

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ



МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Методчні вказівки до самостійної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
освітньої програми «Штучний інтелект та аналіз масивів даних»
галузь знань F Інформаційні технології
спеціальності F1 Прикладна математика
денної форми навчання

Луцьк 2025

УДК 519.87

М 12

До друку

Голова вченої ради факультету архітектури, будівництва та дизайну
О. АНДРІЙЧУК

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки _____ Н. ПОЛЩУК

Рекомендовано до видання вченою радою факультету архітектури, будівництва та дизайну
ЛНТУ,
протокол № __ від «__» _____ 2025 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри прикладної математики та механіки
протокол № __ від «__» _____ 2025 року.
Завідувача кафедри _____ О. МІКУЛІЧ

Укладач: _____ О. МІКУЛІЧ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри
прикладної математики та механіки ЛНТУ

Рецензент: _____ А. СЯСЬКИЙ, доктор технічних наук, професор, професор
кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Відповідальний за випуск: _____ О. МІКУЛІЧ, доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ.

Методи оптимізації та дослідження операцій. Методичні вказівки для здобувачів першого (бакалаврського) рівня освітньої програми «Штучний інтелект та аналіз масивів даних» галузі знань F Інформаційні технології спеціальності F1 Прикладна математика денної форми навчання [Текст]. / уклад. О.А. Мікуліч– Луцьк: ЛНТУ, 2025. – 28 с.

Методичні вказівки до самостійної роботи містять перелік завдань, що згруповані за типами задач щодо дослідження методів побудови розв'язків оптимізації. Видання призначене для студентів спеціальності F1 Прикладна математика денної форми навчання та сприятиме поглибленню компетентностей щодо поглиблення знань з предметної області.

© Мікуліч О.А., 2025

Зміст

ВСТУП.....	4
1. Математична модель задачі оптимізації.....	5
2. Графічний метод	10
3. Симплекс-метод.....	13
4. Транспорна задача	15
5. Цілочисельне програмування	17
6. Дробово-лінійне програмування.....	19
7. Нелінійне програмування.....	21
Список літератури.....	25

ВСТУП

Однією з важливих складових підготовки бакалаврів спеціальності F1 Прикладна математика є освоєння методів побудови задач щодо вдосконалювання керування економічними, біологічними, соціальними та іншими системами на базі комп'ютерних технологій, тобто інтенсивного впровадження систем підтримки прийняття рішень (СППР), які крім програмного забезпечення містять банк математичних методів і моделей. Щоб ефективно застосовувати СППР, необхідно володіти методами математичного моделювання, вміти будувати математичні моделі, знати методи оптимізації процесів і явищ, а також вміти розв'язувати задачі лінійного, дробово-лінійного, цілочисельного та нелінійного програмування.

За таких умов важливого значення набуває підготовка висококваліфікованих фахівців, що володіють методами математичного моделювання й оптимізації і здатні приймати рішення, підкріплені математичними розрахунками.

Всі ці питання вивчаються в межах дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій», що є нормативною складовою підготовки бакалаврів спеціальності F1 Прикладна математика. Вивчення дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» дає можливість здобувачам вищої освіти набутти наступних фахових та загальних компетентностей:

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

1. Математична модель задачі оптимізації

Завдання

Сформулюйте задачу лінійного програмування та розв'яжіть її графічним методом. При цьому виконайте наступні кроки:

1. *Математична модель*: побудова цільової функції та системи обмежень:

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. *Побудова області допустимих розв'язків*: графічний аналіз з нанесеними прямими обмежень та заштрихованою ОДР.
3. *Побудова цільової функції*: графічне представлення цільової функції та її зміни при зростанні/спаданні її величини
4. *Визначення оптимальної точки*: побудова лінії рівня цільової функції та визначення кутової точки, де Z досягає максимуму/мінімуму.
5. *Відповідь*: Обчислення значень змінних x_1 та x_2 та максимального / мінімального значення Z .

