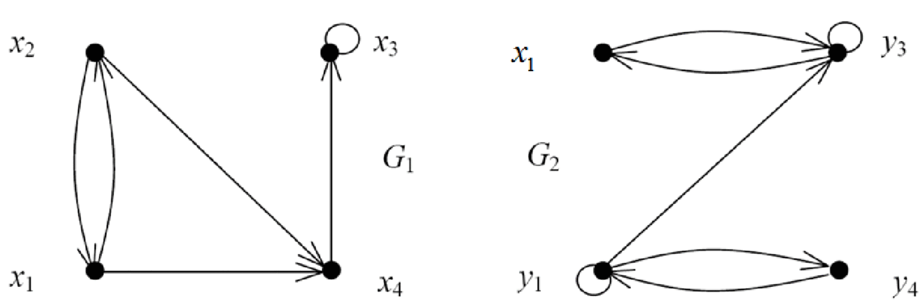
15.


16.


17.


18.


19.


20.


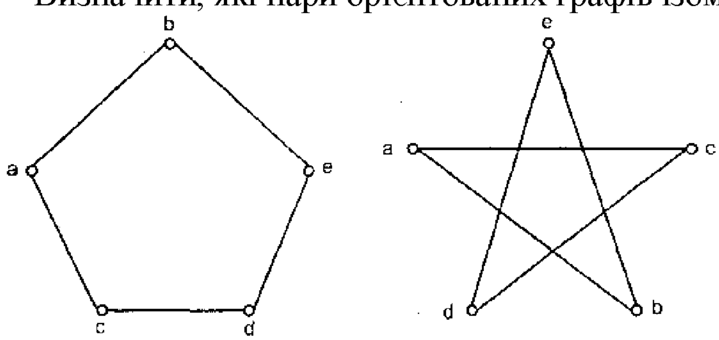
Ізоморфізм графів

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ – прості графи, а $\varphi : V_1 \to V_1$ – бієкція. Якщо для будь-яких вершин u та v графа G_1 їх образи $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$ суміжні в G_2 тоді й лише годі, коли $\varphi : V_1 \to V_1$ суміжні в G_2, то цю бієкцію називають **ізоморфізмом** графа G_1, на граф G_2. Якщо такий ізоморфізм існує, то графи G_1 та G_2 називають ізоморфними та записують $G_1 \cong G_2$.

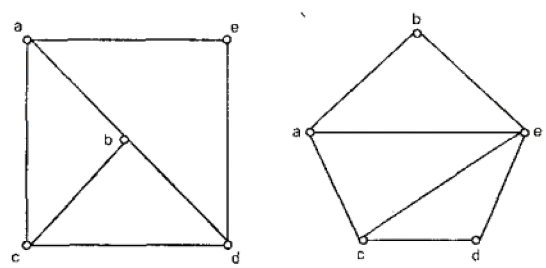
Інакше кажучи, прості графи G_1 та G_2 називають ізоморфними, якщо існує така бієкція $\varphi : V_1 \to V_1$, що вершини $\varphi : V_1 \to V_1$ суміжні в G_1 тоді й лише тоді, коли вершини $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$ суміжні G_2 для всіх $u, v \in V_1$ (у такому разі говорять, що ця бієкція зберігає суміжність вершин).

Завдання 2.

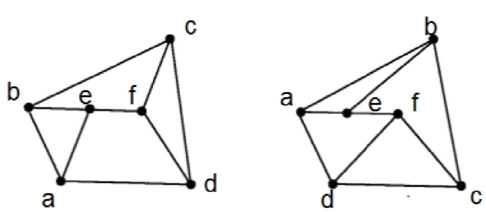
Визначити, які пари орієнтованих графів ізоморфні:



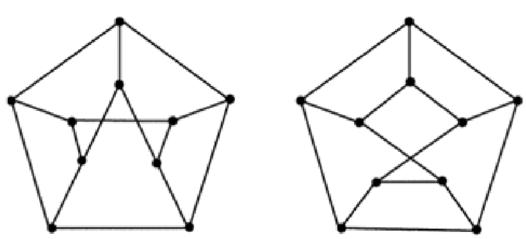
а)



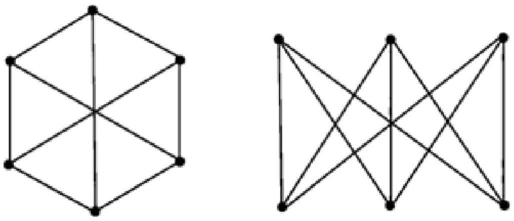
б)



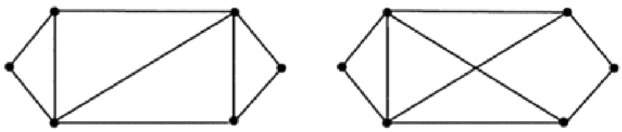
в)



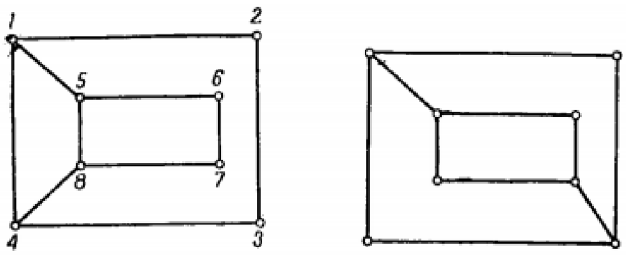
г)



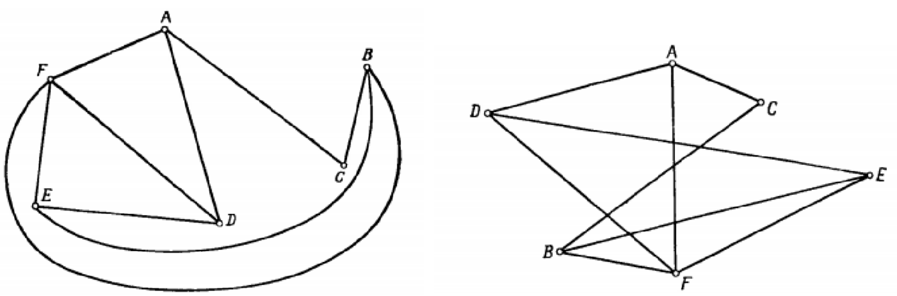
д)



е)



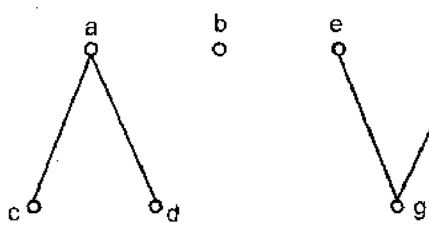
є)



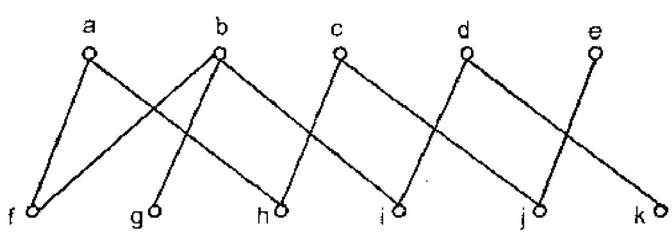
ж)

Завдання 3.

Визначити, який з наведених нижче графів зв’язний? Вказати кількість компонент:

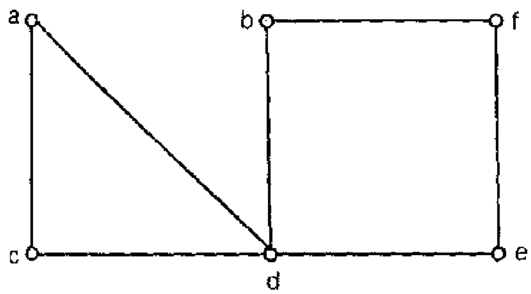


а)

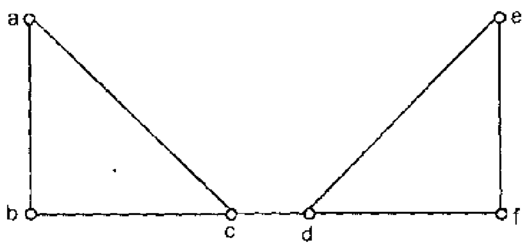


б)

