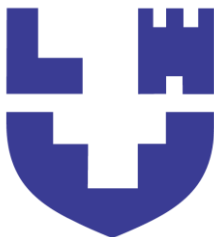


**Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет**



ВИЩА МАТЕМАТИКА

Курс лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти технічних та економічних спеціальностей денної та заочної форми навчання.

Луцьк 2026

УДК 517.3(07)

В 55

До друку

Голова вченої ради факультету транспорту та механічної інженерії ЛНТУ
_____ І. МУРОВАНІЙ

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозиторій
ЛНТУ

Директор бібліотеки _____ Н. ПОЛЩУК

Затверджено вченою радою факультету транспорту та механічної інженерії,
протокол № ___ від «___» _____ 2026 р.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри фізики та вищої математики
протокол №9 від «06» березня 2026 р.

Завідувач кафедри фізики та вищої математики _____ Д. ЗАХАРЧУК

Укладач: _____ Л. ПАНАСЮК кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри фізики та вищої математики ЛНТУ

Рецензент: _____ О. ГУДА, кандидат технічних наук, доцент кафедри
фізики та вищої математики ЛНТУ

Відповідальний за випуск: _____ Д. ЗАХАРЧУК, к.фіз.-мат.н., доцент,
завідувач кафедри фізики та вищої математики ЛНТУ

В 55 Курс лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти технічних та економічних спеціальностей денної
та заочної форми навчання/ уклад. Л.І. Панасюк.– Луцьк: ЛНТУ,
2026. – 90с

Методичне видання складене відповідно до діючої програми курсу «Вища
математика». Призначене для студентів інженерно-технічних спеціальностей
денної та заочної форми навчання ЛНТУ

© Л. Панасюк 2026

ГЛАВА 1. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§1. Поняття первісної функції

У диференціальному численні за заданою функцією $f(x)$ знаходять її похідну $f'(x)$ або диференціал $df(x) = f'(x)dx$. Завдання інтегрального числення полягає у розв'язку зворотної задачі – за даною функцією $f(x)$ відшукати таку функцію $F(x)$, що $F'(x) = f(x)$. Іншими словами, маючи вираз $F(x) = f(x)dx$, або $F'(x) = \frac{F(x)}{dx} = f(x)$ де $f(x)$ – відома функція, потрібно знайти функцію $F(x)$. Одне з можливих фізичних трактувань цієї задачі – визначення швидкості руху, якщо відома залежність пройденого шляху від часу руху. З практичної точки зору природною є обернена задача, а саме, визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Більш формально, остання задача є знаходженням функції $f(x)$ за відомою її похідною $f'(x)$.

Ці задачі приводять до математичної проблеми відшукування функції за заданою похідною цієї функції.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною функцією* для функції $f(x)$ на інтервалі (a, b) , якщо в будь-якій точці x інтервалу (a, b) функція $F(x)$ диференційована і має похідну $F'(x)$, рівну $f(x)$.

Зауваження. Аналогічно визначається первісна функції $f(x)$ на нескінченній прямій і на півпрямій.

Можна ввести первісну для функції $f(x)$ і на сегменті $[a, b]$, розуміючи під такою первісною функцію $F(x)$, яка має похідну в будь-якій внутрішній точці сегмента і крім того $F'(a+0) = f(a+0)$, $F'(b-0) = f(b-0)$.

Приклади:

1) $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ є первісною для функції $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на

інтервалі $(-1;1)$;

2) $F(x) = \sin x$ є первісною для $f(x) = \cos x$ при $x \in (-\infty; +\infty)$;

3) $F(x) = \ln x$ є первісною для $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x > 0$.

Теорема 1. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ - будь-які первісні для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то всюди на цьому проміжку $F_1(x) - F_2(x) = C$, де C - деяка константа.

Доведення.

Розглянемо різницю $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Так як функції $F_1(x)$ та $F_2(x)$ диференційовані, то диференційованою є і функція $\Phi(x)$ і

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отже, $\Phi'(x) = 0$ при $x \in (a,b)$.

Отже, $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) = C = const$.

Наслідок. Якщо $F(x)$ - одна з первісних функцій для функції $f(x)$ на $(a;b)$, то будь-яка первісна $\Phi(x)$ для функції $f(x)$ на $x \in (a,b)$ має вигляд $\Phi(x) = F(x) + C$, де $C = const$.

§2. Невизначений інтеграл

Означення. Множину усіх первісних функцій $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ називають *невизначеним інтегралом* від функції

$f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$.

Знак \int - називають інтегралом, $f(x)dx$ - підінтегральним виразом, $f(x)$ - підінтегральною функцією; x - змінною інтегрування. Отже згідно означення

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ якщо } F'(x) = f(x), x \in (a;b).$$

2.1. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Інакше кажучи, знаки похідної і невизначеного інтеграла взаємно знищуються.

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x) dx\right) = \left(\int f(x) dx\right)' dx = f(x) dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

4. Сталій множник, що не дорівнює нулю, можна виносити з-під знака інтеграла:

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

5. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій:

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

6. Незалежність виду невизначеного інтегралу від вибору аргументу (**інваріантність формул інтегрування**). Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо змінну інтегрування замінити будь-якою диференційовною функцією цієї змінної.

2.2. Таблиця основних невизначених інтегралів

1) $\int 0 dx = C$;

2) $\int 1 dx = x + C$;

3) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;

$$4) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$5) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad n = 0; \pm 1; \dots \right);$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad (x \neq \pi n; \quad n = 0; \pm 1; \dots);$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C, \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$11) \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C \quad (\text{у випадку знака "-"}, \text{або } x > 1,$$

або $x < -1$);

$$13) \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad (x \neq 1);$$

В попередньому семестрі ми ввели поняття елементарної функції, а при вивченні похідних встановили, що похідна будь-якої елементарної функції являє собою також елементарну функцію. Іншими словами, ми встановили, що операція диференціювання не виводить нас за клас елементарних функцій.

Відзначимо відразу, що з операцією інтегрування інша справа. Можна показати, що інтеграли від деяких елементарних функцій вже не є елементарними функціями.

Прикладами таких інтегралів можуть служити наступні:

- 1) $\int e^{-x^2} dx$ - інтеграл Пуассона;
- 2) $\int \cos(x^2) dx$
- 3) $\int \sin(x^2) dx$ } - інтеграли Френеля;
- 4) $\int \frac{dx}{\ln x}$ ($0 < x \neq 1$) - інтегральний логарифм;
- 5) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ ($x \neq 0$) - інтегральний косинус;
- 6) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - інтегральний синус.

Це функції, які не є елементарними.

§3. Основні методи інтегрування

На відміну від диференціального числення, де, користуючись правилами і таблицею похідних, можна знайти похідну або диференціал будь-якої заданої функції, в інтегральному численні немає загальних прийомів знаходження невизначених інтегралів, а є лише окремі методи, що дозволяють зводити заданий інтеграл до табличного.

3.1. Метод безпосереднього інтегрування. Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей і таблиці інтегралів називають безпосереднім інтегруванням. Для обчислення невизначеного інтеграла, як правило, виконують тотожні перетворення підінтегральної функції, щоб звести інтеграл до табличного

Приклад. 1

$$\int \left(4x^2 - \frac{3}{x^2 + 9} \right) dx = 4 \int x^2 dx - 3 \int \frac{dx}{x^2 + 9} = 4 \frac{x^3}{3} + C_1 -$$

$$- 3 \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + C_2 = 4 \frac{x^3}{3} - \arctg \frac{x}{3} + C$$

Приклад. 2

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$$

Приклад 3

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

3.2. Метод заміни змінної (метод підстановки). Одним із найбільш ефективних методів інтегрування є метод заміни змінної. Він полягає у запровадженні нової змінної інтегрування (підстановки). При цьому заданий інтеграл зводиться до нового інтегралу, який є простішим за шуканий. Даний метод ґрунтується на теоремі.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна, на проміжку $(a; b)$, а функція $x = \varphi(t)$ неперервна та диференційовна на проміжку $(\alpha; \beta)$, причому множина значень цієї функції є проміжок $(a; b)$. Враховуючи, що $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$, отримаємо формулу заміни змінної в невизначеному інтегралі:

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt} \quad (3.1)$$

Приклад 1.

$$\int \cos(2x+3) dx = \left. \begin{array}{l} 2x+3 = t \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\cos t dt}{2} = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(2x+3) + C$$

Приклад 2.

$$\int e^{\cos x} \sin x dx = \left. \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C ;$$

Приклад 3.

$$\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{50}}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| = \int t^{50} dt = \frac{t^{51}}{51} + C = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{51}}{51} + C.$$

3.3. Інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді має місце формула

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3.2)$$

Формула (3.2) називається *формулою інтегрування частинами*. Дана формула використовується при інтегруванні таких виразів, які можна представити у вигляді добутку двох множників u та dv . За u береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за dv та частина підінтегрального виразу інтеграл від якої відомий або може бути знайдений. Іноді формулу (3.2) доводиться застосовувати кілька разів. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1. Інтеграли виду $\int P_n(x) e^{kx} dx$, $\int P_n(x) a^x dx$, $\int P_n(x) \sin kx dx$, $\int P_n(x) \cos kx dx$, де $P(x)$ – многочлен степеня n . У цих інтегралах за u беремо многочлен, оскільки для $du = P'(x) dx$ порядок многочлена на одиницю зменшується, а прями тригонометричні та показникові функції разом з dx беруть за dv .

$$\int P_n(x) \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} e^{kx}, a^x \\ \sin kx \\ \cos kx \end{array} \right\}}_{dv} dx, \text{ тоді } v = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} e^{kx}, \frac{a^x}{\ln a} \\ -\frac{1}{k} \cos kx \\ \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right\}$$

2. Інтеграли виду $\int P_n(x) \ln x dx$, $\int P_n(x) \arcsin x dx$, $\int P_n(x) \arccos x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$. У цих інтегралах слід взяти $dv = P(x)dx$, а обернені тригонометричні і логарифмічні функції – за u .

$$\int \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x, \arccos x \\ \operatorname{arctg} x, \operatorname{arctg} x \end{array} \right\}}_u \underbrace{P_n(x) dx}_{dv}, \quad \text{тоді } du = \left\{ \begin{array}{l} 1/x \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{1+x^2}, -\frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\}$$

3. Інтеграли виду $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, де α , β – дійсні числа. Тут двічі застосовують формулу інтегрування частинами, беручи перший або другий множник за u або dv , оскільки після двохкратного застосування формули утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклад 1. $\int x \cdot e^x dx$

$$\int x \cdot e^x dx = \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\| = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + \tilde{N}$$

Приклад 2. $\int \operatorname{arctg} x dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + \tilde{N} \end{aligned}$$

Приклад 3. $\int x^2 \ln x dx$.

$$\int x^2 \ln x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = x^2 dx, \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\| = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Приклад 4. $\int x^2 \ln x dx$.

$$\int x^2 \ln x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = x^2 dx, \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\| = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Приклад 5 $\int (2x+1) \sin x dx$

$$\int (2x+1) \sin x dx = \left\| \begin{array}{l} u = 2x+1, \quad du = 2 dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right\| = -(2x+1) \cos x - 2 \int (-\cos x) dx = -(2x+1) \cos x + 2 \sin x + C$$

Приклад 6 $\int e^x \sin 2x dx$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin 2x dx &= \left\| \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \sin 2x dx, \quad v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right\| = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx = \\ &= \left\| \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \cos 2x dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2} \end{array} \right\| = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx, \end{aligned}$$

Звідси

$$\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx,$$

Дістали рівняння з якого визначаємо шуканий інтеграл

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x \right) = \frac{1}{5} e^x \sin 2x - \frac{2}{5} e^x \cos 2x = \\ = \frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x) + C$$

§4. Раціональні дроби та їх інтегрування

Раціональним дробом або раціональною функцією $R(x)$ будемо називати дріб вигляду:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}.$$

Якщо степінь многочлена в чисельнику є меншою степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$, то дріб, або раціональна функція називається правильною, в протилежному випадку - $n \geq m$ називається неправильною. Очевидно будь-яку неправильну раціональну функцію можна подати у вигляді суми многочлена і правильної раціональної функції. Цього можна досягнути шляхом ділення многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$. Тобто, якщо $n \geq m$, то

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{R_p(x)}{Q_m(x)},$$

де $M_{n-m}(x)$ - многочлен степеня $n - m$, який є цілою частиною дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, а $R_p(x)$ остача від ділення $P_n(x)$ на $Q_m(x)$.

Інтегрування многочлена не викликає ніяких труднощів, тому інтегрування раціональних функцій зводиться до інтегрування правильних раціональних дробів, які завжди можна розкласти на суму скінченного числа елементарних (найпростіших) дробів.

4.1. Елементарні дроби і їх інтегрування

Елементарним дробом будемо називати правильну раціональну функцію одного з наступних чотирьох типів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a};$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, n \geq 2;$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; D = \frac{p^2}{4} - q < 0$$

$$\text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, n \geq 2, D = \frac{p^2}{4} - q < 0$$

де A, a, p, q, M, N дійсні числа. Умова, за якою дискримінант квадратного тричлена від'ємний, означає, що тричлен не розкладається на множники, тобто немає дійсних коренів.

