

**Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет**



Моделювання динамічних процесів у складних системах

Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни
Моделювання динамічних процесів у складних системах для
здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти
освітньої програми «Прикладна математика» галузі знань F
Інформаційні технології спеціальності F1 «Прикладна
математика» денної та заочної форм навчання (перша
частина)

ЛУЦЬК 2026

УДК 517.53/.55

К 21

До друку

Голова вченої ради факультету робототехніки та штучного інтелекту
_____ А. Ткачук

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в
репозитарій ЛНТУ

Директор бібліотеки _____ Н. Поліщук

Рекомендовано до видання вченою радою факультету робототехніки та
штучного інтелекту ЛНТУ, протокол № ____ від « ____ » _____
2026 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри штучного інтелекту та
математичного моделювання

протокол № ____ від « ____ » _____ 2026 року.

Завідувач кафедри _____ О. Мікуліч

Укладач: _____ О. Бондарський, кандидат технічних наук, доцент
кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання ЛНТУ

Рецензент: _____ О. Приходько, кандидат технічних наук, доцент
кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання ЛНТУ

Відповідальний за випуск: _____ О. Мікуліч, доктор технічних
наук, завідувач кафедри штучного інтелекту та математичного
моделювання ЛНТУ

Моделювання динамічних процесів у складних системах:

Методичні вказівки для практичних занять для здобувачів
другого (магістерського) рівня вищої освіти освітньої програми
«Прикладна математика» галузі знань F Інформаційні технології
спеціальності F1 «Прикладна математика» денної та заочної
форм навчання (перша частина) / укладач О. Бондарський. –
Луцьк: ЛНТУ, 2026. –57 с.

Методичні вказівки для практичних занять складені відповідно до
діючої програми курсу Моделювання динамічних процесів у складних
системах для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти
освітньої програми «Прикладна математика» галузі знань F Інформаційні
технології спеціальності F1 «Прикладна математика» денної та заочної
форм навчання. Наведені мета, завдання та програма навчальної
дисципліни та завдання для практичних занять.

©Бондарський О., 2026

Мета і завдання дисципліни «Моделювання динамічних процесів у складних системах»

Мета вивчення дисципліни.

Як навчальна дисципліна «Моделювання динамічних процесів у складних системах» забезпечує формування у студентів практичних навичок моделювання, формалізації та розв'язання інженерних задач динаміки за допомогою сучасних методів аналітичної, чисельної та штучно-інтелектуальної обробки даних.

Завдання вивчення дисципліни

Формування у студентів комплексного бачення про методи розв'язання інженерних задач динаміки, застосування математичного моделювання для вирішення реальних практичних задач, вивчення основних прийомів та методів, ознайомлення з необхідним програмним забезпеченням.

Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1

«Застосування в моделюванні динамічних процесів диференціальних рівнянь та загальних теорем динаміки».

Тема 1. Моделювання динаміки систем за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Тема 2. Використання загальних теорем динаміки для моделювання руху складних механічних систем.

Тема 3. Вивчення динаміки механічної системи з використанням теореми про зміну кінетичної енергії.

Змістовий модуль 2

«Моделювання динаміки механічних систем за допомогою різноманітних методів та теорій».

Тема 4. Застосування у моделюванні задач динаміки методу кінетостатики.

Тема 5. Моделювання динаміки твердого тіла у випадку його поступального, обертального, плоскопаралельного або сферичного руху.

Тема 6. Застосування в моделюванні динаміки систем наближеної теорії гірскопів.

Динаміка матеріальної точки

Завдання Д-1

Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, яка знаходиться під дією сталих сил

Варіанти 1-5 (рис. 1, схема 1). Тіло рухається з точки А уздовж ділянки АВ довжиною l похилої площини, яка утворює кут α з горизонтом, протягом τ с. Його початкова швидкість \vec{V}_A . Коефіцієнт тертя ковзання тіла уздовж площини дорівнює f .

В точці В тіло залишає площину з швидкістю \vec{V}_B і попадає з швидкістю \vec{V}_C в точку С площини ВD, яка нахилена під кутом β до горизонту і знаходиться у повітрі Т с.

При розв'язанні задачі тіло вважати матеріальною точкою; опором повітря знехтувати.

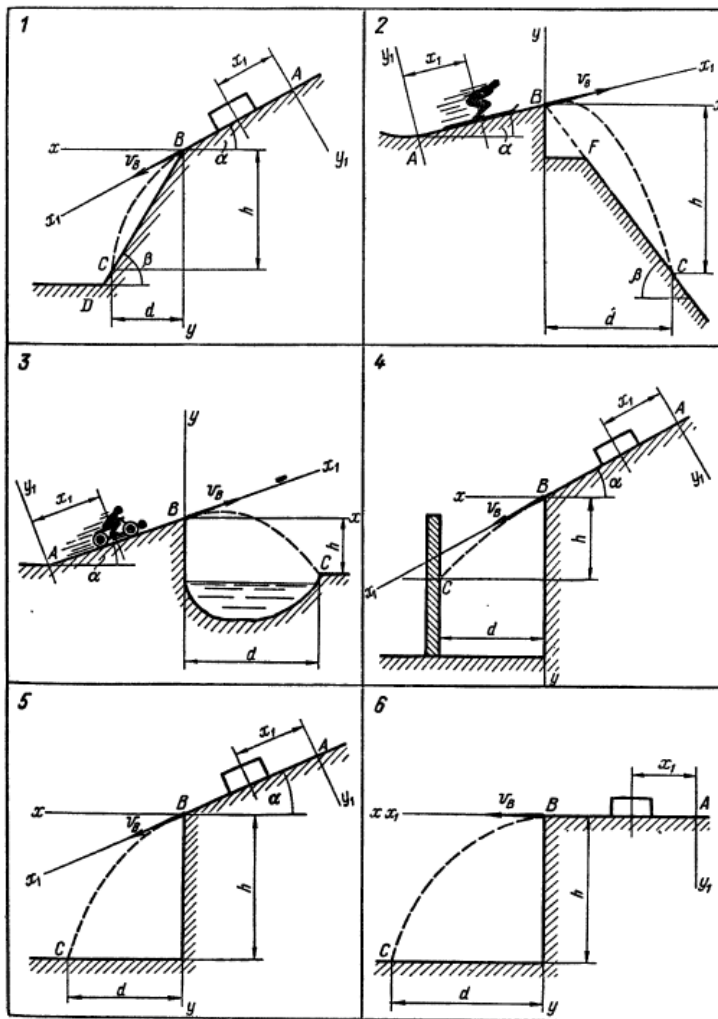


Рис. 1

В а р і а н т 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $V_A = 0$; $f = 0,2$; $l = 10\text{ м}$;
 $\beta = 60^\circ$. Визначити τ_{1h} .

В а р і а н т 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $V_A = 2\text{ м/с}$; $f = 0,2$; $h = 4\text{ м}$;

$\beta = 45^\circ$. Визначити l і рівняння траєкторії точки на ділянці ВС.

В а р і а н т 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $V_A = 2,5 \text{ м/с}$; $f \neq 0$;

$l = 8 \text{ м}$; $d = 10 \text{ м}$; $\beta = 60^\circ$. Визначити V_B і τ .

В а р і а н т 4. Дано: $V_A = 0$; $\tau = 2 \text{ с}$; $l = 9,8 \text{ м}$; $\beta = 60^\circ$;
 $f=0$. Визначити α і T .

В а р і а н т 5. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $V_A = 0$; $l = 9,8 \text{ м}$; $\tau = 3 \text{ с}$;

$\beta = 45^\circ$. Визначити f і V_C .

Варіанти 6-10 (рис. 1, схема 2). Лижник підходить до точки А ділянки трампліну АВ, який нахилений під кутом α до горизонту і має довжину l з швидкістю \vec{V}_A . Коефіцієнт тертя ковзання лиж на ділянці АВ дорівнює f . Лижник від А до В рухається τ с; в точці В із швидкістю \vec{V}_B він залишає трамплін. Через T с. лижник приземляється із швидкістю \vec{V}_C в точці С гори, яка утворює кут β з горизонтом.

При розв'язанні задачі лижника прийняти за матеріальну точку; опором повітря знехтувати.

В а р і а н т 6. Дано: $\alpha = 20^\circ$; $f = 0,1$; $\tau = 0,2 \text{ с}$;

$h = 40 \text{ м}$; $\beta = 30^\circ$. Визначити l і V_C .

В а р і а н т 7. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0,1$; $V_A = 16 \text{ м/с}$;

$l = 5 \text{ м}$; $\beta = 45^\circ$. Визначити V_B і T .

В а р і а н т 8. Дано: $V_A = 21 \text{ м/с}$; $f = 0$; $\tau = 0,3 \text{ с}$;

$V_B = 20 \text{ м/с}$; $\beta = 60^\circ$. Визначити α і d .

В а р і а н т 9. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $\tau = 0,3 \text{ с}$; $f = 0,1$;

$h = 30\sqrt{2} \text{ м}$; $\beta = 45^\circ$. Визначити V_B і V_A .

В а р і а н т 10. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0$; $V_A = 12 \text{ м/с}$;

$d = 50 \text{ м}$; $\beta = 60^\circ$. Визначити τ і рівняння траєкторії лижника на ділянці ВС.

Варіанти 11-15 (рис. 1, схема 3). Маючи в точці А швидкість \vec{V}_A , мотоцикл піднімається τ с. уздовж ділянки АВ довжиною l , який утворює з горизонтом кут α . При сталій на всій ділянці АВ силі P мотоцикл в точці

В набуває швидкості \vec{V}_B і перелітає через канаву шириною d , перебуваючи в повітрі T с. і приземляється у точці C із швидкістю \vec{V}_C . Вага мотоцикла з мотоциклістом дорівнює m .

При розв'язанні задачі мотоцикл з мотоциклістом прийняти за матеріальну точку; опором повітря знехтувати.

В а р і а н т 11. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P \neq 0$; $l = 40\text{м}$; $V_A = 0$;

$V_B = 4,5\text{м/с}$; $d = 3\text{м}$. Визначити τ і h .

В а р і а н т 12. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P = 0$; $l = 40\text{м}$;

$V_B = 4,5\text{м/с}$; $h = 1,5\text{м}$. Визначити V_A і d .

В а р і а н т 13. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400\text{кг}$; $V_A = 0$;

$\tau = 20\text{с}$; $d = 3\text{м}$; $h = 1,5\text{м}$. Визначити P і l .

В а р і а н т 14. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400\text{кг}$; $P = 2,2\text{кН}$;

$V_A = 0$; $l = 40\text{м}$; $d = 5\text{м}$. Визначити V_B і V_C .

В а р і а н т 15. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $V_A = 0$; $P = 2\text{кН}$;

$l = 50\text{м}$; $h = 2\text{м}$; $d = 4\text{м}$. Визначити T і m .

Варіанти 16-20 (рис. 1, схема 4). Камінь ковзає на ділянці AB схилу протягом τ с., який утворює кут α з горизонтом і має довжину l . Його початкова швидкість \vec{V}_A . Коефіцієнт тертя ковзання каменя уздовж схилу дорівнює f . Маючи в точці B швидкість \vec{V}_B , камінь через T с. ударяється в точці C у вертикальну захисну стіну.

При розв'язанні задачі камінь вважати матеріальною точкою; опором повітря знехтувати.

В а р і а н т 16. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $V_A = 1\text{м/с}$; $l = 3\text{м}$;

$f = 0,2$; $d = 2,5\text{м}$. Визначити h і T .

В а р і а н т 17. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $l = 6\text{м}$; $V_B = 2V_A$; $\tau = 1\text{с}$;

$h = 6\text{м}$. Визначити d і f .

В а р і а н т 18. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $l = 2\text{м}$; $V_A = 0$; $f = 0,1$;

$d = 3\text{м}$. Визначити h і τ .

В а р і а н т 19. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $l = 3\text{м}$; $V_B = 3\text{м/с}$; $f \neq 0$;

$\tau = 1,5\text{с}$; $d = 2\text{м}$. Визначити V_A і h .

В а р і а н т 20. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $V_A = 0$; $f = 0,3$; $d = 2\text{м}$;

$h = 4\text{м}$. Визначити l і τ .

Варіанти 21-25 (рис. 1, схема 5). Тіло рухається від точки А уздовж ділянки АВ довжиною l похилої площини, яка утворює кут α з горизонтом. Його початкова швидкість \vec{V}_A . Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f . Через τ с. тіло у точці В із швидкістю \vec{V}_B залишає похилу площину і падає на горизонтальну площину у точку С із швидкістю \vec{V}_C ; при цьому воно перебуває у повітрі Т с.

При розв'язанні задачі тіло вважати матеріальною точкою. Опором повітря знехтувати.

В а р і а н т 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$; $V_A = 1\text{м/с}$;

$\tau = 1,5\text{с}$; $h = 10\text{м}$. Визначити V_B і d .

В а р і а н т 22. Дано: $V_A = 0$; $\alpha = 45^\circ$; $l = 10\text{м}$; $\tau = 2\text{с}$. Визначити f і рівняння траєкторії на ділянці ВС.

В а р і а н т 23. Дано: $f = 0$; $V_A = 0$; $l = 9,81\text{м}$; $\tau = 2\text{с}$;

$h = 20\text{м}$. Визначити α і T .

В а р і а н т 24. Дано: $V_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 10\text{м}$;

$d = 12\text{м}$. Визначити τ і h .