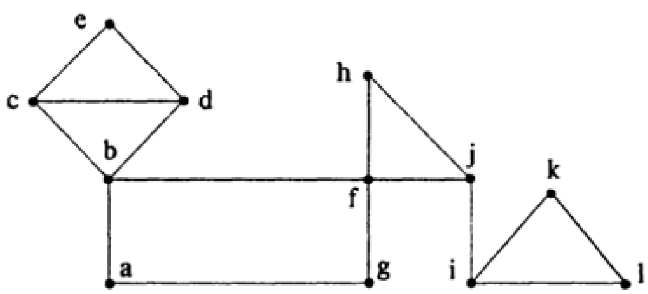
Знайти точки з’єднання графів:



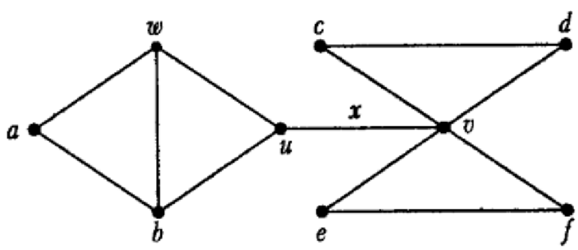
а)



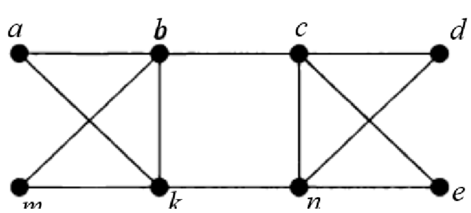
б)



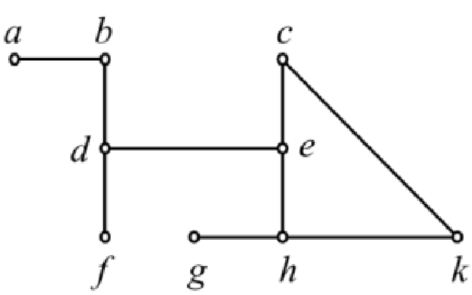
в)



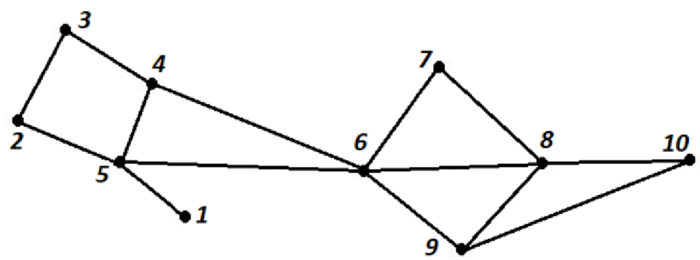
в)



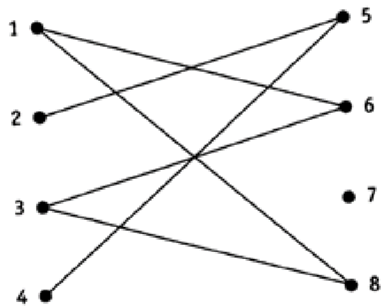
г)



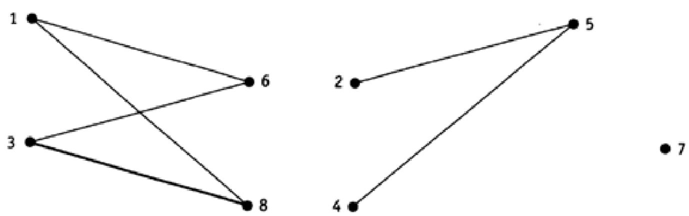
д)



е)

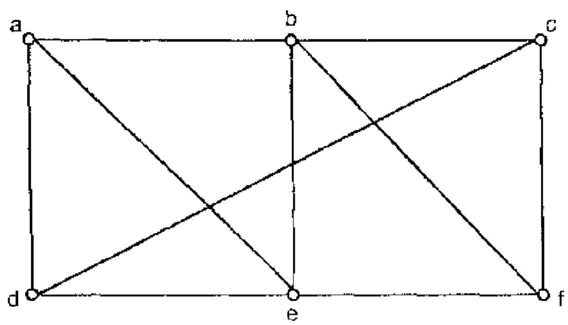


є)



ж)

1. Знайти кількість шляхів довжиною n між вершинами c та d у графі для значень п рівних 2,3,4,5,6,7?



Тема 8. Ейлерів та Гамільтонів шлях та цикл у графі

Ейлеровим циклом у зв'язному мультиграфі G називають простий цикл, який містить усі ребра графа. **Ейлеровим шляхом** у зв'язному мультиграфі G називають простий шлях, який містить усі ребра графа.

Шлях $x_0, x_1 \dots, x_{n-1}$ у неорієнтованому зв'язному графі G=(V, E), V=$\{v_1, \dots, v_n\}$ називають **гамільтоновим шляхом** якщо $x_i \in V$ i $x_i \neq x_j$ для $0 \leq i < j \leq n-1$. Цикл $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0$ (тут $n \geq 3$) у графі G називають **гамільтоновим циклом**, якщо $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ – гамільтонів шлях.

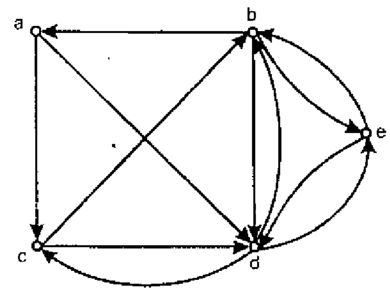
Завдання до виконання

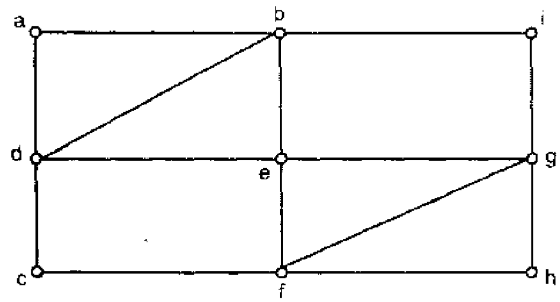
1) Визначити, які з наведених нижче графів мають ейлерів цикл. Зобразити його.

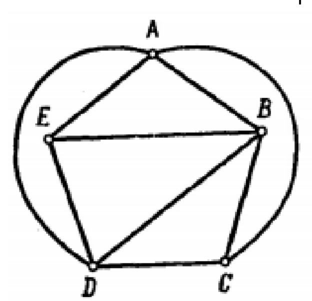
2) Які з графів мають ейлерів шлях, але не мають ейлеревого циклу?

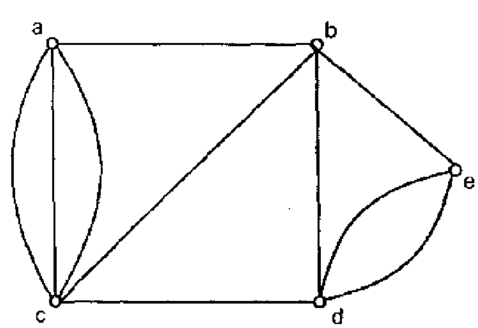
3) Які з графів мають гамільтонів цикл?

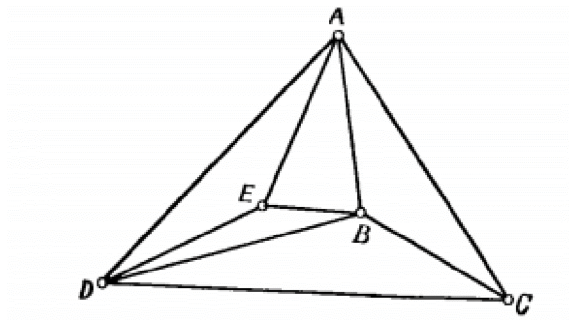
4) Які з графів, що не мають гамільтонового циклу, мають гамільтонів шлях?

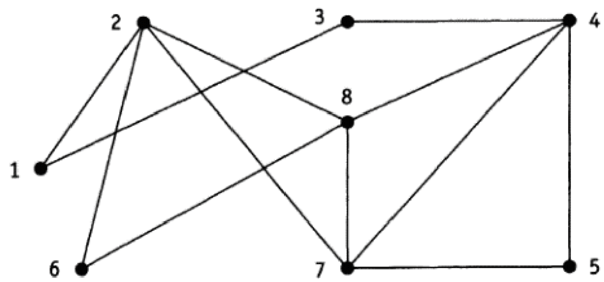
1. 

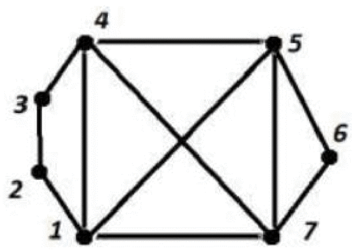
2. 