Елементарні дроби 1-го та 2-го типів інтегрують безпосередньо з допомогою основних правил інтегрального числення.

$$\text{I. } \int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C;$$

$$\text{II. } \int \frac{A dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{(-n+1)};$$

III. Для інтегрування елементарних дроби III типу спочатку у знаменнику виділяють повний квадрат, а потім роблять заміну змінної.

$$I = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mx+N}{x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} dx =$$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t, x = t - \frac{p}{2}, dx = dt \\ q - \frac{p^2}{4} = a^2, a = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{M \left(t - \frac{p}{2} \right) + N}{t^2 + a^2} dt = M \int \frac{tdt}{t^2 + a^2} + \left(N - M \frac{p}{2} \right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\
&= MI_1 + \left(N - M \frac{p}{2} \right) I_2
\end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{tdt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2 + a^2) + C, I_2 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

$$I = \frac{M}{2} \ln |t^2 + a^2| + \frac{\left(N - M \frac{p}{2} \right)}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

Повертаючись до змінної x отримаємо:

$$I = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C, \text{ або}$$

$$I = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

Слід зазначити, що, якщо в знаменнику найпростішого дробу III виду коефіцієнт при x^2 не дорівнює одиниці, то спочатку краще винести цей коефіцієнт за знак інтеграла, а потім переходити до виділення повного квадрата.

Дріб четвертого типу шляхом виділення в чисельнику диференціалу знаменника, приведення знаменника до суми квадратів та заміни

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad q - \frac{p^2}{4} = a^2 \text{ зводиться до обчислення } \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}.$$

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx = \frac{M}{2} \int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m} = \\
&= \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{1-m} (x^2 + px + q)^{1-m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m}.
\end{aligned}$$

Розглянемо інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m}$ і зробимо наступні перетворення:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^m} = \left. \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \\ q - \frac{p^2}{4} = a^2 \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$$

Позначимо $I_m = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$ і для обчислення цього інтегралу отримаємо рекурентну формулу:

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \left. \begin{array}{l} dt = dv; \\ \frac{1}{(t^2 + a^2)^m} = u; \\ du = \frac{-m2tdt}{(t^2 + a^2)^{m+1}}; \\ v = t \end{array} \right| = \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{(t^2 + a^2 - a^2) dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} - 2ma^2 \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}}.$$

Звідси

$$I_m = \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m I_m - 2ma^2 I_{m+1}, \text{ або}$$

$$I_{m+1} = \frac{t}{2ma^2(t^2 + a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2} I_m, \text{ де } m \geq 2.$$

4.2. Розклад правильних раціональних дробів на суму простих дробів

Будемо розглядати лише раціональні дроби з дійсними коефіцієнтами.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

Раціональний дріб $ax^2 + px + q$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

називається правильним, якщо степінь многочлена $P_m(x)$ в чисельнику менша степені многочлена $Q_n(x)$ в знаменнику.

Лема 1. Нехай $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - правильний раціональний дріб з

дійсними коефіцієнтами, знаменник $Q_n(x)$ має n дійсних коренів a_1, a_2, \dots, a_n кратності α , тобто

$$Q(x) = (x - a)^\alpha \cdot \varphi(x) \quad (4.2.1),$$

де $\phi(a) \neq 0$. Тоді для цього дробу справедливий розклад:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\Psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k} \cdot \phi(x)} \quad (4.2.2)$$

В цьому розкладі A - дійсна стала величина рівна $A = \frac{P_m(a)}{\phi(a)}$, k

- ціле число $k \geq 1$, $\Psi(x)$ - деякий многочлен з дійсними коефіцієнтами такий, що дріб в правій частині правильний.

Доведення. Позначимо через A дійсне число $A = \frac{P_m(a)}{\phi(a)}$. Легко

бачити, що A завжди визначене, так як $\phi(a) \neq 0$. Розглянемо різницю

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}$ і приведемо її до спільного знаменника:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{P_m(x) - A \cdot \phi(x)}{(x-a)^\alpha \cdot \phi(x)} = \frac{\Phi(x)}{(x-a)^\alpha \cdot \phi(x)}, \quad (4.2.3)$$

де $\Phi(x) = P_m(x) - A\phi(x)$ - многочлен з дійсними коефіцієнтами. Так як

$$\Phi(a) = P_m(a) - A\phi(a) = P_m(a) - \frac{P_m(a)}{\phi(a)} \cdot \phi(a) = P_m(a) - P_m(a) = 0, \text{ то дійсне}$$

число a є коренем многочлена $\Phi(x)$ деякої кратності $k \geq 1$, звідси

$$\Phi(x) = (x-a)^k \psi(x), \quad (4.2.4)$$

де $\psi(a) \neq 0$. Підставивши (4.2.4) в (4.2.3) отримаємо:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\Psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k} \cdot \phi(x)} \quad (4.2.5)$$

Залишається показати, що дріб (4.2.5) є правильним. Це випливає з того, що різниця двох правильних дробів є правильним дробом.

Лема 2. Нехай $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - правильний раціональний дріб з

дійсними коефіцієнтами, знаменник якого $Q_n(x)$ має комплексні числа $a = u + iv$ і $\bar{a} = u - iv$ коренями кратності λ , тобто

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\lambda \cdot \phi(x) \quad (4.2.6)$$

де $\phi(a) \neq 0$, $\phi(\bar{a}) \neq 0$, $p = -2u$; $q = u^2 + v^2$. Тоді для цього дроби справедливий розклад:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \frac{\Psi(x)}{(x^2 + px + q)^{\lambda-k} \cdot \phi(x)} \quad (4.2.7)$$

В цьому розкладі M і N - деякі дійсні постійні, k - ціле число ≥ 1 , а $\Psi(x)$ - деякий многочлен з дійсними коефіцієнтами такий, що останній дріб є правильним.

Доведення. Покладемо

$$M = \frac{1}{v} \operatorname{Im} \left[\frac{P_m(a)}{\phi(a)} \right]; \quad N = \operatorname{Re} \left[\frac{P_m(a)}{\phi(a)} \right] - \frac{u}{v} \operatorname{Im} \left[\frac{P_m(a)}{\phi(a)} \right].$$

Легко бачити, що M і N є розв'язками рівняння:

$$P_m(a) - (Ma + N)\phi(a) = 0. \quad (4.2.8)$$

Поділивши (4.2.8) на $\phi(a)$, отримаємо $\frac{P_m(a)}{\phi(a)} = Ma + N$ або

$$\frac{P_m(a)}{\phi(a)} = M(u + iv) + N. \quad \text{Тоді}$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{P_m(a)}{\phi(a)} \right] = Mu + N; \quad \operatorname{Im} \left[\frac{P_m(a)}{\phi(a)} \right] = Mv.$$

Звідси
$$M = \frac{1}{v} \operatorname{Im} \left[\frac{P_m(a)}{\phi(a)} \right], \quad N = \operatorname{Re} \left[\frac{P_m(a)}{\phi(a)} \right] - \frac{u}{v} \operatorname{Im} \left[\frac{P_m(a)}{\phi(a)} \right].$$

Тепер розглянемо різницю

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\lambda} = \frac{P_m(x) - (Mx + N) \cdot \phi(x)}{(x^2 + px + q)^\lambda \cdot \phi(x)} = \frac{\Phi(x)}{(x^2 + px + q)^\lambda \cdot \phi(x)}.$$

Звідси, в силу (4.2.8), комплексне число a , а також і \bar{a} є коренем многочленна $\Phi(x)$ деякої кратності $k \geq 1$, отже $\Phi(x) = (x^2 + px + q)^k \cdot \psi(x)$.

Звідси випливає вірність розкладу (4.2.7). Дріб, який стоїть в правій частині (4.2.7) є правильним.

Теорема 1. Нехай $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - правильний раціональний дріб з

дійсними коефіцієнтами, знаменник якого має вигляд:

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_m)^{\alpha_m} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \times \\ \times (x^2 + p_2x + q_2)^{\lambda_2} \dots (x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}.$$

Тоді для цього дробу справедливий наступний розклад на суму найпростіших дробів:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \\ & + \frac{A_1^{(m)}}{(x - a_m)} + \frac{A_2^{(m)}}{(x - a_m)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_m}^{(m)}}{(x - a_m)^{\alpha_m}} + \\ & + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2^{(1)}x + N_2^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x + N_{\lambda_1}^{(1)}}{x^2 + p_nx + q_n} + \\ & + \dots + \frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x + N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

В цьому розкладі $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_{\alpha_m}^{(m)}, M_1^{(1)}, N_1^{(1)}, \dots$ - деякі дійсні постійні, частина з яких може бути рівна 0.

Зауваження. Для знаходження невідомих коефіцієнтів використовують метод "невизначених коефіцієнтів". Для цього праву частину розкладу раціонального дробу зводять до спільного

знаменника, яким для всіх простих дробів є многочлен $Q_n(x)$. Відкинувши зліва та справа знаменник $Q_n(x)$, одержимо тотожну рівність двох многочленів відносно x , один з яких многочлен $P_m(x)$, інший многочлен з невизначеними коефіцієнтами. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, одержимо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів

Приклад. Розкласти на суму простих дробів правильний дріб

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1} = \\ &= \frac{A_1(x^3 - 1) + A_2(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \\ &= \frac{(A_1 + M)x^3 + (A_2 + N - 2M)x^2 + (A_2 + N - 2N)x + (A_1 + A_2 + N)}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1 + M = 2 & A_1 = 2 \\ A_2 + N - 2M = 4 & A_2 = 3 \\ A_2 + N - 2N = 1 & M = 0 \\ A_1 + A_2 + N = 2 & N = 1 \end{cases}$$

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Метод невизначених коефіцієнтів, як видно з розглянутого прикладу є дуже громіздким. Природно тому в тих випадках, коли це можливо, знайти другий, більш простий метод.

Нехай знаменник $Q_n(x)$ правильного раціонального дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ має n дійсних коренів a_1, a_2, \dots, a_n кратності кратності α .

Тоді серед найпростіших дробів, на суму яких розкладається дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ буде фігурувати дріб

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}. \quad (4.2.10)$$

Тоді з леми 1 і формули (4.2.2) випливає, що $A = \frac{P_m(a)}{\phi(a)}$, де

$$\phi(x) = \frac{Q(x)}{(x-a)^\alpha}.$$

Ми прийшли до наступного правила: для обчислення коефіцієнта A в простому дробі (4.2.10), що відповідає дійсному кореню a многочлена $Q_n(x)$ кратності α , слід викреслити в знаменнику дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ дужку $(x-a)^\alpha$ і у виразі, що залишився покласти $x = a$.

Вказаний прийом знаходження коефіцієнта A звичайно називають *методом викреслювання*. Відзначимо, що цей прийом може бути застосований лише для обчислення коефіцієнтів при старіших степенях простих дробів, що відповідають дійсним кореням $Q_n(x)$.

Метод викреслювання особливо ефективний у випадку, коли знаменник $Q_n(x)$ має лише однократні дійсні корені, тобто коли $Q_n(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Тоді, як ми знаємо, справедливий розклад

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

всі коефіцієнти якого можуть бути обчислені по методу викреслювання. Для обчислення коефіцієнта A_k слід викреслити в

знаменнику дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ дужку $(x - a_k)$, а у виразі, що залишився,

покласти $x = a_k$.

$$\text{Приклад: } \frac{x+1}{(x-1)x(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-2}$$

$$A_1 = \left. \frac{x+1}{x(x-2)} \right|_{x=1} = \frac{2}{-1} = -2;$$

$$A_2 = \left. \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} \right|_{x=0} = \frac{1}{(-1) \cdot (-2)} = \frac{1}{2};$$

$$A_3 = \left. \frac{x+1}{(x-1)x} \right|_{x=2} = \frac{3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}.$$

Тому отримаємо:

$$\frac{x+1}{(x-1)x(x-2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2(x-2)}.$$

§5. Інтеграли від деяких функцій, які містять квадратний тричлен

До цього класу відносяться інтеграли вигляду:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + px + q}; \quad I_2 = \int \frac{Mx + N}{ax^2 + px + q} dx; \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + px + q}};$$

$$I_4 = \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + px + q}} dx \quad \text{та} \quad I_5 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + px + q}}.$$

Розглянемо інтеграл $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + px + q}$. Виділимо в знаменнику повний квадрат

$$ax^2 + px + q = a \left(x^2 + \frac{2p}{a}x + \frac{4p^2}{a^2} + q - \frac{4p^2}{a^2} \right) = a \left[\left(x + \frac{p}{a} \right)^2 + q - \frac{4p^2}{a^2} \right], \quad \text{та}$$

проведемо заміну $\begin{cases} \left(x + \frac{p}{a} \right) = t \\ q - \frac{4p^2}{a^2} = \pm k^2. \end{cases}$ Тоді I_1 зведеться до відомих

табличних інтегралів $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$.

У випадку інтегралу $I_2 = \int \frac{Mx + N}{ax^2 + px + q} dx$ утворимо в чисельнику диференціал знаменника і отримаємо формулу для обчислення I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{Mx + N}{ax^2 + px + q} dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax + p) + \left(N - \frac{Mp}{2a} \right)}{ax^2 + px + q} dx = \\ &= \frac{M}{2a} \int \frac{d(ax^2 + px + q)}{ax^2 + px + q} + \left(N - \frac{Mp}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + px + q} = \\ &= \frac{M}{2a} \ln |ax^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2a} \right) \cdot I_1 \end{aligned}$$

У випадку інтегралу I_3 поступаємо, як і при обчисленні інтегралу I_1 , будемо мати

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + px + q}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \quad \text{при } a > 0,$$

або $\frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 \pm t^2}} \quad \text{при } a < 0.$

При обчисленні інтегралу I_4 поступаємо, як і при обчисленні інтегралу I_2 , будемо мати

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + px + q}} dx = \\
&= \frac{M}{2a} \int \frac{2ax + p}{\sqrt{ax^2 + px + q}} dx + \left(N - \frac{Mp}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + px + q}} = \\
&= \frac{M}{a} \sqrt{ax^2 + px + q} + \left(N - \frac{Mp}{2a} \right) \cdot I_3.
\end{aligned}$$

Обчислення інтегралу I_5 зводиться до обчислення інтегралу I_3 підстановкою $x = \frac{1}{u}$.

