



## МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОЄКТУВАННЯ

Методичні вказівки до практичних занять  
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
освітніх програм «Електроніка», «Автомобільна електроніка»  
галузі знань 17 (G) Електроніка, автоматизація та електронні комунікації  
спеціальності 171 (G5) Електроніка  
денної та заочної форм навчання

УДК 519.6; 004.94

М – 74

Рекомендовано до видання вченою радою факультету комп'ютерних та інформаційних технологій ЛНТУ, протокол № \_\_ від « \_\_ » \_\_\_\_\_ 2025 року.

Голова вченої ради ФКІТ \_\_\_\_\_ Інна КОНДІУС

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ

Директор бібліотеки \_\_\_\_\_ Наталія ПОЛІЩУК

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри електроніки та телекомунікацій ЛНТУ, протокол № \_\_ від « \_\_ » \_\_\_\_\_ 2025 року.

Завідувач \_\_\_\_\_ Валентин ЗАБЛОЦЬКИЙ к.т.н., доц. кафедри  
кафедри ЕіТК \_\_\_\_\_ електроніки та телекомунікацій ЛНТУ

Укладач: \_\_\_\_\_ Наталія ЯКИМЧУК к.т.н., доц. кафедри  
електроніки та телекомунікацій ЛНТУ

Рецензент: \_\_\_\_\_ Наталія ХРИСТИНЕЦЬ к.т.н., доц. кафедри  
комп'ютерної інженерії та безпеки ЛНТУ

Відповідальний за \_\_\_\_\_ Валентин ЗАБЛОЦЬКИЙ к.т.н., доц., завідувач  
випуск: \_\_\_\_\_ кафедри електроніки та телекомунікацій  
ЛНТУ

М – 74 Математичне та комп'ютерне моделювання та проєктування. Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітніх програм «Електроніка», «Автомобільна електроніка» галузі знань 17 (G) Електроніка, автоматизація та електронні комунікації, спеціальності 171 (G5) Електроніка, всіх форм навчання / уклад. Н. М. Якимчук. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 100 с.

Видання містить комплекс завдань та теоретичні вказівки до їх виконання з дисципліни «Математичне та комп'ютерне моделювання та проєктування». Призначене для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітніх програм «Електроніка», «Автомобільна електроніка».

Н. М. Якимчук, 2025

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
Змістовий модуль 1. Математичне моделювання процесів та систем.....	5
Практична робота 1. Засоби розв'язання рівнянь Mathcad.....	12
Практична робота 2. Засоби розв'язання СЛАР Mathcad .....	19
Практична робота 3. Засоби розв'язання СНР Mathcad .....	22
Практична робота 4. Засоби інтерполяції Mathcad .....	29
Практична робота 5. Засоби апроксимації Mathcad .....	33
Практична робота 6. Засоби інтегрування Mathcad.....	40
Практична робота 6. Засоби диференціювання Mathcad .....	44
Змістовий модуль 2. Комп'ютерне моделювання електронних кіл.....	47
Практична робота 8. Моделювання електричних кіл постійного струму.....	47
Практична робота 9. Моделювання кіл змінного струму в TINA-TI.....	53
Практична робота 10. Моделювання електронних кіл з операційними підсилювачами.....	62
Практична робота 11. Дослідження гармонійних спотворень у підсилювачах за допомогою TINA-TI.....	73
Практична робота 12. Аналіз підсилювача класу А з реактивним навантаженням.....	78
Практична робота 13. Аналіз точності моделей електронних компонентів та схем у TINA-TI.....	83
Практична робота 14. Моделювання аналогових фільтруючих ланок.....	87
Практична робота 15. Температурний аналіз електричних схем.....	93
Інформаційні джерела.....	98

## ВСТУП

Математичне та комп'ютерне моделювання є ключовими інструментами сучасного інженерного проектування в галузях електроніки та автомобільної електроніки. Для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за освітніми програмами «Електроніка» та «Автомобільна електроніка» опанування цих методів є необхідною умовою розвитку професійних компетентностей, здатності до аналізу електронних систем та створення оптимальних проектних рішень.

Методичні вказівки складаються з двох змістових розділів. Перший змістовий розділ присвячений математичному моделюванню з використанням Mathcad. Цей етап дозволяє студентам формувати глибоке розуміння фізичних процесів і математичних закономірностей, що лежать в основі роботи електронних кіл та систем. Математичний апарат забезпечує можливість опису явищ у вигляді рівнянь, залежностей і функцій, які є фундаментом подальшого комп'ютерного аналізу. Саме на цьому етапі здобувачі навчаються будувати математичні моделі, аналізувати їх властивості, виконувати аналітичні та числові обчислення, проводити параметричні дослідження та інтерпретувати отримані результати.

Другий змістовий розділ орієнтований на комп'ютерне моделювання за допомогою програмного середовища TINA-TI. Це програмне середовище є практичним інструментом для створення схем електронних пристроїв, їх симуляції, аналізу частотних, перехідних та інших характеристик. У TINA-TI математичні моделі матеріалізуються у вигляді реальних схемотехнічних рішень, що дозволяє студентам переходити від абстрактних моделей до реальних конструктивних рішень, наближених до сучасних інженерних задач. Комбінування цих двох підходів формує комплексне бачення повного циклу проектування, від теоретичного аналізу до практичної реалізації. Математичне та комп'ютерне моделювання формують єдиний інженерний цикл: математична модель визначає параметри майбутньої схеми, а комп'ютерна симуляція перевіряє її працездатність і враховує реальні фактори, недосконалості компонентів та нелінійні ефекти. Такий підхід забезпечує повноцінний перехід від абстракції до практичного рішення.

Для ефективної роботи студентам необхідно опрацювати теоретичний матеріал, виконати практичні завдання відповідно до інструкцій, самостійно розв'язати рекомендовані вправи та оформити результати у вигляді звіту.

У процесі виконання робіт здобувачі опанують навички аналізу електронних систем, побудови моделей, роботи з Mathcad і TINA-TI, інтерпретації результатів моделювання та підготовки технічної документації, що є основою професійної діяльності майбутніх інженерів.

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

### 1.1 Призначення пакетів математичного моделювання

Для розв'язування задач моделювання за допомогою і для полегшення роботи при виконанні інженерних обчислень розроблено спеціальні математичні пакети, в яких можна здійснювати обчислення без скла дання й уведення програми алгоритмічною мовою. До таких пакетів належать: Mathematika, Matlab, Mathcad тощо [2-8].

Пакет Mathematika надає широкі можливості для символічних (аналітичних) перетворювань математичних функцій. Цей пакет дозволяє швидко розв'язувати багато задач лінійної алгебри, дискретної математики, математичного аналізу диференціальних рівнянь. У пакеті Mathematika більшість задач розв'язується у діалоговому режимі, без традиційного програмування, з використанням стандартних операторів, проте цей пакет вимагає значних ресурсів комп'ютера. Mathematika користується найбільшою популярністю у наукових співробітників та у теоретиків.

Пакет Matlab створювався для матричних обчислень зі своєю мовою програмування високого рівня. Потім його було оснащено сучасним графічним редактором і доповнено символічним процесором. Цей пакет використовують фахівці для інженерних розрахунків в теорії управління, електро- та радіотехніки, а також моделювання технічних систем.

Одним з найбільш простих і зручних у використанні є математичний пакет Mathcad [8]. Цей пакет дозволяє: записувати на екрані комп'ютера формули для обчислень у їхній звичайній математичній формі (навіть з використанням літер грецького алфавіту), отримувати розв'язок задачі у вигляді чисел або символічних виразів (аналітичний розв'язок), будувати графіки у дво- й тривимірному просторах, супроводжувати формули й результати обчислень текстовими поясненнями (коментарями). Mathcad також має внутрішню систему одиниць вимірювань та перевірки розмірності величин, забезпечує точність обчислень до 15-ти значущих цифр, дозволяє використовувати десяткові, вісімкові, шістнадцяткові та комплексні числа. При виконуванні обчислень в Mathcad можна використовувати понад 300 внутрішніх стандартних функцій: тригонометричних, статистичних, апроксимувальних та інших спеціальних функцій, використовуваних при розв'язуванні інженерних задач.

### 1.2 Елементи математичного пакета Mathcad

На рис. 1 наведено приклад вікна пакета Mathcad 2000 Professional. Меню команд, яке відображається в першому рядку вікна, містить стандартні заголовки, характерні для більшості програм: File, Edit, View, Insert, Format, Window, Help.

Підменю заголовка File містить команди для створення нового документа (файлу), а також для відкриття, збереження і друку документів. Підменю заголовка Edit містить стандартні команди для редагування документа: Cut, Copy, Paste, Delete, Replace.

Підменю заголовка View містить кілька команд для налаштування вигляду вікна: Ruler – встановлює горизонтальну лінійку з поділками над документом; Zoom – налаштовує масштаб відображення документа на екрані (від 10% до 200%); Toolbars – відображає панелі інструментів у вікні, такі як Standard, Formatting, і Math.

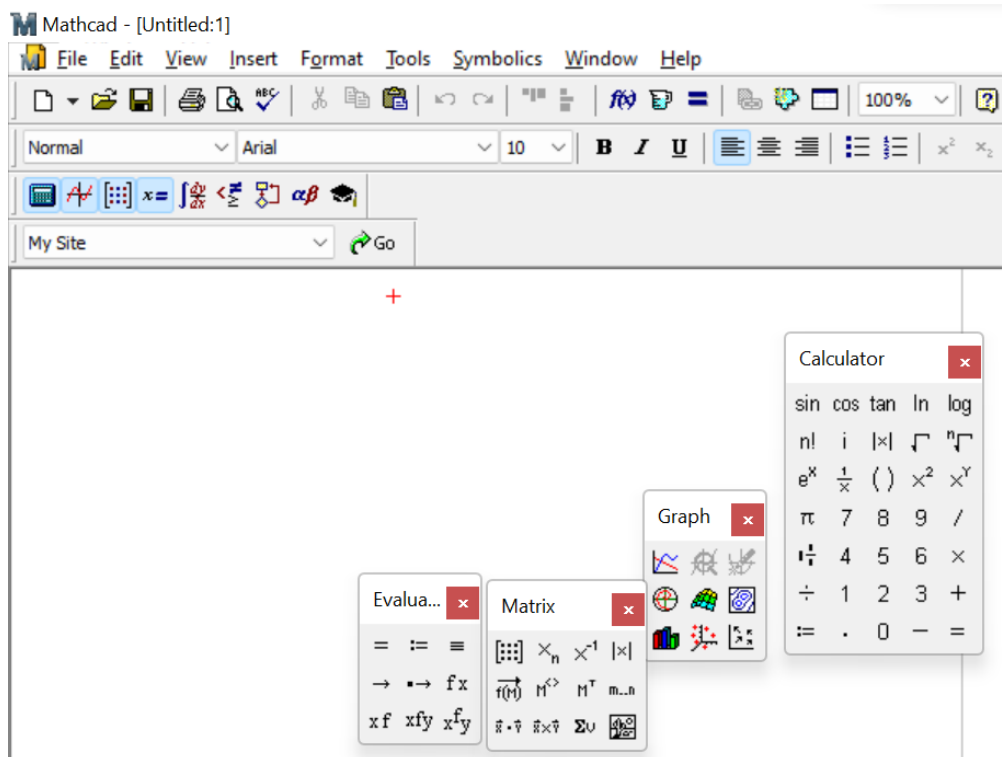


Рисунок 1 – Вікно пакета Mathcad 2000 Professional

Панелі інструментів Standard і Format містять такі ж піктограми, як і в інших програмах (наприклад, у Microsoft Word). Панель інструментів Tools, яка є тільки в Mathcad, містить шаблони символів для написання математичних формул, виконання символічних обчислень, побудови графіків та операторів програмування.