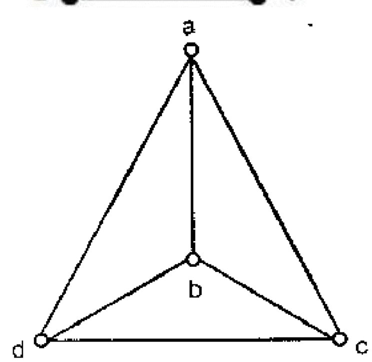
3. 

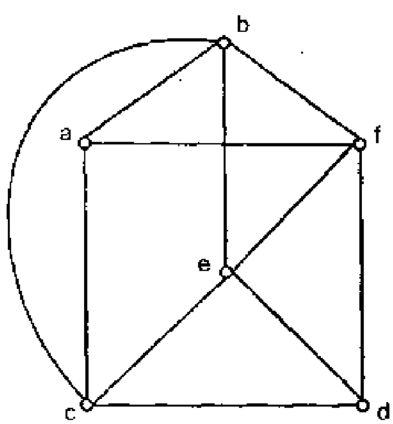
4. 

5.


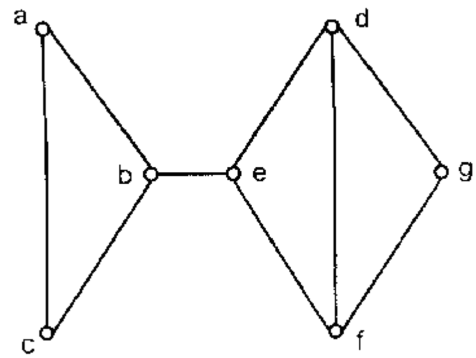
6.


7.


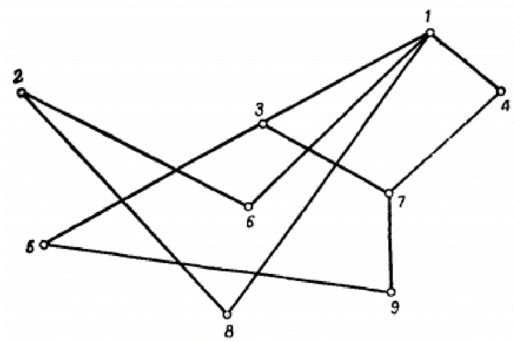
8.


9.


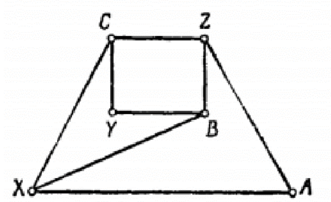
10.



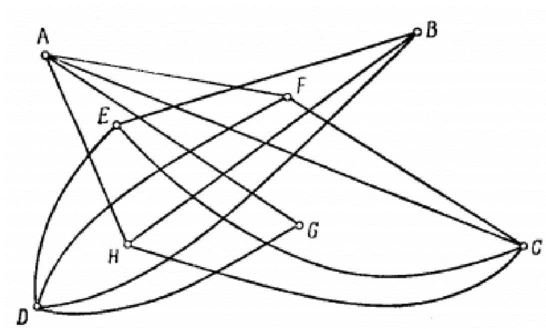
11.



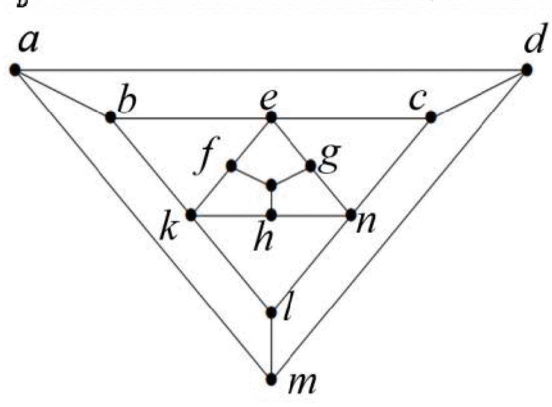
12.

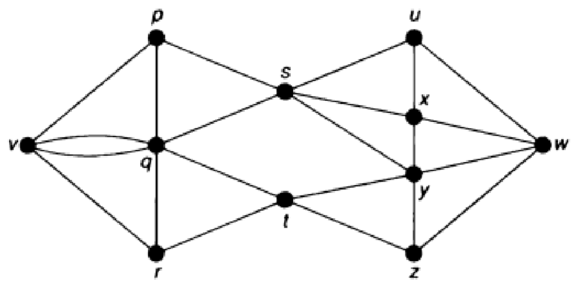


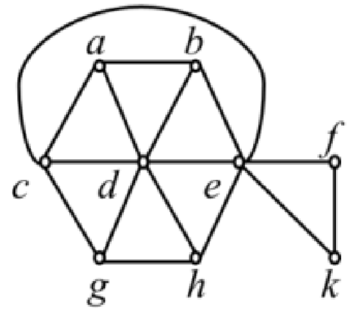
13.

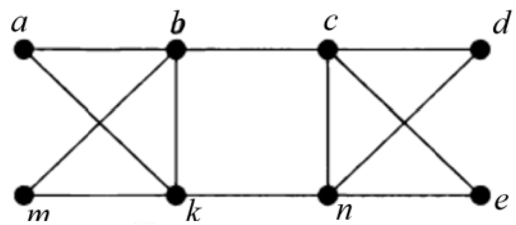


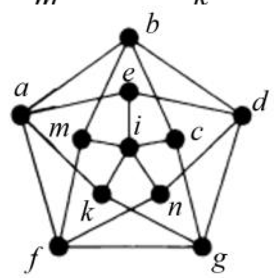
14.

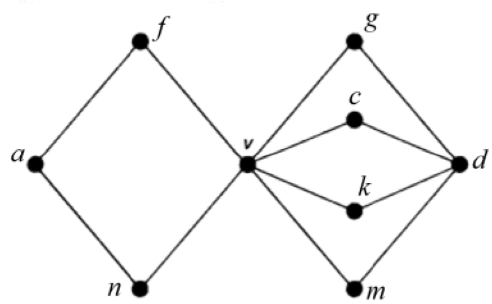


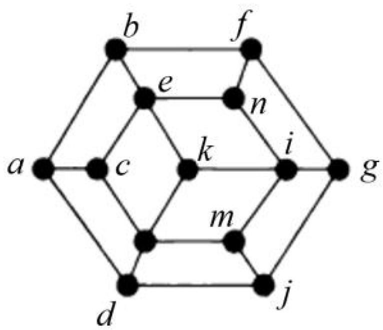
15. 

16. 

17. 

18. 

19. 

20. 

Тема 9. Зважені графи та алгоритми пошуку найкоротших шляхів

Зваженим називають простий граф, кожному ребру e якого приписане дійсне число w(е). Це число називають *вагою* ребра е.

Аналогічно означають зважений орієнтований граф: це такий орієнтований граф, кожній дузі e з якого приписане дійснечисло $w(e)$, назване вагою дуги.

Опис Алгоритму Дейкстри

Присвоєння початкових значень

Крок 1. Виконати I(a):=0 і вважати цю мітку постійною. Виконати I(v):=∞ для всіх v≠a і вважати ці мітки тичасовими. Виконати x:=a, M:={a}.

Оновлення міток

Крок 2. Для кожної вершини v∈ Г(x)\M замінити мітки I(v):=min{I(v);I(x)+w(x,v)}, тобто оновлювати тимчасові мітки вершин, у які з вершини x іде дуга.

Перетворення мітки в постійну.

Крок 3. Серед усіх вершин з тимчасовими мітками знайти вершину з мінімально міткою, тобто знайти вершину v^* за умови I(v^*)=min{I(v)}, v∈ T, де T=V\M.

Крок 4.Уважати мітку вершини v^* постійною і виконати M:=M∪(v);x:= v^* (вершину v^* включено в множину M).

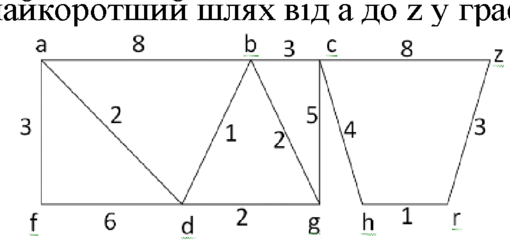
Закінчення

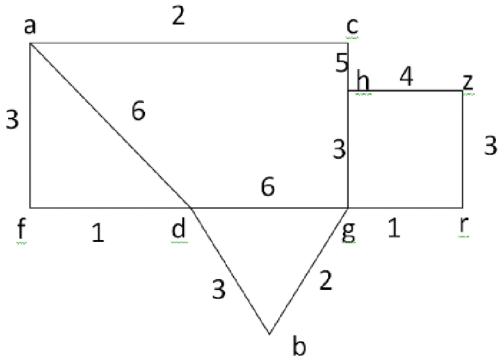
Крок 5. а) Для пошуку шляху від a до z: якщо x=z, то I(z)-довжина найкоротшого шляху від a до z, зупинитись, якщо x≠ z, то перейти до кроку2.