Приклад. Обчислити

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}} &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{u}, \\ dx = -\frac{1}{u^2} du \end{array} \right| = -\int \frac{udu}{u^2 \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u} - 1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1 + 2u - u^2}} = \\
&= -\int \frac{du}{\sqrt{2 - (u - 1)^2}} = \arccos \frac{u - 1}{\sqrt{2}} + C = \arccos \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

§6. Інтегрування диференціальних біномів

Вираз вигляду $x^m(a + bx^n)^p dx$ називається диференціальним біномом, де m, n і p - деякі раціональні числа.

Інтеграл від диференціального біному $\int x^m(a + bx^n)^p dx$ виражається через скінчену комбінацію елементарних функцій лише в трьох випадках:

1) якщо p - ціле число (застосувавши формулу біному Ньютона отримаємо інтеграл від алгебраїчного многочлена);

2) якщо $\frac{m+1}{n}$ - ціле число (в цьому випадку застосовується підстановка $a + bx^n = z^s$, де s - знаменник дробу p);

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p$ - ціле число (в цьому випадку використовується підстановка $ax^{-n} + b = z^s$, де s - знаменник дробу p).

Приклад. Знайти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}} = \int x^{-3/2} (1 + x^{3/4})^{-1/3} dx =$$

$$\left. \begin{array}{l} m = -\frac{3}{2}; \quad n = \frac{3}{4}; \quad p = -\frac{1}{3}; \quad \frac{m+1}{n} + p = -1 \\ x^{-3/4} + 1 = z^3; \quad z = \sqrt[3]{x^{-3/4} + 1} \\ x = (z^3 - 1)^{-4/3}; \quad dx = -\frac{4z^2 dz}{(z^3 - 1)^{7/3}}; \\ x^{-3/2} (1 + x^{3/4})^{-1/3} dx = -(z^3 - 1)^2 \frac{(z^3 - 1)^{1/3} \cdot 4z^2 dz}{z(z^3 - 1)^{7/3}} = -4z dz \end{array} \right| =$$

$$= -4 \int z dz = -4 \cdot \frac{z^2}{2} + C = -2z^2 + C = -2\sqrt[3]{(x^{-3/4} + 1)^2} + C.$$

§7. Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + px + q}) dx$

Існує декілька різних способів обчислення інтегралів даного вигляду, де підінтегральна функція є раціональною функцією від незалежної змінної, та кореня квадратного від квадратного тричлена, тобто $R = R(x, \sqrt{ax^2 + px + q})$. Окремі випадки такого інтегралу були розглянуті вище.

Шляхом виділення повного квадрату і заміни змінної, квадратний тричлен $ax^2 + px + q$ може бути зображений у вигляді $u^2 \pm k^2$, де $u = x + \frac{p}{2a}$; $\pm k = \frac{q}{a} - \frac{p^2}{4a^2}$. Тому достатньо обмежитись

розглядом трьох інтегралів: $I_1 = \int R(u, \sqrt{k^2 - u^2}) du$,

$$I_2 = \int R(u, \sqrt{k^2 + u^2}) du, \quad I_3 = \int R(u, \sqrt{u^2 - k^2}) du.$$

Інтеграл $I_1 = \int R(u, \sqrt{k^2 - u^2}) du$ підстановкою $u = k \sin t$ або $u = k \cos t$ зводиться до раціональної функції відносно $\sin t$ і $\cos t$.

Дійсно,

$$I_1 = \int R(u, \sqrt{k^2 - u^2}) du = \left. \begin{array}{l} u = k \sin t; \quad (k > 0) \\ du = k \cos t dt \\ \sqrt{k^2 - u^2} = k \cos t \end{array} \right| =$$

$$= \int R(k \sin t, k \cos t) k \cos t dt.$$

Інтеграл $I_2 = \int R(u, \sqrt{k^2 + u^2}) du$ підстановкою $u = k \cdot \operatorname{tg} t$ або $u = k \cdot \operatorname{ctg} t$ зводиться до інтегралу від раціональної функції відносно $\sin t$ і $\cos t$.

Дійсно,

$$I_2 = \int R(u, \sqrt{k^2 + u^2}) du = \left. \begin{array}{l} u = k \cdot \operatorname{tg} t \quad (k > 0) \\ du = \frac{k dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{k^2 + u^2} = \frac{k}{\cos t} \end{array} \right| = \int R\left(k \cdot \operatorname{tg} t, \frac{k}{\cos t}\right) \frac{k}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \int R_1(\sin t, \cos t) dt.$$

Інтеграл $I_3 = \int R(u, \sqrt{u^2 - k^2}) du$ підстановкою $u = \frac{k}{\cos t}$ або

$u = \frac{k}{\sin t}$ зводиться до інтегралу від раціональної функції відносно $\sin t$ і $\cos t$.

Дійсно

$$I_3 = \int R\left(u, \sqrt{u^2 - k^2}\right) du = \left. \begin{array}{l} u = \frac{k}{\cos t}; \\ du = \frac{k \sin t}{\cos^2 t} dt \\ \sqrt{u^2 - k^2} = k \operatorname{tg} t \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{k}{\cos t}, k \cdot \operatorname{tg} t\right) \frac{k \sin t}{\cos^2 t} dt = \int R_2(\sin t, \cos t) dt.$$

Приклад. Знайти $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \end{array} \right| = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C = \left. \begin{array}{l} t = \arcsin \frac{x}{a} \\ \sin t = \frac{x}{a}; \quad \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C.$$

Іншим способом обчислення $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + px + q}\right) dx$ є одна з трьох підстановок Ейлера:

7.1. Перша підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2 + px + q} = \pm\sqrt{ax} + t$
 використовується у випадку $a > 0$. Дійсно

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + px + q}\right) dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{ax^2 + px + q} = \sqrt{ax} + t \\ ax^2 + px + q = ax^2 + 2\sqrt{ax}t + t^2 \\ x = \frac{t^2 - q}{p - 2\sqrt{at}} \\ dx = \frac{2t(p - 2\sqrt{at}) + (t^2 - q)2\sqrt{a}}{(p - 2\sqrt{at})^2} dt = R_1(t) dt \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2 - q}{p - 2\sqrt{at}}, \sqrt{a} \frac{t^2 - q}{p - 2\sqrt{at}} + t\right) \cdot R_1(t) dt = \int R_2(t) dt.$$

7.2 Друга підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2 + px + q} = xt \pm \sqrt{q}$
 використовується у випадку $q > 0$.

7.3 Третя підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2 + px + q} = \begin{cases} t(x - \alpha) \\ t(x - \beta) \end{cases}$

використовується у випадку, коли квадратний тричлен має дійсні нулі α та β , тобто $ax^2 + px + q = a(x - \alpha)(x - \beta)$.

Слід зауважити, що лише в деяких випадках доцільно застосовувати підстановки Ейлера, тому що їх застосування часто приводить до громіздких обчислень.

§8. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Розглянемо інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots\right) dx$, де $m_1, n_1; m_2, n_2; \dots$ - цілі числа, а підінтегральна функція $R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots\right)$ раціональна відносно змінної інтегрування і радикалів від x . Вони зводяться до інтегралів від раціональної

функції від t за допомогою підстановки $x = t^s$, де s - спільний знаменник дробів $m_1/n_1, m_2/n_2, \dots$. При такій заміні усі відношення $m_1/n_1 = r_1, m_2/n_2 = r_2, \dots$ є цілими числами. Отже,

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots\right) dx = \int R\left(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, \dots\right) t^{s-1} dt = \int R_1(t) dt.$$

Приклад 1. Обчислити

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 6t^5}{t^3 - t^2} dt = 6 \int \frac{t^6}{t-1} dt = \\ &= t^6 + \frac{6}{5} t^5 + \frac{3}{2} t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6 \ln|t-1| + C = \\ &= x + \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C. \end{aligned}$$

Розглянемо інтеграли вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \dots\right) dx$, де $m_1, n_1; m_2, n_2; \dots$ - цілі числа, а підінтегральна функція раціональна відносно змінної інтегрування і радикалів від дробу $\frac{ax+b}{cx+d}$. Вони зводяться до інтегралів від раціональної функції від t за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, де s - спільний знаменник дробів $m_1/n_1, m_2/n_2, \dots$.

Приклад 2. Обчислити

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x} = t^2, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}, \quad 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= -\int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4} t \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \end{aligned}$$

§9. Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій

Будемо розглядати інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, при умові, що вони не є табличними. Функція $R(\sin x, \cos x)$ є раціональною функцією відносно $\sin x$ та $\cos x$. Обчислити такі інтеграли можна різними методами. Іноколи буває достатнім перетворити підінтегральний вираз, використавши тригонометричні формули і метод "внесення" множника під знак диференціалу, або заміною змінних, або інтегруванням частинами.

Наприклад:

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Зауважимо, що в інтегральному численні немає загальних правил. Інтегрування може бути виконано не єдиним способом. Але навіть тоді, коли є теоретичне обґрунтування обчислення інтегралу, воно може виявитись далеко не кращим. Для обчислення інтегралів $\int R(\sin x, \cos x) dx$ існує загальна схема обчислення, яка називається універсальною тригонометричною підстановкою.

9.1. Універсальна тригонометрична підстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Виразимо $\sin x$, $\cos x$, x та dx через t . Покладемо $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, будемо мати:

$$\sin x = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\text{Тоді } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Отже, підінтегральна функція раціональна відносно t . За допомогою універсальної тригонометричної підстановки дуже зручно

обчислювати інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$.

Приклад. Обчислити

$$\int \frac{dx}{9 + 8 \cos x + \sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad x = 2 \operatorname{arctg} t; \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right)} = \int \frac{2dt}{t^2 + 2t + 17} = 2 \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2) + 1}{4} + C.$$

Хоч універсальна тригонометрична підстановка завжди дозволяє обчислити інтеграли $\int R(\sin x, \cos x) dx$, її застосовують порівняно рідко, так як вона часто приводить до інтегрування громіздких раціональних дробів. Тому зручно користуватись іншими підстановками.

Зокрема, при обчисленні інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$ можна скористатись наступними рекомендаціями.

1. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x) \cdot \cos x$, тоді застосовується підстановка $\sin x = t$.

$$\text{Дійсно, } \int R_1(\sin x) \cdot \cos x dx = \left. \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int R_1(t) dt$$

2. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x) = R_1(\cos x) \cdot \sin x$, тоді застосовується підстановка $\cos x = t$.

$$\text{Дійсно, } \int R_1(\cos x) \cdot \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int R_1(t) dt.$$

3. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x)$, тоді застосовується підстановка $\operatorname{tg} x = t$.

$$\text{Дійсно, } \int R_1(\operatorname{tg} x) dx = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{t^2 + 1} \end{array} \right| = \int R_1(t) \frac{dt}{1 + t^2}.$$

4. Якщо підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді застосовується підстановка $\cos x = t$.

5. Якщо підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді застосовується підстановка $\sin x = t$.

6. Якщо підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді застосовується підстановка $\operatorname{tg} x = t$.

9.2. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, де $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$.

Якщо хоча б одне з чисел m або n - непарне, то відділяючи від непарної степені співмножник, який вводиться під диференціал і

виражаючи з допомогою формули $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ парний степінь, приходимо до табличного інтеграла за допомогою підстановки $\cos x = t$ або $\sin x = t$.

Дійсно:

$$а) \int \sin^{2k+1} x \cos^{2l} x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^{2l} x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int (1 - t^2)^k t^{2l} dt;$$

$$б) \int \sin^{2k} x \cos^{2l+1} x dx = \int \sin^{2k} x (1 - \sin^2 x)^l \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^{2k} (1 - t^2)^l dt .$$

Якщо ж m і n парні числа, то степені понижують, переходячи до подвійного аргументу за допомогою формул:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Приклад. Обчислити

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C$$

9.3. Інтеграли вигляду $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Ці інтеграли обчислюються підстановками $\operatorname{tg} x = t$ і $\operatorname{ctg} x = t$ відповідно.

$$\text{Дійсно, } \int \operatorname{tg}^n x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^n dt}{1+t^2};$$

$$\int \operatorname{ctg}^n x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} x \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{t^n dt}{1+t^2}.$$

При $n \geq 2$ приходимо до інтегрування неправильних раціональних дробів, що було розглянуто вище.

9.4. Інтеграли вигляду $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, де $m, n \in R$.

Такі інтеграли обчислюються шляхом перетворення добутку підінтегральних функцій в суму за відомими формулами:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$

в результаті отримуємо алгебраїчну суму табличних інтегралів.

ГЛАВА 2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§1. Постановка задачі. Нижня і верхня інтегральні суми

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$.
 Нехай m і M відповідно найменше та найбільше значення $f(x)$ на $[a; b]$.
 Зробимо розбиття відрізка $[a; b]$ на n частин точками поділу
 $a_0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, причому $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$.
 Позначимо $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, а m_i та M_i відповідно найменше та
 найбільше значення $f(x)$ на відрізках $[x_{i-1}; x_i]$ для будь-якого $i = \overline{1, n}$.