На робочому полі Mathcad (див. рис. 1) можна відкрити кілька груп шаблонів: Calculator – цифри та прості математичні функції; Matrix – робота з матрицями; Graph – побудова графіків у декартових та полярних координатах; Calculus (або Math Analysis) – знаки математичного аналізу (інтеграли, похідні, ряди та границі); Programming – шаблон для програмування в Mathcad, який включає інструменти для створення та виконання алгоритмів, циклів і умовних операторів; Boolean – шаблон для логічних операцій, які включають порівняння величин (менше, більше, рівне, тощо) та виконання логічних операцій (AND, OR, NOT), тощо.

Підменю заголовка Insert зображено на рис. 2. Команда Graph дозволяє побудувати графіки, команда Matrix створює шаблон для введення значень матриць. Команда Function дозволяє вставити в формулу одну з вбудованих функцій Mathcad. Команда Units дозволяє здійснювати обчислення фізичних величин з їхніми одиницями виміру. Команда Text Region дозволяє вводити пояснення до обчислень, наприклад текст «Приклад розрахунків» на робочому полі Mathcad.

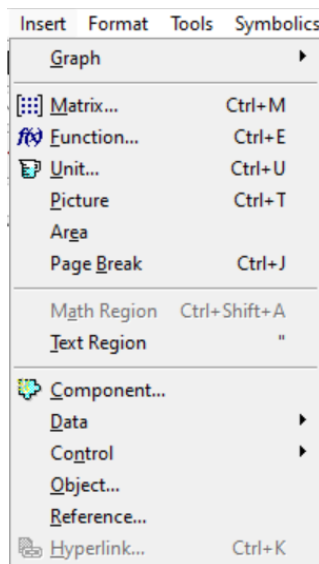


Рисунок 2 – Підменю команди Insert

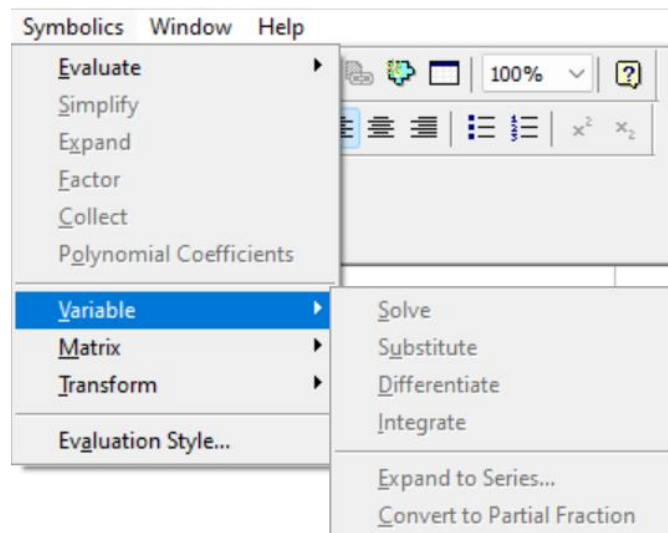


Рисунок 3 – Підменю команди Symbolics

Підменю команди Symbolics (рис. 3) призначене для аналітичного розв'язання задач. Команда Evaluate використовується для подання розв'язку задачі, виокремленої курсором, у вигляді символів. Інші команди дозволяють виконувати перетворення над формулами: зводити подібні члени та спрощувати алгебраїчні вирази, обчислювати похідні та невизначені інтеграли, знаходити перетворення Фур'є та Лапласа, тощо.

### 1.3 Обчислення арифметичних виразів за формулами

Для обчислення арифметичних виразів треба перейти до математичної області (курсор матиме вигляд червоного хрестика) і за допомогою шаблонів записати математичний вираз. Для отримання результату обчислення виразу треба виокремити курсором цей вираз та натиснути клавішу « $\Rightarrow$ » (дорівнює). Для присвоєння значення змінній слід записати в математичній області ім'я змінної, поряд з ним знаки « $:=$ » (дві крапки й дорівнює), а потім математичний вираз. Наприклад, для обчислення змінної у при  $x=1,5$  вираз:

$$y = \frac{\cos^3(\arctg^2(|x + \sqrt[3]{x}|)) + \sin^2 x}{\sin|\lg^2(\sqrt{x} + 2.8)|}$$

слід записати у вигляді:

$$x := 1.5$$

$$y := \frac{[\cos[ (\text{atan}(|x + \sqrt[3]{x}|))^2 + (\sin(x))^2 ]]^3}{\sin[ |(\log(\sqrt{x} + 2.8))^2 | ]} \quad y = -1.301$$

Зверніть увагу на те, як правильно записувати функції з піднесенням до степеня: математичний запис  $\sin^2 x$  у Mathcad записується як  $(\sin(x))^2$ .

Імена змінних та функцій в Mathcad, як у кожній мові програмування, – це послідовність символів. Символами в імені змінної можуть бути латинські й грецькі літери, цифри та спеціальні знаки: % (відсоток), \_ (підкреслення), ' (штрих). Імена не

повинні розпочинатися з цифри чи спеціальних символів, наприклад:  $F, f, \lambda, \alpha\beta\_1, sum2$ . Слід зазначити, що літери  $F$  та  $f$  позначають різні величини.

Елементи векторів та матриць записують із індексами, використовуючи для цього шаблон групи Calculator  $\boxed{x_n}$ , наприклад:  $a_i, c_{jk}, w_{i+j,m,3}$ .

В Mathcad є іменні константи, числові значення яких з 15-ма значущими цифрами підставлятимуться до формули за обчислень автоматично:  $\pi = 1.1415\dots$ ,  $e = 2.71828\dots$ ,  $\infty = 10^{307}$ ,  $\% = 0.01$ ,  $TOL = 10^{-3}$ , тощо.

Для обчислення значень функцій з розгалуженням треба використовувати умовний оператор, який має загальний вигляд: *if* ( *логічний\_вираз*, *арифметичний\_вираз\_1*, *арифметичний\_вираз\_2*), де *логічний\_вираз* – це запис умови з використанням шаблонів групи Boolean, *арифметичний\_вираз\_1* – запис функції, за якою слід виконувати обчислення, якщо умову виконано, *арифметичний\_вираз\_2* – запис функції, за якою слід виконувати обчислення, якщо умови не дотримано. Наприклад, для обчислення формули:

$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{за } x < 0; \\ \sqrt{3x+2.4} & \text{за } x \geq 0 \end{cases}$$

в Mathcad слід записати оператор:

$$y := \text{if}(x < 0, \sin(x), \sqrt{3 \cdot x + 2.4})$$

Обчислення значень сум, добутків, похідних та визначених інтегралів виконують з використанням відповідних шаблонів групи Calculus (або Матаналіз) для записування формул. Приклад розрахунків у Mathcad:

$$\begin{aligned} S &:= \sum_{i=1}^5 i^2 & S &= 55 & P &:= \prod_{k=1}^6 k & P &= 720 \\ x &:= 9 & f &:= \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) & f &= 19 \\ T &:= \int_1^3 (x^2 + x + 1) dx & T &= 14.667 \\ n &:= \sum_{i=1}^7 \text{if} \left[ [(i-2) \cdot (i-4)] = 0, 0, \frac{(i-2) \cdot (i-4)}{(i+3)} \cdot \prod_{k=1}^3 \text{if} \left[ k \neq 1, \frac{(k-1)}{k+1}, 1 \right] \right] \\ n &= 0.558 \end{aligned}$$

Останній оператор, який наведено в прикладі, обчислює значення змінної  $n$  за формулою:

$$n = \sum_{i=1}^7 \frac{(i-2)(i-4)}{(i+3)} \prod_{k=1}^3 \frac{(k-1)}{(k+1)}$$

Для визначення результату за цією формулою слід вилучати доданки та співмножники, які дорівнюють нулеві, що реалізовано за допомогою умовного оператора *if*.

## 1.4 Символьне обчислення похідних та інтегралів

У попередніх прикладах ми обчислювали числові значення похідних та інтегралів, тобто мали результат обчислень у вигляді числа. В науковій діяльності часто виникає потреба віднаходити результат у вигляді функції, до якої можна потім підставляти замість змінних які завгодно числа; такий спосіб називають аналітичним, чи то символьним обчисленням. Існують два способи символьного обчислення у Mathcad: за записом математичного виразу та за допомогою відповідних шаблонів [3, 4, 8].

Розглянемо спочатку спосіб символьних обчислень за записом математичного виразу. Наприклад, треба віднайти значення похідної та інтегралу функції:

$$f(a, b, c, d, x) = a^3 b^6 \sqrt{c^3 d} \sin(7x - a)$$

Спочатку запишемо в Mathcad лише математичний вираз

$$a^3 \cdot b^6 \cdot \sqrt{c^3 \cdot d} \cdot \sin(7 \cdot x - a)$$

Щоби віднайти похідну від математичного виразу стосовно певної змінної (наприклад  $a$ ) у символьному поданні функції, треба виконати такі дії: виокремити курсором в математичному виразі цю змінну, в команді меню Mathcad Symbolics покажчиком миші обрати в ньому пункт Variable і натиснути Differentiate. У вікні Mathcad з'явиться результат символьного диференціювання (перша похідна) математичного виразу за

$$-3 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot (c^3 \cdot d)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \sin(-7 \cdot x + a) - a^3 \cdot b^6 \cdot (c^3 \cdot d)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \cos(-7 \cdot x + a)$$

змінною  $a$ :

Щоб віднайти інтеграл від математичного виразу стосовно певної змінної (наприклад  $b$ ) у символьному поданні функції, треба виконати такі дії: виокремити курсором в математичному виразі цю змінну, в команді меню Mathcad Symbolics покажчиком миші обрати в ньому пункт Variable і натиснути Integrate. У вікні Mathcad з'явиться результат символьного інтегрування математичного виразу за змінною  $b$ :

$$\frac{-1}{7} \cdot a^3 \cdot b^7 \cdot (c^3 \cdot d)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \sin(-7 \cdot x + a)$$

Можна виконувати символьні обчислення в інший спосіб – за допомогою шаблонів. В цьому разі ми спочатку обираємо один із шаблонів групи Calculus:  $\frac{d}{dx}$ ,  $\frac{d^n}{dx^n}$ ,  $\int$  дописуємо до шаблону функцію для обчислення і виділяємо курсором усю формулу. Для отримання результату символьного обчислення виконуємо послідовність команд меню Symbolics, Evaluate, Symbolically або обираємо у групі шаблонів Evaluate символ  $\rightarrow$ .

Нижче наведено приклад символьного обчислення похідних та інтегралів за допомогою шаблонів:

$$\frac{d}{dx} a^3 \cdot b^6 \cdot \sqrt{c^3 \cdot d} \cdot \sin(7 \cdot x - a) \rightarrow 7 \cdot a^3 \cdot b^6 \cdot (c^3 \cdot d)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \cos(-7 \cdot x + a)$$

$$\int a^3 \cdot b^6 \cdot \sqrt{c^3 \cdot d} \cdot \sin(7 \cdot x - a) dx \rightarrow \frac{-1}{7} \cdot a^3 \cdot b^6 \cdot (c^3 \cdot d)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \cos(-7 \cdot x + a)$$

## 1.5 Обчислення таблиць значень функцій та побудова графіків

Порядок обчислень розглянемо на прикладі. Нехай треба обчислити й вивести у формі таблиці та графіків значення двох функцій  $f_1 = e^{-x}$  і  $f_2 = e^{-x} \sin(5x)$ , в яких дискретний аргумент  $x$  змінюється в межах від 1 до 5 ( $x \in [1; 5]$ ) з кроком  $h=0,05$ .

Для обчислення таблиці значень функції в Mathcad треба спочатку визначити, в який спосіб змінюється аргумент функції (змінна  $x$ ), записати формулу функції, а потім сформуванати таблицю її значень [6, 8].