б) Для пошуку шляхів від a до всіх інших вершин: якщо всі вершини отримали постійні мітки(включені в множину M), то ці мітки дорівнюють довжинам найкоротших шляхів, зупинитись; якщо деякі вершини мають тимчасові мітки, то перейти до кроку 2.

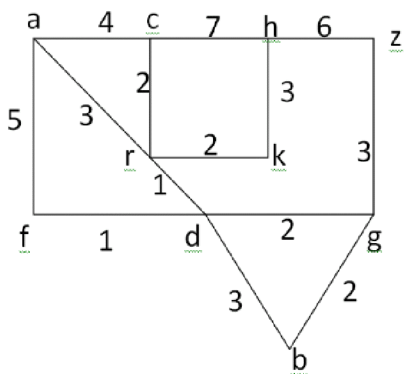
Завдання до виконання

Завдання 1. За допомогою алгоритму Дейкстри знайти найкоротший шлях від a до z у графах, зображених на рисунках.

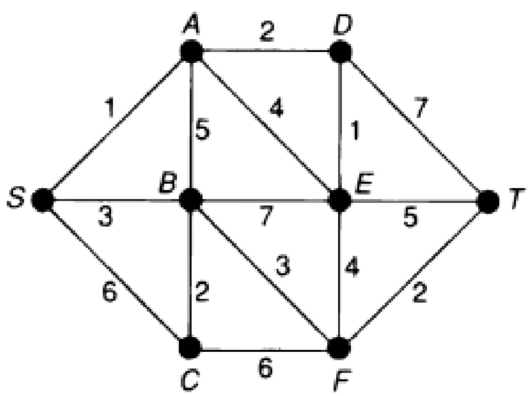
1. 


a 2 c
5 h 4 z
3 6 3 3
6
f 1 d g 1 r
3 2
b

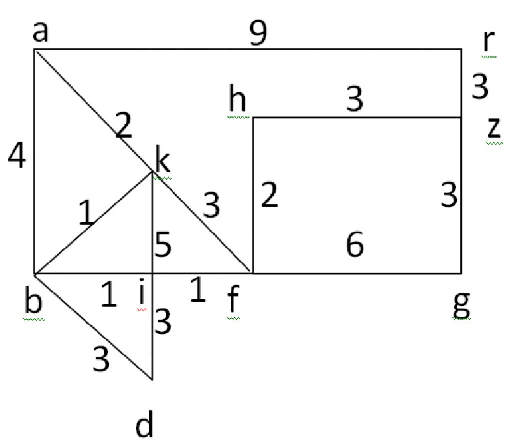
2.


a 4 c 7 h 6 z
2 3
5 3
r 2 k 3
1
f 1 d 2 g
3 2
b

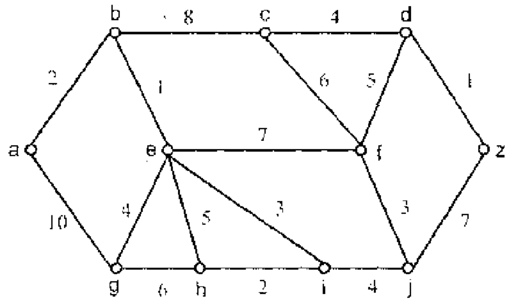
3.


A 2 D
1 4 7
5 1
S B E T
3 7 5
6 2 3 4 2
C 6 F

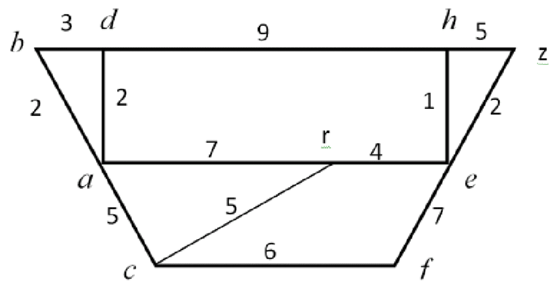
4.


a 9 r
h 3 3
2 z
4 k
1 3 2 3
5 6
b 1 i 1 f g
3
3
d

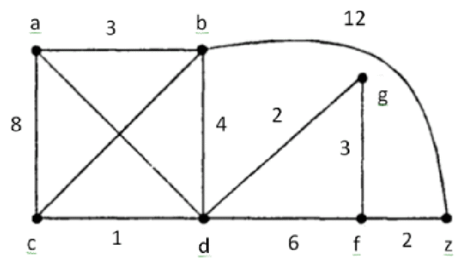
5.

6.


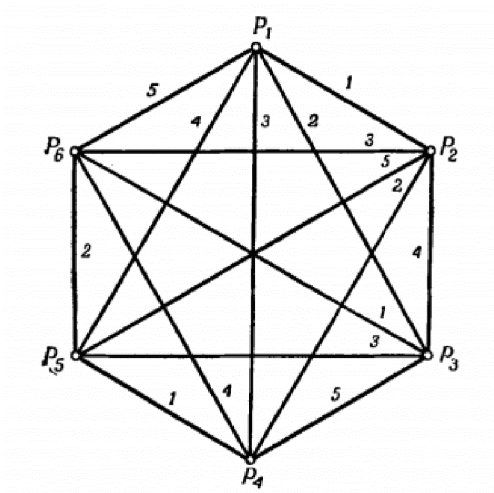
b
8
c
4
d
2
1
6
5
1
a
e
7
f
z
10
4
5
3
3
7
g
6
h
2
i
4
j

7.


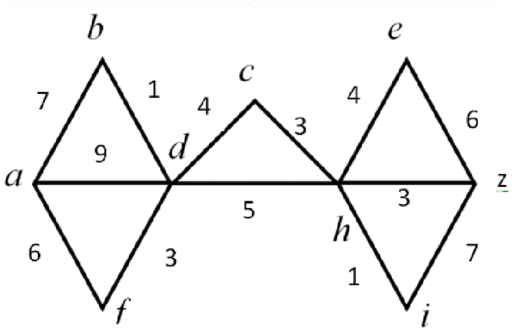
3
d
9
h
5
b
z
2
2
1
2
7
r
4
a
e
5
5
7
6
c
f

8.


a
3
b
12
g
8
4
2
3
c
1
d
6
f
2
z

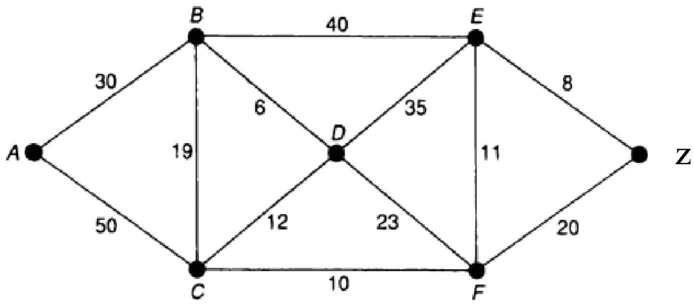
9.


P_1
5
1
4
3
2
3
P_6
5
P_2
2
2
4
1
3
P_5
P_3
1
4
5
P_4

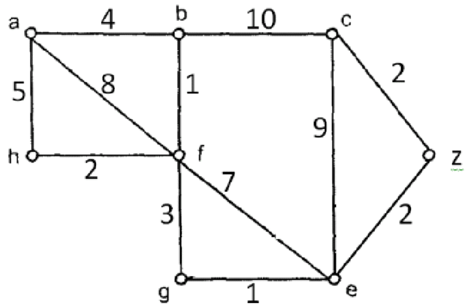
10.


b
e
c
7
1
4
4
3
6
9
d
a
z
5
3
h
6
3
1
7
f
i

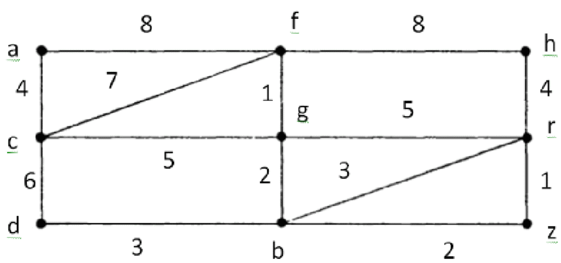
11.