Складемо суми:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad (1.1)$$

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i. \quad (1.2)$$

Суму \underline{S}_n називають нижньою інтегральною сумою, а суму \overline{S}_n -
 верхньою інтегральною сумою.

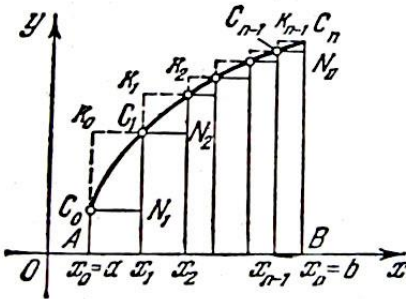


Рис.1

Якщо $f(x) \geq 0$, то нижня інтегральна сума чисельно дорівнює
 площі вписаної ступінчатої фігури $AC_0N_1C_1N_2 \dots C_{n-1}N_nB$,
 обмеженої вписаною ламаною. Верхня інтегральна сума чисельно
 рівна площі описаної ступінчатої фігури
 $AK_0C_1K_1C_2K_2 \dots C_{n-1}K_{n-1}C_nB$ обмеженої описаною ламаною (рис.1).

Відзначимо деякі основні властивості верхніх і нижніх інтегральних сум.

а) Так як $m_i \leq M_i \quad \forall i = \overline{1, n}$, то з формул (1.1) і (1.2) будемо мати

$$\underline{S}_n \leq \overline{S}_n \quad (1.3)$$

б) Так як $m_1 \geq m, m_2 \geq m, \dots, m_n \geq m$, де m - найменше значення $f(x)$ на $[a; b]$, то

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \geq m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = m(b-a).$$

Звідси
$$\underline{S}_n \geq m(b-a) \quad (1.4)$$

в) Так як $M_1 \leq M, M_2 \leq M, \dots, M_n \leq M$, де M - найбільше значення $f(x)$ на $[a; b]$, то

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \leq M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = M(b-a)$$

Звідси
$$\overline{S}_n \leq M(b-a). \quad (1.5)$$

Тоді з нерівностей (1.3) - (1.5) будемо мати:

$$m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \overline{S}_n \leq M(b-a). \quad (1.6)$$

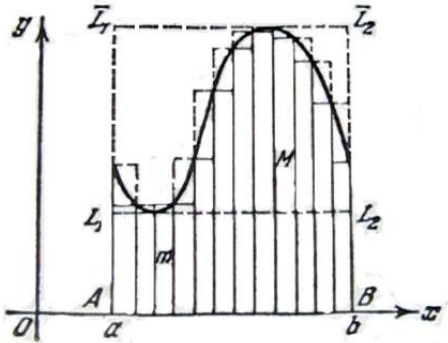


Рис.2

Якщо $f(x) \geq 0$, то остання нерівність має простий геометричний зміст (рис.2), так як добутки $m(b-a)$ та $M(b-a)$ відповідно рівні площам вписаного прямокутника AL_1L_2B і описаного прямокутника $AL_1\bar{L}_2B$.

§2. Визначений інтеграл. Теорема існування визначеного інтегралу

Як і в попередньому параграфі зробимо розбиття відрізка $[a; b]$ на n частин. В кожному з відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$ виберемо довільні точки, які позначимо ξ_i , $i = \overline{1, n}$, так щоб виконувались нерівності $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, $i = \overline{1, n}$ (рис.3).

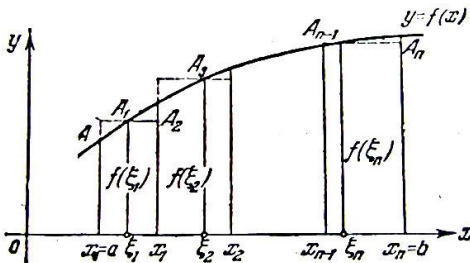


Рис.3

В кожній з точок ξ_i , $i = \overline{1, n}$ обчислимо значення функції $f(\xi_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Складемо суму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (2.1)$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Тоді при довільному ξ_i , що належить відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ будемо мати $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, а так як усі $\Delta x_i > 0$, то

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i, \text{ для } i = \overline{1, n}.$$

Просумувавши останні нерівності по всіх $i = \overline{1, n}$, отримаємо

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

$$\text{або} \quad \underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n. \quad (2.2)$$

Геометричний зміст останньої нерівності при $f(x) \geq 0$ полягає в тому, що фігура, площа якої S_n обмежена ламаною, яка розміщена між вписаною ламаною і описаною ламаною.

Очевидно, що сума S_n залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на n частин та від вибору точок ξ_i всередині відрізків $[x_{i-1}; x_i]$. Позначимо через $\lambda = \max \Delta x_i$. Очевидно що якщо $\lambda \rightarrow 0$, то число відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ прямує до нескінченності. Для кожного розбиття, вибравши значення ξ_i , можна скласти інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (2.3)$$

Припустимо, що ця послідовність інтегральних сум має границю

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = S. \quad (2.4)$$

Означення 1. Якщо при будь-яких розбиттях відрізка $[a; b]$, таких, що $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ і при будь-якому виборі точок ξ_i на відрізках $[x_{i-1}; x_i]$ інтегральна сума $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ прямує до однієї і тієї ж границі S , то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на $[a; b]$ і позначається $\int_a^b f(x) dx$.

Отже,
$$\lim_{\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad (2.5)$$

Число a називається нижньою границею інтегралу, b - верхньою границею інтегралу. Відрізок $[a; b]$ - відрізком інтегрування, x - змінною інтегрування, $f(x)$ - підінтегральною функцією, $f(x) dx$ - підінтегральним виразом.

Означення 2. Якщо для функції $f(x)$ границя (2.5) існує, то функцію називають інтегрованою на відрізку $[a; b]$.

Зауваження 1. Зауважимо, що визначений інтеграл залежить від вигляду функції $f(x)$ і меж інтегрування, але не від змінної інтегрування

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots = \int_a^b f(z)dz.$$

Зауваження 2. При введенні поняття визначеного інтегралу $\int_a^b f(x)dx$ ми припускали, що $a < b$. У випадку $b < a$ прийнемо за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Зауваження 3. У випадку $a = b$ покладемо згідно означення

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Приклад 1. Користуючись означенням обчислити інтеграл $\int_a^b kx dx$ ($b > a$).

Геометрично задача еквівалентна обчисленню площі трапеції, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = kx$.

Так як функція $y = kx$ є неперервною, то границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка на n частин та вибору точок ξ_i . Тому поділимо відрізок $[a; b]$ на n рівних відрізків

довжиною $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Точки поділу будуть мати координати:

$x_i = a + i\Delta x$, $i = \overline{0, n}$. В якості точок ξ_i виберемо ліві кінці кожного відрізка: $\xi_i = a + (i-1)\Delta x$. Складемо інтегральну суму S_n .

$$\begin{aligned}
S_n &= k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \dots + k\xi_n\Delta x = k(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)\Delta x = \\
&= k[a + (a + \Delta x) + \dots + (a + (n-1)\Delta x)]\Delta x = \\
&= k\{na + [1 + 2 + \dots + (n-1)]\Delta x\}\Delta x.
\end{aligned}$$

Враховуючи, що $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ і $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, як сума $(n-1)$ члена арифметичної прогресії, де $a_0 = 1$ і $d = 1$, будемо мати

$$S_n = k \left[na + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \right] \frac{b-a}{n} = k \left[a + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{b-a}{2} \right] (b-a).$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ k \left[a + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{b-a}{2} \right] (b-a) \right\} = k \left[a + \frac{b-a}{2} \right] (b-a) = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Отже,
$$\int_a^b kx dx = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Зауваження. З розглянутого прикладу видно, що безпосереднє обчислення визначених інтегралів, як границь інтегральних сум зв'язане зі значними труднощами навіть у випадку простої лінійної функції. Тому такий спосіб носить чисто теоретичний характер. На практиці використовується метод відкритий Ньютоном і Лейбніцем, який буде розглянутий нижче.

§3. Основні властивості визначеного інтегралу

Властивість 1. Постійний множник можна виносити за знак визначеного інтегралу: якщо $A = const$, то

$$\int_a^b Af(x) dx = A \int_a^b f(x) dx. \quad (3.1)$$

Доведення.

$$\int_a^b Af(x) dx = \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Af(\xi_i) \Delta x_i = A \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = A \int_a^b f(x) dx.$$

Властивість 2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій рівний алгебраїчній сумі інтегралів від доданків

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \quad (3.2)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)] \Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

Властивість 1 і 2 хоч і доведені для випадку $a < b$, залишаються в силі і при $a \geq b$.

Властивість 3. Якщо на відрізку $[a; b]$ де $a < b$, функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умові $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (3.3)$$

Доведення. Розглянемо різницю:

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \Delta x_i$$

Але для $\forall i$ $g(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0$ і $\Delta x_i > 0$. Отже

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0. \text{ Звідси отримаємо (3).}$$

Якщо $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$, то можна дати геометричну інтерпретацію (рис.4)

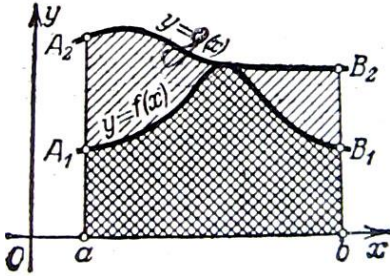


Рис.4

Так як $g(x) \geq f(x)$, то площа криволінійної трапеції aA_1B_1b менша, або рівна площі криволінійної трапеції aA_2B_2b .

Властивість 4. Якщо m і M - найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і $a \leq b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (3.4)$$

Доведення. За умовою $m \leq f(x) \leq M$. Тоді з властивості (3.3)

будемо мати: $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$. Обчислюючи крайні інтеграли отримаємо (3.4).

Якщо $f(x) \geq 0$, то властивість (3.4) має просту геометричну інтерпретацію (рис.5): площа криволінійної трапеції $aABb$ міститься між площами прямокутників aA_1B_1b та aA_2B_2b .

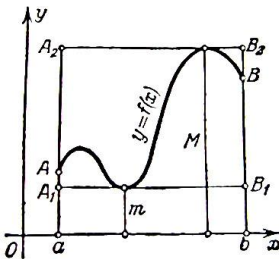


Рис.5

Властивість 5 (теорема про середнє). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка ξ , що справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi). \quad (3.5)$$

Доведення. Нехай для означеності $a < b$, m і M найменше та найбільше значення функції $f(x)$, $x \in [a; b]$. Тоді з властивості 4

$$\text{маємо } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

$$\text{Покладемо } \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx, \text{ де } m \leq \mu \leq M.$$

Так як функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона приймає на цьому відрізку усі проміжні значення між m та M . Отже, існує хоч одна точка $\xi \in [a; b]$ в якій $\mu = f(\xi)$, тому

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

Звідси будемо мати (3.5).

Властивість 6. Для будь-яких чисел a, b, c справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (3.6)$$

якщо лише всі ці три інтеграли існують.

Доведення. Спочатку припускаємо, що $a < c < b$. Так як границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на частини, то розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на частини так, щоб точка C була точкою поділу. Розіб'ємо інтегральну суму, яка відповідає відрізку $[a; b]$ на дві суми, перша з яких відповідає відрізку $[a, c]$, а друга - відрізку $[c, b]$.

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Перейшовши до границі при умові $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, отримаємо (3.6).

Розглянемо випадок $a < b < c$. Тоді на основі доведеного

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx .$$

Звідси
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx ,$$

але на основі формули $\int_b^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx$, отримаємо

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Аналогічним чином доводиться ця властивість при будь-якому розміщенні точок a, b та c .

§4. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею

Нехай на $[a; b]$ задана неперервна функція $f(x)$. Ця функція інтегрована на будь-якому відрізку $[a; x]$, де $a \leq x \leq b$. Отже, існує

$\int_a^x f(t) dt$, який називається визначеним інтегралом із змінною

верхньою межею. Позначимо його через

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

Лема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; x]$, то функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ також неперервна на цьому відрізку.

Доведення. Нехай $x \in [a; b]$ та $x + h \in [a; b]$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x) &= \Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.\end{aligned}$$

До останнього інтеграла застосуємо теорему про середнє $\Delta\Phi(x) = f(c) \cdot h$ $c \in (x; x+h)$. Тоді $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta\Phi(x) = 0$.

§5. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; x]$,

тому функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ є диференційованою в кожній точці цього відрізка і $\Phi'(x) = f(x)$.

Доведення. Нехай $x \in [a; b]$ і $x+h \in [a; b]$, тоді

$$\Delta\Phi(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c) \cdot h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f\left(\lim_{h \rightarrow 0} c\right) = f(x)$$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Теорему читають так: Якщо $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$, то похідна від визначеного інтегралу із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює підінтегральній функції, в якій змінну інтегрування замінено верхньою межею

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x).$$

Наслідок. Для будь-якої неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ існує первісна, і однією з первісних функцій є визначений інтеграл із змінною верхньою межею.