Для визначення в Mathcad аргументу функції слід використовувати прави ла запису інтервальних змінних у такому вигляді:

$$x := x_n, x_n+h, \dots, x_k$$

де  $x_n$  – початкове значення змінної (аргументу функції  $x$ ),  $x_n+h$  – наступне значення змінної;  $x_k$  – кінцеве значення змінної;  $h$  – крок, за яким змінюється змінна. Наприклад, запис

$$x := 1, 1.05, \dots, 5.0$$

означає, що аргумент  $x$  набуває значень 1, 1.05, 1.10, 1.15, ..., 4.95, 5.0, тобто змінюється з кроком 0.05. Далі запишемо функцію для обчислення (наприклад  $f_1$ ):


$$f_1(x) := e^{-x}$$

Для обчислення значень таблиці функції треба записати аргумент та ім'я функції зі знаком = (дорівнює), після чого нижче у вікні Mathcad з'являться відповідні стовпчики значень  $x$  та  $f_1(x)$  у вигляді таблиць

$x =$	$f_1(x) =$
1.00	0.368
1.05	0.355
1.10	0.333
1.15	0.317
1.20	0.301
1.25	0.287
1.30	0.273
1.35	0.259
1.40	0.247

Для перегляду усіх обчислених значень функції в Mathcad можна користуватися смугою прокручування.

Щоби побудувати на одному бланку графіки кількох функцій від одного аргументу

(наприклад, для функцій  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$ ), треба виконати такі дії: за допомогою шаблону групи Graph  відкрийте форму для побудови графіка функцій одного аргументу (рис. 4);

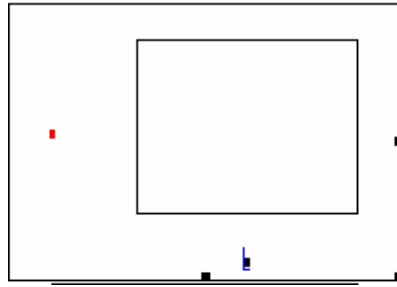


Рисунок 4 – Форма побудови графіку в декартових координатах

- в позначці нижче від осі абсцис (під прямокутником) запишіть аргумент  $x$ , а в позначці ліворуч від осі ординат (ліворуч від прямокутника) запишіть спочатку ім'я функції  $f_1(x)$ , поставте кому і нижче допишіть ім'я другої функції  $f_2(x)$ ;
- відведіть курсор за межі графічної області та клацніть клавішею миші. Mathcad побудує графіки обох функцій, як це зображено на рис. 5.

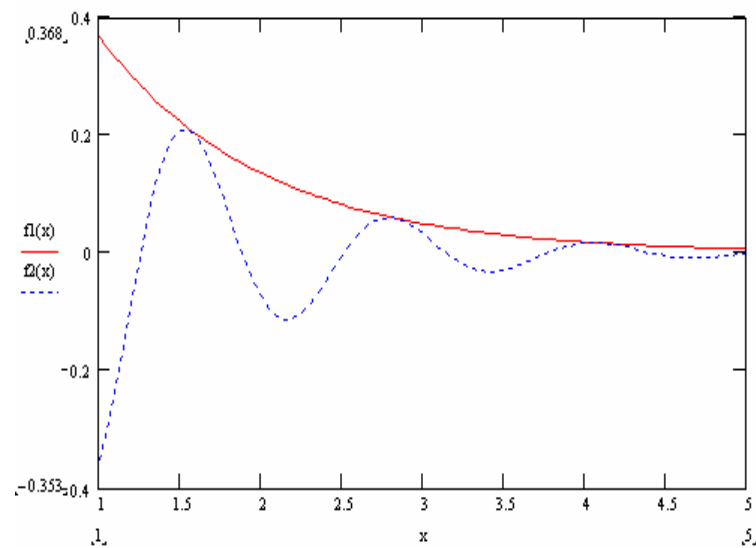


Рисунок 5 – Графіки функцій  $f_1 = e^{-x}$  та  $f_2 = e^{-x} \sin(5x)$

## Практична робота 1

### ЗАСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ MATHCAD

Мета: ознайомлення студентів із засобами розв'язання рівнянь у середовищі MathCAD, навчання використання вбудованих функцій та операторів для чисельного та аналітичного розв'язання.

#### Вказівки до виконання роботи

В числових методах ми стикаємося з різними задачами. Але більшість з них може бути сформульована у вигляді  $y = A(x)$ , де  $x \in X$ ,  $y \in Y$  і  $A(x)$  – деяка задана функція. Задача полягає або у відшуванні  $y$ , якщо задано  $x$ , або у відшуванні  $x$ , якщо задано  $y$ . Та зовсім не завжди за допомогою засобів класичної математики ми можемо розв'язати точно ці задачі застосовуючи скінчене число кроків [2-5]. Іноді задача і може бути вирішена точно, але скористуватися відповіддю можна лише після трудомістких обчислень. У пакеті Mathcad рівняння та їх системи можна розв'язувати в аналітичному вигляді, використовуючи оператори символьних перетворень.

Приклад 1. Розв'язати рівняння  $x^2 - a = 0$  відносно  $x$  і відносно  $a$ .

Символьний розв'язок цих задач у пакеті займе два рядки:

$$x^2 - a \text{ solve, } x \rightarrow \pm a$$

$$x^2 - a \text{ solve, } a \rightarrow x^2$$

Для того щоб розв'язати символьно рівняння  $x$ , треба в панелі символьних обчислень клацнути по кнопці **solve**. На екрані з'явиться конструкція **solve**. В квадрат зліва заносимо ліву частину рівняння, а в квадрат – ім'я змінної, відносно якої треба розв'язати рівняння. Після цього клацнемо по вільному місцю в робочому документі. Результат – значення кореня рівняння – з'явиться справа від стрілки. Знак « $\rightarrow$ » – символьне виведення значення розв'язка рівняння.

В MathCAD для **чисельного** розв'язання рівнянь призначені функції **root**, **polyroots**, **given/find** [8]. Функція **root** розв'язує нелінійні рівняння, функція **polyroots** – алгебраїчні рівняння. Блок **given** безпосередньо призначений для розв'язання систем нелінійних рівнянь, але його теж можна використовувати для знаходження коренів рівнянь.

Для розв'язання алгебраїчних рівнянь функція **polyroots** може використовувати метод Лагера або метод супроводжуючої матриці, який дозволяє отримати трохи більш точний розв'язок. За замовчанням встановлено більш стабільний метод Лагера. Контекстне меню функції (рис. 1.1) дозволяє змінити метод розв'язання.

Точність розв'язку рівняння функцією **polyroots** не залежить від значення змінної **TOL**. Функція знаходить всі корені алгебраїчного рівняння та повертає результат у вигляді вектора-стовпця.

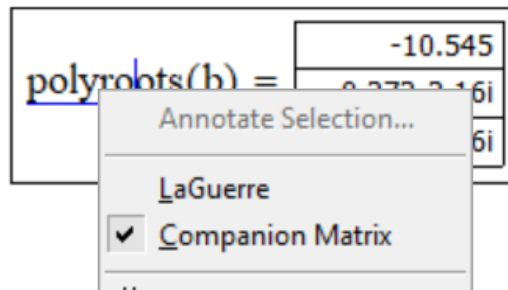


Рисунок 1.1 – Контекстне меню функції **polyroots**

Аргументом функції **polyroots** є вектор-стовпець коефіцієнтів алгебраїчного рівняння. Коефіцієнти мають розташовуватися в порядку збільшення степеню змінної рівняння. Тобто починатися з елемента, що має нижчий степінь.

Наприклад, для алгебраїчного рівняння  $2x^3 + 20x^2 - 2x + 100 = 0$  застосування функції **polyroots** може мати наступний вигляд:

$$\text{polyroots} \left( \begin{pmatrix} 100 \\ -2 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{matrix} -10.545 \\ 0.272 - 2.16i \\ 0.272 + 2.16i \end{matrix}$$

$$b := \begin{pmatrix} 100 \\ -2 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(b) = \begin{matrix} -10.545 \\ 0.272 - 2.16i \\ 0.272 + 2.16i \end{matrix}$$

Функція **root** слугує для знаходження кореня рівняння чисельними методами. Обмежень на вид рівняння немає. В функції реалізовано два методи: різновид метода **січних** та різновид метода **дихотомії** [4].

Метод січних за алгоритмом **Мюлера** для заходження чергового наближення кореня використовує три попередні точки, тобто квадратичну інтерполяцію функції рівняння.

Метод дихотомії за алгоритмом **Брента** комбінує вибір точок діленням відрізка навпіл та метод **Рідера** з квадратичною зворотною інтерполяцією та пошуком кореня  $x$  через квадратичні функції експонент  $f(x)$ .

Для застосування методу **січних** в функції **root(f(x),x)** використовуються два аргументи: вираз рівняння у вигляді імені функції користувача чи безпосередньо виразу функції рівняння в нормальному вигляді та змінна, відносно якої необхідно розв'язання рівняння. Змінна повинна мати попередньо визначене чисельне значення початку пошуку.

Наприклад,

$$z := 5$$

$$y(x) := \sqrt[3]{x - 5}$$

$$\text{root}(\sqrt[3]{z - 5}, z) = 5$$

$$\text{root}(y(z), z) = 5$$

Для використання методу **дихотомії** в функції **root(f(x),x,a,b)** після імені змінної рівняння треба додати два параметри: початкову  $a$  та кінцеву  $b$  точки діапазону пошуку кореня у вигляді чисельних значень або попередньо визначених змінних.

Наприклад,

$$z := 5 \quad y(x) := \sqrt[3]{x - 5} \quad a := 1 \quad b := 7$$

$$\text{root}(\sqrt[3]{z - 5}, z, 1, 7) = 5$$

$$\text{root}(y(z), z, a, b) = 5$$

Функція може бути застосована для розв'язання рівнянь з параметрами. Для таких рівнянь значення параметра повинно бути попередньо визначено явно у вигляді чисельного значення.

Наприклад, параметр можна визначити поза функцією рівняння:

$$a := 2 \quad z := 5$$

$$y(x) := a \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 100$$

$$\text{root}(y(z), z) = -10.545$$

Параметр рівняння також може бути введено аргументом функції рівняння:

$$ya(a, x) := a \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 100$$

$$\text{root}(ya(1, z), z) = -20.34$$

Другий спосіб є більш правильним.

Функція **root** може бути застосована всередині функції користувача.

Наприклад:

$$y(a, x) := x - a$$

$$b(f, p, z) := \text{root}(f(p, z), z)$$

$$z := 4$$

$$b(y, 0.6, z) = 0.6$$

В документації СКМ стверджується, що чисельний корінь рівняння знаходиться функцією **root** з точністю, значення якої визначається системною змінною **TOL**.

Слід відмітити, що до MathCAD 13 критерієм розв'язання рівняння функцією **root** слугувала умова того, що абсолютне значення функції рівняння в точці наближення  $y(x_i)$  є меншим за значення абсолютної похибки **TOL**:  $|y(x)| \leq TOL$ .

Такий критерій зустрічається в деяких джерелах комп'ютерної тематики.

Це призводило до того, що функція **root** визначала різні корені для тотожних з математичної точки зору рівнянь, що суперечило математичним законам. Наприклад, таким рівняннями є рівняння  $y(x) = 0$  та це рівняння, помножене на сталу  $k \leq 1$ :  $k \cdot y(x) = 0$ .

В версіях з MathCAD 14 критерій було змінено на більш математично вірний  $|x_{i+1} - x_i| \leq TOL$ .