B
40
E
30
6
35
8
A
19
D
11
z
50
12
23
20
C
10
F

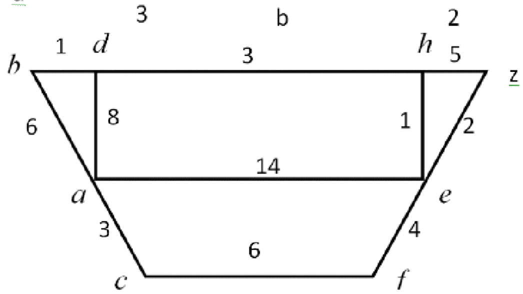
12.


a
4
b
10
c
5
8
1
2
9
h
2
f
7
z
3
2
g
1
e

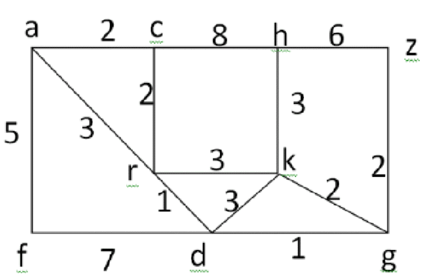
13.


8
f
8
a
h
4
7
1
g
5
4
r
c
5
2
3
6
1
d
z
3
b
2

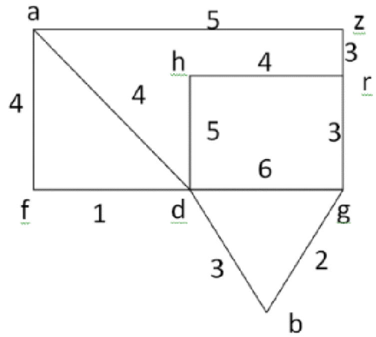
14.


1
d
3
h
5
b
z
6
8
1
2
14
a
e
3
6
4
c
f

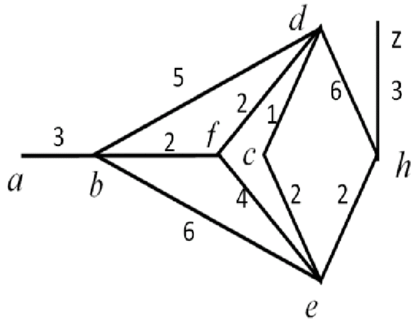
15.


a
2
c
8
h
6
z
2
3
5
3
3
r
k
2
2
1
3
f
7
d
1
g

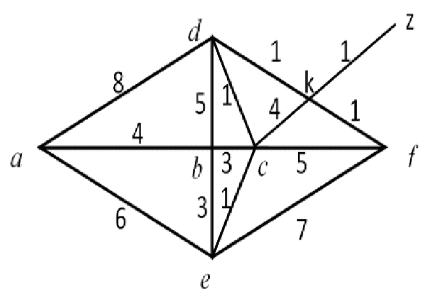
16.


a
5
z
h
4
3
r
4
4
5
3
6
f
1
d
g
3
2
b

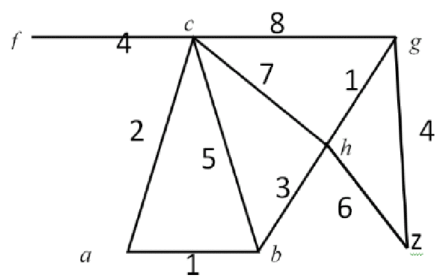
17.


d
z
5
6
3
2
1
3
2
f
c
h
a
b
4
2
2
6
e

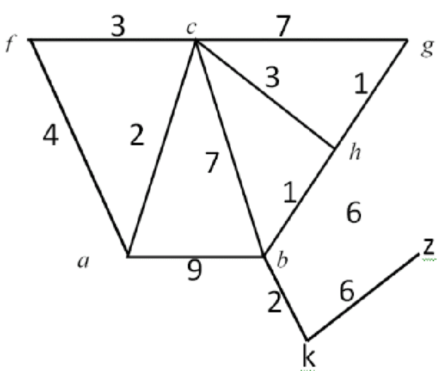
18.


d
z
1
1
8
k
5
1
4
1
4
a
b
3
c
5
f
3
1
6
7
e

19.


f
4
c
8
g
7
1
2
4
5
h
3
6
a
1
b
z

20.


3
c
7
f
g
3
1
4
2
h
7
1
6
a
9
b
z
2
6
k

Алгоритм Флойда

Опис Алгоритму Флойда

Крок 1. Присвоювання початкових значень. Пронумерувати вершини графа G цілими числами від 1 до *n*. Побудувати матрицю $W^{(0)}$ задавши кожний її (i, j)-й елемент рівним вазі дуги з вершини I у вершину j. Якщо в графі G такої дуги немає, то $w_{ij}^{(0)} := \infty$. Крім того, для всіх і виконати $w_{ij}^{(0)} := 0$

Крок 2. Ітерація. Для *k,* що послідовно набуває значення 1, 2,.... *n.* визначити за елементами матриці $W^{(k-1)}$ елементи матриці $W^{(k)}$, використовуючи рекурентне співвідношення (1).

Після закінчення цієї процедури величина елемента (i,j) матриці дорівнює довжині найкоротшого шляху з вершини і у вершину j.

Завдання 2. За допомогою алгоритму Флойда знайти найкоротший шлях від a до z у графах, зображених на рисунках.

Тема 10. Обхід графів. Планарні графи

Пошук углиб у простому зв'язному графі

Алгоритм пошуку вглиб у простому зв'язному графі

Крок 1. Почати з довільної вершини v_s. Виконати DFS(v):=1. Включити цю вершину в стек.

Крок 2. Розглянути вершину у верхівці стеку: нехай це буде вершина x. Якщо всі ребра, інциденти вершині x, позначено, то перейти до кроку 4, інакше - до кроку 3.

Крок 3. Нехай {x, *y)* - непозначене ребро. Якщо DFS(y) уже визначено, то позначити ребро (x, y) штриховою лінією та перейти до кроку 2. Якщо DFS(y) не визначено, то позначити ребро (x, y) потовщеною суцільною лінією, визначити DFS(y) як черговий DFS-номер, включити цю вершину в стек і перейти до кроку 2.

Крок 4. Виключити вершину x зі стеку. Якщо стек порожній, то зупинитись, інакше - перейти до кроку 2.

Щоб вибір номерів був однозначним, доцільно домовитись, що вершини, суміжні з тією, яка вже отримала DFS -номер. аналізують за зростанням їх нумерації (або в алфавітному порядку). Динаміку роботи алгоритму зручно відображати за допомогою таблиці з трьома стовпцями: вершина, DFS- номер, уміст стеку. її називають *протоколом обходу* графа пошуком вглиб.

Пошук ушир у простому зв'язному графі

Алгоритм пошуку вшир у простому зв'язному графі

Крок 1. Почати з довільної вершини v_s. Виконати BFS(v_s):=1. Включити вершину v_s у чергу.

Крок 2. Розглянути вершину, яка знаходиться на початку черги, нехай це буде вершина x. Якщо для всіх вершин, суміжних із вершиною x, уже визначені BFS-номери, то перейти до кроку 4, інакше - до кроку 3.

Крок 3. Нехай {x, y} - ребро, у якому номер BFS(y) не визначений. Позначити це ребро потовщеною суцільною лінією, визначити BFS(y) як черговий BFS-номер, включаємо вершину y у чергу й перейти до кроку 2.

Крок 4. Виключити вершину x із черги. Якщо черга порожня, то зупинитись, інакше - перейти до кроку 2.

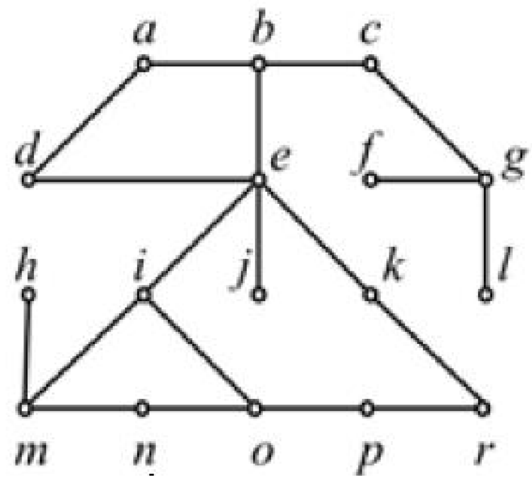
Щоб результат виконання алгоритму був однозначним, вершини, які суміжні з вершиною *x*, аналізують за зростанням їх нумерації (або в алфавітному порядку). Динаміку роботи алгоритму пошуку вшир також зручно відображати за допомогою протоколу обходу. Він аналогічний попередньому й відрізняється лише третім стовпцем: тепер це - уміст черги (уважаємо, що голова черги ліворуч, а хвіст - праворуч).