Справді, оскільки $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона є інтегрованою на $[a, b]$, а отже і на будь-якому відрізку $[a; x]$, $a \leq x \leq b$. Тоді згідно з лемою, функція $\Phi(x)$ неперервна на $[a, b]$, а з доведеної теореми випливає, що вона має похідну $f(x)$. Проте, якщо $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ є первісною для $f(x)$, а функція $F(x)$ - є будь-яка первісна, тому

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C,$$

де C - довільна стала. Покладемо при $x = a$. Тоді $F(a) + C = 0$, звідси $C = -F(a)$. Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Підставивши $x = b$ отримуємо основну формулу інтегрального числення

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \\ \text{або} & \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ця формула називається формулою Ньютона-Лейбніца.

Приклад. $\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$, де $(n \neq -1)$.

§6. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Нехай виконуються умови:

- 1) $f(x)$ неперервна на $[a, b]$;
- 2) $x = \varphi(t)$ і $x' = \varphi'(t)$ - неперервні на $[\alpha; \beta]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ і значення функції $x = \varphi(t)$ не виходить за межі відрізка $[a, b]$ при $t \in [\alpha; \beta]$. Тоді справджується рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (6.1)$$

Доведення. Зазначимо, що в обох частинах рівності (6.1) інтеграли існують, бо підінтегральні функції неперервні на відповідних відрізках. Введемо допоміжні функції:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u) du, \text{ де } x = \varphi(t);$$

$$I(t) = \int_{\alpha}^t f(\varphi(u)) \varphi'(u) du; \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Легко бачити, що $\Phi(x)$ і $I(t)$ диференційовні по t . Знайдемо похідні від них:

$$\frac{d\Phi(x)}{dt} = \frac{d\Phi(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\alpha}^t f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \right) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Отже, похідні функцій $\Phi(\varphi(t))$ і $I(t)$ рівні між собою, тому функції відрізняються одна від одної на сталу величину $\Phi(\varphi(t)) - I(t) = C$. Ця рівність справджується для будь-якого $t \in [\alpha; \beta]$. Нехай $t = \alpha$. Маємо $\Phi(\varphi(\alpha)) - I(\alpha) = C$, але $\Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(a) = 0$; $I(\alpha) = 0$, отже $C = 0$. Тому $\Phi(\varphi(t)) = I(t)$. Поклавши $t = \beta$ і враховуючи, що $\Phi(\varphi(\beta)) = \Phi(b)$ отримаємо формулу (6.1).

Розглянемо окремий випадок (6.1), а саме $\int_{-a}^a f(x) dx$. Введемо проміжну точку 0, тоді

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

В першому інтегралі зробимо підстановку $x = -t$, $dx = -dt$:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx =$$

(але так як визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування)

$$= \int_0^a \{f(-x) + f(x)\}dx.$$

Тоді, якщо $f(-x) = f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$;

якщо $f(-x) = -f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Висновок: Якщо підінтегральна функція парна, то визначений інтеграл по симетричному сегменту $[-a; a]$ з центром в точці 0 дорівнює подвоєному визначеному інтегралу по сегменту $[0; a]$. Якщо підінтегральна функція непарна, то визначений інтеграл за симетричним сегментом $[-a; a]$ з центром в точці 0 дорівнює нулю.

Приклад. Обчислити

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin^5 x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \quad \cos x dx = dt \\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} t^{-5} dt = -\frac{1}{4t^4} \Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{16}{3} - 8 \right) =$$

§7. Інтегрування частинами

Теорема. Нехай $u(x)$ та $v(x)$ - диференційовані функції від x на відріжку $[a; b]$. Тоді має місце формула:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \quad (7.1)$$

Доведення. Нехай $u(x)$ та $v(x)$ мають на $[a, b]$ неперервні похідні. Продиференціюємо добуток функцій:

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx}.$$

Звідси випливає, що для функції $u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx}$ первісною є функція $u(x) \cdot v(x)$. З формули Ньютона-Лейбніца будемо мати:

$$\int_a^b \left(u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx} \right) dx = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b.$$

Тоді

$$\int_a^b u(x)\frac{dv(x)}{dx} dx + \int_a^b v(x)\frac{du(x)}{dx} dx = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b, \text{ або}$$

$$\int_a^b u(x)dv(x) + \int_a^b v(x)du(x) = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b.$$

Звідси отримуємо формулу (7.1).

Приклад. Обчислити

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi}$$

§8. Невласні інтеграли

При введенні поняття визначеного інтегралу як границі інтегральної суми припускалось, що виконуються такі умови:

I) межі інтегрування a та b є скінченими;

II) підінтегральна функція $f(x)$ на $x \in [a, b]$ неперервна або має скінчене число точок розриву першого роду. В цьому випадку визначені інтеграли називаються власними. Якщо хоч одна з

перечислених вище умов не виконується, то такі інтеграли називаються невласними. Невласні інтеграли є узагальненням визначених інтегралів на випадок нескінчених проміжків інтегрування та необмежених функцій.

8.1. Невласні інтеграли першого роду

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; \infty)$. Тоді вона буде неперервною на будь-якому скінченому відрізку $[a, b]$. Для функції $f(x)$, неперервної на $[a, b]$, існує визначений інтеграл

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx, \text{ який залежить від верхньої межі інтегрування. Цей}$$

інтеграл визначає деяку величину, наприклад площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) \geq 0$ прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Будемо необмежено збільшувати верхню межу інтегрування ($b \rightarrow +\infty$). При цьому можливі два випадки: або $I(b)$ при $b \rightarrow +\infty$ має скінчену границю, або не має.

Означення 1. Якщо існує скінчена границя $\int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow +\infty$, то цю границю називають невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею інтегрування від неперервної на інтервалі $[a; +\infty)$ функції $f(x)$ і вважають, що

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (8.1.1)$$

У цьому випадку інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ називають збіжним, а саму функцію $f(x)$ - інтегрованою на проміжку $[a; +\infty)$. Якщо границя рівна $\pm \infty$ або зовсім не існує, то інтеграл розбіжний.

Аналогічно визначається інтеграл з нескінченною нижньою межею інтегрування від неперервної функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (8.1.2)$$

Якщо границя в правій частині формули (8.1.2) існує і є скінченною, то невластний інтеграл (8.1.2) називається збіжним, якщо границя не існує або рівна нескінченності, - то розбіжним.

Невластний інтеграл з двома нескінченими межами інтегрування від неперервної функції $f(x)$ на всій числовій прямій позначають

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$
 і попередньо зображають у вигляді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad \text{де}$$

$$C \in (-\infty; +\infty).$$

Згідно означення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx. \quad (8.1.3)$$

Невластний інтеграл (8.1.3) називається збіжним, якщо дві границі в (8.1.3) існують. Якщо хоч одна з границь не існує, то невластний інтеграл (8.1.3) називають розбіжним.

Невластні інтеграли (8.1.1) - (8.1.3) називаються *невластними інтегралами першого роду*.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \in R.$

а) $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{при } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{при } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \alpha = 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = \infty.$$

Отже, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$.

При розв'язуванні деяких задач потрібно лише дослідити чи збігається невласний інтеграл чи розбігається. Тому приведемо без доведення три теореми з допомогою яких можна дослідити збіжність деяких невласних інтегралів першого роду.

Теорема 1 (ознака порівняння). Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ визначені дві невід'ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, інтегровані на кожному скінченному відрізку $[a; b]$, причому виконується нерівність

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ для } \forall x \geq a,$$

тоді із збіжності невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність

невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності невласного інтегралу

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ визначені дві невід'ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, інтегровані на кожному скінченному відрізку $[a, b]$ і існує скінчена границя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0, \text{ то невласні інтеграли } \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ та } \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 3. Якщо функція $y = f(x)$ на проміжку $[a; +\infty)$ змінює знак і невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ також збігається.}$$

При виконанні умов теореми 3 невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

називають *абсолютно збіжним*. Слід відзначити, що аналогічні теореми мають місце і для невласних інтегралів першого роду (8.1.2) та (8.1.3).

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x+7}{\sqrt[3]{x^5}} dx$.

Скористаємось теоремою 1.

Легко бачити, що при $x \in [1; +\infty)$ $\frac{x+7}{\sqrt[3]{x^5}} > \frac{x}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Але

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 3\sqrt[3]{x} \Big|_1^b = +\infty. \text{ Отже, даний інтеграл розбігається.}$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}}$.

Скористаємось теоремою 2. Так як $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^3+5}} = 1$, а

невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ є збіжним, так як $\alpha = 3/2 > 1$, отже, і

невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}}$ також збіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{x^4} dx$. Легко бачити, що підінтегральна функція на $x \in [1; +\infty)$ змінює знак. Але

$\left| \frac{\cos^3 x}{x^4} \right| \leq \left| \frac{1}{x^4} \right|$, і невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ збіжний, тому що $\alpha = 4 > 1$.

Отже, за теоремою 3 невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{x^4} dx$ також збіжний.

8.2. Невласні інтеграли другого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна при $a \leq x < b$, а в точці b вона або невизначена, або має розрив другого роду. Тому говорити про інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ як про границю інтегральної суми неможливо, тому що функція $f(x)$ не є неперервною на відрізку $[a, b]$ і, внаслідок цього, границя інтегральної суми, в класичному розумінні, не може існувати.

Означення 1. Якщо існує скінчена лівостороння границя $\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx$, то цю границю називають невласним інтегралом від розривної функції на відрізку $[a, b]$ і вважають, що

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx. \quad (8.2.1)$$

У цьому випадку інтеграл називають збіжним, а саму функцію $f(x)$ інтегрованою на відрізку $[a, b]$. Якщо границя рівна $\pm \infty$, або зовсім не існує, то інтеграл розбіжний.

Аналогічно визначається невласний інтеграл другого роду, якщо функція неперервна при $a < x \leq b$, а в точці a вона або невизначена, або має розрив другого роду:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_{\alpha}^b f(x) dx. \quad (8.2.2)$$

Якщо ж функція має розрив в деякій точці c , яка лежить всередині відрізка $[a, b]$, то, згідно означення, вважають, що

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (8.2.3)$$

якщо два інтеграли, що лежать в правій частині існують.

Приклад 1. Обчислити $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$.

Так як всередині відрізка $[-1;1]$ існує точка $x=0$, де підінтегральна функція $\frac{1}{x^3}$ має розрив другого роду, то згідно формули (8.2.3) будемо мати

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{c_1 \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{c_1} \frac{dx}{x^3} + \lim_{c_2 \rightarrow 0^+} \int_{c_2}^1 \frac{dx}{x^3}.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл:

$$\lim_{c_1 \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{c_1} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{c_1 \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} \Big|_{-1}^{c_1} = -\frac{1}{2} \lim_{c_1 \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{c_1^2} - 1 \right) = \infty.$$

Отже, перший інтеграл на відрізку $[-1;0]$ розбігається.

$$\lim_{c_2 \rightarrow 0^+} \int_{c_2}^1 \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{c_2 \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \Big|_{c_2}^1 = -\frac{1}{2} \lim_{c_2 \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{c_2^2} \right) = \infty.$$

Звідси випливає, що другий інтеграл на відрізку $[0;1]$ також розбігається. Отже, інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$ розбігається на відрізку $[-1;1]$.

Зауважимо, що якщо б ми обчислювали даний інтеграл, не звертаючи уваги на те, що функція $\frac{1}{x^3}$ має в нулі розрив другого роду, то отримали б невірний результат.

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$ за виключенням скінченного числа точок $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,

які є внутрішніми точками відрізка і в цих точках має розриви другого роду, то інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ визначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \dots + \int_{\alpha_n}^b f(x)dx, \quad (8.2.4)$$

якщо кожен з невластних інтегралів в правій частині рівності (8.2.4) збігається, і сам інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ в цьому випадку називається збіжним.

Якщо хоч би один з інтегралів в правій частині рівності розбігається, то і $\int_a^b f(x)dx$ називається розбіжним.

Для визначення збіжності невластних інтегралів від функцій, які мають розриви другого роду, використовують теореми аналогічні теоремам для визначення збіжності невластних інтегралів першого роду.

Теорема 1. Якщо на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ в точці b мають розрив другого роду, причому в усіх точках цього відрізка виконуються нерівності

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

і $\int_a^b g(x)dx$ збігається, то і $\int_a^b f(x)dx$ також збігається.

Теорема 2. Якщо на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ в точці b мають розрив другого роду, причому в усіх точках цього відрізка виконуються нерівності

$$0 \leq g(x) \leq f(x),$$

і $\int_a^b g(x)dx$ розбігається, то і $\int_a^b f(x)dx$ також розбігається.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ є знакозмінною на відрізку $[a, b]$, має розрив другого роду в точці b , і невластний інтеграл

другого роду $\int_a^b |f(x)| dx$ збігається, то збігається також невласний інтеграл $\int_a^b f(x) dx$.

При виконанні умов теореми 3 невласний інтеграл другого роду $\int_a^b f(x) dx$ називається *абсолютно збіжним*.

Слід відзначити, що аналогічні теореми мають місце і для невласних інтегралів другого роду (8.2.2) та (8.2.3).

Приклад. Дослідити на збіжність невласний інтеграл другого роду $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha \neq 1 \quad & \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = - \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta \frac{d(b-x)}{(b-x)^\alpha} = \\ & = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \left. \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_a^\beta = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \left\{ \frac{(b-\beta)^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \right\} = \\ & = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{при } \alpha < 1 \\ \infty, & \text{при } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{б) } \alpha = 1 \quad \int_a^b \frac{dx}{b-x} = - \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta \frac{d(b-x)}{b-x} = - \lim_{\beta \rightarrow b-0} \ln |b-x| \Big|_a^\beta = \infty.$$

Отже, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ збігається при $\alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$.