Наприклад, для рівняння  $y(x) = 2x^3 + 20x^2 - 2x + 100 = 0$  та тотожно зміненого рівняння  $s(x) = 0,001(2x^3 + 20x^2 - 2x + 100) = 0$  застосування функції **root** дає однакове значення кореня:

$$y(x) := 2 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 100 \quad z := -5$$

$$s(x) := 10^{-3} \cdot y(x)$$

$$\text{root}(s(z), z) = -10.545 \quad \text{root}(y(z), z) = -10.545$$

Застосування функції **root** потребує обов'язкового аналізу отриманих результатів [8].

Використання функції **root** в режимі методу **січних** може привести до неочікуваного або невірного результату.

Наприклад, для нашого рівняння графік (рис. 1.2) показує наявність одного дійсного кореня в околі значення  $x = -10.5$ .

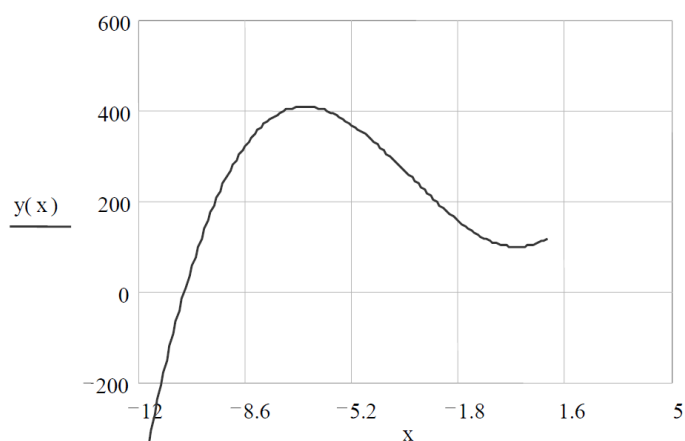


Рисунок 1.2 – Графік функції  $2x^3 + 20x^2 - 2x + 100 = 0$

Застосування функції з початковим наближенням  $x = -5$  видає вірне дійсне значення кореня  $-10,545$ . Визначення початкового наближення  $x = 0$  призводить до комплексного значення, яке є коренем рівняння, але не є дійсним числом.

$$y(x) := 2 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 100 \quad z := -0$$

$$\text{root}(y(z), z) = 0.272 + 2.16i$$

Коренями рівняння  $f(x) = x^2 + 0.0001 = 0$  є комплексні числа  $x = \pm 0.01i$ . Використання методу січних в функції **root** з точністю за замовчанням ( $TOL = 0.001$ ) дає дійсний корінь  $x = 0.018$ . Формальний критерій співвідношення між значенням функції та похибкою виконано:  $f(0.018) = 4.225 \cdot 10^{-4} < 0.001$ . Проте з позицій теоретичної математики знайдене значення не можна суворо вважати коренем рівняння:

$$y_2(x) := x^2 + 0.0001$$

$$x_2 := \text{root}(y_2(z), z) \quad x_2 = 0.018$$

$$y_2(x_2) = 4.225 \times 10^{-4}$$

Для знаходження вірного значення кореня можна спробувати зменшити похибку нижче за значення вільного члена рівняння:

$$y_2(x) := x^2 + 0.0001 \quad \text{TOL} := 10^{-4}$$

$$x_2 := \text{root}(y_2(z), z) \quad x_2 = -0.01i$$

$$y_2(x_2) = 0$$

Слід зазначити, що спосіб зменшення значення похибки не є універсальним. Наприклад, функція **root** знаходить для рівняння  $1/x=0$  корінь  $x$ , який формально задовольняє критерію закінчення пошуку для будь-якого малого значення похибки:

$$y_2(x) := \frac{1}{x}$$

$$x_2 := \text{root}(y_2(z), z) \quad x_2 = 3.297 \times 10^{10}$$

$$y_2(x_2) = 3.033 \times 10^{-11}$$

Проте рівняння з точки зору математики є некоректним та не має взагалі коренів.

Значення початкового наближення має особливу вагу для трансцендентних рівнянь, які мають декілька коренів. Функції **root** з початковою точкою пошуку зі значенням похідної, що наближене до нуля, може видати результат, який буде значно віддаленим від очікуваного значення. Чим ближче до нуля є значення похідної функції рівняння в початковій точці, тим більшим буде значення знайденого кореню.

Наприклад, рівняння  $\sin(x) = 0$  має корені  $x = \pi k$ , де  $k$  – ціле число. Звичайний виклик функції **root** дозволяє отримати за один виклик тільки один корінь

$$z := 1 \quad \text{root}(\sin(z), z) = -5.126 \times 10^{-13}$$

Проаналізуємо залежність винайдених функцією **root** коренів від початкового значення. Для цього визначимо початкове значення ранжованою змінною в околі  $\pm 0.1$  від точки  $x = \pi/2$  з кроком 0.02 та застосуємо функцію **root** для визначеної ранжованої змінної всіх початкових значень.

$$x := \frac{\pi}{2} - 0.1, \frac{\pi}{2} - 0.08, \dots, \frac{\pi}{2} + 0.1$$

$$y_M(z) := \text{root}(\sin(z), z)$$

$x =$	$\frac{y(x)}{\pi} =$	$\sin(y(x)) =$
1.4708	-2.0000	$-2.107 \cdot 10^{-14}$
1.4908	-2.0000	$1.357 \cdot 10^{-9}$
1.5108	-4.0000	$-2.137 \cdot 10^{-13}$
1.5308	9.0000	$1.102 \cdot 10^{-15}$
1.5508	$9.1040 \cdot 10^3$	$-1.74 \cdot 10^{-12}$
1.5708	$-7.2900 \cdot 10^4$	$1.329 \cdot 10^{-11}$
1.5908	12.0000	$5.636 \cdot 10^{-15}$
1.6108	74.0000	$-1.957 \cdot 10^{-15}$
1.6308	58.0000	$-8.811 \cdot 10^{-13}$
1.6508	3.0000	0
1.6708	4.0000	0

Аналіз наведених результатів показує, що для всіх початкових точок в визначеному околі функція знайшла вірні корені. Абсолютна похибка для всіх точок не перевищує  $10^{-9}$ . Але замість очікуваних значень кореня  $x=\pi$  знайдені значення кореню в обраному діапазоні початкових точок віддалені від очікуваного значення від 2-х до 10000 періодів.

Слід зазначити, що розрахунки в діапазоні за умови визначення початкового наближення за допомогою ранжованих змінних разом в функції **root** в «класичних» версіях MathCAD потребує обережності [3, 8].

Наприклад, проведемо аналіз залежності знайденого кореня функцією **root** тотожних математично рівнянь від положення початкової точки пошуку в діапазоні від -1 до 0.2 з кроком 0.1:

start := -1 stop := 0.2 dx := 0.1

zz := start, start + dx ... stop

zz = root(y(zz), zz) root(s(zz), zz)

-1	-10.545	-10.545
-0.9	-10.545	-10.545
-0.8	-10.545	-10.545
-0.7	-10.545	-10.545
-0.6	-10.545	-10.545
-0.5	-10.545	-10.545
-0.4	-10.545	-10.545
-0.3	-10.545	-10.545
-0.2	-10.545	-10.545
-0.1	-10.545	-10.545
0	-10.545	0
0.1	0.272-2.16i	0.1
0.2	-10.545	-10.545

$z0 := 0 \quad z01 := 0.1$

$\text{root}(s(z01), z01) = 0.1$

$\text{root}(y(z01), z01) = 0.272 - 2.16i$

$\text{root}(s(z0), z0) = 0.272 + 2.16i$

$\text{root}(y(z0), z0) = 0.272 + 2.16i$

Аналіз результатів показує, що для початкової точки  $x = 0.1$  функція **root** для рівняння  $y(x) \quad 2x^3+20x^2-2x+100 = 0$  знаходить замість дійсного кореня  $x = -10.545$

комплексний корінь  $x = 0.272 - 2.26i$ . Розрахунок для одиночної початкової точки показує, що функція знаходить комплексний корінь  $x = 0.272 + 2.26i$  ще й для початковій точці  $x = 0$ . Обидві відповіді є коренями рівняння.

Для модифікованого рівняння  $s(x)$  функція **root** змінює знайдені корені для значень ранжованої змінної початкової точки 0 на  $x = 0$  та для точки 0.1 на  $x = 0.1$ . Обидві відповіді є невірними. Розрахунок для одиночної початкової точки показує, що для точки 0 відповіддю є комплексне значення  $x = 0.272 + 2.26i$ , що є коренем рівняння. Для початкової точки 0.1 функція **root** визначає невірний результат незалежно від типу початкової точки.

З вищенаведеного можна зробити висновок, що до результатів комп'ютерних обчислень слід відноситися критично. Знайдені функцією **root** корені потребують перевірки на достовірність. Перед застосуванням функції **root** слід проводити аналіз поведінки функції рівняння графічно або аналітично, та аргументовано обирати початкову точку пошуку.

З урахуванням того, що для алгебраїчного рівняння функція рівняння може бути записана у вигляді добутку  $f(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_N)$ , де  $x_i$  – корені рівняння,  $N$  – степінь полінома, послідовне застосування функції **root** дозволяє знайти всі корені рівняння.

Перший корінь  $x_i$  шукається для вихідного рівняння  $h(x) = f(x)$  степеня  $N$ , подальші – для функції степеня  $N-1$ , яка є часткою ділення вихідної функції на різницю  $x-x_i$ :  $h(x) = h(x)/(x-x_i)$ , де  $x_i$  – корінь рівняння, який знайдено на попередньому кроці.

Для розв'язання рівнянь методом січних можна надати наступні рекомендації:

– точку початкового наближення слід обирати якомога ближче до очікуваного значення кореня таким чином, щоб сікуча з точки початкового наближення була направлена в бік кореня;

– не слід обирати початкову точку в околі екстремумів функції рівняння, де похідна має абсолютне значення менше за 2;

– в разі, коли зміна початкової точки не призводить до знаходження кореня, можна спробувати замінити вихідну функцію  $f(x)$  часткою  $g(x)$  від ділення вихідної функції на її похідну:  $g(x) = f(x)/f'(x)$ .

Функція  $g(x)$  має нулі в тих же точках, що й вихідна  $f(x)$ , але має зворотну поведінку: в зонах, де функція  $f(x)$  змінюється швидко,  $g(x)$  змінюється повільно, в зонах, де функція  $f(x)$  змінюється повільно,  $g(x)$  змінюється швидко.

### Завдання для самостійного виконання

Обчислити всі корені рівняння згідно завдань викладача наступними методами:

- за допомогою функції `root( f(x), x)`;
- за допомогою функції `polyroot(v , x)`;
- за допомогою функції `solve`;
- за допомогою конструкції `Given...Find` .

Навести лістинг Mathcad-документа.

## Практична робота 2

### ЗАСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР MATHCAD

Мета: ознайомлення студентів із засобами розв'язання систем лінійних арифметичних рівнянь у середовищі MathCAD, навчання використання вбудованих функцій та операторів для чисельного та аналітичного розв'язання.

#### Вказівки до виконання роботи

Для визначених систем, в яких кількість рівнянь співпадає з кількістю невідомих може застосовуватися «прямий», матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь (СЛАР)  $x^{\vec{}} = A^{-1}b^{\vec{}}$  [4].

Розв'язання всіх СЛАР, в тому числі перевизначених та невизначених систем, в MathCAD забезпечує функція **lsolve**. В функції реалізовано різновид метода Гауса – метод трикутних LU матриць. Похибка розв'язання СЛАР «прямим» методом та функцією **lsolve** не залежить від значення змінної **TOL** та збільшується зі збільшенням розмірності системи.

Точність розв'язання СЛАР в значній мірі залежить від обумовленості системи. Мірою обумовленості СЛАР слугує **число обумовленості** (condition number). Системи, в яких коефіцієнти кількох рівнянь близькі називаються системами з поганою обумовленістю. Погана обумовленість призводить до нестійкості методів розв'язання та збільшенню похибки. Оцінити числа обумовленості в MathCAD можна функціями **cond1**, **cond2**, **conde** [3, 8]. В разі отримання невірної відповіді слід перевірити коректність СЛАР.