В а р і а н т 25. Дано: $V_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 6\text{м}$;

$h = 4,5\text{м}$. Визначити τ і V_C .

Варіанти 26-30 (рис.1, схема 6). Маючи в точці А швидкість \vec{V}_A , тіло рухається уздовж горизонтальної ділянки АВ довжиною l , протягом τ с. Коефіцієнт тертя ковзання на площині дорівнює f . Із швидкістю \vec{V}_B тіло залишає площину у точці В і потрапляє у точку С із швидкістю \vec{V}_C , перебуваючи у повітрі Т с. При розв'язанні задачі тіло вважати матеріальною точкою; опором повітря знехтувати.

В а р і а н т 26. Дано: $V_A = 7\text{м/с}$; $f = 0,2$; $l = 8\text{м}$; $h = 20\text{м}$. Визначити d і V_C .

В а р і а н т 27. Дано: $V_A = 4\text{м/с}$; $f = 0,1$; $\tau = 2\text{с}$; $d = 2\text{м}$. Визначити V_B і h .

В а р і а н т 28. Дано: $V_B = 3\text{ м/с}$; $f = 0,3$; $l = 3\text{ м}$; $h = 5\text{ м}$. Визначити V_A і t .

В а р і а н т 29. Дано: $V_A = 3\text{ м/с}$; $V_B = 1\text{ м/с}$; $l = 2,5\text{ м}$; $h = 20\text{ м}$. Визначити f і d .

В а р і а н т 30. Дано: $f = 0,25$; $l = 4\text{ м}$; $d = 3\text{ м}$; $h = 5\text{ м}$. Визначити V_A і t .

Приклад виконання завдання

У залізничних скельних виїмках для захисту від попадання у них з укосів каменів утворюється “поличка” DC. Враховуючи можливість руху каменя з найвищої точки А укосу, і вважаючи при цьому його початкову швидкість $\vec{V}_0 = 0$, визначити найменшу ширину полички і швидкість \vec{V}_C , з якою камінь падає на неї. На ділянці АВ укосу, який утворює кут α з горизонтом і має довжину l , камінь рухається τ с (рис.2).

При розв’язанні задачі коефіцієнт тертя ковзання f каменя на ділянці АВ вважати сталим; опором повітря знехтувати.

Дано: $V_A = 0$; $\alpha = 60^\circ$; $l = 4\text{ м}$; $\tau = 1\text{ с}$; $f \neq 0$; $h = 5\text{ м}$; $\beta = 75^\circ$.
Визначити b і V_C .

Розв’язання

Розглянемо рух каменя на ділянці АВ. Прийmemo камінь за матеріальну точку, покажемо (рис.1а) діючі на нього сили: вагу \vec{G} , нормальну реакцію \vec{N} і силу тертя ковзання \vec{F} . Складемо диференціальне рівняння руху каменя на ділянці АВ:

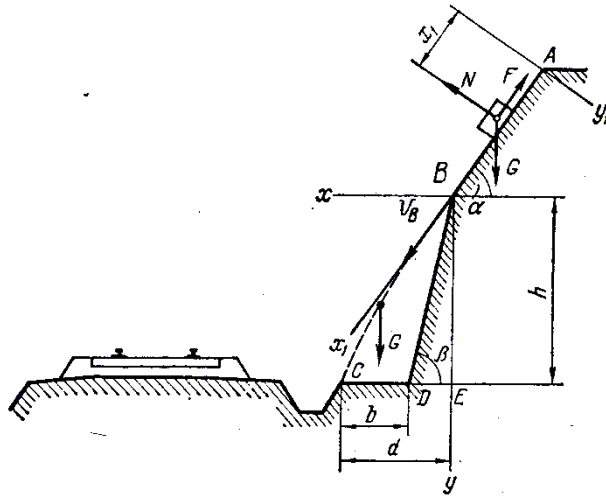


Рис. 1а

$$m\ddot{x}_1 = \sum_k F_{kx_1}; \quad m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F.$$

Сила тертя

$$F = fN,$$

де

$$N = G \cos \alpha.$$

Отже

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha,$$

або

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Інтегруючи диференціальне рівняння двічі, отримаємо

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2]t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для визначення сталих інтегрування використаємо початкові умови задачі: при $t = 0$, $x_{10} = 0$ і $\dot{x}_{10} = 0$.

Підставивши початкові умови у закон руху матеріальної точки і закон зміни її швидкості одержимо

$$\dot{x}_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2.$$

Визначимо сталі

$$C_1 = 0, C_2 = 0.$$

Остаточно маємо:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t; \\ x_1 &= [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2]t^2.\end{aligned}$$

Для моменту часу τ , коли камінь залишає ділянку АВ,

$$\dot{x}_1 = V_B; \quad x_1 = l,$$

тоді

$$\begin{aligned}V_B &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau; \\ l &= [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2]\tau^2.\end{aligned}$$

Звідки

$$V_B = \frac{2l}{\tau},$$

тобто

$$V_B = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8 \text{ (м/с)}.$$

Розглянемо рух каменя від точки В до точки С. Показавши силу тяжіння

\vec{G} , яка діє на камінь, складемо диференціальні рівняння його руху:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G.$$

Початкові умови задачі мають вигляд: при $t = 0$

$$x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = v_B \cos \alpha;$$

$$y_0 = 0; \quad \dot{y}_0 = v_B \sin \alpha.$$

Інтегруємо диференціальні рівняння двічі:

$$\dot{x} = C_3; \quad \dot{y} = gt + C_4,$$

$$x = C_3t + C_5; \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_4t + C_6.$$

Напишемо отримані рівняння для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3; \quad \dot{y}_0 = C_4;$$

$$x_0 = C_5; \quad y_0 = C_6.$$

Звідки визначимо:

$$C_3 = V_B \cos \alpha; \quad C_4 = V_B \sin \alpha;$$

$$C_5 = 0; \quad C_6 = 0.$$

Отримаємо наступні рівняння проекцій швидкості каменя:

$$\dot{x} = V_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + V_B \sin \alpha$$

і рівняння його руху:

$$x = V_B \cos \alpha \cdot t, \quad y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot t.$$

Рівняння траєкторії каменя знайдемо, якщо виключимо параметр t з рівняння руху. Якщо визначити t з першого рівняння і підставити його значення у друге, то отримаємо рівняння параболи:

$$y = \frac{gx^2}{2V_B^2 \cos^2 \alpha} + xtg\alpha.$$

У момент падіння $y = h$, $x = d$.

Визначаючи d з рівнянь траєкторії, одержимо:

$$d_1 = 2,1 \text{ м}, \quad d_2 = -7,75 \text{ м}.$$

Оскільки траєкторія руху каменя є гілка параболи з додатними абсцисами її точок, то $d = 2,1 \text{ м}$.

Мінімальна ширина полицки:

$$b = d - ED = d - \frac{4}{tg 75^\circ}, \text{ або } b = 0,77 \text{ м}.$$

Використовуючи рівняння руху каменя $x = V_B \cos \alpha \cdot t$, встановимо час T руху каменя від точки В до точки С

$$T = 0,53 \text{ с}.$$

Швидкість каменя при падінні знайдемо через проекції швидкості на осі координат

$$\dot{x} = V_B \cos \alpha; \quad \dot{y} = gt + V_B \sin \alpha$$

за формулою

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для моменту падіння $t = T = 0,53 \text{ с}$

$$V_C = \sqrt{(V_B \cos \alpha)^2 + (gT + V_B \sin \alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{(8 \cdot 0,5)^2 + (9,81 \cdot 0,53 + 8 \cdot 0,87)^2} = 12,8(\text{м/с}).$$

Отже,

$$V_C = 12,8 \text{ м/с}.$$

Завдання Д-2

Застосування основних теорем динаміки для дослідження руху матеріальної точки

Кулька, яку приймаємо за матеріальну точку, рухається від точки А усередині трубки у вертикальній площині (рис. 2, а-в). Встановити швидкість кульки у точках В і С і тиск кульки на стінку трубки у точці С. Тертям на криволінійних ділянках траєкторії знехтувати. У варіантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29, кулька що пройшла шлях h_0 , відділяється від пружини.

Необхідні для розв'язання дані наведено в табл. 1.

У завданні прийнято такі позначення: m – маса кульки; V_A – початкова швидкість кульки; τ – час руху кульки на ділянці АВ (у варіантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) або на ділянці ВD (у варіантах 3, 4, 6, 7, 9-13, 15-17, 19, 22, 25, 26, 28, 29); f – коефіцієнт тертя ковзання кульки уздовж стінки каналу; h_0 – початкова деформація пружини; c – коефіцієнт жорсткості пружини; H – найбільша висота підйому вантажу; S – шлях, пройдений кулькою до зупинки.