Задача 1. Оптимальний план виробництва продукції

Фірма виготовляє два види продукції A та B , використовуючи для цього два види сировини. Витрати першого виду сировини на виготовлення одиниці продукції A та B становлять відповідно 2 та 5 умовних одиниць, а витрати другого виду сировини для виготовлення цих видів продукції становлять 4 та 2 умовні одиниці відповідно. Запаси першого виду сировини становлять 210 умовних одиниць, а другого виду сировини — 240 умовних одиниць. Відділ збуту фірми вважає, що виробництво продукції B має становити не більш як 65% загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціна одиниці продукції A та B дорівнює 50 та 200 грн відповідно. Визначити оптимальний план виробництва продукції, яка максимізує прибуток фірми.

Задача 2. Оптимальне розміщення банківських коштів

Банк протягом декількох місяців планує вкласти до \$ 200 000 у кредитування приватних осіб і купівлі автомобілів. Банківські комісійні складають 14% при кредитуванні приватних осіб і 12% при кредитуванні купівлі автомобілів. Обидва типи кредитів повертаються в кінці річного періоду кредитування. Відомо, що приблизно 3% клієнтських кредитів та 2% автокредитів можуть бути невідшкодовані. Об'єми кредитів на автомобілі зазвичай перебільшують вдвічі об'єми кредитів приватним особам. Визначити оптимальне розміщення коштів для максимізації очікуваного прибутку.

Задача 3. Оптимальне розміщення банківських коштів

Розв'язати попередню задачу 2 для випадку, коли банківські комісійні складають 15% при кредитуванні приватних осіб і 14% при кредитуванні купівлі автомобілів. Умови невідшкодовуваних кредитів (3% і 2%), обмеження на загальний обсяг кредитів (\$200 000) та співвідношення між обсягами залишаються тими ж. Визначити оптимальне розміщення коштів для максимізації очікуваного прибутку.

Задача 4. Оптимізація роботи нафтопереробної установки

Нафтопереробна установка працює у двох режимах. У першому режимі з 1 тонни сирової нафти отримують 300 кг темних і 600 кг світлих нафтопродуктів. У другому режимі — 700 кг темних і 200 кг світлих. За планом потрібно отримати не менше 150 т темних і не більше 70 т світлих нафтопродуктів. При цьому виробництво темних не може більш як у 2,5 рази перевищувати виробництво світлих. Визначити, скільки сирової нафти потрібно обробити в кожному режимі, щоб мінімізувати загальну кількість витраченої нафти.

Задача 5. Оптимальне розміщення с/г культур

Сільськогосподарське підприємство вирощує капусту та помідори на ділянці площею 20 га, використовуючи фосфорні та калійні

добрива. Норми внесення добрив (кг діючої речовини/га) та запаси (кг) такі: фосфорні – 150 (капуста), 400 (томати), запас 6000; калійні – 500 (капуста), 300 (томати). Запаси фосфорних та калійних добрив відповідно рівні 6000 та 9000 одиниць. Врожайність капусти – 300 ц/га, томатів – 200 ц/га. Прибуток від реалізації 1 кг капусти становить 2 грн, томатів – 3 грн. Визначити, яку площу зайняти під кожен культуру, щоб максимізувати загальний прибуток.

Задача 6. Оптимізація виробництва фарби

Компанія виготовляє фарбу для внутрішніх F_1 та зовнішніх F_2 робіт із сировини C_1 та C_2 . Витрати сировини на тонну фарби становлять 6 одиниць для фарби F_1 та 4 одиниці для фарби F_2 . Максимальні щоденні запаси сировини: C_1 та C_2 відповідно рівні 24 т та 6 т. Прибуток (у тис. грн) на тонну фарби F_1 – 25 у.о., F_2 – 20 у.о. Додаткові обмеження є щодо щоденного виготовлення: об'єм фарби F_1 не повинен перевищувати 2,5 т, а виробництво фарби F_1 не перевищує виробництво фарби F_2 більш ніж на 0,5 т. Визначити оптимальний щоденний план виробництва для максимізації прибутку.