Завдання до виконання

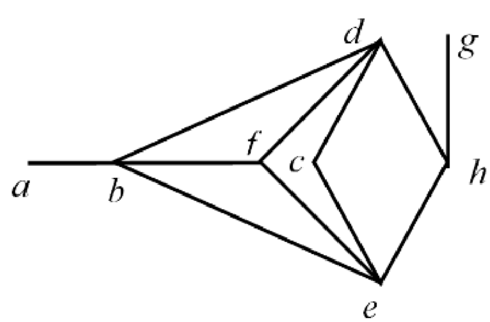
Завдання 1.

Обійти наведені графи пошуком углиб (варіант 1-10) Вважати, що вершини впорядковано за алфавітом, а початкова – вершина *a*.

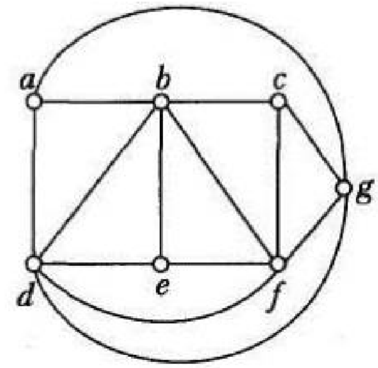
Обійти наведені графи пошуком ушир (варіант 10-20) Вважати, що вершини впорядковано за алфавітом, а початкова – вершина *a*.

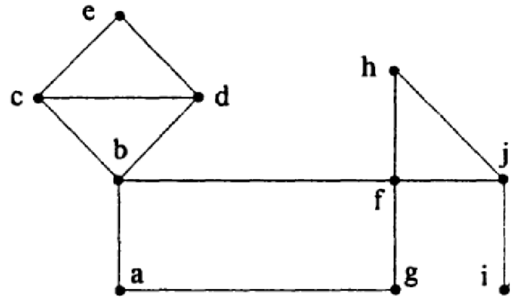


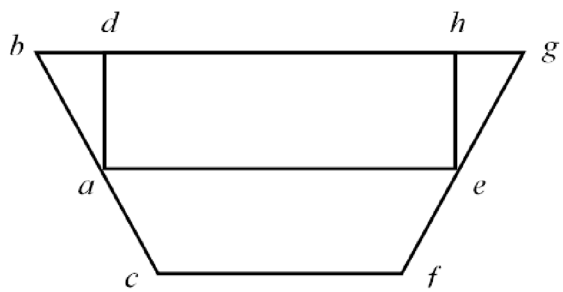
1. (11)

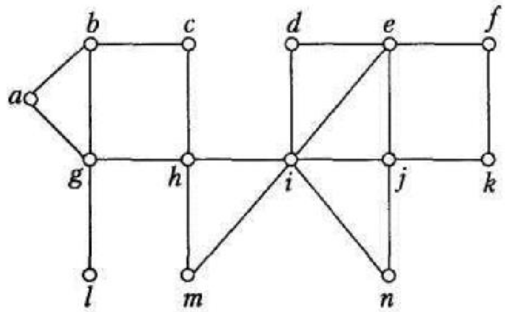


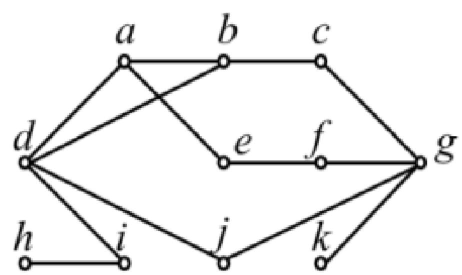
2. (12)

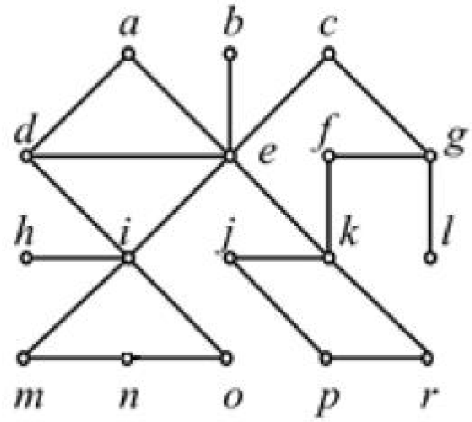
3.  (13)

4.  (14)

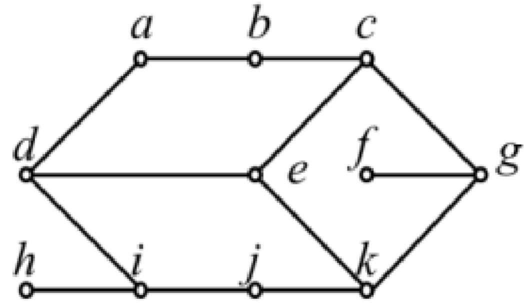
5.  (15)

6.  (16)

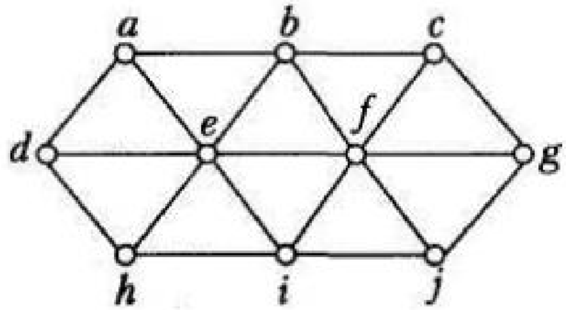
7.  (17)

8. 

(18)

9. 

(19)

10. 

(20)

Незалежні множини вершин. Кліки

Нехай G – простий граф. Множину його вершин називають *незалежною* (або *внутрішньо стійкою),* якщо ніякі вершини цієї множини не суміжні. Незалежну множину називають *максимальною,* якщо вона не є підмножиною жодної іншої незалежної множини з більшою кількістю вершин.

Найпотужнішу максимальну незалежну множину називають *найбільшою.* Кількість вершин у найбільшій незалежній множині графа G називають *числом незалежності* (або *числом внутрішньої стійкості, нещільністю)* і позначають як $a\ (G)$.

Із поняттям незалежності в графі пов'язане поняття домінування. Підмножину V' вершин графа G=(V, E) називають *домінантною* (або *зовнішньо стійкою),* якщо кожна вершина з $V \setminus V'$ суміжна з якоюсь вершиною з V'. Інакше кажучи, кожна вершина графа віддалена від домінантної множини не більше, ніж на одиницю. Домінантна множина має назву *мінімальної,* якщо жодна з її власних підмножин не домінантна. Домінантну множину з найменшою потужністю називають *найменшою.*

Уведемо ще одне поняття, пов'язане з поняттям незалежності. Говорять, що вершина й ребро графа *покривають одне одного,* якщо вони інциденті. Отже, ребро $e = \{u, v\}$ покриває вершини *u* та V, а кожна з цих вершин покриває ребро *e*. Підмножину вершин $V' \subset V$ називають *покриттям* (або *вершинним покриттям, опорою)* графа G=(V, *E).* якщо кожне ребро з *E* інцидентне принаймні одній вершині з V'. Покриття графа *G* називають *мінімальним,* якщо воно не містить покриття з меншою кількістю вершин, і найменшим, якщо кількість вершин у ньому найменша серед усіх покриттів графа G. Кількість вершин у найменшому покритті графа *G* називають *числом покриття* (або *числом вершинного покриття)* графа G, і позначають як *b(G).*

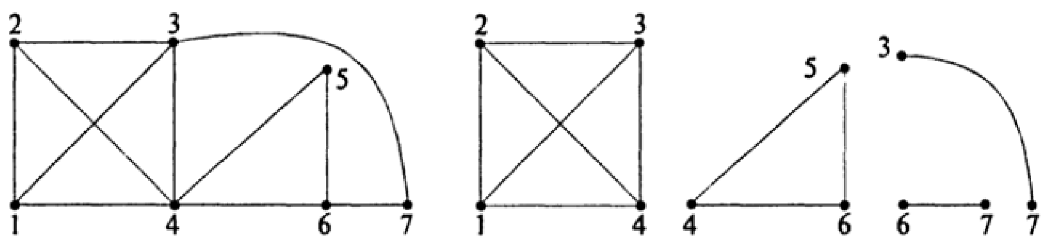


Рисунок 1 – Граф і його кліки

Завдання 2.