В якості аргументів функції **lsolve(A,B)** визначається матриця коефіцієнтів СЛАР **A** та вектор-стовпець правих частин СЛАР **B**.

В наведеному нижче прикладі функція **lsolve** застосована для перевизначеної (3x2) та невизначеної (3x4) СЛАР. З результатів прикладу видно, що для визначених систем матричний метод та функція **lsolve** забезпечують вірне розв'язання та надають однаковий результат. Для систем з неквадратною матрицею матричний метод не дозволяє знайти розв'язання, а функція **lsolve** знаходить розв'язок, який є невірним для недовизначеної системи та вірним – для перевизначеної.

$$A := \begin{pmatrix} 2.3 & 6.7 & 9.8 \\ 24 & 42 & 1 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$
$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x1 := A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0.272 \\ -0.111 \\ 0.114 \end{pmatrix}$$

$$x01 := \text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 0.272 \\ -0.111 \\ 0.114 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x01 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Недовизначена система

$$A := \begin{pmatrix} 2.3 & 9.8 \\ 24 & 1 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$x2 := A^{-1}B$$

$$x02 := \text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.159 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x02 = \begin{pmatrix} 1.742 \\ 2.082 \\ 2.388 \end{pmatrix}$$

Перевизначена система

$$A := \begin{pmatrix} 2.3 & 6.7 & 2.8 & 9.8 \\ 24 & 42 & 7 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$x3 := A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0.156 \\ -0.069 \\ 0.155 \\ 0.068 \end{pmatrix}$$

$$x03 := \text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 0.156 \\ -0.069 \\ 0.155 \\ 0.068 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x03 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Отримані вбудованими засобами розв'язку СЛАР ОБОВ'ЯЗКОВО потребують перевірки [3, 8].

Навіть для визначених СЛАР MathCAD без попередження можуть видати невірну відповідь. Наприклад, для наведеної нижче визначеної системи 4x4 обидва методи не дали вірної відповіді. Причина полягає в тому, що наведена СЛАР не може розв'язуватися стандартними методами, так як визначник матриці дорівнює нулю.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3.2 & 3.4 \\ 2 & 1 & -0.2 & -0.4 \\ 3 & 1.4 & -0.3 & -0.6 \\ -5 & -10 & 16 & -17 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.8 \\ 2.7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0$$

$$\text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} -1.708 \times 10^{15} \\ 26.457 \\ -6.276 \times 10^{15} \\ -5.404 \times 10^{15} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1.708 \times 10^{15} \\ 24 \\ -6.276 \times 10^{15} \\ -5.404 \times 10^{15} \end{pmatrix}$$

Системи також можна вирішувати за допомогою конструкції **GIVEN...FIND**. Для того щоб розв'язати систему у пакеті треба з клавіатури в робочий документ записати службове слова **Given**. Далі нижче та правіше цього слова ліву частину першого рівняння системи, а далі символічний знак рівності («жирне» =) і нуль. Аналогічно записуємо всі рівняння системи. Правіше і нижче останнього рівняння системи записуємо ім'я функції **FIND** і у дужках перелічуємо ім'я змінних, значення яких треба знайти. Після цього вираз **FIND (x, y, z)** виділяємо синьою кутовою рамкою, клацаємо по кнопці «→» в панелі символічних операцій і справа від стрілки в робочому документі з'являється відповідь у вигляді матриці, кожний стовпець якої утримує відповідь – один із розв'язків системи. Наприклад для системи рівнянь:

$$\begin{cases} x(z+1)^2 - 27(x+z) = 0 \\ (1+x^2) \sqrt[4]{y-2} - 2x^2 = 0 \\ \sqrt{y-2} (z-2) + z = 0. \end{cases}$$

Mathcad – документ буде виглядати так:

$$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$$

**Given**

$$x \cdot (z+1)^2 - 2 \cdot z \cdot (x+z) = 0$$

$$(1+x^2) \cdot \sqrt[4]{y-2} - 2 \cdot x^2 = 0$$

$$\sqrt{y-2} \cdot (z-2) + z = 0$$

$$FIND(x, y, z) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ми одержали два розв'язки системи:  $x_1 = 0, y_1 = 2, z_1 = 0$  та  $x_2 = 1, y_2 = 3, z_2 = 1$ .

### Завдання для самостійного виконання

Розв'язати системи рівнянь згідно завдань викладача наступними методами:

- матричним способом ( $X := A^{-1} \cdot B$ );
- за допомогою функції  $\text{lsolve}(\dots)$ ;
- за допомогою функції  $\text{Given...Find}$ .

Навести лістинг Mathcad-документа.

## Практична робота 3

### ЗАСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СНР MATHCAD

Мета: ознайомлення студентів із засобами розв'язання систем нелінійних арифметичних рівнянь у середовищі MathCAD, навчання використанню вбудованих функцій та операторів для чисельного та аналітичного розв'язання.

#### Вказівки до виконання роботи

##### 3.1 Чисельне розв'язання систем рівнянь

Чисельне розв'язання систем рівнянь у пакеті проводиться блоковим оператором **given-find (given-minerr)** [3, 8].

Для застосування блока **given-find** обов'язковим є попереднє визначення первинних значень змінних, для яких проводиться обрахунок системи. Обчислювальний блок виділяється згори службовим словом **given**, знизу – службовим словом **find(x1 <,x2,...>)/minerr(x1 <,x2,...>)**, між якими записується необхідна система. В якості аргументів службового слова **find/minerr** зазначаються імена змінних, відносно яких потребується провести розв'язання. Обчислювальний блок знаходить вектор-рядок ДІЙСНОГО розв'язання системи.

Обчислювальні блоки не можуть бути розташовані один всередині другого.

Для запису рівнянь системи не може застосовуватися оператор прирівнювання «:=» та ранжовані змінні. Рівняння системи повинні записуватися через знак логічного «жирного» рівняння (Ctrl +=) «=**»**.

Для розв'язання системи нерівностей замість знаків логічного рівняння слід поставити знаки нерівності (<, >). Відповіддю буде значення координат однієї точки, яка задовольняє умовам системи.

Для отримання координат іншої точки треба змінити початкові умови.

В якості чисельного методу при розв'язанні СНР обчислювальним блоком можуть призначатися лінійні або квадратичні методи [4]. За замовчанням використовується **модифікований метод Ньютона: Левенберга-Маркардта**.

Контекстне меню функцій **Find, Minerr** дозволяє налаштувати режим розв'язання СНР (рис. 3.1).

Користувач може обрати **Linear** – симплекс метод першого порядку або, **Nonlinear** – квадратичні градієнтні методи: **Nonlinear Conjective Gradient** – метод спряжених градієнтів, **Quasi-Newton** – квазіньютонівський метод, **Levenberg-Marquardt** – метод Левенберга. Всі квадратичні методи є модифікованими методами Ньютона.

Пунктом **Advanced Options** відкриває відповідне вікно, в якому за потреби можна визначити способи обчислення похідних та наближення точок.

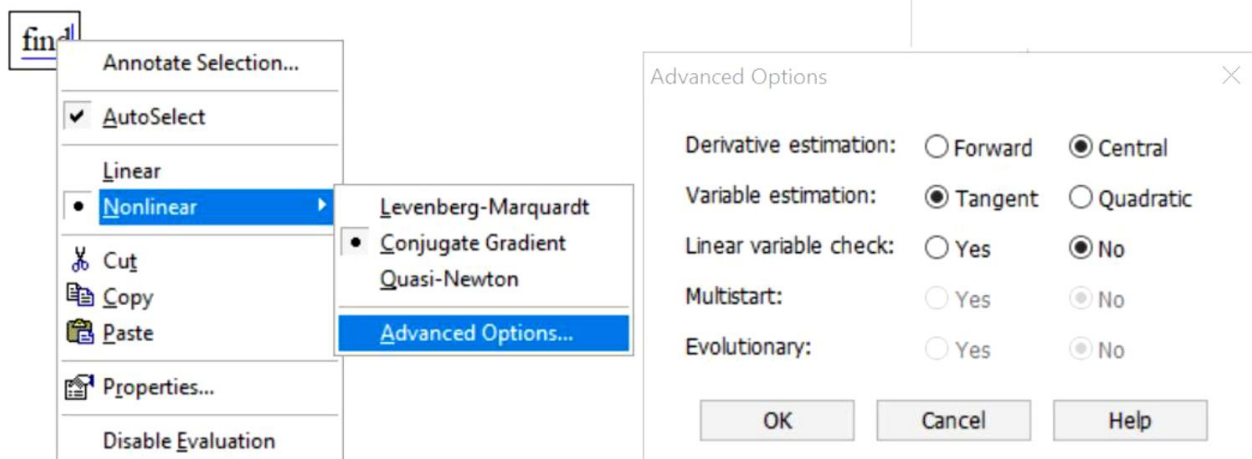


Рисунок 3.1 – Контекстне меню

У вікні **Advanced Options** знаходяться поля **Derivative Estimation**, **Variable Estimation**, **Linear variable check**, **Multistart**, **Evolutionary**.

Поле **Derivative Estimation** визначає спосіб чисельного диференціювання: **Forward** – однобічне двоточкове, **Central** – центральне трьохточкове.

Поле **Variable Estimation** визначає спосіб оцінювання змінної: **Tangent** – дотичною прямою, **Quadratic** – параболою.

Поле **Linear variable check (Перевірка лінійності)** Вказує, чи треба на кожному кроці перевіряти часткових похідних функції (**Yes**), чи за умови невеликого приросту часткових похідних функції можна надати їм сталого значення та не перераховувати на кожній ітерації для скорочення часу (**No**)

Поля **Multistart**, **Evolutionary** призначені для застосування з функціями **Maximize**, **Minimize**. Вони дозволяють розширити область пошуку точки оптимуму та знизити чутливість градієнтних методів від положення точки початку пошуку.

Розробник не рекомендує змінювати налаштування вікна **Advanced Options** без нагальної потреби.

Наприклад, розглянемо застосування обчислювального блока для аналізу взаємного розташування еліпса  $x^2/4+y^2/9=25$ , та двох прямих  $y(x)=17-x$ ,  $u(x)=20-x$ .

Визначимо функції користувача та побудуємо графік еліпса та прямих (рис. 3.2):

$$f(x, y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 25$$

$$y(x) := 17 - x \quad u(x) := 20 - x$$

$$ye(x) := 3 \cdot \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}}$$

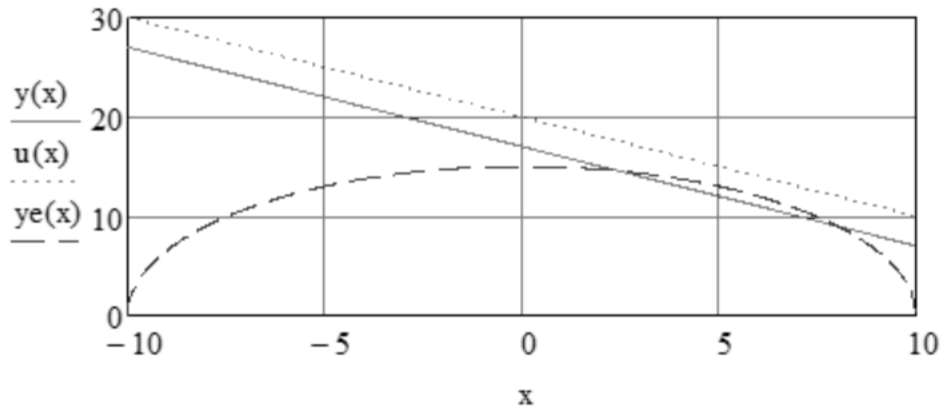


Рисунок 3.2 – Графік заданих функцій еліпса та прямих

З графіка видно, що пряма  $y(x) = 17 - x$  має дві точки перетину, в околі  $x = 2.5$  та  $x = 8$ . Друга пряма  $u(x) = 20 - x$  немає точок перетину з еліпсом.