Задача 7. Оптимізація виробництва пральних порошків

Завод побутової хімії виготовляє порошок A та B шляхом оброблення сировини I та II . Обробка 1 од. сировини I коштує 40 грн і дає 0,5 од. порошку A і 0,5 од. порошку B . Обробка 1 од. сировини II коштує 25 грн і дає 0,6 од. порошку A і 0,4 од. порошку B . Щоденний випуск порошку A повинен бути в межах 10-15 од., а порошку B – в межах 12-20 од. Визначити, скільки сировини кожного виду потрібно обробити, щоб мінімізувати загальні витрати.

Задача 8. Максимізація прибутку від солодошів

Кондитерська фабрика виготовляє два види східних солодошів: продукт 1 та продукт 2. Склад продукту 1 містить 12% мигдалю та 28% фундуку, решта (60%) – арахіс; склад продукту 2 містить 25% мигдалю та 15% фундуку, решта (60%) – арахіс. Щоденні запаси горіхів на підприємстві: мигдаль – 33 кг, фундук – 80 кг, арахіс – 60 кг. Ціна закупівлі: мигдаль - 15 грн/кг, фундук - 12 грн/кг, арахіс - 9 грн/кг. Ціна готових продуктів: продукт 1 – 14 грн/кг, продукт 2 – 15

грн/кг. Визначити оптимальний план виробництва для максимізації прибутку.

Задача 9. Оптимізація переробки помідорів

Консервний завод переробляє 60 000 кг помідорів (по 80 коп/кг) у томатний сік і пасту. Витрати помідорів: 1 кг на банку соку, 1/3 кг на банку пасти. Продукція пакується по 24 банки в упаковці. Обмеження складу заводу: максимум 2000 упаковок соку, 6000 упаковок пасти. Гуртова ціна упаковки: сік – 90 грн, паста – 45 грн. Знайти оптимальну структуру виробництва (кількість упаковок соку та пасти) для максимізації прибутку.

Задача 10. Мінімізація вартості харчової добавки

Підприємству необхідно виготовляти щоденно не менше 800 кг харчової добавки із суміші кукурудзяної і соєвої муки. Склад кукурудзяної муки: білок - 0,09 кг/кг, клітковина - 0,02 кг/кг; соєвої муки: білок - 0,60 кг/кг, клітковина - 0,06 кг/кг. Вартість кукурудзяної муки - 1,50 грн/кг., соєвої - 4,50 грн/кг. Вимоги дієтологів: суміш повинна містити не менше 30% білка і не більше 5% клітковини. Визначити рецептуру суміші (кількість муки кожного виду) для найменшої вартості харчової добавки.

Задача 11. Оптимізація виробництва електродвигунів

Завод виготовляє два види електричних двигунів D_1 і D_2 на окремих лініях. Продуктивність ліній: D_1 – 600 од/день, D_2 – 700/день. Для виробництва двигунів D_1 потрібно 10 одиниць комплектуючих першого типу та 3 одиниці другого типу, для двигунів D_2 – 8 одиниць комплектуючих першого типу та 7 одиниць другого типу комплектуючих. Прибутковість для електричних двигунів наступна: D_1 – 300 грн, D_2 – 200 грн. Запаси комплектуючих першого типу становлять 9600 од., другого – 5400 од. Визначити оптимальну структуру щоденного виробництва для максимізації прибутку.

Задача 12. Розрізування фанери з мінімальними відходами

Необхідно вирізати заготовки трьох розмірів (потрібно 24, 28, 18 шт. відповідно) зі стандартних листів фанери. Доступні два

способи розрізання. Спосіб 1 дає 2, 4, 2 заготовок 1, 2, 3 відповідно з відходами 12 кв. см. Спосіб 2 дає 6, 4, 3 заготовок 1, 2, 3 відповідно з відходами 18 кв. см. Визначити, скільки листів і за яким способом розрізати, щоб отримати потрібну кількість заготовок з найменшими відходами.

Задача 13. Оптимізація виробництва сухого вина

Винзавод виготовляє дві марки сухого вина M_1 і M_2 . Гуртові ціни для відповідних марок вин становлять 12 грн/л для M_1 та 14 грн/л для M_2 . Запаси інгредієнтів на підприємстві є наступними: біле – 2000 л, рожеве – 2500 л, червоне – 1200 л. Закупівельні ціни на вина наступні: біле – 15 грн/л, рожеве – 10 грн/л, червоне – 8 грн/л. Склад сухого вина M_1 становить 60% білого, 20% червоного, 20% рожевого; M_2 – 15% білого, 60% червоного, 25% рожевого. Визначити оптимальне співвідношення марок для максимізації прибутку.