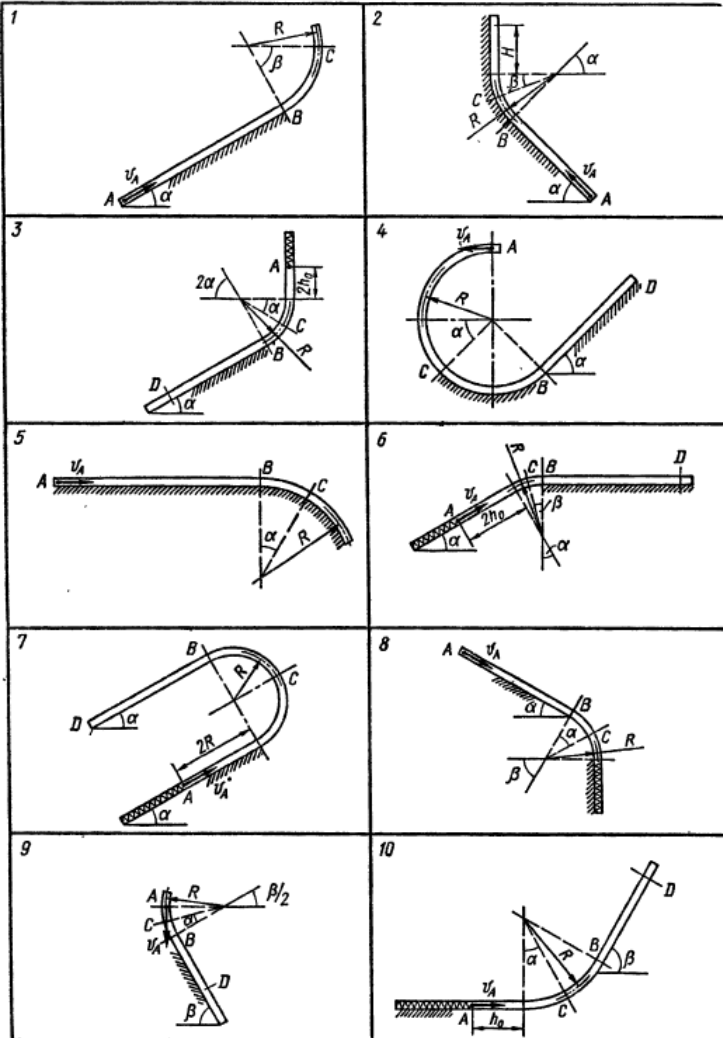


Рис. 2, а

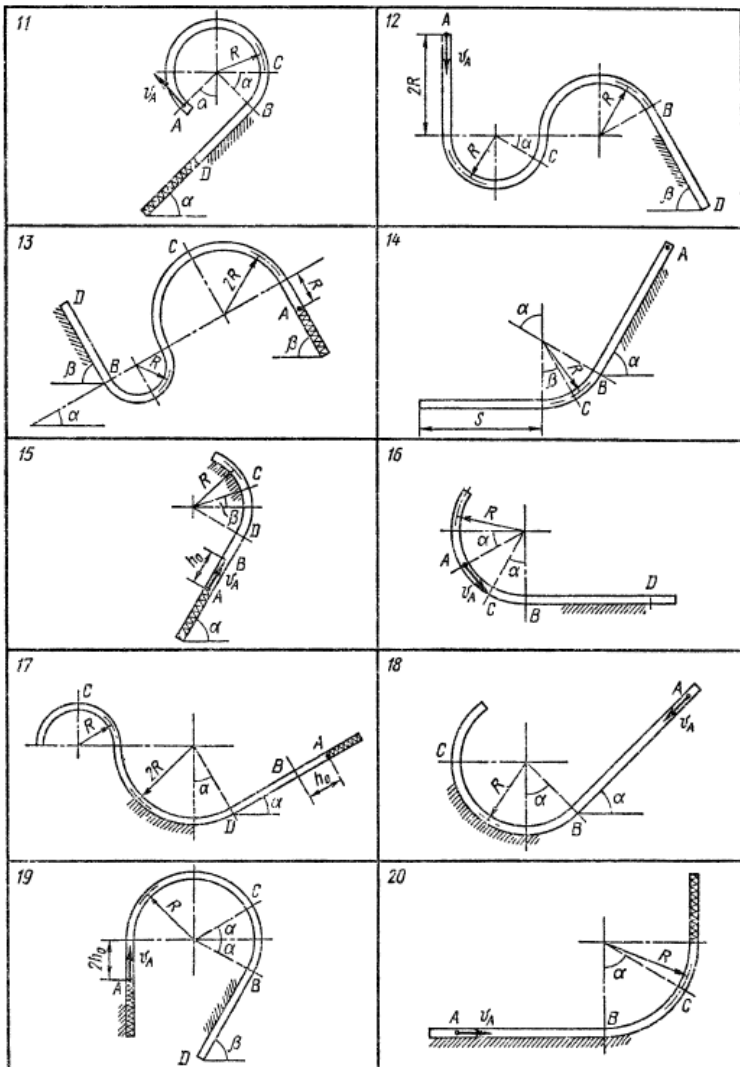


Рис. 2, б

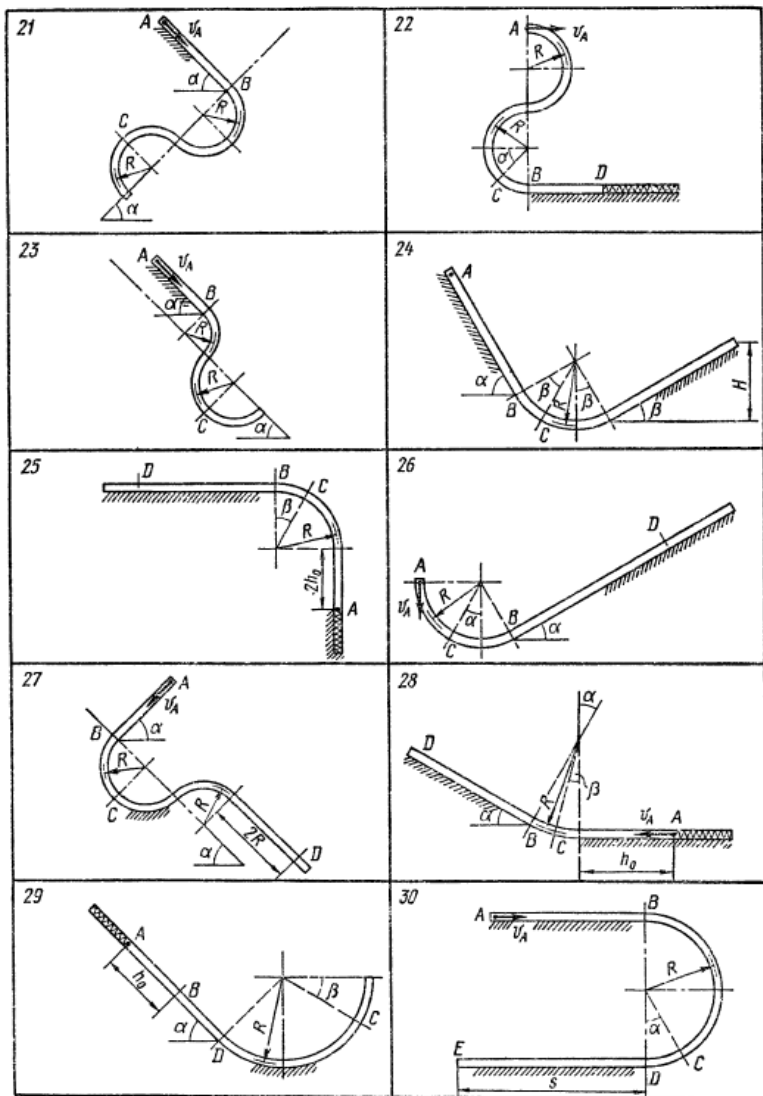


Рис. 2, в

Приклад виконання завдання

Дано: $m = 0,5$ кг; $V_A = 0,8$ м/с; $\tau = 0,1$ с (час руху на ділянці BD); $R = 0,2$ м; $f = 0,1$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $h_0 = 0$; $c = 10$ Н/см (рис. 3).

Визначити V_B, V_A, N_C, V_C, h .

Розв'язання

Для визначення V_B і V_C використаємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки. Рух кульки на ділянках AC і AB траєкторії проходить під дією сили тяжіння \vec{G} (сили тертя на криволінійних ділянках не урахуємо).

$$\begin{aligned} \frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} &= \sum_k A(\vec{F}_k) = G \cdot H_1 = mg \cdot AB \cdot \sin \alpha = \\ &= mg \cdot 6 \cdot R \cdot \sin \alpha; \end{aligned}$$

$$V_B^2 - V_A^2 = 2g \cdot 6 \cdot R \sin \alpha;$$

$$\begin{aligned} V_B &= \sqrt{V_A^2 + 12gR \cdot \sin \alpha} = \sqrt{0,8^2 + 12 \cdot 9,81 \cdot 0,2 \cdot 0,866} = \\ &= 4,59 \text{ (м/с)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mV_C^2/2 - mV_A^2/2 &= \sum_k A(\vec{F}_k) = GH_2 = \\ &= mg(4R \sin \alpha + 2R \cos \alpha); \end{aligned}$$

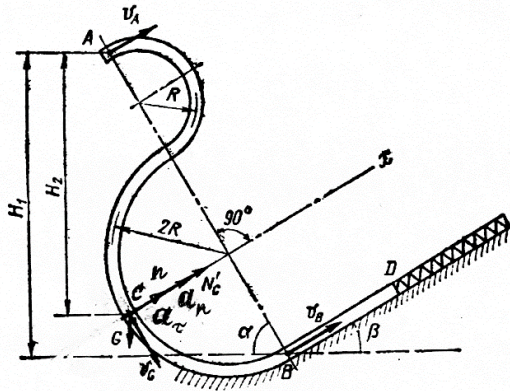


Рис. 3

$$V_C^2 - V_A^2 = 4gR(2 \sin a + \cos a);$$

$$\begin{aligned} V_C &= \sqrt{V_A^2 + 4gR(2 \sin a + \cos a)} = \\ &= \sqrt{0,8^2 + 4 \cdot 9,81 \cdot 0,2(2 \cdot 0,866 + 0,5)} = 4,26(\text{м/с}). \end{aligned}$$

Визначимо тиск кульки на стінку каналу в точці С. Для цього використаємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки у проекції на нормаль до траєкторії матеріальної точки у точці С, тобто

$$ma_\tau = \sum_k F_{k\tau},$$

де

$$\begin{aligned} a_\tau &= V^2 / \rho; \quad \rho = 2 \cdot R; \\ \sum_k F_{k\tau} &= -G \cdot \cos 60^\circ + N'_C. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} mV^2 / (2 \cdot R) &= -G \cdot \cos 60^\circ + N'_C; \\ N'_C &= G \cdot \cos 60^\circ + mV^2 / (2 \cdot R) = m(g \cos 60^\circ + \\ V_C^2 / (2 \cdot R)) &= 0,5(9,81 \cdot 0,5 + \frac{4,26^2}{2 \cdot 0,2}) = 25,2(\text{Н}). \end{aligned}$$

Шуканий тиск \vec{N}_C кульки на стінку трубки за величиною дорівнює знайденій реакції N'_C і напрямлений у протилежний бік до неї.

Швидкість кульки у точці D визначимо, якщо застосуємо на ділянці BD теорему про зміну кількості руху матеріальної точки (рис.4):

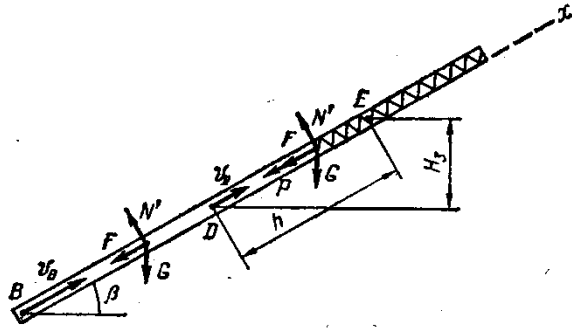


Рис. 4

$$mV_{Dx} - mV_{Bx} = \sum_k S_x(\vec{F}_k).$$

До кульки прикладені: сила тяжіння \vec{G} , реакція стінки трубки \vec{N}' і сила тертя $F = fN' = fG \cos \beta$.

Оскільки

$$V_{Dx} = V_D; \quad V_{Bx} = V_B;$$

$$\sum_k S_x(\vec{F}_k) = -G \sin \beta \cdot t - F \cdot t = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

то

$$mV_D - mV_B = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

звідки

$$V_D = V_B - gt(\sin \beta + f \cos \beta) = 4,59 - 9,81 \cdot 0,1(0,5 + 0,1 \cdot 0,866) = 4,01(\text{м/с}).$$

Для визначення величини максимального стиснення h пружини використаємо на ділянці DE теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки (рис. 3):

$$\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_D^2}{2} = \sum_k A(\vec{F}_k) = -\frac{ch^2}{2} - GH_3 - F \cdot h.$$

Ураховуючи, що $V_E = 0$ і $H_3 = h \sin \beta$, одержимо:

$$\frac{ch^2}{2} + G(\sin \beta + f \cos \beta)h - \frac{mV_D^2}{2} = 0$$

або

$$h^2 + \frac{2G(\sin \beta + f \cos \beta)}{c}h - \frac{mV_D^2}{c} = 0.$$

Розв'яжемо одержане квадратне рівняння відносно h :

$$\begin{aligned} h &= -\frac{G(\sin \beta + f \cos \beta)}{c} \pm \sqrt{\left[\frac{G(\sin \beta + f \cos \beta)}{c}\right]^2 + \frac{mV_D^2}{c}} = \\ &= -\frac{0,5 \cdot 9,81(0,5 + 0,1 \cdot 0,866)}{1000} \pm \\ &\pm \sqrt{\left[\frac{0,5 \cdot 9,81(0,5 + 0,1 \cdot 0,866)}{1000}\right]^2 + \frac{0,5 \cdot 4,01^2}{1000}} = -0,003 \pm 0,090 (\text{м}). \end{aligned}$$

Прийmemo у якості шуканої величини додатне значення кореня квадратного рівняння:

$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 (\text{м}).$$

Таблиця 1

Номер варіанту	m, кг	v _A , м/с	τ, с	R, м	f	α, град	β, град	h ₀ , см	c, Н/см	Величини, які необхідно додатково визначити
1	0,5	20	2,0	2,0	0,20	30	45	-	-	-
2	0,6	16	0,2	4,0	0,10	45	20	-	-	H
3	0,4	0	2,0	0,2	0,15	30	-	10	1	v _D
4	0,2	5	0,5	1,0	0,10	45	-	-	-	v _D
5	0,1	8	1,5	2,0	0,20	30	-	-	-	-
6	0,3	2	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	v _D

7	0,4	5	1,0	1,0	0,10	30	-	50	5	v _D
8	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	h
9	0,5	2	1,5	4,0	0,25	20	60	-	-	v _D
10	0,4	4	0,1	0,5	0,10	30	60	0,2	0,2	v _D
11	0,2	6	1,0	1,0	0,30	45	-	-	3	v _D , h
12	0,4	5	0,4	2,0	0,20	30	60	-	-	v _D
13	0,3	0	0,1	1,0	0,10	30	60	50	10	v _D
14	0,6	0	2,0	3,0	0,20	60	30	-	-	s
15	0,1	1	0,1	1,0	0,15	60	20	50	0,2	v _D
16	0,4	2	0,2	2,0	0,40	30	-	-	-	v _D
17	0,2	0	0,1	1,0	0,20	30	-	40	1,0	v _D
18	0,3	3	0,4	1,5	0,10	45	-	-	-	-
19	0,1	2	0,1	0,4	0,30	30	60	10	0,5	v _D
20	0,2	10	1,0	0,5	0,10	60	-	0	1,2	h
21	0,7	3	0,3	0,3	0,20	45	-	-	-	-
22	0,4	1	0,2	0,2	0,40	45	-	0	1,1	v _D , h
23	0,6	2	0,4	0,2	0,20	45	-	-	-	-
24	0,5	0	0,5	0,6	0,30	60	30	-	-	H
25	0,1	0	0,2	0,5	0,25	-	30	30	0,4	v _D
26	0,2	2	0,1	0,2	0,20	30	-	-	-	v _D
27	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	-	-	-	v _D
28	0,3	4	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	v _D
29	0,5	0	0,2	0,5	0,20	45	30	50	0,8	v _D
30	0,8	5	0,3	0,6	0,15	30	-	-	-	t _{DE}

Завдання Д-3

Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи

Механічна система під дією сил тяжіння починає рухатись із стану спокою; початкове положення системи показано на рис. 6, *a-v*. Враховуючи тертя ковзання тіла 1 (варіанти 1-3, 5, 6, 8-12, 17-23, 28-30) і опір коченню тіла 3, яке котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 6-9, 11, 13-15, 20, 21, 24, 27, 29), нехтуючи іншими силами опору і масами ниток, які вважаються такими що не розтягуються, визначити швидкість тіла 1 в момент часу, коли пройдений ним шлях буде дорівнювати S .

В завданні прийнято наступні позначення: m_1, m_2, m_3, m_4 — маси тіл 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 — радіуси великих і малих кіл; $i_{2x}, i_{3\xi}$ — радіуси інерції тіл 2 і 3 відносно горизонтальних осей, які проходять через їхні центри мас; α, β — кути нахилу площини до горизонту; f — коефіцієнт тертя ковзання; δ — коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розв'язку дані наведено в табл. 2. Блоки і котки, для яких радіуси інерції у таблиці не вказано, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Нахилені ділянки ниток паралельні до відповідних похилих площин.

Приклад виконання завдання

Дано: m_1 — маса вантажу 1, $m_2=2m_1$, $m_3= m_1$, $m_4=0,5m_1$, $m_5=20m_1$, $R_2=R_3=12\text{см}$, $r_2=0,5R_2$, $r_3=0,75R_3$, $R_5=20\text{см}$, $AB = l=4R_3$, $i_{2\xi} = 8\text{см}$; $i_{3x} = 10\text{см}$, $\alpha = 30^\circ$, $f = 0,1$, $\delta=0,2\text{см}$, $S=0,06\text{л м}$.