Визначимо початкові значення та використаємо обчислювальний блок:

$$x := 4 \quad y := 10$$

$$\text{Given } f(x, y) = 0 \quad y + x = 17 \quad z := \text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Given } f(x, y) = 0 \quad y + x = 20 \quad z := \text{Find}(x, y) = \square$$

Для початкових значень  $x = 4$ ,  $y = 10$  блок **given-find** визначив точку перетину еліпса з прямою  $y(x)$  як корінь для першої системи та не виявив точку перетину еліпса з прямою  $u(x)$ , бо не знайшов корінь для другої.

Для знаходження другої точки перетину еліпса з прямою  $y(x)$  слід або змінити початкові значення, або додати умову знаходження кореня в визначеному діапазоні. Діапазон пошуку можна визначити логічною умовою всередині обчислювального блоку:

$$x := 4 \quad y := 10$$

$$\text{Given } f(x, y) = 0 \quad y + x = 17 \quad x < 5 \quad z := \text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.462 \\ 14.538 \end{pmatrix}$$

$$x := 2$$

$$\text{Given } f(x, y) = 0 \quad y + x = 17 \quad z := \text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.462 \\ 14.538 \end{pmatrix}$$

Як видно з наведеного прикладу обидва способи дозволили отримати координати другої точки перетину еліпса та прямої  $y(x)$ .

Обчислювальний блок **given-find** не дозволяє знаходити корені несумісних систем функцію.

Для отримання не точних, а наближених значень коренів, можна застосувати в обчислювальному блоці замість функції **find** функцію **minerr**, яка використовує для розв'язання СНР метод **мінімізації середньоквадратичних відхилень** та знаходить найбільш наближене розв'язання.

Для оцінки похибки розв'язання СНР функцією **minerr** можна використовувати вбудовану змінну **ERR**, яка містить середньоквадратичне значення (RMSE) похибки [7-8].

Наприклад, для найближча точка між еліпсом на прямою  $u(x)$  має координати:

$$\underline{x} := 2$$

$$\text{Given } f(x, y) = 0 \quad y + x = 20 \quad z := \text{Minerr}(x, y) = \begin{pmatrix} 5.616 \\ 12.635 \end{pmatrix}$$

$$\text{ERR} = 1.857$$

Застосування **minerr** можна рекомендувати для обходу випадків, обчислювальний блок **given-find** не знаходить коренів для якогось набору значень параметрів системи.

Наприклад, рівняння параболоїду може мати наступний вигляд  $kx^2 + y^2 = 0$ .

Для всіх додатних значень коефіцієнта  $k$  параболоїд перетинає вісь ОХ. До значень  $k \approx 700000$  блок **given-find** забезпечує знаходження коренів. для більших значень коефіцієнта  $k$  функція **find** не справляється з розв'язанням, а функція **minerr** знаходить відповідь:

$$k := 10^6 \quad x := 1 \quad y := 1$$

$$\text{given } k \cdot x^2 + y^2 = 0 \quad \text{find}(x, y) = \square$$

$$\text{Given } k \cdot x^2 + y^2 = 0 \quad \text{minerr}(x, y) = \begin{pmatrix} -4.912 \times 10^{-4} \\ 7.091 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Блок **given** може застосовуватися також для розв'язання одного рівняння. Слід пам'ятати, що на відміну від функції **root**, блок **given** визначає ДІЙСНИЙ корінь. Тому можуть трапитися випадки, коли при невдалому початковому наближенні блок **given** відповіді не дає.

Наприклад, для рівняння застосування обчислювального блока з початковим наближенням -5 відповіді не дає:

$$y(x) := 2 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 100$$

$$z := -5 \quad \text{given } y(z) = 0 \quad \text{find}(z) =$$

$$z := -10 \quad \text{Given } y(z) = 0 \quad \text{Find}(z) = -10.545$$

### 3.2 Символьні засоби розв'язання рівнянь та систем рівнянь MathCAD

СКМ MathCAD дозволяє символьними перетвореннями отримати розв'язання рівнянь, в тому числі параметричних, та систем рівнянь в аналітичному або в чисельному вигляді [7-8].

Запропонований пакетом символьний результат може мати неочікуваний вигляд. В таких випадках потребуються додаткові дії перетворення для надання результатам прийняттого вигляду.

Іноді символна відповідь виражається через спеціальні функції, деякі з яких в подальшому можуть бути оброблені в пакеті тільки символними засобами.

Найпростіший спосіб отримання символної відповіді – це застосування оператора символного виведення результату «→» замість оператора обчислення «=». Вводиться цей оператор кнопкою з символної панелі, панелі обчислень або комбінацією клавіш **Ctrl+**.

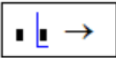
Серед функцій чисельного розв'язання рівнянь та систем рівнянь для символного застосування найбільш пристосованим є блок **given-find**. Він може застосовуватися для символного розв'язання будь яких рівнянь та систем рівнянь. Інші функції мають обмежуючі особливості для аналітичного застосування. Недоліком подібного способу є неможливість визначення умови, обмежень для розв'язання або призначити не одну, а кілька послідовних дій обробки даних.

Наприклад,

$$\begin{aligned} & \text{given} \\ & x^2 + y^2 = 1 \\ & \text{find}(y) \rightarrow (\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot i \quad - \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot i) \end{aligned}$$

Більш універсальним є застосування символного шаблону з ключем, який визначає дію для виконання.

Введення проводиться:

– кнопкою шаблону дії з ключовим словом з символної панелі  з наступним заповненням першого маркера вихідними даними, другого – написом ключового слова дії або введенням шаблону комбінацією клавіш **Ctrl+>** з наступним заповненням маркерів шаблону,

– натисканням клавіші відповідної дії символної панелі з наступним введенням в поле маркера вихідних даних.

Оператори символних перетворень можуть поєднуватися в ланцюг дій для послідовного виконання. Таким діями після застосування основного оператора дії є спрощення **simplify**, отримання чисельного результату **float**, висунення умови до типу результату **assume**.

Для введення додаткової ланки в ланцюжок слід після введення першого символного оператора ввести комбінацію **Ctrl+Shift+**, або після натискання відповідної кнопки першого символного оператора на символній панелі натиснути наступну.

В парі з функцією **polyroots** для розв'язання алгебраїчних рівнянь, коли рівняння записано в неявному вигляді, може застосовуватися символний оператор **coeffs**. Оператор визначає вектор коефіцієнтів рівняння. Наприклад

$$xr := (x^2 + x + 1)^2 + (x - 1)^3 + (x + 1)^4$$

$$\text{coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(xr) = \begin{pmatrix} -2.981 \\ -0.2 + 1.169i \\ -0.2 - 1.169i \\ -0.119 \end{pmatrix}$$

Для розв'язання рівнянь та систем рівнянь в символьному вигляді призначено блок

**■ solve** →

символьного розв'язання .

В поле маркера блока вводиться вираз функції рівняння або вектор виразів функцій системи рівнянь. Для рівнянь в нормальному вигляді прирівнювання до нуля не потрібно, тобто достатньо введення лівої частини рівняння. В інших випадках запис має містити знак «жирного» логічного прирівнювання та значення правої частини рівняння. За необхідності після ключового слова через кому позначаються імена змінних, відносно яких потрібно знайти розв'язок.

Наприклад,

$$x^3 + 11x^2 + 3x - 135 = 0 \quad \text{solve} \rightarrow \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x - a + 5 \quad \text{solve, } x \rightarrow a - 5$$

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 1 \\ y - x^2 = 1 \end{pmatrix} \text{solve, } x, y \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 \\ i \cdot 3^{\frac{1}{2}} & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 \\ -i \cdot 3^{\frac{1}{2}} & -2 \end{pmatrix}$$

Оператор **solve** для алгебраїчних рівнянь шостої та вищих степенів видає чисельне значення кореня, бо не розроблено методів аналітичного розв'язання для алгебраїчних рівнянь степенів вище за 5.

Для тригонометричних рівнянь оператор **solve** шукає один корінь.

Наприклад,  $\sin(a \cdot x) \text{ solve, } x \rightarrow 0$

Отримати всі корені можна за спробувати додаванням в ланцюжок дій модифікатора **fully** . Наприклад,

$$\sin(a \cdot x) \text{ solve, } x, \text{fully} \rightarrow \begin{cases} \_c1 & \text{if } a = 0 \wedge \_c1 \in \mathbb{C} \\ \frac{\pi \cdot \_n}{a} & \text{if } a \neq 0 \wedge \_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Оператор **solve** виводить розв'язок у вигляді вектора-стовпця.

Для отримання потрібного вигляду результату символьного розрахунку може знадобитися кілька варіантів дій.

Наприклад, розв'язання рівняння  $x^2+y^2=1$  відносно  $y$  має наступний вигляд:

$$y = \mp\sqrt{1-x^2}.$$

Застосування оператора символьного розв'язання виглядає як

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ solve, } y \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot i \\ -\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot i \end{pmatrix}$$

Оператор видає вірну відповідь, але запис є незручним із використанням уявної одиниці. Додавання в ланцюжок дії символьного спрощення **simplify** не змінює вигляд відповіді:

$$x^2 + y^2 = 1 \left| \begin{array}{l} \text{solve, } y \\ \text{simplify} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot i \\ -\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot i \end{pmatrix}$$

Прийнятного вигляду відповідь набуває тільки після додаткового обмеження типу відповіді дійсними значеннями:

$$x^2 + y^2 = 1 \left| \begin{array}{l} \text{solve, } y, \text{ real} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2} & 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Наприклад, вигляд відповіді оператора символьного розв'язання для рівняння нашого є дуже громіздким та незручним. Створення ланцюжків з додатковими діями спрощення, типу результату вигляд відповіді не змінюють. Тільки вимога символьно-чисельної форми надає відповіді звичної форми:

$$2 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 100 \left| \begin{array}{l} \text{solve, } x, \text{ real} \\ \text{float} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -10.544528449924184116 & 0 \\ 0.2722642496209205808 - 2.1604786330404814207i & 0 \\ 0.2722642496209205808 + 2.1604786330404814207i & 0 \end{pmatrix}$$

Рекомендується прості рівняння та системи розв'язувати символьно, більш складні – чисельно.

### Завдання для самостійного виконання

Розв'язати системи нелінійних рівнянь згідно вказівок викладача за допомогою функції Given...Find.

Навести лістинг Mathcad-документа.

## Практична робота 4

### ЗАСОБИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ MATHCAD

Мета: ознайомлення із засобами інтерполяції функцій у середовищі MathCAD.

#### Вказівки до виконання роботи

Нехай на відрізку  $[a, b]$  задаються таблицею значення деякої невідомої функції  $y = \varphi(x)$  у  $n + 1$  точці (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Табличні значення функції

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{n-1}$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{n-1}$	$y_n$

Треба знайти, як можна більш просту аналітичну залежність між  $x$  і  $y$ , яка б точно або приблизно зображувала б функцію, яка задана таблицею, та дозволила б приблизно обчислювати значення функції в точках між вузлами  $x_i$ ,  $i = 0 \dots n$ . Це і є задача інтерполювання функції.