Задача 14. Оптимізація рекламного бюджету

Бюджет на рекламу (радіо та ТБ) обмежено 50 000 грн/міс. Вартість 1 хв: Радіо – 75 грн, ТБ – 1500 грн. Час реклами на радіо повинен перевищувати рекламу на ТБ не менш ніж удвічі. Час реклами на радіо не більше 400 хв. Ефективність реклами на ТБ у 25 разів вища за рекламу на радіо. Розробити оптимальний бюджет для реклами, максимізуючи загальну ефективність.

Задача 15. Оптимізація виробництва іграшок

Фабрика іграшок виготовляє моделі потягів та автомобілів, використовуючи три операції. Фонд робочого часу: операція 1 – 400 хв, операція 2 – 480 хв, операція 3 – 440 хв. Час на операції при виготовленні потягу: операція 1 – 1 хв, операція 2 – 3 хв, операція 3 – 1 хв. Для виготовлення автомобіля: операція 1 – 4 хв, операція 2 – 1 хв, операція 3 – 3 хв. Прибуток від реалізації потягу становить 25 грн, автомобіль – 15 грн. Знайти оптимальний план виробництва (кількість потягів та автомобілів), що максимізує прибуток.

2. Графічний метод

Завдання

Для задач лінійного програмування визначте макисмальне та мінімальне значення цільової функції графічним методом. При цьому виконайте наступні кроки:

1. *Побудова області допустимих розв'язків*: графічний аналіз з нанесеними прямими обмежень та заштрихованою ОДР.
2. *Побудова цільової функції*: графічне представлення цільової функції та її зміни при зростанні/спаданні її величини
3. *Визначення оптимальних точок*: побудова лінії рівня цільової функції та визначення кутової точки, де Z досягає максимуму/мінімуму.

Задача 1.

$$L = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 2.

$$L = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 1 \\ 6x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 3.

$$L = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 4.

$$L = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 \geq 2 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 5.

$$L = -x_1 + 5x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 9 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 7.

$$L = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 9.

$$L = 10x_1 + 11x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 11.

$$L = 1x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 26 \\ x_1 + 11x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 6.

$$L = x_1 - 4x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 8.

$$L = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ 4x_1 - x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 10.

$$L = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 12.

$$L = x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 13.

$$L = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 15.

$$L = x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 14

$$L = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Симплекс-метод

Завдання 1.

Використовуючи симплекс-метод розв'язати відповідні задачі розділу 1 та 2 лінійного програмування у області невід'ємних значень змінних. Порівняти отримані розв'язки.

Завдання 2.

Використовуючи метод штучного базису побудувати розв'язки задач.

Задача 1.

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + 3x_2 &\geq 9 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Задача 2.

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Задача 3.

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 6x_2 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Задача 4.

$$\begin{aligned} Z &= 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + 4x_2 &\geq 13 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Задача 5.

$$\begin{aligned} Z &= 10x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Задача 6.

$$\begin{aligned} Z &= 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1 &\leq 6 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Задача 7.

$$\begin{aligned} Z &= 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + 3x_2 &\geq 9 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Задача 8.

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Задача 9.

$$\begin{aligned} Z &= 5x_1 + 8x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Задача 10.

$$\begin{aligned} Z &= 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

Задача 11.

$$\begin{aligned} Z &= 4x_1 + 4x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 9 \end{aligned}$$

Задача 12.

$$\begin{aligned} Z &= 7x_1 + 8x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 7 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Задача 13.

$$Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 14.

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_3 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 15.

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4. Транспортна задача

Завдання 1.