ГЛАВА 3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ ДО ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

§1. Обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координат

З геометричного змісту означеного інтегралу випливає, що якщо $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$ (рис.1), обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.1)$$

Якщо $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a; b]$, то і $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ (рис.2). Отже, в цьому випадку

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|. \quad (1.2)$$

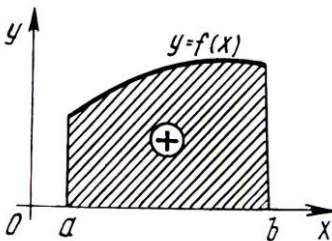


Рис.1

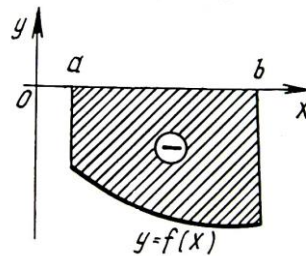


Рис.2

Якщо ж криволінійна трапеція обмежена кривою $x = \varphi(y)$, віссю ординат і прямими $y = c$, $y = d$ (рис.3), то її площа визначається формулами

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy, \quad (1.3)$$

якщо $\varphi(y) \geq 0 \quad \forall y \in [c; d]$, і $S = \left| \int_c^d \varphi(y) dy \right|,$ (1.4)

якщо $\varphi(y) \leq 0 \quad \forall y \in [c; d]$ (рис.4).

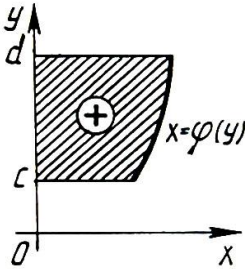


Рис.3

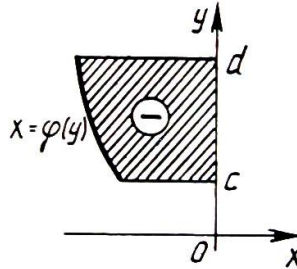


Рис.4

Якщо функція $f(x)$ скінченне число разів змінює знак на відрізку $[a, b]$, то інтеграл по відрізку $[a, b]$ розбиваємо на скінченну суму інтегралів по менших відрізках, на яких ця функція зберігає знак. На тих частинах відрізка $[a, b]$, де функція $f(x) \geq 0$ інтеграли беруться із знаком плюс, а де $f(x) \leq 0$ - із знаком мінус. Такий самий результат можна отримати, обчислюючи площу за формулою:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (1.5)$$

Обчислимо площу криволінійної трапеції у випадку, якщо крива $y = f(x)$ задана параметрично:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (1.6)$$

і $a = \varphi(\alpha)$, а $b = \varphi(\beta)$.

В цьому випадку з формули (1.1) будемо мати

$$S = \int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t), \quad x = a \Rightarrow t = \alpha \\ f(x) = \psi(t), \quad x = b \Rightarrow t = \beta \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt,$$

отже,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (1.7)$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$ і віссю абсцис при $0 \leq x \leq \pi$.

Так як $\sin x \geq 0$ при $\forall x \in [0; \pi]$, то площу обчислюємо за формулою (1.1).

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Приклад 2. Обчислити площу, обмежену еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Запишемо рівняння еліпса в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Так як площа даного еліпса в два рази більша площі його частини, яка знаходиться над віссю абсцис, то обчислимо площу його верхньої половини і подвоїмо. Обчислення проводимо за формулою (1.7).

Очевидно, що $-a \leq x \leq a$, отже $0 \leq t \leq \pi$.

Але $x = a \Rightarrow t = \pi$, $x = -a \Rightarrow t = 0$, тому

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{\pi}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

§2. Площа криволінійного сектора в полярних координатах

Розглянемо випадок, коли крива, що обмежує криволінійну трапецію, задана рівнянням в полярних координатах:

$\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Припустимо, що функція $\rho(\theta)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ є неперервною. Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ на n довільних частин точками $\alpha = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k < \theta_{k+1} < \dots < \theta_n = \beta$.

Тоді $\rho(\theta)$, будучи неперервною на кожному з відрізків $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ набуває на них своїх найменшого m_k та найбільшого M_k значень.

Побудуємо кругові сектори з радіусами m_k та M_k . Площа таких секторів дорівнює відповідно:

$$\frac{1}{2} m_k^2 (\theta_{k+1} - \theta_k); \quad \frac{1}{2} M_k^2 (\theta_{k+1} - \theta_k).$$

Знайдемо суму площ таких секторів:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 (\theta_{k+1} - \theta_k); \quad \bar{S} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 (\theta_{k+1} - \theta_k).$$

Як бачимо \underline{S} і \bar{S} є сумами Дарбу, побудованими на відрізку $[\alpha; \beta]$ для неперервної функції $\frac{1}{2} \rho^2(\theta)$. Розглянемо інтегральну суму

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \rho^2(C) \Delta \theta_k, \quad \text{де } \Delta \theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k, \quad \theta_k \leq C \leq \theta_{k+1}.$$

Перейдемо до границі при умові що $\lambda \rightarrow 0$, де $\lambda = \max \Delta \theta_k$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{S} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{S} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta.$$

Отже, площа криволінійного сектора обмеженого кривою $\rho = \rho(\theta)$ і радіус векторами $\theta = \alpha$ та $\theta = \beta$ визначається за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta. \quad (2.1)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскаатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (рис.1).

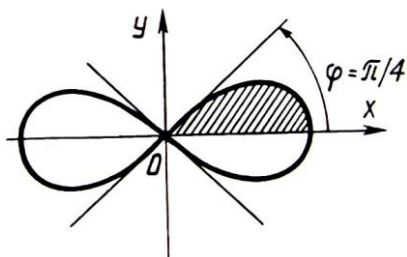


Рис.1

Так як x та y входять лише в парних степенях, то достатньо обчислити лише площу четвертої частини фігури.

Перейшовши до полярної системи координат за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

будемо мати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Легко бачити, що в першій чверті полярний кут θ змінюється в межах $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Тому з формули (1)

будемо мати:

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= a^2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = a^2. \end{aligned}$$

§3. Довжина дуги плоскої кривої

У шкільному курсі геометрії питання про довжину дуги розглядається для кола. При цьому процес "вимірювання" довжини кола відмінний від процесу вимірювання прямолінійних відрізків. І це природно. Адже ніякий прямолінійний відрізок не може бути суміщений з частиною дуги кола. Це стосується й довільної кривої. При знаходженні довжини дуги кривої застосовуватимемо граничний перехід. Для цього спочатку дамо означення довжини дуги плоскої кривої, а потім введемо формулу для її обчислення.

3.1. Параметричне задання кривої

Нехай плоска крива AB задана параметрично:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

де $x(t)$ і $y(t)$ - неперервні функції на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому точка A відповідає значенню параметра $t = \alpha$, а точка B - значенню параметра $t = \beta$. Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ на n довільних частин точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n = \beta.$$

Сукупність точок t_0, t_1, \dots, t_n назовемо T - розбиттям відрізка $[\alpha; \beta]$. Кожному значенню параметра $t = t_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, на кривій AB відповідає точка M_k . Сполучимо ці точки відрізками прямої. В результаті отримаємо, що в криву AB вписано ламану лінію. Позначимо периметр цієї ламаної через $P = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$.

Зрозуміло, що периметр P залежить від розбиття T : $P = P(T)$. Найбільшу довжину відрізка $[t_k; t_{k+1}]$ позначимо через $\lambda(T) = \max(t_{k+1} - t_k)$. Якщо $\lambda(T) \rightarrow 0$, то внаслідок неперервності функцій $x(t)$ і $y(t)$ найбільша сторона довжини ламаної також прямує до нуля.

Означення 1. Число l називається границею периметра $P = P(T)$ ламаної лінії, вписаної в криву AB при $\lambda(T) \rightarrow 0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, яке не залежить від розбиття T і таке, що як тільки $\lambda(T) < \delta$, то $|P(T) - l| < \varepsilon$ позначають $l = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} P(T)$.

Означення 2. Якщо існує границя периметра ламаної лінії, вписаної в криву AB при $\lambda(T) \rightarrow 0$, то криву AB називають спрямлюваною, а саму границю (число l) називають довжиною дуги кривої AB .

Зауважимо, що це означення стосується незамкнених кривих (точка A не збігається з точкою B).

Теорема. Якщо функції $x(t)$, $y(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$ і мають на цьому відрізку неперервні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, то крива задана рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ є спрямлюваною і довжина дуги:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3.1.1)$$

Доведення. Розглянемо довільне розбиття T відрізка $[\alpha; \beta]$.

Знайдемо значення периметра $P(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$.

Нехай M_k, M_{k+1} мають відповідно координати:

$$\begin{aligned} x_k &= x(t_k) \text{ і } y_k = y(t_k) \\ x_{k+1} &= x(t_{k+1}) \text{ і } y_{k+1} = y(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Тоді $M_k M_{k+1} = \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}$. Оскільки $x(t)$ і $y(t)$ - диференційовані на $[\alpha; \beta]$, то має місце теорема Лагранжа, тоді

$$M_k M_{k+1} = \sqrt{(x'(\tau_k))^2 + (y'(\tau_k))^2} (t_{k+1} - t_k) = \sqrt{(x'(\tau_k))^2 + (y'(\tau_k))^2} \Delta t_k$$

де

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Тому
$$P(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_k))^2 + (y'(\tau_k))^2} \Delta t_k. \quad (3.1.2)$$

Легко бачити, що сума (3.1.2) не є інтегральною сумою, тому що у формулу входять два різних значення аргумента τ_k та τ'_k . Тому розглянемо інтегральну суму

$$\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_k))^2 + (y'(\tau_k))^2} \Delta t_k.$$

Оцінимо модуль різниці функцій $P(T)$ та $\sigma(T)$:

$$\begin{aligned}
|P(T) - \sigma(T)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_k))^2 + (y'(\tau'_k))^2} - \sqrt{(x'(\tau_k))^2 + (y'(\tau_k))^2} \right| \Delta t_k \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sqrt{(x'(\tau_k))^2 + (y'(\tau'_k))^2} - \sqrt{(x'(\tau_k))^2 + (y'(\tau_k))^2} \right| \Delta t_k.
\end{aligned}$$

Використавши відому нерівність:

$$\left| \sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \right| \leq |b_1 - b|$$

останню формулу перепишемо у вигляді

$$|P(T) - \sigma(T)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |y'(\tau'_k) - y'(\tau_k)| \Delta t_k. \quad (3.1.3)$$

Оскільки функція $f(t)$ неперервна на $[\alpha; \beta]$, то вона рівномірно неперервна на $[\alpha; \beta]$.

Тому для довільного числа $\frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$, де $\varepsilon > 0$ знайдеться таке

$\delta > 0$, що як тільки виконується нерівність $|\tau'_k - \tau_k| < \delta$, то має місце

нерівність
$$|y'(\tau'_k) - y'(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}.$$

Отже, нерівність (3) запишемо у вигляді

$$|P(T) - \sigma(T)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \cdot (\beta - \alpha) = \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (P(T) - \sigma(T)) = 0$.

Оскільки $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(T) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$, то

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} P(T) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Отже, отримали (1). Теорема доведена.

Зауваження. Якщо задана просторова крива в параметричній формі рівнянням:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad \text{де } \alpha \leq t \leq \beta,$$

то її довжина обчислюється за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt.$$

3.2. Довжина дуги в прямокутній декартовій системі координат

Нехай крива AB задана на відрізку $[a, b]$ рівнянням $y = f(x)$, де $x = a$ відповідає $t = \alpha$, а $x = b$ відповідає $t = \beta$.

Проведемо в (1) заміну $x = t$; $y(t) = f(x)$, будемо мати

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3.2.1)$$

Довжина дуги в полярній системі координат

Нехай крива AB задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\theta)$ і точка A відповідає значенню $\theta = \alpha$, а точка B відповідає значенню $\theta = \beta$. Врахувавши, що

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta, \end{cases}$$

та
$$(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 =$$

$$\begin{aligned} &= (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta)^2 + (\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta)^2 = \\ &= \rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2 \end{aligned}$$

будемо мати

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta. \quad (3.2.2)$$

Розглянемо випадок замкнутої кривої. Означення довжини дуги для замкнутої кривої вже не підходять, тому що в цьому випадку ламана лінія може стягуватись в точку. Тоді замкнену криву розбивають на частини, довжини дуг яких ми вміємо обчислювати.

Приклад 1. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди (рис.1) $x = a(t \cdot \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

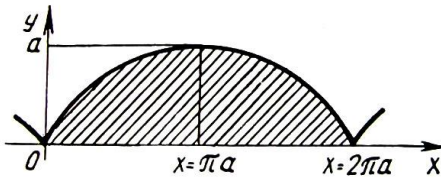


Рис.1

З формули (3.1.1) маємо:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = \\ &= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a. \end{aligned}$$

§4. Обчислення об'ємів просторових тіл

4.1. Обчислення об'ємів тіл за відомими площами поперечних перерізів

Нехай задано тіло T , обмежене замкнутою поверхнею, і відома площа будь-якого його перерізу площиною, перпендикулярною до деякої прямої, наприклад до осі абсцис. Ці перерізи будемо називати поперечними. Розміщення поперечного перерізу визначається (в

даному випадку) абсцисою точки його перетину з віссю абсцис. Змінюючи x площа S даного поперечного перерізу в загальному випадку буде змінюватись, тобто вона є деякою функцією від x : $S = S(x)$. Функцію $S(x)$ будемо вважати неперервною на відрізку $[a, b]$, де a та b - абсциси крайніх перерізів тіла T .