Опір коченню тіла 2 не враховувати. Шатун 4 вважати тонким однорідним стрижнем; коток 5 – однорідний суцільний циліндр. Масами ланки BC_5 і повзуна В знехтувати. На рис. 5 показано механічну систему в початковому положенні.

Встановити V_1 — швидкість вантажу 1 в кінцевому його положенні.

Розв'язання

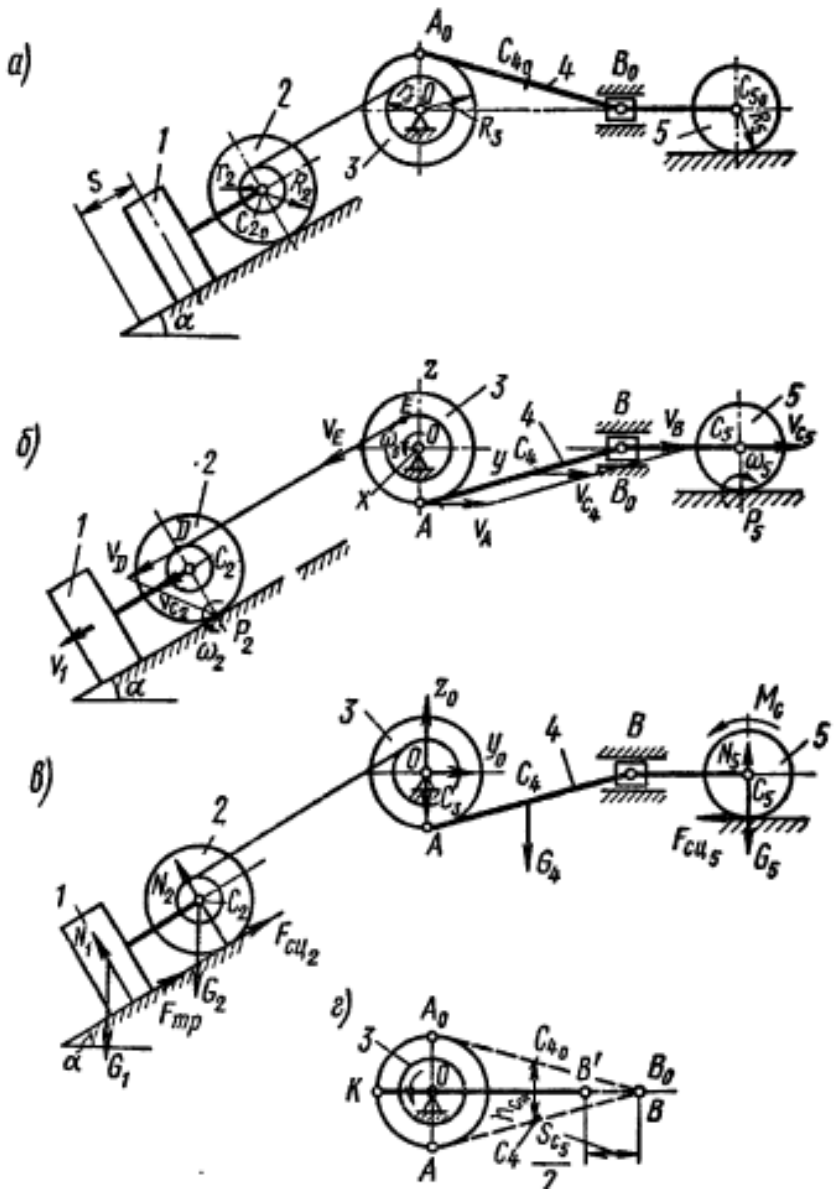


Рис. 5

Згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії механічної системи:

$$T - T_0 = \sum_k A(\vec{F}_k^e) + \sum_k A(\vec{F}_k^i),$$

де T і T_0 – кінетична енергія механічної системи у початковому та кінцевому її положеннях; $\sum_k A(\vec{F}_k^e)$ - сума робіт усіх зовнішніх сил, які прикладені до механічної системи, на її переміщенні із початкового положення в кінцеве; $\sum_k A(\vec{F}_k^i)$ - сума робіт усіх внутрішніх сил системи на тому ж переміщенні.

Для заданих систем, що складаються із абсолютно твердих тіл, які з'єднані нитками і стрижнями, що не розтягуються,

$$\sum_k A(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Оскільки у початковому положенні система знаходиться у спокої, то $T_0=0$.

Ураховуючи це, рівняння (1) прийме вигляд:

$$T = \sum_k A(\vec{F}_k^e) \quad (2)$$

Для визначення кінетичної енергії T і суми робіт зовнішніх сил необхідно нарисувати систему в кінцевому положенні (**рис. 5 б, в**).

Встановимо кінематичні співвідношення між швидкостями та переміщеннями точок системи, тобто рівняння зв'язків, при цьому швидкості і переміщення виразимо відповідно через швидкості і переміщення вантажу 1.

Швидкість центра мас C котка 2 дорівнює швидкості вантажу 1:

$$V_{c2} = V_1.$$

(3)

Кутова швидкість котка 2, миттєвий центр швидкостей якого знаходиться в точці P_2 ,

$$\omega_2 = V_{c2} / (C_2 P_2).$$

Враховуючи (3), отримаємо

$$\omega_2 = V_1 / R_2.$$

(4)

Швидкість точки D котка 2

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2,$$

тобто

$$V_D = V_1 \cdot (R_2 + r_2) / R_2.$$

Швидкість точки E блока 3 дорівнює швидкості точки D котка 2:

$$V_E = V_D.$$

(5)

Але

$$V_E = \omega_3 r_3.$$

Тоді з (5) одержимо

$$\omega_3 r_3 = \frac{V_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Оскільки

$$R_2 = 2r_2,$$

то

$$\omega_3 r_3 = \frac{3}{2} V_1,$$

звідки

$$\omega_3 = \frac{3}{2} \frac{V_1}{r_3}.$$

(6)

Підставляючи у формулу (6)

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}; V_1 = \frac{dS}{dt},$$

отримаємо

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3} \frac{dS}{dt},$$

або

$$d\varphi_3 = \frac{3}{2r_3} dS.$$

Після інтегрування (при нульових початкових умовах)

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \frac{S}{r_3}.$$

(7)

Якщо вантаж 1 пройде шлях $S=0,06\text{лм}$, то блок 3 повернеться на кут φ_3 :

$$\varphi_3 = \frac{3 S}{2 r_3} = \frac{3 \cdot 0,06\pi}{2 \cdot 0,09} = \pi.$$

При цьому повороті блока 3 на 180° його точка A_0 перейде у кінцеве положення A і шатун 4 із початкового положення A_0B_0 перейде у кінцеве положення AB .

Коток 5 переміститься уліво при повороті блока 3 на кут $\pi/2$ і управо при повороті блока ще на $\pi/2$, значить, кінцеве положення котка 5 співпадає з його початковим положенням.

Таким чином, кінцеве положення всієї системи повністю визначене (рис. 5, б).

Обчислимо кінетичну енергію системи в кінцевому положенні, як суму кінетичних енергій тіл 1,2,3,4,5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

(8)

Кінетична енергія вантажу 1, який рухається поступально,

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$

(9)

Кінетична енергія котка 2, який здійснює плоско-паралельний рух ,

$$T_2 = \frac{m_2 V_c^2}{2} + \frac{I_{2\xi} \omega_2^2}{2},$$

(10)

де $I_{2\xi}$ - момент інерції котка 2 відносно його поздовжньої центральної осі $C_{2\xi}$:

$$I_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2.$$

(11)

Підставляючи (3), (4), (11) у формулу (10), отримаємо

$$T_2 = \frac{m_2 V_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2}{2R_2^2} V_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) V_1^2.$$

(12)

Кінетична енергія тіла 3, яке обертається навколо осі Ox ,

$$T_3 = \frac{1}{2} I_{3x} \omega_3^2,$$

(13)

де I_{3x} - момент інерції блока 3 відносно осі Ox :

$$I_{3x} = m_3 i_{3x}^2.$$

(14)

Підставляючи (6), (14) у формулу (13), отримаємо

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3x}^2}{2} \left(\frac{3V_1}{2r_3} \right)^2 = \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} V_1^2.$$

(15)

Кінетична енергія шатуна 4, який здійснює плоско-паралельний рух,

$$T_4 = \frac{m_4 V_{c4}^2}{2} + \frac{I_{4\xi} \omega_4^2}{2},$$

де V_{c4} - швидкість центра мас C_4 шатуна 4; ω_4 - кутова швидкість шатуна;
; $I_{4\xi}$ - момент інерції шатуна відносно центральної осі $C_{4\xi}$.

Для визначення V_{c4} і ω_4 встановимо положення миттєвого центра швидкостей шатуна 4. Оскільки швидкості точок А і В у даному положенні механізму паралельні, то миттєвий центр швидкостей шатуна 4 знаходиться на нескінченності; тому кутова швидкість шатуна $\omega_4 = 0$, а швидкості усіх його точок паралельні і рівні між собою. Таким чином, кінетична енергія шатуна 4

$$T_4 = m_4 V_{c4}^2 / 2,$$

(16)

де

$$V_{c4} = V_A.$$

(17)

Обертальна швидкість точки А тіла 3

$$V_A = \omega_3 R_3,$$

(18)

або із урахуванням (6)

$$V_A = \frac{3}{2} \frac{R_3 V_1}{r_3}.$$

Оскільки $r_3 = \frac{3}{4} R_3$, отримаємо

$$V_A = 2V_1.$$

За формулою (17)

$$V_{c4} = V_A; \quad V_{c4} = 2V_1.$$

(19)

Після підстановки (19) в (16) рівняння кінетичної енергії шатуна 4 прийме вигляд

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 (2V_1)^2 = 2m_4 V_1^2.$$

(20)

Кінетична енергія котка 5, який здійснює плоско-паралельний рух,

$$T_5 = \frac{m_5 V_{c5}^2}{2} + \frac{I_{5\xi} \omega_5^2}{2},$$

де V_{c5} - швидкість центра мас C_5 котка 5; ω_5 - кутова швидкість котка 5 ;
 $I_{5\xi}$ - момент інерції котка 5 (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної повздовжньої осі $C_{5\xi}$

$$I_{5\xi} = \frac{m_5 R_5^2}{2}.$$

Оскільки коток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей знаходиться у точці P_5 , тому

$$\omega_5 = \frac{V_{c5}}{R_5}.$$

Як наслідок,

$$T_5 = \frac{m_5 V_{c5}^2}{2} + \frac{m_5 R_5^2 V_{c5}^2}{2 \cdot 2R_5^2} = \frac{3}{4} m_5 V_{c5}^2.$$

Оскільки ланка BC_5 здійснює поступальний рух, то

$$V_{c5} = V_B,$$

але

$$V_B = V_{c4} = 2V_1.$$

Отже,

$$V_{c5} = 2V_1.$$

Тоді вираз для кінетичної енергії котка 5 прийме вигляд

$$T_5 = \frac{3}{4} m_5 (2V_1)^2 = 3m_5 V_1^2.$$

(21)

Кінетична енергія механічної системи із урахуванням (9), (12), (15), (20), (21) прийме вигляд:

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) \frac{V_1^2}{2} + \frac{9}{8} \cdot m_3 \cdot V_1^2 \cdot i_{3x}^2 \cdot \frac{1}{r_3^2} + 2m_4 V_1^2 + 3m_5 V_1^2.$$

Підставляючи сюди задані значення мас, отримаємо

$$T = m_1 V_1^2 \left[1 + 2\left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) + \frac{9}{4} \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} + 2 + 120\right] / 2,$$

або

$$T = 129 \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$

(22)

Обчислимо суму робіт всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, на заданому їй переміщенні. Покажемо зовнішні сили, прикладені до системи (рис. 5, 6).

Робота сили тяжіння \vec{G}_1

$$A(\vec{G}_1) = G_1 h_1 = m_1 g S \sin \alpha.$$

(23)

Робота сили тертя ковзання \vec{F}_{mp}

$$A(\vec{F}_{mp}) = -F_{mp} S.$$

Оскільки

$$F_{mp} = f N_1 = -f m_1 g S \cos \alpha.$$

(24)

Робота сили тяжіння \vec{G}_2

$$A(\vec{G}_2) = G_2 h_{C_2} = m_2 g S \sin \alpha.$$

(25)

Робота сил зчеплення $\vec{F}_{зч_2}, \vec{F}_{зч_5}$ котків 2 і 5 дорівнює нулю, оскільки ці сили прикладені в миттєвих центрах швидкостей даних котків.

Робота сили тяжіння \vec{G}_4

$$A(\vec{G}_4) = G_4 h_{C_4},$$

де h_{C_4} - модуль вертикального переміщення центра мас C_4 шатуна 4 із початкового положення у його кінцеве положення (рис.5): $h_{C_4} = R_3$.

$$A(\vec{G}_4) = m_4 g R_3$$

(26)

Робота пари сил опору коченню котка 5

$$A(M_{on}) = -M_{on}\varphi_5,$$

(27)

де $M_{on} = \delta N_5 = \delta G_5$ - момент пари сил опору коченню котка 5; φ_5 - кут повороту котка 5.