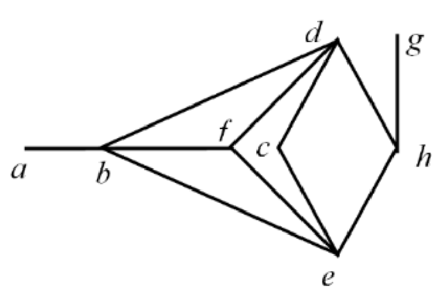
Для наведених нижче графів:

– знайти всі максимальні незалежні множини вершин;

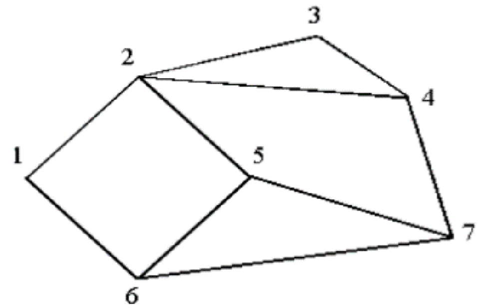
– зазначити найбільшу незалежну множину та число незалежності кожного з цих графів;

– знайти всі максимальні кліки;

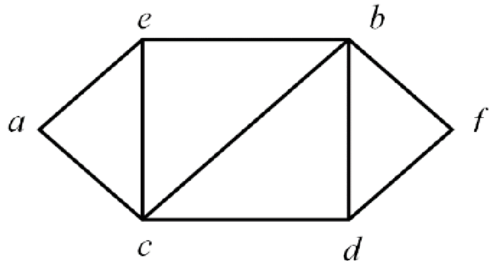
– визначити кліковe число (щільність) цих графів.

1. 

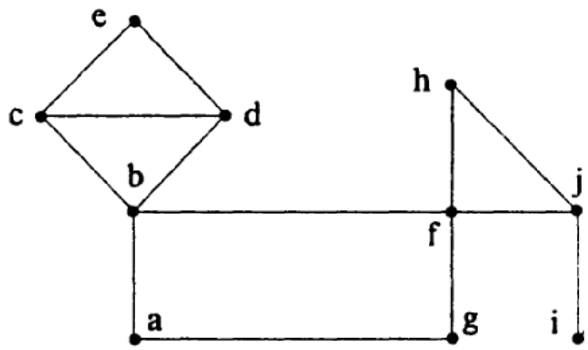
2.



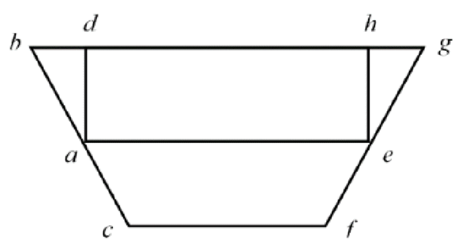
3.



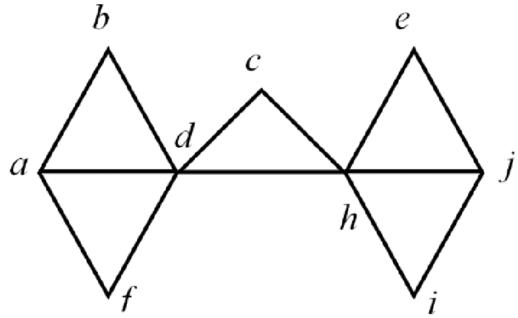
4.



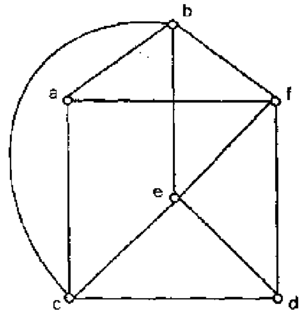
5.



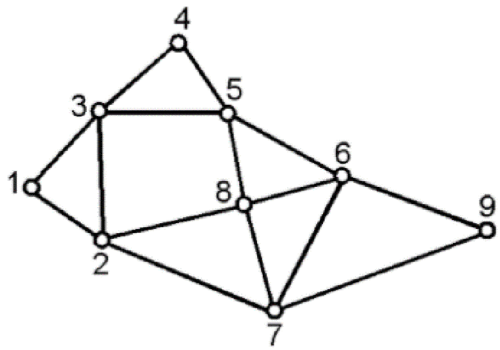
6.



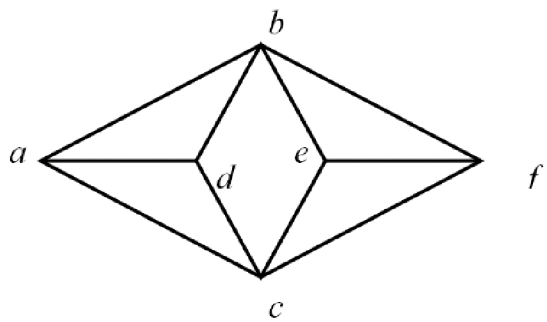
7.



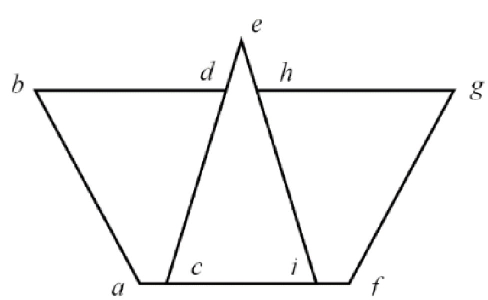
8.

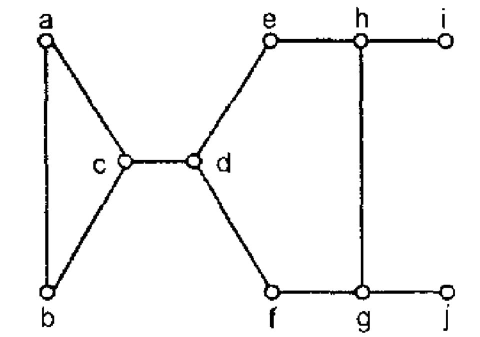


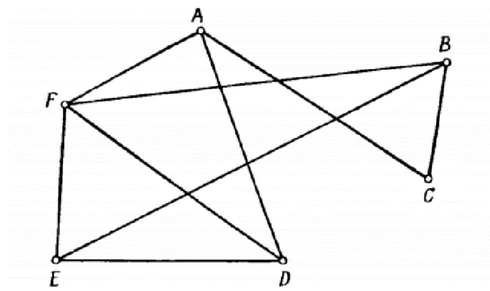
9.

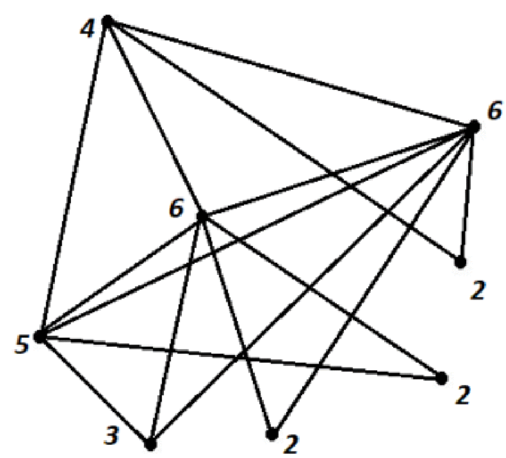


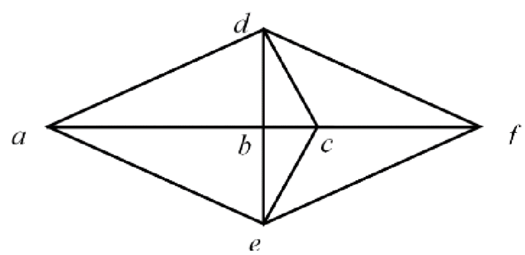
10.

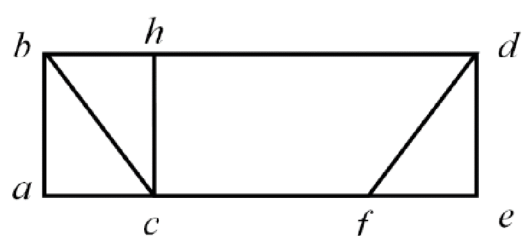


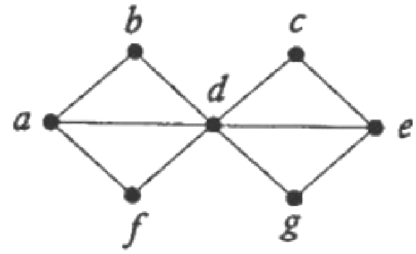
11. 