Три склади, що мають a_i ($i = 1, 2, 3$) працівників, виконують замовлення для чотирьох замовників. Для цього необхідно виділити, відповідно, b_j ($j = 1, 4$) робітників. Задано матрицю C , у якій c_{ij} – об'єм замовлення i -го ордеру, які може виконати працівники j -го складу за зміну. Необхідно розподілити працівників таким чином, щоб за зміну вони виконували максимально можливу кількість замовлень.

$$1. C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (36; 32; 24; 18), \\ \bar{a}^T = (20; 35; 55).$$

$$2. C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (28; 15; 37; 20), \\ \bar{a}^T = (35; 25; 40).$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 7 \\ 9 & 8 & 5 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (14; 26; 16; 34), \\ \bar{a}^T = (30; 40; 20).$$

$$4. C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (30; 18; 40; 22), \\ \bar{a}^T = (25; 35; 50).$$

$$5. C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (32; 24; 28; 16), \\ \bar{a}^T = (30; 25; 45).$$

$$6. C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (20; 22; 18; 30), \\ \bar{a}^T = (45; 15; 30).$$

$$7. C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (15; 35; 21; 24), \\ \bar{a}^T = (40; 30; 25).$$

$$8. C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (60; 25; 30; 15), \\ \bar{a}^T = (35; 40; 55).$$

$$9. C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 & 6 \\ 7 & 9 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (22; 15; 23; 30), \\ \bar{a}^T = (25; 30; 35).$$

$$10. C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (30; 14; 26; 20), \\ \bar{a}^T = (20; 45; 25).$$

$$11. C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 7 \\ 9 & 8 & 5 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (30; 18; 40; 22), \\ \bar{a}^T = (25; 35; 50).$$

$$12. C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (14; 26; 16; 34), \\ \bar{a}^T = (30; 40; 20).$$

$$13. C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (20; 22; 18; 30), \\ \bar{a}^T = (45; 15; 30).$$

$$14. C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (32; 24; 28; 16), \\ \bar{a}^T = (30; 25; 45).$$

$$15. C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}^T = (20; 22; 18; 30), \\ \bar{a}^T = (45; 15; 30).$$

Завдання 2.

Розв'язати транспортну задачу за критерієм часу. Умови задач необхідно вибирати із завдання 1, вважаючи a вектором запасів, а b – вектором потреб. Задана матриця C містить час t_{ij} перевезення одиниць вантажів від i -го пункту постачання ($i = 1, 3$) до j -го ($j = 1, 4$) пункту споживання.

4. Цілочисельне лінійне програмування

Завдання

Знайти оптимальний розв'язок задачі цілочисельного лінійного програмування використовуючи алгоритм Гоморі, а також знявши умови цілочисельності, ЗЛП розв'язати графічним методом та використовуючи нерівність Гоморі показати, яким чином проходить правильне відтинання.

Задача 1.

$$\begin{aligned} F &= 6x_1 + 10x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 \leq 5 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{aligned}$$

Задача 2.

$$\begin{aligned} F &= x_1 + x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 8 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{aligned}$$

Задача 3.

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{aligned}$$

Задача 4.

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{aligned}$$

Задача 5.

$$\begin{aligned} F &= 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{aligned}$$

Задача 6.

$$\begin{aligned} F &= 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі} \end{aligned}$$

Задача 7.

$$\begin{aligned} F &= 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

Задача 8.

$$\begin{aligned} F &= 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

Задача 9.

$$\begin{aligned} F &= x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

Задача 10.

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_2 \leq 3 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

Задача 11.

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

Задача 12.

$$\begin{aligned} F &= 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

Задача 13.

$$\begin{aligned} F &= 7x_1 + 4x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

Задача 14.

$$\begin{aligned} F &= 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 4x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

Задача 15.

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + 9x_2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

5. Дробово-лінійне програмування

Завдання

Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування графічним методом та симплексним методом, звівши до задачі ЛП

Задача 1.

$$F = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 2.

$$F = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 3.

$$F = \frac{5x_1 - 3x_2}{x_1 + 3x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ -x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 4.

$$F = \frac{3x_1 - x_2}{2x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 5.

$$F = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 6.

$$F = \frac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 7.

$$F = \frac{x_1 + x_2}{2x_1 + 3x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 8.

$$F = \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 7 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 9.

$$F = \frac{2x_1 - x_2 - 3}{x_1 + 2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 10.

$$F = \frac{x_1 + 3x_2}{2 + x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 11.

$$F = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + 3x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 12.

$$F = \frac{x_1 + 4x_2}{3x_1 + 2x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 13.

$$F = \frac{3x_1 + 5x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 14.

$$F = \frac{x_1 + 2x_2}{5x_1 + x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ 5x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 15.

$$F = \frac{4x_1 + 3x_2}{2x_1 + 5x_2} \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7. . Нелінійне програмування

Завдання 1.