Оскільки коток 5 котиться без ковзання, то кут його повороту

$$\varphi_5 = \frac{S_{c5}}{R_5},$$

(28)

де S_{c5} - шлях пройдений центром мас C_5 котка 5.

В даному прикладі роботу пари сил опору обчислимо, як суму робіт цієї пари при коченні котка 5 уліво при повороті тіла 3 на кут $\pi/2$ і коченні управо, коли тіло 3 повернеться ще на кут $\pi/2$.

Шлях пройдений центром мас C_5 котка 5 дорівнює шляху пройденому повзуном В уліво і управо:

$$S_{c5} = 2(B_0B').$$

(29)

Визначимо шлях B_0B' при повороті тіла 3 на кут $\pi/2$. За початок відліку координати точки В виберемо нерухому точку К площини (рис. 5 з). При цьому повороті тіла 3 шатун із положення A_0B_0 перейде у положення KB' . Тоді

$$B_0B' = RB_0 - KB',$$

де

$$KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2},$$

$$KB' = l = 4R_3.$$

Тоді

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0,88R_3.$$

(30)

Підставляючи (30) у (29), а потім у (28), визначимо повний кут повороту котка 5:

$$\varphi_5 = 1,76 \cdot \frac{R_3}{R_5}.$$

(31)

Робота пари сил опору коченню

$$A(M_{on}) = \delta m_5 g \cdot 1,76 \frac{R_3}{R_5}.$$

(32)

Сума робіт зовнішніх сил визначається сумою робіт, які обчислюються за формулами (23)-(26) і (32):

$$\begin{aligned} \sum_k A(\vec{F}_k^\ell) = & m_1 g S \sin \alpha - f m_1 g \cos \alpha + m_2 g S \sin \alpha + \\ & + m_4 g R_4 - \delta m_5 g \cdot 1,76 \frac{R_3}{R_5}. \end{aligned}$$

Підставляючи задані значення мас, одержимо

$$\begin{aligned} \sum_k A(\vec{F}_k^\ell) = & m_1 g S (\sin \alpha - f \cos \alpha + 2 \sin \alpha + \\ & + \frac{R_3}{2S} - \frac{\delta \cdot 70 \cdot 1,76 R_3}{R_5 S}), \end{aligned}$$

або

$$\sum_k A(\vec{F}_k^\ell) = 1,51 m_1 g S.$$

(33)

Згідно з теоремою (2), прирівняємо значення T і $\sum_k A(\vec{F}_k^\ell)$, які визначаються за формулами (22) і (33):

$$129 \cdot m_1 \frac{V_1^2}{2} = 1,51 m_1 g S,$$

звідки

$$V_1 = 0,21 m/c.$$

Таблица 2

Вариант	m_1 , кг	$\frac{m_2}{m_1}$	$\frac{m_3}{m_1}$	$\frac{m_4}{m_1}$	м							град			f	δ	S
					R_2	r_2	R_3	r_3	R_4	ρ_{2c}	ρ_{3c}	α	β	см			
1	m	2	2	1/10	0,20	0,10	0,24	0,12	0,15	0,16	0,20	45	60	0,10	0,025	2,0	
2	m	1	3	1/8	0,24	—	0,20	0,10	0,10	—	0,16	60	60	0,12	0,018	1,5	
3	m	1	2	1/5	0,40	—	0,30	0,20	0,18	—	0,24	30	30	0,15	0,024	1,8	
4	m	2	3	1/4	0,18	0,09	0,30	0,20	0,12	0,14	0,22	45	—	0,10	0,020	1,2	
5	m	2	2	1/2	0,30	0,15	0,30	0,15	0,15	0,24	0,24	—	30	—	0,015	1,0	
6	m	4	3	1/6	0,24	0,12	0,20	0,10	0,10	0,20	0,16	—	45	—	0,016	0,8	
7	m	2	2	1/2	0,20	0,10	0,20	0,10	0,12	0,16	0,16	30	—	0,15	0,020	1,5	
8	m	3	2	1	0,28	0,14	0,24	0,12	0,10	0,24	0,20	60	—	0,12	0,018	0,6	
9	m	2	1	1/8	0,24	0,15	0,18	0,15	0,12	0,20	0,14	30	30	0,10	0,015	1,2	
10	m	2	2	1/4	0,40	0,20	0,30	0,15	0,20	0,36	0,24	60	—	0,14	0,024	1,0	
11	m	1/2	2	1/3	0,26	0,16	0,25	0,20	0,15	0,20	0,18	—	60	0,16	0,022	0,9	
12	m	2	1	1/2	0,30	0,20	0,10	0,05	0,12	0,24	0,06	—	45	0,08	0,020	0,8	
13	m	3	2	1	0,24	0,12	0,30	0,15	0,15	0,18	0,24	45	—	0,10	0,025	0,6	
14	m	1	2	1	0,20	0,10	0,24	0,12	0,20	0,16	0,18	30	—	0,12	0,024	1,2	
15	m	2	2	1	0,18	0,09	0,20	0,10	0,15	0,14	0,16	45	45	0,15	0,030	1,4	
16	m	4	3	1/5	0,40	0,15	0,18	0,09	0,18	0,30	0,14	30	—	0,10	0,018	0,4	
17	m	2	1	1/4	0,22	0,11	0,22	0,11	0,16	0,18	0,18	60	—	0,16	0,016	0,5	

18	m	1	1	1/8	0,30	0,20	-0,24	0,12	0,15	0,24	0,20	30	—	0,12	0,012	0,6
19	m	3/5	1	1/6	0,20	0,10	0,30	0,15	0,10	0,16	0,16	45	—	0,14	0,014	0,7
20	m	1	1	1	0,14	—	0,20	0,10	—	—	0,16	45	—	0,08	—	0,8
21	m	2	3	1	0,15	0,10	0,30	0,20	0,10	0,12	0,25	—	—	—	0,015	1,0
22	m	2	1	—	0,20	0,10	0,15	—	—	0,16	—	—	—	—	—	0,05 π
23	m	1	2	1/8	0,10	—	0,18	0,10	0,10	—	0,15	60	30	0,10	0,010	0,4
24	m	2	3/2	1	0,30	0,15	0,20	0,10	0,10	0,24	0,16	—	45	0,08	0,012	0,6
25	m	1/10	1/12	1/2	0,10	—	0,12	—	—	—	—	—	—	—	—	0,05 π
26	m	2	1	1/10	0,24	0,12	0,10	—	0,20	0,20	0,18	—	60	—	0,020	0,2
27	m	2	2	1/3	0,30	0,15	0,40	0,20	0,20	0,26	0,32	—	45	—	0,026	0,8
28	m	2	3	—	0,20	0,10	0,30	0,15	—	0,16	0,24	30	—	0,12	0,015	1,0
29	m	2	1	—	0,20	0,15	0,15	—	—	0,18	—	30	—	0,10	—	1,0
30	m	1/3	1/5	—	0,24	—	0,12	—	—	0,20	—	45	—	0,15	—	0,4

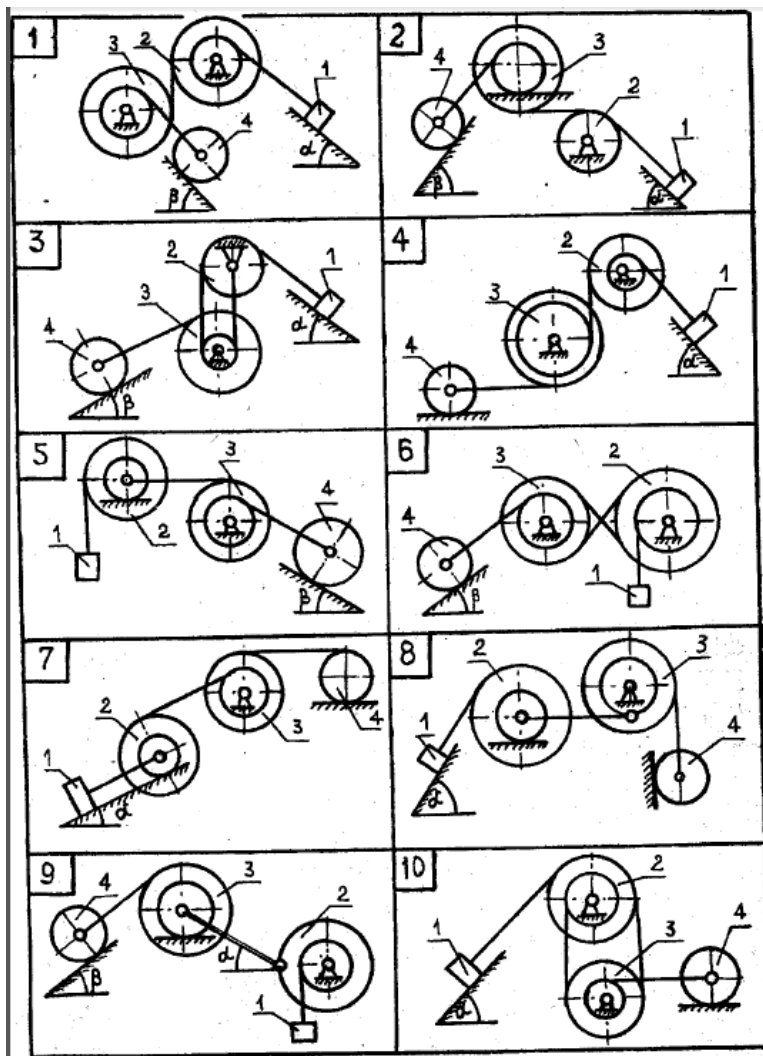


Рис. 6, а

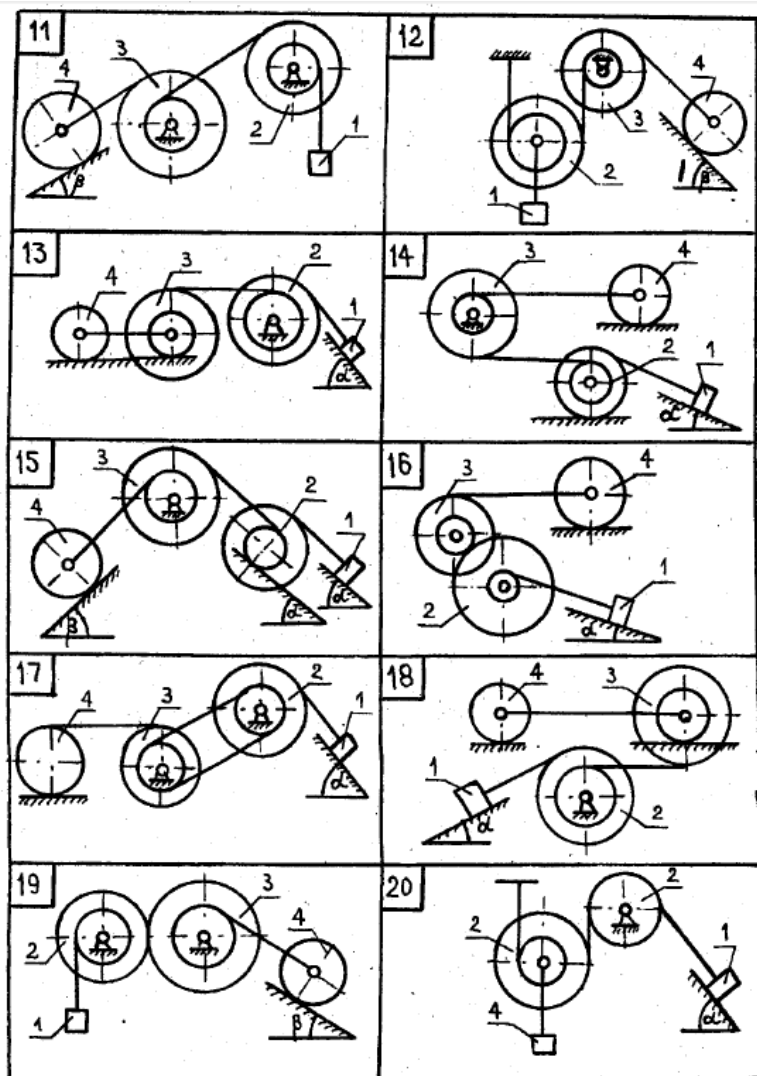


Рис. 6, б

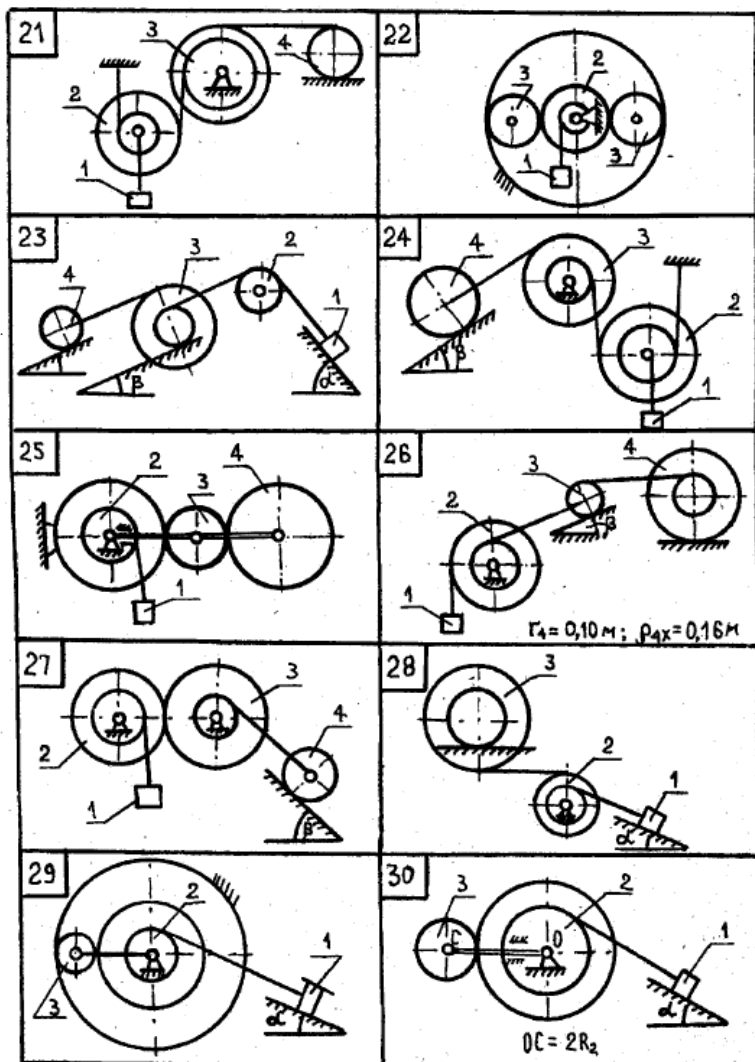


Рис. 6, в

Завдання Д-4

Застосування принципу можливих переміщень до розв'язання задач про рівновагу сил, прикладених до механічної системи з одним ступенем вільності

Схеми механізмів, що знаходяться під дією взаємно зрівноважених сил, показано на рис.7 а-в, а необхідні для розв'язання величини наведено у табл. 3.