Дуже часто в ролі такої функції обирають многочлен степеня  $\leq n$ , значення якого в точках  $x_i (i = 1 \dots n)$  співпадають зі значеннями  $y_i (i = 1 \dots n)$  функції  $\varphi(x)$ , тобто  $p(x_i) = \varphi(x_i)$ . Як відомо він має вигляд [4]:

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}y_1 + \dots$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}y_{n-1} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Такий поліном називають інтерполяційним поліномом Лагранжа. Знаходження коефіцієнтів  $a_i$  інтерполюючого поліному зводиться до розв'язання СЛАР:  $Xa^T = y^T$ , де  $X$  – матриця Вандермонде значень координат вузлів сітки,  $y$  – вектор значень сітчастої функції,  $a$  – вектор шуканих коефіцієнтів полінома.

Пряме розв'язання завдання інтерполяції має наступний алгоритм [4]:

1. Визначення векторів аргументу « $x$ » та табличної функції « $y$ » в  $N$  вузлах  $x = (x_0, x_1 \dots x_{N-1})$   $y = (y_0, y_1 \dots y_{N-1})$ .

2. Визначення матриці коефіцієнтів рівнянь системи через вектор аргументів  $x$ .

3. Знаходження вектора коефіцієнтів  $a$  розв'язанням СЛАР.

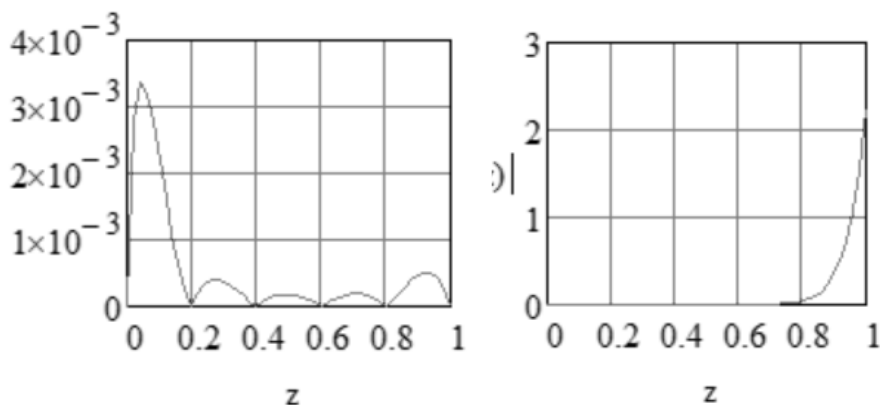
4. Розрахунок значення інтерполяційного полінома в визначеній точці  $z$ .

В MathCAD розв'язання СЛАР поліноміальної інтерполяції можливо матричним методом  $a^T = X^{-1}y^T$  та функцією **lsolve**.

В випадках, коли сітчаста функція визначена на великій кількості точок,

інтерполяційний поліном стає занадто громіздким. Порядок СЛАР глобальної інтерполяція, похибки та час розв'язання стають завеликими навіть для сучасних СКМ. Крім того, зі зростанням ступеню поліному збільшується кількість його екстремумів, що погіршує точність інтерполяції між вузлами сітки.

Наприклад, для функції  $y(x)=\sin(x)e^{-2\sqrt{x}}$  в діапазоні  $x$  від 0 до 1 в 6-ти точках абсолютна похибка інтерполяції з прямим розв'язанням СЛАР в матричному вигляді з обертанням матриці становить  $\sim 0.003$  (рис. 4.1, а), а для 26-ти точок – вже  $\sim 2$  (рис. 4.1, б)



а) 6 вузлів б) 26 вузлів

Рисунок 4.1 – Похибки поліноміальної інтерполяції

Найпростіша кускова лінійна інтерполяція в СКМ MathCAD проводиться функцією **linterp(vx,vy,x)**, яка розраховує лінійно наближене значення табличної функції зі значеннями з аргументів векторів **vx, vy** в точках аргументу  $x$ . Для аргументу  $x$  у вигляді числа відповідь є числом, для аргументу  $x$  у вигляді вектора відповідь є вектором [7-8].

Наприклад, результат кускової лінійної інтерполяції функцією **linterp** для вищенаведеної функції  $y(x)=\sin(x)e^{-2\sqrt{x}}$  може мати вигляд, який показано на рис. 4.2.

Зверніть увагу, що «середньоквадратична похибка для лінійної кускової інтерполяції складає 0.0044, а для глобальної інтерполяції 0.00098. Відносні похибки складають 3.6 % та 0.8 %, відповідно».

$$\text{norm}(a) := \sqrt{\sum_{i=0}^{\text{last}(a)} \frac{(a_i)^2}{\text{length}(a)}}$$

$$lf := \text{linterp}(x, y, z)$$

$$\text{norm}(lf - f(z)) = 4.397 \times 10^{-3}$$

$$\text{norm}(fi(a, z, N) - f(z)) = 9.821 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\text{norm}(lf - f(z))}{\text{norm}(fi(a, z, N) - f(z))} = 4.477$$

$$\frac{\text{norm}(lf - f(z))}{\max(f(z))} = 0.036 \quad \frac{\text{norm}(fi(a, z, N) - f(z))}{\max(f(z))} = 0.008$$

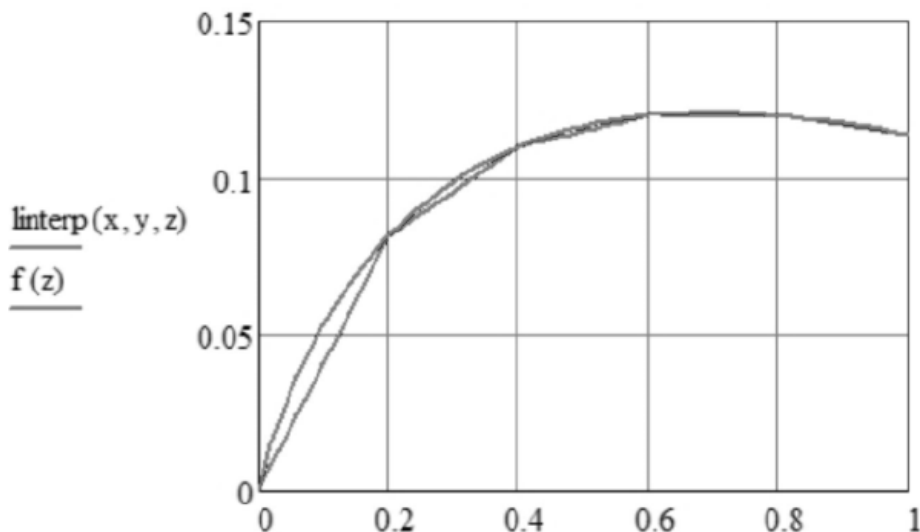


Рисунок 4.2 – Лінійна кускова інтерполяція

Базовою функцією СКМ MathCAD для розрахунку наближення сітчастої функції  $v_x, v_y$  в визначеній точці  $x$  є функція

$$\text{interp}(vs, vx, vy, x),$$

де  $vs$  – допоміжний вектор коефіцієнтів,  $v_x, v_y$  – вектори/матриці аргументів та значень табличної функції відповідно. Для двовірних функції  $v_x$  є матрицею розміром  $N \times 2$ , елементами якої є координати точок діагоналі сітки,  $v_y$  є матрицею розміром  $N \times N$  зі значеннями сітчастої сітки в вузлах,  $x$  – точка/вектор, в якій необхідно обрахувати значення.

Функція **interp** проводить наближення функції методами **сплайн** інтерполяції та **поліноміальної** інтерполяції/апроксимації. Метод розрахунку визначається способом підготовки допоміжного вектора  $vs$ .

Для сплайн інтерполяції допоміжний вектор  $vs$  розраховується наступними вбудованими функціями:

Функція  $vs=lspline(vx,vy)$  готує коефіцієнти лінійного сплайна,

Функція  $vs=pspline(vx,vy)$  - квадратичного сплайна,

Функція  $vs=cspline(vx,vy)$  – кубічного сплайна. 154

Функція  $vs=bspline(vx,vy,u,n)$  є універсальною. Параметр  $n$  визначає: 1 – лінійний сплайн, 2 – квадратичний, 3 – кубічний. Функція розраховує допоміжний вектор коефіцієнтів  $vs$  в векторі  $u$  довжиною  $N-1$  таким чином, що стикування сплайнів проводиться не в вузлах сітки, а в точках, які визначає користувач. Розмірність вектора  $u$  повинна бути на 1 для лінійного сплайна (2 для квадратичного, 3 для кубічного) меншою за розмірність векторів  $vx, vy$ . Значення точок повинні відповідати наступним умовам  $u_1 \geq vx_1, u_N \leq vx_N$ .

Слід відмітити, що сплайн інтерполяція точніша за звичайну «ковзаючи» інтерполяцію, але не обов'язково для будь-яких випадків точніша за глобальну поліноміальну інтерполяцію.

Наприклад, на рис. 4.3 наведено похибки для 26-ти точок наведеного вище прикладу. З графіків видно, що найменшу похибку має глобальна інтерполяція. Далі в порядку зменшення точності йдуть кубічна, параболічна, лінійна сплайн інтерполяції. Найгірші результати має кускова лінійна інтерполяція.

$ls := lspline(xm,ym), \quad ps := pspline(xm,ym), \quad cs := cspline(xm,ym)$

$fls := interp(ls,xm,ym,z), \quad fps := interp(ps,xm,ym,z), \quad fcs := interp(cs,xm,ym,z)$

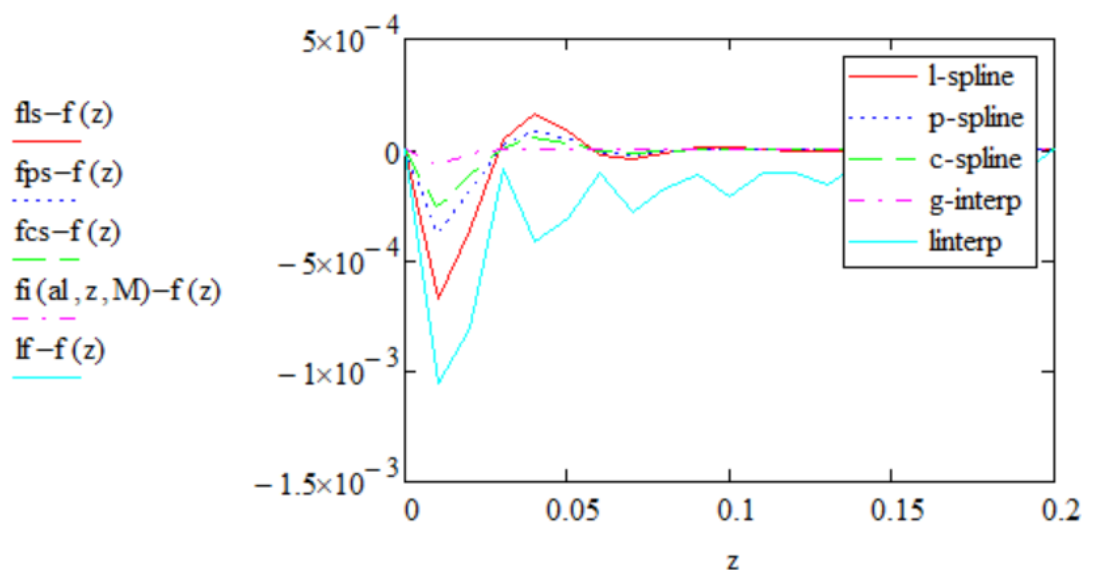


Рисунок 4.3 – Похибки сплайн інтерполяції

### Завдання для самостійного виконання

1. Для таблично заданої функції, за вказівкою викладача, побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа.

2. Візуалізуйте графіки функції  $f(x)$ , поліномів інтерполяції та похибки інтерполяції (різниці між  $f(x)$  і поліномом  $E(x)=|f(x)-P(x)|$ ).

## Практична робота 5

### ЗАСОБИ АПРОКСИМАЦІЇ MATHCAD

Мета: ознайомлення із засобами апроксимації функцій у середовищі MathCAD.