12. 

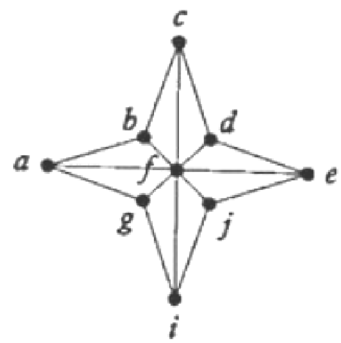
13. 

14. 

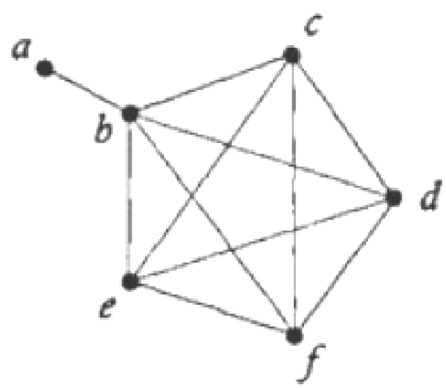
15. 



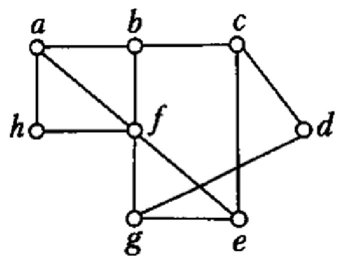
16.



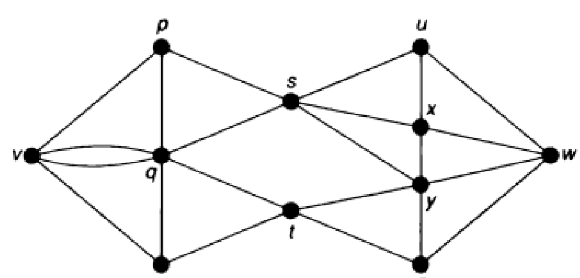
17.



18.



19.



20.

Тема 11. Дерева та їх застосування

Алгоритм обходу дерева в прямому порядку – ОПП *(корінь)*
– обробити(корінь);
– якщо лс *(корінь)* існує, то ОПП (лс *(корінь));*
– якщо пс *(корінь)* існує, то ОПП(пс*(корінь)*).

Алгоритм обходу дерева у внутрішньому порядку – ОВП *(корінь)*
– якщо *пс (корінь)* існує, то *ОВП {пс (корінь));*
– обробити(корінь);
– якщо *пс(корінь)* існує, то *ОВП (пс(корінь).*

Алгоритм обходу дерева у зворотному порядку – ОЗП *(корінь)*
– якщо лс *(корінь)* існує, то ОЗП (лс *(корінь));*
– якщо *пс (корінь)* існує, то ОЗП (пс *(корінь));*
– обробити *(корінь).*

Завдання до виконання

Завдання 1.

1. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у префіксній формі: $*-\uparrow 32*435$.

2. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у постфіксній формі: $131++314+-*$.

3. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному у префіксній формі. Записати його у постфісній формі: $*+23+*25-86$.

4. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у префіксній формі: $*-4+5\uparrow 2+323$.

5. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у постфіксній формі: $42*2\uparrow 53-63/**$.

6. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному у префіксній формі. Записати його у постфісній формі: $--\uparrow 32**22/6-42$.

7. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному у префіксній формі. Записати його у постфісній формі: $*-24-72$.

8. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у префіксній формі: $+\uparrow 2/661$.

9. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у постфіксній формі: $32/5+62+\uparrow$.

10. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у префіксній формі: $*-2+2\uparrow 4-414$.

11. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у постфіксній формі: $17*2\uparrow 33+42*++$.

12. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному у префіксній формі. Записати його у постфісній формі: $*-\uparrow 42*-23/2+42$.

13. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному у префіксній формі. Записати його у постфісній формі: $+*-+53412$.

14. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у префіксній формі: $\uparrow+/13/822$.

15. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у постфіксній формі: $941-+214/+*$.

16. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному у префіксній формі. Записати його у постфісній формі: $\uparrow-23+51$.

17. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у префіксній формі: $**2/933$.

18. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу. Обчислити значення виразу, записаного у постфіксній формі: $11/5+72+*$.

19. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному у префіксній формі. Записати його у постфісній формі: $+*/-53114$.

20. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному у префіксній формі. Записати його у постфісній формі: $*+73+\uparrow 23-71$.

$\uparrow$ – стрілка означає піднесення до степеня.

Використані джерела інформації

1. Борисенко О. А. Дискретна математика: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Суми: Університетська книга, 2023. 255 с.
2. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Дискретна математика: навчальний посібник для самостійного вивчення навчальної дисципліни студентами денної форми навчання спеціальності 122 Комп'ютерні науки освітня програма «Комп'ютерні науки» ступеня бакалавра. Вид. 3-тє, допов. і перероб. Полтава: ПУЕТ, 2023. 282 с.
3. Желдак Т. А., Коряшкіна Л. С., Ус С. А. Елементи теорії нечітких множин. Дніпро: НТУ «ДП», 2022. 46 с.
4. Здолбіцька Н. В., Сулім В. О., Match Вознюк А. В. Мультиагентна система маршрутизації на основі алгоритмів пошуку найкоротшого шляху в графі. The 5th International scientific and practical conference "Science and innovation of modern world" (January 25-27, 2023) Cognum Publishing House, London, United Kingdom. 2023. С. 155-157.
5. Лавренчук С. В., Здолбіцька Н. В., Хамула Н. М. Програмний комплекс для візуалізації алгоритмів на графах. Вісник Хмельницького національного університету. серія: Технічні науки (6), 2021. 81-85 с.
6. Матвієнко М. П., Шаповалов С. П. Математична логіка та теорія алгоритмів. Навчальний посібник. К.: Видавництво Ліра-К, 2021. 212 с.
7. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика: підручник; за наук. ред. д-ра техн. наук, проф. В. В. Пасічника. 7- ме видання, випр. та допов. Львів: ПП «Магнолія 2006»; ЛНУ ім. Івана Франка, 2024. 432 с.
8. Олійник А. С., Петравчук А. П. Дискретна математика. Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. К., КНУ ім. Т. Шевченка, 2024. 177 с.
9. Слєсарєв В. В., Новицький І. В., Ус С. А. Дискретна математика: навч. посіб. М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро: НТУ «ДП», 2023. 183 с.
10. Темнікова О. Л., Тавров Д. Ю. Дискретна математика. Частина 1. Основи дискретної математики. Практикум. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 121 с.
11. Темнікова О. Л., Тавров Д. Ю. Дискретна математика. Частина 2. Булева алгебра. Практикум. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 185 с.
12. Discrete Mathematics with Applications, Metric Edition 5th edition Publisher: Cengage Learning Custom Publishing. URL: https://dokumen.pub/discrete-mathematics-with-applications-metric-edition-5nbsped-0357114086-9780357114087.html (дата звернення: 20.05.2025).
13. Zdolbitska N., Bas D., Zdolbitsky S. Training neural networks to sort: a new approach to classical algorithms. Trends, Issues, and Challenges in Modern Science: Proceedings of the 2nd International Scientific Conference (Cambridge, United Kingdom, 5 September 2025). Lulu Press, Inc., 2025. P. 93-95.
14. Zdolbitska N., Ostapchuk O., Lavrenchuk S., Terletskyi T., Kaidyk O., O. Zhyharevych, Business information system for forecasting raw material stocks for the production of flexible packaging. 2024 14th International Conference on Dependable Systems, Services and Technologies (DESSERT), Athens, Greece, 2024. P. 1-8.

Д126 Дискретна математика: Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти вищої освіти освітньої програми «Інформаційні системи та технології охорони і безпеки» галузі знань F Інформаційні технології спеціальності F6 Інформаційні системи та технології денної та заочної форм навчання / уклад. Н. В. Здолбіцька, Луцьк: ЛНТУ, 2026. 56 с.

Комп'ютерний набір і верстка: Здолбіцька Н.В.

Редактор Здолбіцька Н.В.

Підпис до друку ______20__ р. Формат 60x84/16. Папір офс.

Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. . Обл.-вид. арк. .

Тираж 20 прим. Зам. №.______

Відділ іміджу та промоцій
Луцького національного технічного університету
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75