Використовуючи принцип можливих переміщень і нехтуючи силами опору, визначити модуль сили з якою пружина втримує повзун при рівновазі та встановити стиснуто чи розтягнуто пружину.

Таблиця 3

Вари- ант	l_1	l_2	l_3	l_4	α	β	γ	θ	φ	F_1	F_2	M_1	M_2
	м				град					Н		Н·м	
1	0,4	1,2	1,4	0,8	90	120	90	60	90	100	80	-	-
2	0,4	0,8	0,6	0,4	30	120	30	60	0	120	150	-	-
3	0,5	1,0	0,4	0,3	30	150	120	60	0	80	50	-	-
4	0,2	0,5	0,8	0,6	90	150	120	30	90	200	80	-	-
5	0,3	0,6	0,6	0,4	60	150	120	30	90	150	100	-	-
6	0,4	1,4	0,8	0,5	0	120	120	60	0	100	80	-	-
7	0,5	1,2	1,0	0,3	60	60	60	120	90	160	100	-	-
8	0,2	0,8	1,2	0,3	0	150	30	60	0	180	100	-	-
9	0,6	0,6	0,6	0,4	30	120	120	60	0	150	240	-	-
10	0,5	0,7	1,2	0,5	0	60	30	120	0	200	120	-	-
11	1,0	0,5	0,5	-	60	150	120	30	90	90	-	140	-
12	0,4	0,6	1,0	1,0	45	135	120	60	45	-	-	100	150
13	0,6	0,8	0,8	-	60	60	60	120	90	90	150	-	-
14	0,4	0,6	1,0	0,8	30	120	150	60	0	-	-	200	320
15	0,5	1,0	1,0	0,5	90	120	120	60	90	-	-	100	280
16	0,3	0,8	0,6	-	90	120	90	60	90	100	140	-	-
17	0,4	0,4	0,5	0,5	0	60	30	120	0	-	-	120	180
18	1,0	0,6	0,4	0,6	0	135	90	45	0	-	-	180	300
19	0,5	0,7	0,8	0,4	0	120	30	60	0	-	-	240	280
20	0,4	1,4	1,0	0,6	30	150	30	60	0	-	-	200	320
21	0,5	0,6	1,0	0,5	0	45	45	120	0	120	-	100	-
22	0,3	0,5	0,8	0,3	90	120	120	30	60	150	-	160	-
23	0,8	0,4	0,6	0,4	30	150	120	60	0	50	-	200	-
24	0,4	1,2	0,5	0,2	0	135	45	60	0	-	-	240	120
25	0,5	1,0	0,5	0,6	0	120	120	60	0	60	-	120	-
26	0,5	0,5	0,5	0,5	45	135	90	60	45	100	-	100	-

Вариант	l_1	l_2	l_3	l_4	α	β	γ	θ	φ	F_1	F_2	M_1	M_2
	м				град					Н		Н·м	
27	0,4	0,8	0,8	0,4	30	120	30	60	0	150	-	180	-
28	0,6	1,4	0,6	0,8	60	150	120	30	90	120	-	240	-
29	0,3	0,6	0,6	0,7	30	150	120	60	0	200	-	150	-
30	0,4	1,0	1,0	0,6	45	45	45	135	60	150	-	120	-

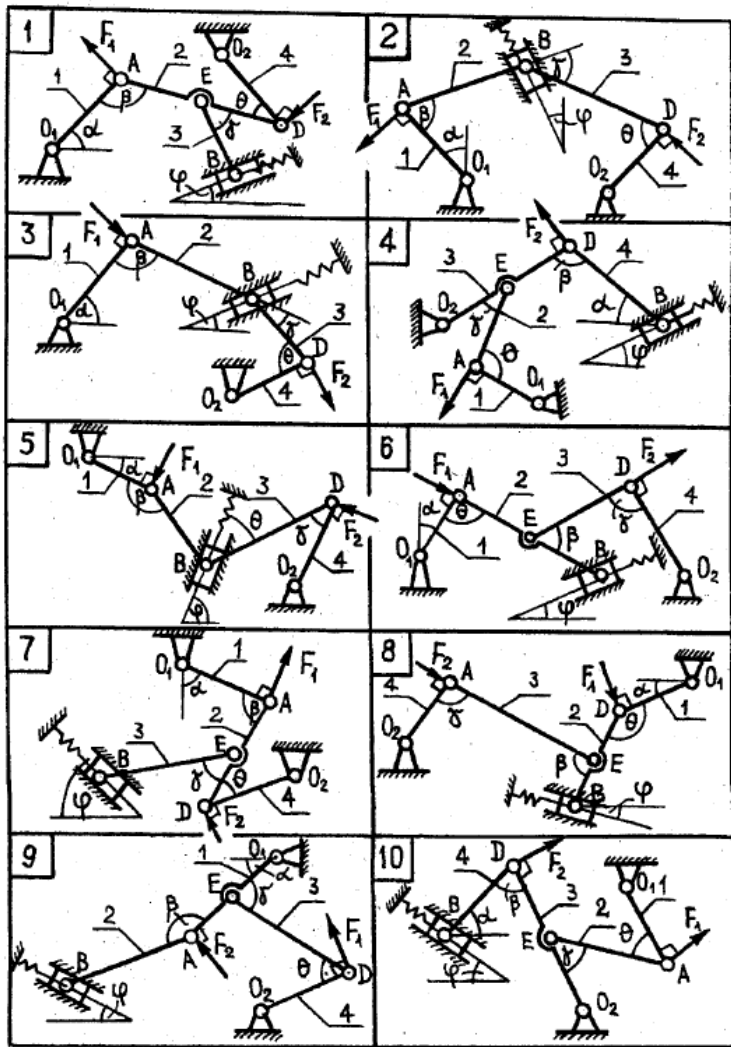


Рис. 7, а

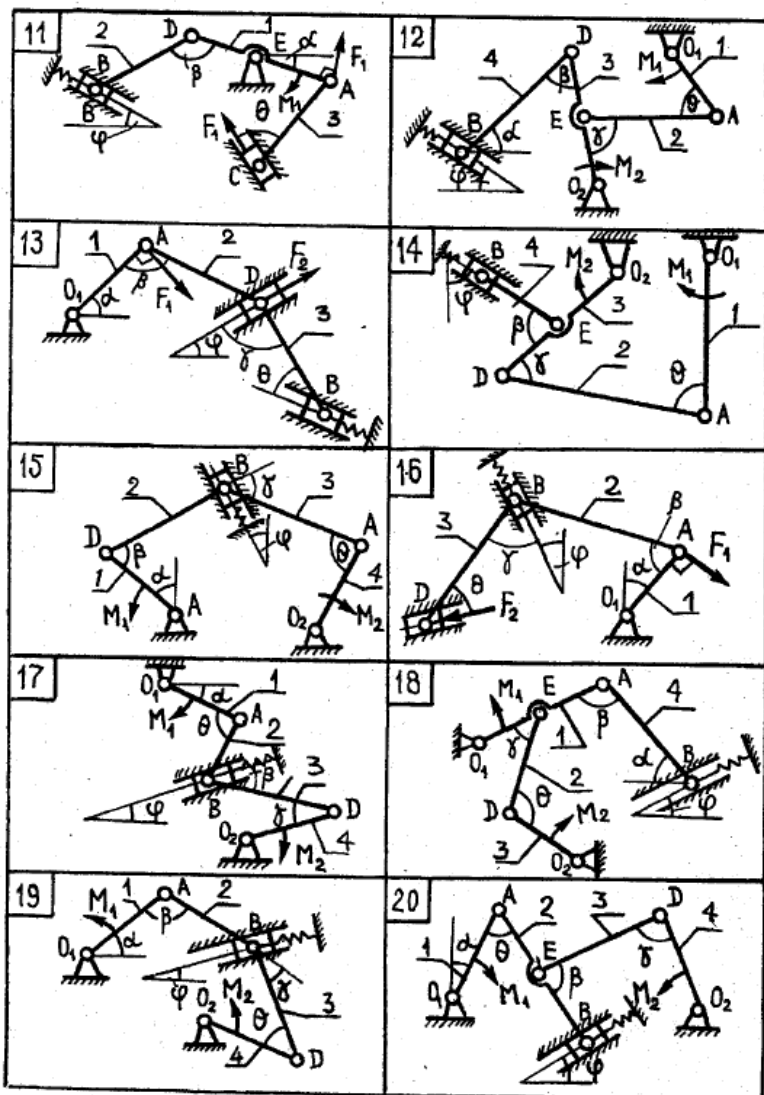


Рис 7, 6

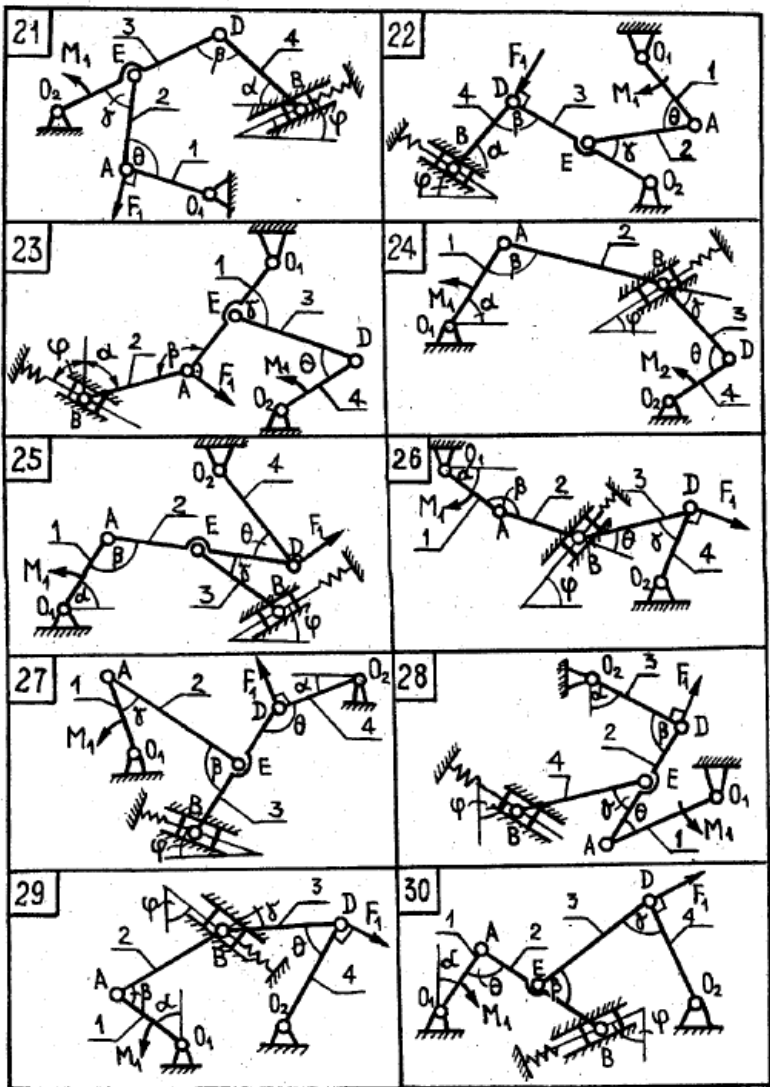


Рис. 7, в

Приклад виконання завдання

Дано: $Q = 100 \text{ Н}$; $c = 5 \text{ Н/см}$; $r_1 = 20 \text{ см}$; $r_2 = 40 \text{ см}$;
 $r_3 = 10 \text{ см}$; $OA = l = 50 \text{ см}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 90^\circ$ (рис. 7).

Визначити деформацію h пружини, нехтуючи вагою ланок OA і AB .