Розіб'ємо довільно відрізок $[a, b]$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$.

Позначимо через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda = \max_{[a;b]} \{\Delta x_k\}$, $k = \overline{1, n}$.

Через точки розбиття x_k , $k = \overline{1, n}$, проведемо площини, перпендикулярні до осі Ox . Сім'я площин $x = x_k$, $k = \overline{1, n}$, розіб'є дане тіло T на шари (рис.1), товщина кожного з яких рівна Δx_k , $k = \overline{1, n}$.

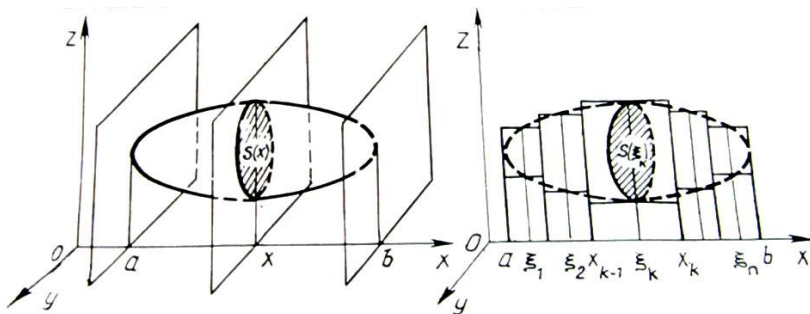


Рис.1

На кожному з відрізків $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$, виберемо довільну точку ξ_k і знайдемо значення $S(\xi_k)$ функції $S(x)$ у вибраних точках.

Припустимо, що на кожному з відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ функція $S(x)$ постійна і співпадає із значенням $S(\xi_k)$. Тоді кожен шар являє собою

прямий циліндр з основою $S(\xi_k)$ і твірними, паралельними осі Ox . Його об'єм обчислюється за формулою:

$$\Delta V_k = S(\xi_k) \Delta x_k,$$

де Δx_k - висота циліндра.

Тоді об'єм V тіла T приблизно рівний об'єму фігури, складеної з n окремих циліндрів:

$$V \approx \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \sum_{k=1}^n S(\xi_k) \Delta x_k. \quad (4.1.1)$$

Сума (1) являє собою інтегральну суму, тому за точне значення об'єму приймаємо:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n S(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b S(x) dx.$$

Отже, об'єм тіла, яке знаходиться між двома площинами $x=a$ та $x=b$, у випадку, якщо площа перетину, проведена перпендикулярно до осі Ox є відомою функцією від x : $S = S(x)$ для $\forall x \in [a; b]$, обчислюється за формулою:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (4.1.2)$$

Приклад. Обчислити об'єм еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Очевидно, що в перетині еліпсоїда площиною, паралельною площині Oyz , яка знаходиться на відстані x від неї, отримуємо еліпс:

$$\frac{y^2}{\left[b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]^2} + \frac{z^2}{\left[c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]^2} = 1$$

з півосьми $b_1 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ та $c_1 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Використавши формулу для обчислення площі еліпса, будемо мати:

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Використавши формулу (2) обчислимо об'єм еліпсоїда:

$$V = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc.$$

4.2. Обчислення об'ємів тіл обертання

Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$. Якщо перетнути це тіло площинами, перпендикулярними до осі Ox , отримаємо круги, радіуси яких рівні модулю ординат $y = f(x)$ точок даної кривої. Отже, площа поперечного перерізу тіла відома:

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

Застосувавши формулу (4.1.2) будемо мати:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (4.2.1)$$

Зауваження. Якщо тіло утворене обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x = \varphi(y)$, віссю ординат і прямими $y = c$ та $y = d$, то його об'єм обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (4.2.2)$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням ланцюгової лінії $y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$ навколо осі Ox на відрізок від $x = -b$ до $x = b$.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \frac{a^2}{4} \int_{-b}^b \left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right)^2 dx = 2\pi \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a} \right)^2 dx = \\
 &= \frac{\pi a^2}{2} \left[\frac{a}{2} e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2} e^{-2x/a} \right]_0^b = \frac{\pi a^3}{4} \left(e^{2b/a} - e^{-2b/a} \right) + \pi a^2 b.
 \end{aligned}$$

§5. Площа поверхні обертання

Нехай незамкнена спрямлювана крива AB , яка лежить у верхній площині, обертається навколо осі OX (рис.1). Поверхня, яка при цьому утворюється називається *поверхнею обертання*.

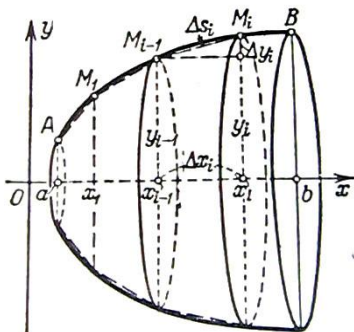


Рис.1

Припустимо, що криву AB задано параметрично, причому за параметр вибрано довжину дуги.

Отже, нехай рівняння кривої AB має вигляд $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$ $0 \leq s \leq S$, де точка A відповідає значенню $s = 0$, а точка B - значенню $s = S$. Нехай функції $\varphi(s)$ та $\psi(s)$ неперервні на $[0; S]$. Побудуємо T -розбиття відрізка $[0; S]$:

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1} < \dots < s_n = S.$$

Кожному значенню параметра $s = S_k$, $k=1, \dots, n-1$ на кривій AB відповідає точка M_k . Сполучимо ці точки відрізками ламаної лінії, отримаємо ламану, вписану в криву AB .

При обертанні кривої обертається і вписана в неї ламана. При цьому кожен відрізок ламаної описує бічну поверхню зрізаного конуса. Площа бічної поверхні зрізаного конуса, який утворюється обертанням відрізка (хорди) $M_k M_{k+1}$ навколо осі Ox дорівнює:

$$2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot l_k, \text{ де } l_k = |M_k M_{k+1}|.$$

Тоді площа бічної поверхні, утвореної від обертання ламаної $AM_1 M_2 \dots M_{n-1} B$ навколо осі абсцис:

$$P(T) = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot l_k. \quad (5.1)$$

Означення. Площею поверхні, яка утворюється обертанням незамкненої спрямлюваної кривої AB навколо осі Ox називають границю

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot l_k, \quad (5.2)$$

якщо вона існує і не залежить від розбиття відрізка $[0; S]$ на частини при умові, що найбільша довжина ΔS дуги $M_k M_{k+1}$ прямує до 0.

Подамо суму (5.1) у вигляді:

$$P(T) = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot \Delta S_k + \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot (l_k - \Delta S_k).$$

Покажемо, що:

$$1) \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot \Delta S_k = 2\pi \int_0^S \psi(S) dS; \text{ та}$$

$$2) \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot (l_k - \Delta S_k) = 0.$$

Розглянемо першу суму:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{\psi(S_k) + \psi(S_{k+1})}{2} \cdot \Delta S_k = \left| \frac{\psi(S_k) + \psi(S_{k+1})}{2} = \psi(\tau_k) \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \psi(\tau_k) \Delta S_k .$$

Одержали інтегральну суму, тому:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \psi(\tau_k) \cdot \Delta S_k = 2\pi \int_0^S \psi(s) ds .$$

Розглянемо другу суму. Оскільки $\psi(s)$ - неперервна на $[0; S]$, то $|\psi(s)| < M$. Тому

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot (l_k - s_k) \right| < 2\pi M \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta S_k - l_k) = 2\pi M \left(S - \sum_{k=0}^{n-1} l_k \right),$$

але $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} l_k = S$, отже $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} 2\pi M \left(S - \sum_{k=0}^{n-1} l_k \right) = 0$, тоді

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot (l_k - \Delta S_k) = 0, \text{ отже}$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} P(T) = 2\pi \int_0^S \psi(s) ds ,$$

$$\text{або} \quad P = 2\pi \int_0^S y ds .$$

(5.3)

Нехай криву задано рівнянням $y = f(x)$ тоді

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx .$$

(5.4)

Якщо крива AB задана параметрично $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, то

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt . \quad (5.5)$$

Якщо крива задана в полярних координатах $\rho = \rho(\theta)$, то

$$P = 2\pi \int_{\beta}^{\beta} \rho(\theta) \sin \theta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta. \quad (5.6)$$

Приклад. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі абсцис петлі кривої $9y^2 = x(3-x)^2$, де $0 \leq x \leq 3$.

Верхня частина петлі при $0 \leq x \leq 3$ має вигляд $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$. Тоді за формулою (5.4), будемо мати

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{4x}} dx = \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^3 (3-x)\sqrt{x} \cdot \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{\pi}{3} \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \\ &= \frac{\pi}{3} \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \Big|_0^3 = \frac{\pi}{3} (-9 + 9 + 9) = 3\pi. \end{aligned}$$

§6. Обчислення роботи змінної сили

Нехай матеріальна точка рухається по прямій лінії Ox під дією деякої сили F , яка зберігає постійний напрям ($F \square Ox$), але змінюється по модулю ($|F| \neq const$). Обчислимо роботу цієї змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж відрізка $[a, b]$, де $a < b$. В кожній точці x відрізка $[a, b]$ модуль сили є функцією від x , тобто $|F| = F(x)$. Припустимо, що функція $F(x)$ неперервна на $x \in [a, b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Покладемо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$. Як відомо, робота на усьому шляху рівна сумі робіт на усіх його

участках. Позначивши роботу на усьому шляху через A , а на відрізку $[x_{k-1}; x_k]$ через A_k , будемо мати $A = \sum_{k=1}^n \Delta A_k$.

Виберемо на кожному окремому відрізку $[x_{k-1}; x_k]$ довільну точку ξ_k і знайдемо значення $F(\xi_k)$. Тоді робота на цьому відрізку:

$$\Delta A_k \approx F(\xi_k) \Delta x_k,$$

а на відрізку $[a, b]$

$$A \approx \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta x_k. \quad (6.1)$$

Очевидно, що у формулі (1) права частина є інтегральною сумою $F(x)$ на відрізку $[a, b]$. Тому

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b F(x) dx. \quad (6.2)$$

Приклад. Обчислити роботу, яка затрачається на розтяг пружини на довжину l , якщо відомо, що коефіцієнт пружності рівний k .

Згідно закону Гука $|F| = kx$. Отже, $F(x) = kx$.

Застосуємо формулу (2), будемо мати

$$A = \int_0^l kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^l = \frac{kl^2}{2}.$$

§7. Обчислення сили тиску рідини на вертикально занурену пластину

Нехай пластина у формі криволінійної трапеції вертикально занурена в рідину так, що її бічні сторони паралельні поверхні рідини і знаходяться нижче її рівня на віддальх a та b відповідно (рис.1).

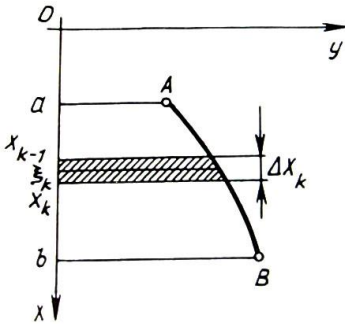


Рис.1

Виберемо систему координат, як показано на рис.1. Нехай крива AB задана рівнянням $y = f(x)$ і функція $f(x)$ неперервна на $x \in [a, b]$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n відрізків $[x_{k-1}; x_k]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$. Позначимо через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$. Проведемо через точки x_0, x_1, \dots, x_n прямі, паралельні осі ординат. Вони розіб'ють пластину на n малих горизонтальних полос. Виберемо на кожному відрізку $[x_{k-1}; x_k]$ довільно точку $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1, n}$ і обчислимо наближено площу S_k маленької горизонтальної полоси

$$S_k \approx f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Вважаючи, що всі точки кожної маленької горизонтальної полоси знаходяться на однаковій глибині $h = \xi_k$, обчислимо наближено силу тиску на полосу

$$\Delta P_k \approx \rho g \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Просумувавши знайдені значення ΔP_k , $k = \overline{1, n}$, знайдемо наближене значення сили тиску на всю пластину

$$P \approx \sum_{k=1}^n \rho g \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (7.1)$$

Легко бачити, що права частина формули (1) є інтегральною сумою, будемо мати

$$P = \lim_{\max\{\Delta x_k\} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho g \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k = \rho g \int_a^b x \cdot f(x) dx. \quad (7.2)$$

Якщо в рідину занурена пластина $A_1B_1B_2A_2$ (рис.2), обмежена прямими $x=a$, $x=b$ і кривими $y=y_1(x)$ та $y=y_2(x)$, то сила тиску на цю пластину обчислюється за формулою

$$P = \rho g \int_a^b x [y_2(x) - y_1(x)] dx. \quad (7.3)$$

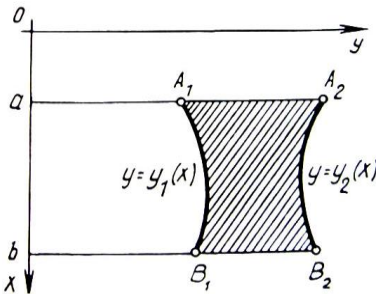


Рис.2

Приклад. Обчислити силу тиску, з якою рідина, густиною ρ тисне на греблю, яка має форму половини еліпса $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (рис.3).