Розв'язати задачу нелінійного програмування методом Лагранжа.

Задача 1.

$$F = 2x_1^2 + x_2^2,$$

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$

Задача 2.

$$F = x_1^2 - x_2^2,$$

$$3x_1 + 4x_2 = 12$$

Задача 3.

$$F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

Задача 4.

$$F = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2,$$

$$x_1 + 3x_2 = 6$$

Задача 5.

$$F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

Задача 6.

$$F = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

Задача 7.

$$F = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Задача 8.

$$F = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Задача 9.

$$F = 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Задача 10.

$$F = x_2 - x_1 - 2x_1^2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Задача 11.

$$F = 2x_1^2 + x_2^2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Задача 12.

$$F = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3,$$

$$3x_1 + 4x_2 = 12$$

Задача 13.

$$F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1$$

$$x_1 + 3x_2 = 6$$

Задача 14.

$$F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Задача 15.

$$F = 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3,$$

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$

Завдання 2.

Розв'язати задачу нелінійного програмування графічним методом

Задача 1.

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 2.

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 3.

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_3 - 3)^2 \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 4.

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \\ x_1 x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 5.

$$F = x_1 x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 6.

$$F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 7.

$$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Задача 8.

$$F = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 9.

$$F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \frac{\max}{\min}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 4 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 10.

$$F = 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 11.

$$F = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 12.

$$F = 6x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 13.

$$F = 4x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 14.

$$F = -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача 15.

$$F = 2x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Список літератури

1. Вітлінський В. В., Наконечний С.І., Шарапов О.Д. та ін. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник/ За заг.ред. В.В.Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2008. – 536 с.
2. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч.посіб. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
3. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод.посібник для самоств.вивч.дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
4. Жлуктенко В.І., Тарасова Л.Г., Савіна С.С. Дослідження операцій: навч.посіб.- К. КНЕУ, 2009.
5. Жлуктенко В.І., Тарасова Л.Г., Савіна С.С. Дослідження операцій: навч.-метод.посіб. для самоств.вивч.дисц.- К. КНЕУ, 2009.
6. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології. – К. 2002
7. Бакаєв Л.О. Кількісні методи в управлінні інвестиціями: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2000.– 151 с.
8. Бугір М. Математика для економістів. – К.: Академія, 1998. – 272 с.
9. Мазаракі А.А., Толбатов Ю.А. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. – К.: Четверта хвиля, 1998. – 208 с.
10. Матвійчук А.В. Штучний інтелект в економіці: нейронні мережі, нечітка логіка: монографія. - К.: КНЕУ, 2011. – 439 с.
11. Рядно О.А., Піскунова О.В., Рибальченко Л.В., Хрущ Я.В. Математичні моделі у фінансах: навчальний посібник. – Дніпропетровськ: ДДФА, 2011. – 188 с.
12. Жильцов О.Б., Кулян В.Р., Юнькова О.О. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій). – К.:МАУП, 2006. – 180 с.

Методи оптимізації та дослідження операцій. Методичні вказівки для здобувачів першого (бакалаврського) рівня освітньої програми «Штучний інтелект та аналіз масивів даних» галузі знань F Інформаційні технології спеціальності F1 Прикладна математика денної форми навчання [Текст]. / уклад. О.А. Мікуліч– Луцьк: ЛНТУ, 2025. – 28 с.

Комп'ютерний набір

О.А. Мікуліч

Редактор

О.А. Мікуліч

Підп. до друку 2025 р.
Формат 60x84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.
Ум. друк. арк. _____. Обл.-вид. арк. 1,75
Тираж _____ прим. Зам. 1.

Редакційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – кафедра ПММ ЛНТУ