Розв'язання

Розглядуваний механізм (рис. 8) знаходиться під дією наступної системи взаємно зрівноважених сил: сили пружності \vec{F} , сили тяжіння \vec{G}_1 - вала 1 із шестернею 2, \vec{G}_3 - шестерні 3, \vec{G}_4 - шатуна B , \vec{Q} - вантажу і реакцій опор.

В'язі, накладені на механізм, допускають наступні можливі переміщення його ланок: поворот вала 1 із шестернею 2 на кут $\delta\varphi$; поворот шестерні 3 на кут $\delta\varphi_3$ і поступальне переміщення вантажу по вертикалі на $\delta\vec{s}_Q$. Шатун B може мати переміщення $\delta\vec{s}_B$ (переміщення по вертикалі), а точка A – переміщення $\delta\vec{s}_A$ (відрізок $\delta\vec{s}_A$ перпендикулярний до OA). Загальне рівняння статички, що виражає принцип можливих переміщень, має вигляд

$$Q\delta s_Q - F\delta s_B = 0. \quad (1)$$

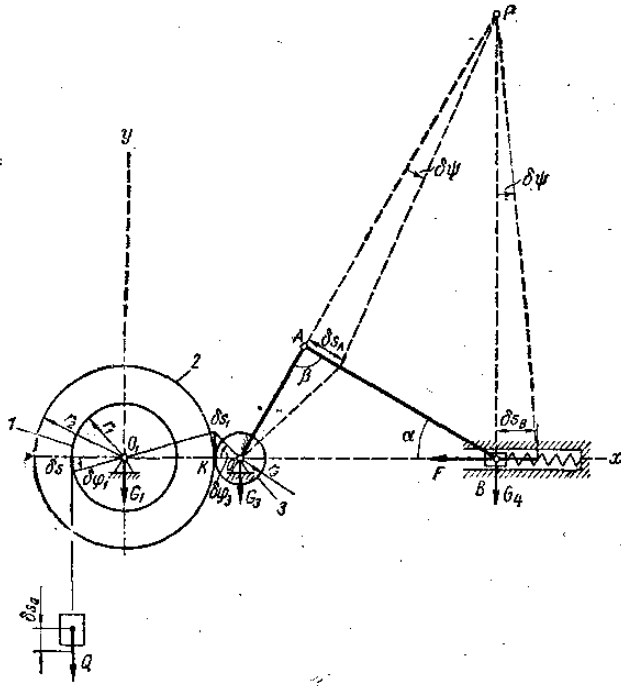


Рис. 8

Встановимо залежності між можливими переміщеннями точок механічної системи. Оскільки нитка, до якої прив'язаний вантаж Q , не розтягується і ковзання між ниткою і валом 1 відсутнє, то переміщення вантажу Q дорівнює переміщенню точки обводу колеса 1. Тому кут повороту вала 1 і шестерні 2

$$\delta\phi_1 = \delta s_Q / r_1.$$

Модуль переміщення точки K обводу колеса 2

$$\delta s_1 = r_2 \delta\phi_1 = (r_2 / r_1) \cdot \delta s_Q.$$

Оскільки ковзання між шестернями 2 і 3 відсутнє, то можливі переміщення точок дотику цих шестерень рівні між собою і тому кут повороту шестерні 3

$$\delta\varphi_3 = \delta s_1 / r_3 = (r_2 / r_1 \cdot r_3) \cdot \delta s_Q.$$

Модуль переміщення точки А кривошипа, що жорстко з'єднаний з колесом 3

$$\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi_3 = (r_2 l / r_1 r_3) \cdot \delta s_Q.$$

Для визначення залежності між модулями можливих переміщень δs_A і δs_B встановимо місцезнаходження миттєвого центра обертання ланки АВ – точки Р.

Тоді

$$\delta s_B / \delta s_A = PB / PA,$$

звідки

$$\delta s_B = (PB / PA) \cdot \delta s_A.$$

Із трикутника АРВ

$$PB / PA = 1 / \cos 30^\circ.$$

Тепер

$$\delta s_B = (r_2 l / r_1 r_3 \cos 30^\circ) \cdot \delta s_Q.$$

Сила пружності пружини пропорційна її деформації $F = ch$.

Підставляючи в рівняння (1) вирази сили пружності і можливих переміщень точок механічної системи, одержимо

$$Q \cdot \delta s_Q - ch \cdot (r_2 l / r_1 r_3 \cos 30^\circ) \cdot \delta s_Q = 0;$$

звідки

$$h = \frac{Q}{c} \frac{r_1 r_3 \cos 30^\circ}{r_2 l} = \frac{100 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 0,87}{5 \cdot 40 \cdot 50} = 1,74 \text{ (см)}.$$

Отже, пружина стиснута на 1,74 см.

Завдання Д-5

Використання принципу Даламбера для визначення реакцій в'язей

Визначити реакції зовнішніх в'язей механічної системи:

а) у довільний момент часу – для варіантів 2, 3, 6, 7, 10-16, 20, 24-30,
рис. 9, *a – в* ;

б) у момент часу $t = t_1$ - для варіантів 9, 17-19,24

в) у той момент часу. Коли кут повороту $\varphi = \varphi_1$ - для варіантів 1, 4, 5, 8, 21-23;

г) у положенні, показаному на малюнку для варіантів 2, 3, 6, 7, 11-13, 15, 17, 18, 20, 24-28, 30.

Необхідні для розв'язання дані наведено у **табл. 4**, у якій ω - кутова швидкість, φ_0 і ω_0 - значення кута повороту і кутової швидкості у початковий момент часу.

Таблиця 4

Варіант	m_1	m_2	m_3	a	R	φ_1	φ_0	ω	ω_0	t_1	Примітка
	кг			м		град		с ⁻¹		с	
1	40	50	—	0,8	0,2	240	180	—	30	—	$OA = a$
2	25	15	—	0,2	—	—	—	15	—	—	—
3	45	—	—	0,1	—	—	—	12	—	—	—
4	10	24	—	—	0,3	45	0	—	10	—	$OA = 3R$

Вариант	m_1	m_2	m_3	a	R	φ_1	φ_0	ω	ω_0	t_1	Примітка
	кг			м		град		c^{-1}		с	
5	10	30	—	—	0,2	90	30	—	8	—	$OA = 4R$
6	15	25	—	0,2	—	—	—	20	—	—	$CD = DE$
7	12	36	—	0,2	—	—	—	10	—	—	—
8	30	40	—	—	0,3	60	0	—	6	—	$OA = 3R$
9	30	20	—	—	0,4	—	—	—	9	20	$OA = 3R,$ $M = 6 - 0,2t$
10	60	20	40	0,4	0,2	—	—	—	—	—	$i_{3x} = R\sqrt{2}$
11	10	10	15	0,3	0,3	—	—	20	—	—	—
12	40	20	—	0,2	—	—	—	25	—	—	—
13	10	20	30	0,3	0,2	—	—	10	—	—	—
14	40	60	40	—	0,4	—	—	—	—	—	$OA = 2R,$ $i_{3x} = 0,5 \text{ м}$
15	15	24	20	0,2	0,2	—	—	30	—	—	—
16	50	80	20	0,5	0,1	—	—	—	—	—	$i_{3x} = R\sqrt{2}$
17	20	20	—	0,4	0,4	—	—	—	0	100	$M = 20 - 0,1t$ $CD = 3a,$
18	30	10	—	0,2	0,1	—	—	—	0	50	$M = 30 - 0,2t$
19	50	—	—	—	0,3	—	0	—	0	6	$M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$
20	40	30	—	0,2	—	—	—	8	—	—	—
21	24	18	27	0,3	0,2	90	0	—	5	—	$OA = BC = 2a$
22	20	30	—	0,4	—	135	0	—	0	—	$OA = 3a,$ $BC = 2a$
23	30	—	—	0,3	—	60	0	—	0	—	—
24	30	20	—	0,2	—	—	—	—	0	40	$M = 5 - 0,1t$
25	24	24	—	0,2	—	—	—	15	—	—	—
26	20	20	—	0,3	—	—	—	—	—	—	$CD = 2a$
27	18	18	—	0,2	0,1	—	—	20	—	—	—
28	30	40	—	0,4	0,3	—	—	16	—	—	—
29	30	15	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—
30	21	27	—	0,3	—	—	—	12	—	—	—