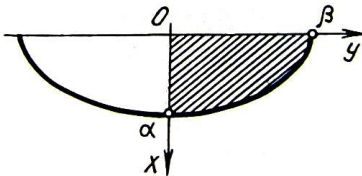


Рис.3

Виберемо систему координат, як показано на рис.3. Згідно симетрії еліпса достатньо знайти силу тиску на заштриховану область

і подвоїти її. З рівняння еліпса маємо, що дуга $\alpha\beta$ описується рівнянням $y(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$. Використавши формулу (7.2) будемо мати

$$\frac{1}{2}P = \rho g \int_0^{\alpha} x \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} \rho g \frac{\beta}{\alpha} (\alpha^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^{\alpha} = \frac{1}{3} \rho g \alpha^2 \beta.$$

Тоді
$$P = \frac{2}{3} \rho g \alpha^2 \beta.$$

§8. Обчислення статичних моментів і координат центра мас

Нехай на площині xOy задана система матеріальних точок $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ з масами m_1, m_2, \dots, m_n .

Добутки $m_i x_i$ та $m_i y_i$ називають статичними моментами маси m_i відносно осей Oy та Ox . Тоді статичні моменти системи матеріальних точок P_1, P_2, \dots, P_n відносно осей Ox та Oy знаходяться за формулами

$$K_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (8.1)$$

та
$$K_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (8.2)$$

Позначимо через x_c і y_c координати центру мас даної системи матеріальних точок. Як відомо з курсу механіки, координати центру мас системи матеріальних точок визначаються за формулами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (8.3)$$

та

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (8.4)$$

Формули (8.1)-(8.4) використаємо для обчислення статичних моментів і центра мас деяких фігур.

8.1. Статичні моменти та центр мас плоскої матеріальної лінії

Не зменшуючи загальності припустимо, що лінійна густина ρ (тобто маса одиниці довжини) матеріальної лінії AB рівна одиниці.

Нехай лінія AB задана параметрично
$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \quad 0 \leq s \leq S. \end{cases}$$

Розіб'ємо її на n частин точками

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{k-1} < s_k < \dots < s_n = S.$$

Позначимо $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$. В силу припущення, що $\rho = 1$ маса лінії чисельно буде рівна її довжині S . На кожному відрізку $[s_{k-1}, s_k]$ виберемо довільно точку ξ_k і припустимо, що маса кусочка лінії Δs_k зосереджена в точці $M_k(x(\xi_k); y(\xi_k))$. Тобто, ми замінили, в першому наближенні, матеріальну лінію системою матеріальних точок $M_k(x(\xi_k); y(\xi_k))$ з масами Δs_k , де $k = \overline{1, n}$.

Використавши формули (8.1) та (8.2) будемо мати, що

$$K_x \approx \sum_{k=1}^n y(\xi_k) \Delta s_k \quad (8.1.1)$$

$$\text{та } K_y \approx \sum_{k=1}^n x(\xi_k) \Delta s_k. \quad (8.1.2)$$

Легко бачити, що в правій частині формул (8.1.1) та (8.1.2) є інтегральні суми. Перейдемо до границі при умові, що $\lambda = \max \Delta s_k \rightarrow 0$, будемо мати

$$\lim_{\lambda=\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n y(\xi_k) \Delta s_k = \int_0^S y(s) ds$$

та

$$\lim_{\lambda=\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n x(\xi_k) \Delta s_k = \int_0^S x(s) ds$$

Звідси статичні моменти відносно осей Ox та Oy будуть визначатись формулами:

$$K_x = \int_0^S y(s) ds \quad (8.1.3)$$

та

$$K_y = \int_0^S x(s) ds. \quad (8.1.4)$$

Використавши формули (3) та (4) будемо мати координати центра мас плоскої лінії:

$$x_c = \frac{\int_0^S x(s) ds}{S}, \quad (8.1.5)$$

$$y_c = \frac{\int_0^S y(s) ds}{S}. \quad (8.1.6)$$

Якщо крива задана в декартовій системі $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то статичні моменти будуть визначатись за формулами:

$$K_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad (8.1.7)$$

$$K_y = \int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad (8.1.8)$$

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}, \quad (8.1.9)$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}. \quad (8.1.10)$$

Запишемо другу формулу (8.1.6) у вигляді: $y_c S = \int_0^S y(s) ds$.

Домноживши обидві частини на 2π , будемо мати:

$$2\pi y_c S = 2\pi \int_0^S y(s) ds.$$

Отримали **першу теорему Гульдїна**:

Площа поверхні, утворена при обертанні плоскої спрямлюваної кривої AB навколо осі, яка її не перетинає і лежить з кривою в одній площині, дорівнює добутку довжини дуги цієї кривої на довжину кола, яке описує центр маси кривої.

Приклад. Знайти статичні моменти відносно осей координат і координати центру мас однорідного півкола $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ з лінійною густиною $\rho = 1$.

Так як $y' = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, то з формул (11) та (12) будемо мати

$$K_x = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \int_{-R}^R dx = 2R^2;$$

$$K_y = \int_{-R}^R x \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = -R \sqrt{R^2 - x^2} \Big|_{-R}^R = 0.$$

Так як маса півкола рівна πR , то координати центра мас

$$x_c = \frac{K_y}{\pi R} = 0; \quad y_c = \frac{K_x}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

8.2. Обчислення статичних моментів і координат центру мас плоскої фігури

Нехай задана матеріальна криволінійна трапеція $aABb$, обмежена графіком функції $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, віссю Ox і прямими $x = a$ та $x = b$ (рис.1).

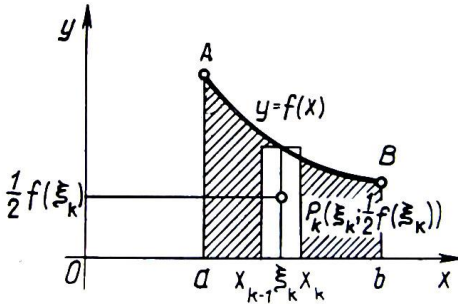


Рис.1

По цій трапеції неперервно та рівномірно з густиною $\rho = 1$ розподілена маса m , яка чисельно рівна площі S цієї трапеції. Обчислення статичних моментів K_x та K_y проведемо за відомим алгоритмом.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Позначимо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Через точки розбиття проведемо прямі $x = x_k$. Ці прямі розіб'ють трапецію на n маленьких трапецій.

Виберемо точку $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$. Тоді площа кожної k -ї окремої трапеції приблизно рівна площі прямокутника зі сторонами Δx_k та $f(\xi_k)$. $\Delta S_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k$, а маса відповідно $\Delta m_k = \Delta S_k$.

Зосередимо масу кожної маленької трапеції в точці $P_k\left(\xi_k; \frac{1}{2}f(\xi_k)\right)$, тобто в центрі симетрії прямокутника зі сторонами Δx_k та $f(\xi_k)$. Замінімо матеріальну криволінійну трапецію $aABb$ на систему n матеріальних точок $P_k\left(\xi_k; \frac{1}{2}f(\xi_k)\right)$, $k = \overline{1, n}$. Тоді її маса, статичні моменти K_x, K_y і координати центра мас x_c, y_c знаходяться наближено так:

$$m = S \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

$$M_x \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f^2(\xi_k) \Delta x_k,$$

$$M_y \approx \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot f(\xi_k) \Delta x_k,$$

$$x_c \approx \frac{K_y}{m}, \quad y_c \approx \frac{K_x}{m}.$$

Перейшовши до границі, при умові $\lambda = \max\{\Delta x_k\} \rightarrow 0$ будемо мати:

$$m = \int_a^b f(x) dx \quad (8.2.1)$$

$$K_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx, \quad (8.2.2)$$

$$K_y = \frac{1}{2} \int_a^b x \cdot f(x) dx, \quad (8.2.3)$$

$$x_c = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad (8.2.4)$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}. \quad (8.2.5)$$

З формули (8.2.5), враховуючи, що $\int_a^b f(x) dx = m = S$ маємо

$$y_c \cdot S = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx.$$

Помноживши отриману рівність на 2π будемо мати

$$2\pi y_c \cdot S = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (8.2.6)$$

Отримали **другу теорему Гульдіна**:

Об'єм тіла обертання плоскої фігури навколо осі, що її не перетинає, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, яке описує центр мас заданої фігури.

Якщо криволінійна матеріальна трапеція обмежена знизу кривою $y = f_1(x)$, а зверху кривою $y = f_2(x)$ та зліва і справа відповідно прямими $x = a$ та $x = b$, то, як легко бачити, формули (8.2.4) та (8.2.5) переписуться у вигляді:

$$x_c = \frac{\int_a^b x \cdot \{f_2(x) - f_1(x)\} dx}{\int_a^b \{f_2(x) - f_1(x)\} dx}, \quad (8.2.7)$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \{f_2^2(x) - f_1^2(x)\} dx}{\int_a^b \{f_2(x) - f_1(x)\} dx}. \quad (8.2.8)$$

Приклад. Визначити координати центру мас сегмента параболи $y^2 = px$, який відтинають прямою $x = p$.

В даному випадку $f_2(x) = \sqrt{px}$; $f_1(x) = -\sqrt{px}$, тому

$$x_c = \frac{\int_0^p x\sqrt{px}dx}{\int_0^p \sqrt{px}dx} = \frac{2\sqrt{p} \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^p}{2\sqrt{p} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^p} = \frac{\frac{4}{5} p^3}{\frac{4}{3} p^2} = \frac{3}{5} p.$$

Так як сегмент симетричний відносно осі Ox , то $y_c = 0$.

Література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч.посібн. – К.: А.С.К., 2001.– 648 с
2. Призва Г.Й., Плахотник В.В., Васильченко І.П. та інші. Вища математика. – Кн.1. – К.: Либідь, 2003.
3. Вища математика: Навч. посібник.: в 3-х ч. - Ч. 1. / Б.І. Дутчак, Р.І. Михальчук, О.В. Лисенко, Ю.Я. Матвіїв. - Луцьк : Вежа-Друк, 2014. - 372с.
4. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: Либідь, 2001.
5. Кулініч Г.Л. Вища математика. Основні розділи. – Кн.2. – К.: Либідь, 2003.
6. В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Т.1 - Т.3. Навчальний посібник. К.: Книги України ЛТД 2009.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач. – К.: А.С.К., 2005.– 480 с.
8. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч 1 Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – Х.: ХТУРЕ, 2002.– 552 с.

ЗМІСТ

Глава I. Первісна функція і невизначений інтеграл

§1. Поняття первісної функції	3
§2. Невизначений інтеграл	4
2.1. Основні властивості невизначеного інтеграла	5
2.2. Таблиця основних невизначених інтегралів	5
§3. Правила диференціювання	7
3.1. Метод безпосереднього інтегрування.....	7
3.2. Метод заміни змінної (підстановкою).....	8
3.3. Інтегрування частинами	9
§4. Раціональні дроби та їх інтегрування	12
4.1. Елементарні дроби і їх інтегрування	12
4.2. Розклад правильних раціональних дробів на суму простих дробів	16
§5. Інтеграл від деяких функцій, які містять квадратний тричлен	22
§6. Інтегрування диференціальних біномів	24
§7. Інтеграл вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + px + q}) dx$	25
7.1. Перша підстановка Ейлера	28
7.2. Друга підстановка Ейлера	28
7.3. Третя підстановка Ейлера	28
§8. Інтегрування деяких ірраціональних функцій ...	28
§9. Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій .30	
9.1. Універсальна тригонометрична підстановка $tg \frac{x}{2} = t$	30
9.2. Інтеграл вигляду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$	32
9.3. Інтеграл вигляду $\int tg^n x dx, \int ctg^n x dx, \dots$	33
9.4. Інтеграл вигляду $\int \sin mx \cos nxdx, \int \cos mx \cos nxdx$	

$\int \sin mx \sin nxdx$	34
--------------------------------	----

Глава II. Визначений інтеграл

§1. Постановка задачі. Нижня і верхня інтегральні суми ...	34
§2. Визначений інтеграл. Теорема існування визначеного інтегралу.....	36
§3. Основні властивості визначеного інтегралу.....	40
§4. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею	44
§5. Формула Ньютона-Лейбніца	45
§6. Заміна змінної у визначеному інтегралі.....	46
§7. Інтегрування частинами	48
§8. Невласні інтеграли	49
8.1 Невласні інтеграли першого роду	50
8.2. Невласні інтеграли другого роду	54

Глава III. Застосування визначеного інтегралу до задач геометрії

§1. Обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координат	58
§2. Площа криволінійного сектора в полярних координатах.	60
§3. Довжина дуги плоскої кривої	62
3.1 Параметричне задання кривої	63
3.2. Довжина дуги в прямокутній декартовій системі координат.....	66
§4. Обчислення об'ємів просторових тіл	48
4.1 Обчислення об'ємів тіл за відомими площами поперечних перерізів	67
4.2. Обчислення об'ємів тіл обертання.....	70
§5. Площа поверхні обертання.....	71
§6. Обчислення роботи змінної сили	74
§7. Обчислення сили тиску рідини на вертикально занурену пластину	75
§8. Обчислення статичних моментів і координат центра мас	78
Література.....	85

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Курс лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти технічних та економічних спеціальностей денної та заочної форми навчання

Комп'ютерний набір і верстка:

Л.І. Панасюк

Редактор:

О.С. Гордіюк

Редакційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75

Обл.-вид. арк. ___ Умовн. друк. арк. ___ Тираж 50
Підписано до друку _____