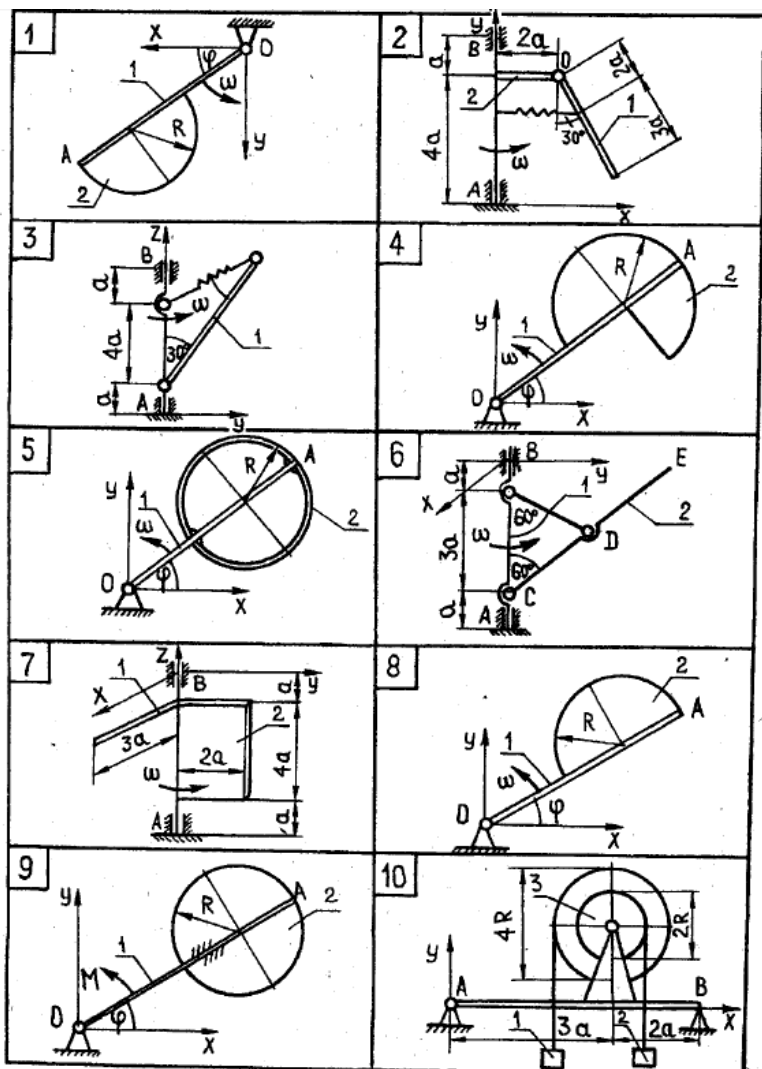


Рис. 9, а

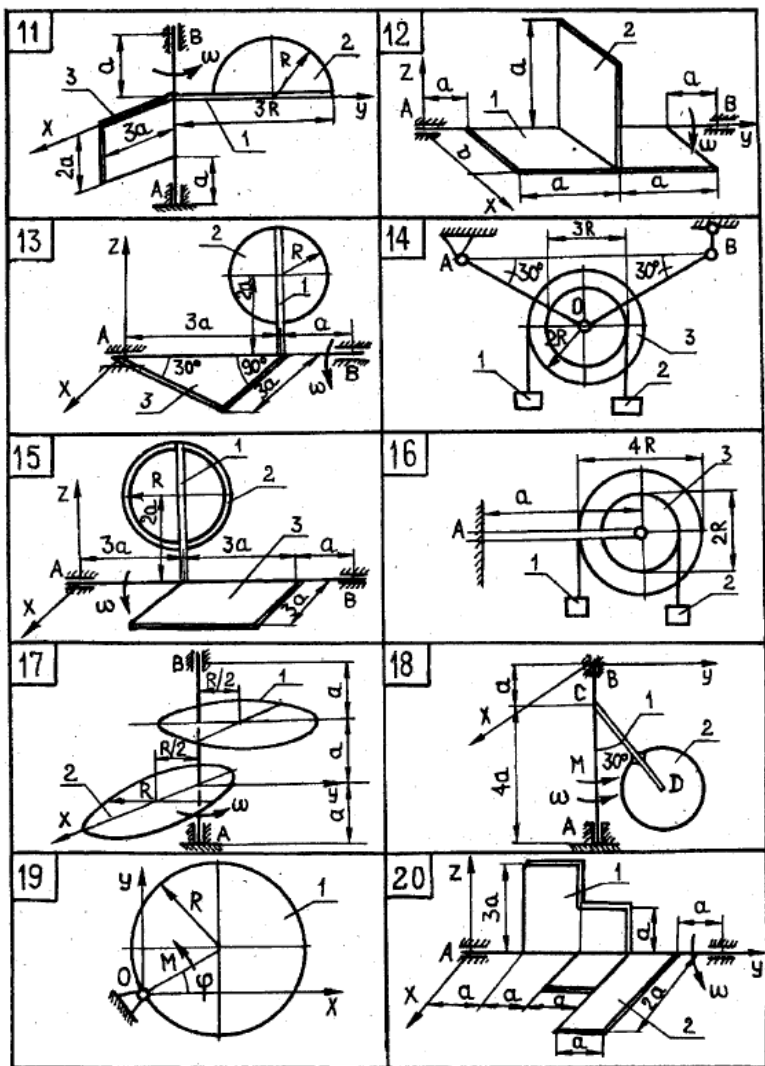


Рис. 9, 6

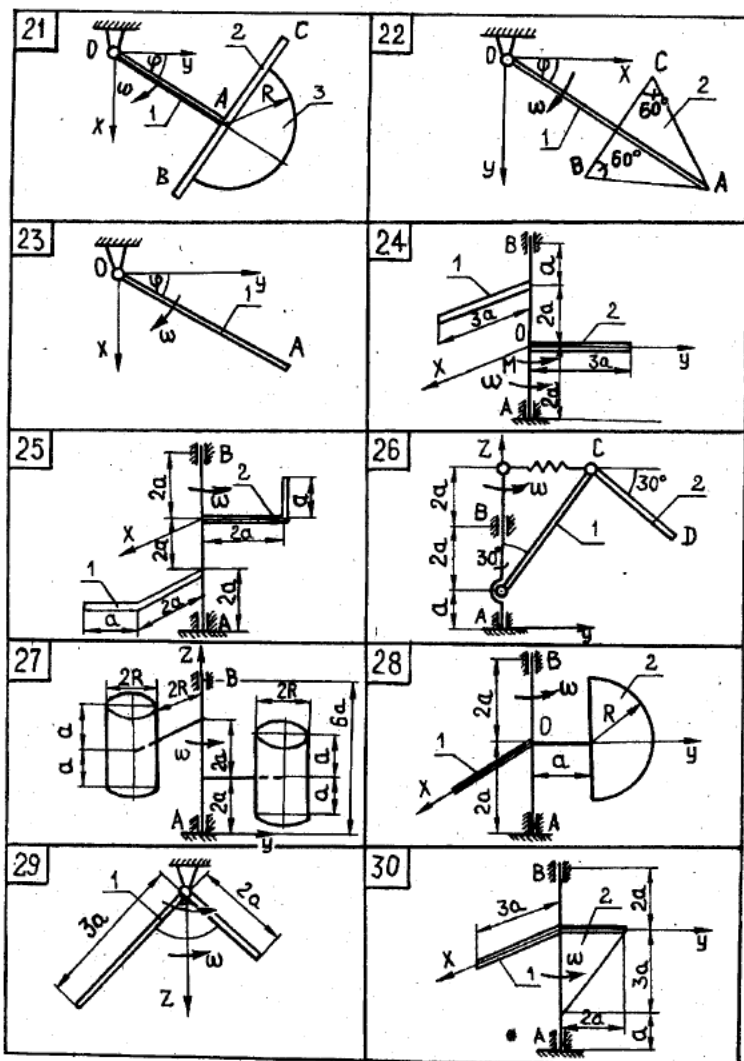


Рис. 9, в

Приклад виконання завдання

Дано: $m_1 = 3 \text{ кг}$; $m_2 = 2 \text{ кг}$; $m_3 = 5 \text{ кг}$; $l_1 = 30 \text{ см}$;

$l_2 = 20 \text{ см}$; $\alpha = 30^\circ$; $\omega = 120 \text{ с}^{-1} = \text{const}$. Схема механічної системи і необхідні розміри наведено на *рис. 10, а*.

Визначити реакції підп'ятника А, підшипника В, а також пружини DN. Поперечними розмірами стрижнів 1, 2 і 3 і масою пружини знехтувати.

Розв'язання

Для визначення реакцій в'язей скористаємося принципом Даламбера. Оскільки $\omega = \text{const}$, розглянемо тільки відцентрові сили інерції частинок кожного стрижня. Відомо, що головний вектор сил інерції точок тіла, що обертається, визначається за формулою

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C,$$

де m – маса тіла, а \vec{a}_C – прискорення центра мас тіла.

Рівнодійна сил інерції точок тіла дорівнює їх головному моменту. Тому для стрижнів 1 і 2

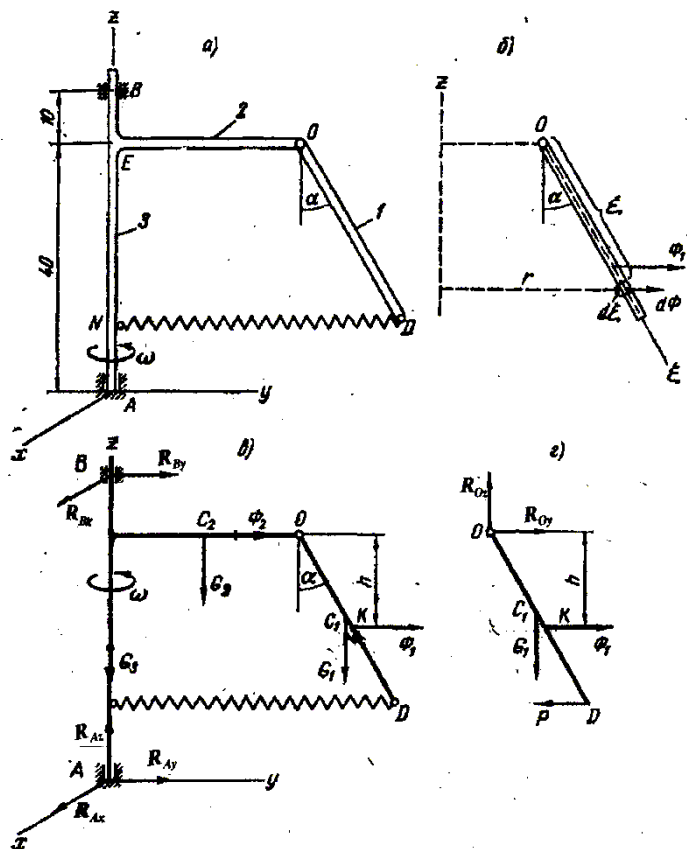


Рис. 10

$$\Phi_1 = m_1 a_{C_1} = m_1 \omega^2 (0,5l_1 \sin \alpha + l_2);$$

$$\Phi_2 = m_2 a_{C_2} = m_2 \omega^2 \cdot 0,5l_2.$$

Для визначення реакцій опор необхідно знати точку прикладання сили $\vec{\Phi}_1$ (лінія дії сили $\vec{\Phi}_2$ співпадає з віссю стрижня 2 і тому визначена). Оскільки сума алгебраїчних моментів паралельних сил інерції точок

стрижня відносно точки О дорівнює алгебраїчному моменту рівнодійної цих сил, то

$$\Phi_1 h = \int_0^{l_1} \xi \cos \alpha d\Phi,$$

де h – плече сили $\vec{\Phi}_1$ відносно точки О; $d\Phi$ – сила інерції елемента стрижня довжиною $d\xi$; ξ – координата елемента стрижня (рис. 10, б).

Використовуючи значення сили $\vec{\Phi}_1$ і ураховуючи, що

$$d\Phi = (l_2 + \xi \sin \alpha) \omega^2 \gamma d\xi,$$

де γ – маса ділянки стрижня одиничної довжини, одержимо

$$m_1 \omega^2 (0,5l_1 \sin \alpha + l_2) h = \int_0^{l_1} (l_2 + \xi \sin \alpha) \omega^2 \gamma \xi \cos \alpha d\xi,$$

звідки після інтегрування

$$h = \frac{l_1(l_2 + (2/3) \cdot l_1 \sin \alpha) \cos \alpha}{l_1 \sin \alpha + 2l_2} = \frac{30(20 + (2/3) \cdot 30 \cdot 0,5)}{30 \cdot 0,5 + 2 \cdot 20} \cos \alpha = 16,4 \cos \alpha.$$

Показуємо складові реакцій підп'ятника \vec{R}_{Ax} , \vec{R}_{Ay} , \vec{R}_{Az} і підшипника \vec{R}_{Bx} , \vec{R}_{By} і сили тяжіння стрижнів \vec{G}_1 , \vec{G}_2 , \vec{G}_3 і сили інерції $\vec{\Phi}_1$ і $\vec{\Phi}_2$ (рис. 10, в). Ці сили повинні задовольняти рівняння кінестатики

$$\sum_{k=1}^n (M_x(\vec{F}_k) + M_x(\vec{R}_k) + M_x(\vec{\Phi}_k)) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n (F_{ky} + R_{ky} + \Phi_{ky}) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n (F_{kz} + R_{kz} + \Phi_{kz}) = 0.$$

У нашому випадку ці рівняння приймуть вигляд:

$$-R_{By} \cdot 50 - \Phi_2 \cdot 40 - G_2 \cdot 10 - G_1 \cdot 27,5 - \Phi_1(40 - 16,4 \cos \alpha) = 0;$$

$$R_{Ay} + R_{By} + \Phi_1 + \Phi_2 = 0;$$

$$R_{Az} - G_1 - G_2 - G_3 = 0.$$

Звідки одержимо:

$$R_{By} = -8,47 \text{ (кН)}; \quad R_{Ay} = -6,28 \text{ (кН)}; \quad R_{Az} = 0,098 \text{ (кН)}.$$

Оскільки розглядувані сили розташовані у площині уAz, то

$$R_{Ax} = R_{Bx} = 0.$$

Для визначення реакції пружини DN складемо рівняння кінетостатики

$$\sum_{k=1}^n (M_o(\vec{F}_k) + M_o(\vec{R}_k) + M_o(\vec{\Phi}_k)) = 0,$$

розглядаючи сили, прикладені до стрижня 1 (рис. 10, з)

$$-G_1 \cdot (l_1/2) \cdot \sin \alpha + \Phi_1 h - Pl_1 \cos \alpha = 0,$$

звідки

$$P = 6,47 \text{ кН}.$$

ЛІТЕРАТУРА

Базова

1. Махней О.В. Лабораторний практикум з імітаційного моделювання у GPSS: Метод рекомендації до проведення лабораторних занять. – Ів.-Франківськ: 2020. – 40 с.
2. Мурашиний алгоритм [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Мурашиний алгоритм](https://uk.wikipedia.org/wiki/Мурашиний_алгоритм). 2021.
3. Яворський Н.Б., Андрущак Н.А. Моделювання дисперсійних співвідношень пористих композиційних матеріалів на підставі коміркових мікрорівневих структурних моделей. Науковий вісник НЛТУ України, 2020, 30(1), 142-151.
4. Bargmann, S., Klusemann, B., Markmann, J., Schnabel, J., et al. (2018). Generation of 3D representative volume elements for heterogeneous materials: A review. Progress in Materials Science, 96, 322–384.
5. Li, S., Lin, H., Meng, F., Moss, D., et al. (2018). On-Demand Design of Tunable Complete Photonic Band Gaps based on Bloch Mode Analysis. Scientific Reports, 8, 14283.
6. Segovia-Chaves, F., Vinck-Posada, H., & Navarro-Barón, E. (2019). Photonic band structure in a two-dimensional hexagonal lattice of equilateral triangles. Physics Letters A, 383(25), 3207–3213.
7. Zohd, T. (2018). 1Rapid Voxel-Based Digital-Computation for Complex Microstructured Media. Arch. of Comp. Meth. in Eng., 1–16.

Допоміжна

1. Омаров М.А. Основи теоретичної механіки. Ч.1: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2018. – 184 с.
2. Пирогов В.В. Практикум з технічної механіки. Теоретична механіка: Навч. посібник. – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – 68 с.
3. Романюк О.Д. Теоретична та прикладна механіка: Навч. посібник. – Дніпро: ДДТУ, 2021. -283 с.
4. Черниш О.М. Теоретична механіка: Навч. посібник – Центр учбової літератури, 2022. – 760 с.
5. Цвіркун Л.О., Омельченко О.В. Теоретична механіка. Методичні рекомендації для вивчення дисципліни. – Кривий Ріг: Дон. НУЕТ, 2019. – 100 с.
6. Штанько П.К., Шевченко В.Г. та інші. Теоретична механіка: Навч. посібник. – Запоріжжя: НУ Запорізька політехніка, 2021, - 464 с.

7. Штефан Н.І., Гнатейко Н.В. та інші. Теоретична механіка: Конспект лекцій. Навч. посібник. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 143 с.
8. Янгулова О.Л. Теоретична механіка. Аналітична механіка: Навч. посібник. – Дніпро: Дніпров. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2019. – 75 с.
9. Alex Maas. Theoretical Mechanics. Lecture in WS 2016/17 at the KFU Graz. – 181 p.
10. Бондарський О.Г., Приходько О.С. Теоретична механіка. Статика. Методичні вказівки до практичних занять для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2018. – 28 с.
11. Бондарський О.Г., Приходько О.С. Теоретична механіка. Статика. Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2018. – 30 с.
12. Бондарський О.Г. Теоретична механіка. Кінематика. Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2022. – 17 с.
13. Бондарський О.Г. Теоретична механіка. Динаміка. Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія денної та заочної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2022. – 53 с.

Моделювання динамічних процесів у складних системах: Методичні вказівки для практичних занять для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти освітньої програми «Прикладна математика» галузі знань F Інформаційні технології Математика та статистика спеціальності F1 «Прикладна математика» денної та заочної форм навчання (перша частина)/ укладач О. Бондарський. – Луцьк: ЛНТУ, 2026. – 57 с.

Комп'ютерний набір
Редактор

О.Бондарський
О.Бондарський

Підп. до друку «__»_____2026 р. Формат 60x84/16.Папір офс.
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 1,0.
Тираж 50 прим.

Відділ іміджу та промоцій
Луцького національного технічного університету
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – відділ іміджу та промоцій ЛНТУ