#### Вказівки до виконання роботи

В багатьох випадках математичного моделювання процесів та пристроїв ставиться завдання: треба по вихідних даних підібрати таку аналітичну залежність між  $x$  і  $y$ , яка б мала простий вигляд і найкращим чином відображала б загальний вигляд функції  $y=\varphi(x)$  взагалі. Знайдену тепер функцію називають апроксимуючою [4]. Широко відомим методом розв'язання цієї задачі є метод найменших квадратів.

Приклад. Функцію, яка задана таблицею апроксимувати квадратичною функцією. Mathcad-документ буде виглядати так:

$x$	1	2	3	5
$y$	3	4	2,5	0,5

$$\begin{aligned} n &:= 3 & x &:= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} & y &:= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \\ TOL &:= 1 \cdot 10^{-4} \\ A &:= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n (x_i)^4 & \sum_{i=0}^n (x_i)^3 & \sum_{i=0}^n (x_i)^2 \\ \sum_{i=0}^n (x_i)^3 & \sum_{i=0}^n (x_i)^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n (x_i)^2 & \sum_{i=0}^n x_i & n+1 \end{bmatrix} & B &:= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n (x_i)^2 \cdot y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i \end{bmatrix} \\ Z &:= A^{-1} \cdot B & Z &= \begin{bmatrix} -0.284 \\ 1.002 \\ 2.514 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Результат:

$$f(t) := Z_0 \cdot t^2 + Z_1 \cdot t + Z_1 \cdot t + Z_2$$

MathCAD має вбудовані засоби для проведення функціональної і поліноміальної апроксимації.

Для поліноміальної апроксимацій максимальний степінь  $M$  полінома на відміну від інтерполяції може бути меншим  $M \leq N-1$ . Для вибору степеню апроксимуючого полінома рекомендується правило, згідно якому максимальний степінь полінома відповідає порядку кінцевої різниці сітчастої функції, яка є сталою. Наприклад, для даних, які наведено в табл. 5.1, сталою є друга різниця. Тобто, для глобальної поліноміальної апроксимації досить поліному другого степеня.

Таблиця 5.1 – Аналіз кінцевих різниць

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2.2	6.5	12.8	21.1	31.4	43.7	58
$\Delta_1$		4.3	6.3	8.3	10.3	12.3	14.3
$\Delta_2$			2	2	2	2	2

Знаходження коефіцієнтів поліноміальної апроксимації за критерієм мінімізації середньоквадратичного відхилення полінома від дійсних значень  $y(x)$  зводиться до розв'язання СЛАР.

Побудова полінома апроксимації має наступний алгоритм:

1. Визначення векторів вузлів сітки  $x$  та сітчастої  $y$  в  $N$  вузлах.
2. Визначення матриці Вандермонде  $X$  коефіцієнтів СЛАР.
3. Знаходження коефіцієнтів полінома розв'язанням СЛАР.

Для поліноміальної апроксимації в MathCAD використовується та ж функція, що і для інтерполяції **interp(vs,vx,vy,x,N)**. Ознакою проведення саме апроксимації є наявність додаткового аргументу  $N$ , який визначає степінь апроксимуючого поліному

Для апроксимації вектор допоміжних коефіцієнтів  $vs$  розраховується функцією **regress(vx, vy, N)**, Результируючий вектор  $VS$ , починаючи з четвертого елемента містить коефіцієнти  $ai$  апроксимуючого полінома наближення. Технологія застосування функції **regress** аналогічна проведенню сплайн інтерполяції.

Апроксимація лінійною комбінацією функцій  $f_i(x)$  записується у вигляді багаточлену:  $\varphi(x)=a_0f_0(x)+a_1f_1(x)+\dots+a_Nf_N(x)$ .

Функція **linfit(vx,vy,F)** виконує вказане апроксимаційне наближення лінійною комбінацією. Аргументами функції є вектори вузлів та значень сітчастої функції  $vx,vy$  та вектор-стовпець  $F$  виразів функцій  $f_i(x)$ .

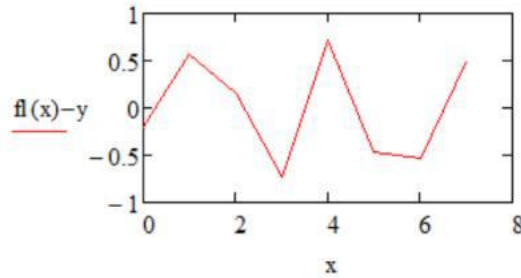
Наприклад, для сітчастої функції з вузлами сітки [0 1 2 3 4 5 6 7] та відповідними значеннями сітчастої функції [4 5 9 20 33 52 73 96] апроксимація виразом  $\varphi(x)=ax^2+be^{-x}+c/(1+x)+d$  може виглядати наступним чином:

$$F(x) := \left( x^2 \quad e^{-x} \quad \frac{x}{1+x} \quad 1 \right)^T$$

$$f := \text{linfit}(x, y, F)$$

$$f = \begin{pmatrix} 1.729 \\ 73.913 \\ 93.51 \\ -70.113 \end{pmatrix}$$

$$fl(x) := f_0 \cdot x^2 + f_1 \cdot e^{-x} + f_2 \cdot \frac{x}{1+x} + f_3$$



$$\frac{\text{norm}(f(x) - y)}{\text{min}(y)} = 0.131$$

Розрахунок коефіцієнтів функціональної апроксимації проводиться функцією:

$$y := \text{genfit}(vx, vy, vg, F).$$

Аргументами функції є вектори-стовпці вузлів та значень сітчастої функції  $vx$ ,  $vy$ , вектор початкового наближення для всіх коефіцієнтів  $vg$ , ім'я функції користувача  $F$ , яка повертає вектор-стовпець з самої функції апроксимації та її часткових похідних по всіх коефіцієнтах.

Визначення компонентів вектора  $F$  можна проводити вручну прямим введенням виразів або використання функцій символічного диференціювання (оператор  $\nabla$  – **Ctrl+Shift+G**) та **stack**.

Наприклад, для степеневі функції апроксимації  $\varphi(x, a) = a_0 + a_1 x^{a_2}$  коефіцієнти апроксимації в функції користувача  $FF$  можуть бути визначені

– як елементи вектора, що введені вручну:

$$f(x, a) := a_0 + a_1 \cdot x^{a_2}$$

$$FF(x, a) := \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot x^{a_2} \\ 1 \\ x^{a_2} \\ a_1 \cdot x^{a_2} \cdot \ln(x) \end{pmatrix};$$

– як елементи вектора, розраховані функцією **stack**:

$$FF(x, a) := \text{stack}(f(x, a), \nabla_a f(x, a)) \rightarrow \begin{pmatrix} x^{a_2} \cdot a_1 + a_0 \\ 1 \\ x^{a_2} \\ x^{a_2} \cdot \ln(x) \cdot a_1 \end{pmatrix}$$

– як окремі змінні, що введені вручну:

$$f(x, a, b, c) := a + b \cdot x^c$$

$$FF(x, a, b, c) := \begin{pmatrix} a + b \cdot x^c \\ 1 \\ b \\ x^b \\ a \cdot x^b \cdot \ln(x) \end{pmatrix};$$

– як окремі змінні, що розраховані функцією **stack**:

$$\mathbf{FF}(x, a, b, c) := \text{stack}(f(x, a, b, c), \nabla_{a,b,c}f(x, a, b, c)) \rightarrow \begin{pmatrix} a + b \cdot x^c \\ 1 \\ x^c \\ b \cdot x^c \cdot \ln(x) \end{pmatrix}$$

Допускається використання замість імені вектора  $\mathbf{F}$  імені функції апроксимації  $\mathbf{f}$  у вигляді функції користувача.

Наприклад,  $\text{genfit}(x, y, x0, f)$  або  $\text{genfit}(x, y, x0, \mathbf{FF})$ .

Наприклад, обчислення коефіцієнтів  $a, b, c$  функціональної тригонометричної апроксимації  $\varphi(x, a) = a_0 + a_1 \sin(a_3 x)$  сітчастої функції з вузлами  $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$  та значеннями  $(1, 1.959, 2.683, 2.995, 2.2817, 2.197)$  може виглядати наступним чином:

$$fs(x, a, b, c) := a \cdot \sin(b \cdot x) + c$$

$$\mathbf{FF}(x, a, b, c) := \begin{pmatrix} c + a \cdot \sin(b \cdot x) \\ \sin(b \cdot x) \\ a \cdot x \cdot \cos(b \cdot x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{genfit} \left[ XS, YS, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, fs \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{genfit} \left[ XS, YS, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{FF} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Результат функції **genfit** є вкрай чутливим до початкової точки. Невдале початкове значення може привести до невірної відповіді, або взагалі до неможливості отримати результат.

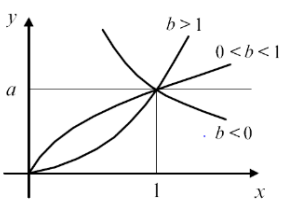
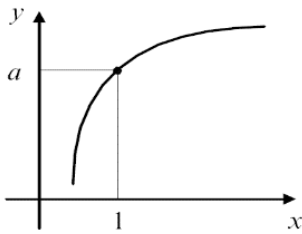
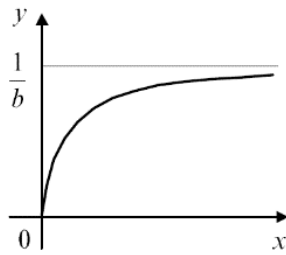
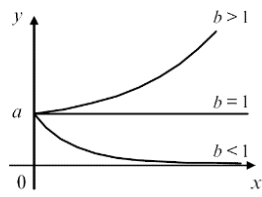

Наприклад:

$$\text{genfit} \left[ XS, YS, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, fs \right] = \begin{pmatrix} -0.454 \\ 1.401 \\ 2.312 \end{pmatrix}$$

$$\text{genfit} \left[ XS, YS, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{FF} \right] = \dots$$

Спеціалізовані функції функціональної апроксимації наведено в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2 – Спеціалізовані функції апроксимації MathCAD [3]

Назва	Вигляд	Залежність
степенева <b>pwrfit(vx,vy,vg)</b>		$\varphi(x) = ax^b + c$
логарифмічна <b>lnfit(vx, vy)</b> <b>logfit(vx,vy,vg)</b>		$\varphi(x) = a \cdot \ln(x + b) + c$
дробово-лінійна		$\varphi(x) = \frac{x}{a+bx}$
показова <b>expfit(vx,vy,[vg])</b>		$\varphi(x) = ae^x + c$
гармонійна <b>sinfit(vx,vy,vg)</b>		$\varphi(x) = a \cdot \sin(x + b) + c$

Приклад. Порівняти апроксимацію індикатриси світлодіода АЛ-107Б степеневою косинусною функцією  $\varphi(a, x) = \cos(x)^a$  та гаусоїдою  $\varphi(a, x) = \exp(-x^2/a^2)$ .

$\alpha$ [град]	0	8	15	17	20	30	45	60
F( $\alpha$ )	1.00	0.91	0.70	0.62	0.51	0.33	0.14	0.089

Для визначення степеня косинусної апроксимації функцією **genfit** визначимо функцію апроксимації  $f_c$  як функцію користувача з параметром  $a$ . Вектор FC з функцією апроксимації та її частинними похідними розрахуємо функцією **stack**. Застосуємо функцію **genfit**.

$$fc(a, x) := \left( \cos \left( x \cdot \frac{\pi}{180} \right) \right)^a$$

$$FC(a, x) := \text{stack} (fc(a, x), \nabla_a fc(a, x))$$

$$a := \text{genfit}(x_{al}, y_{al}, 9.3, fc) = 14.524$$

$$a := \text{genfit}(x_{al}, y_{al}, 9.3, FC) = 13.645$$

Результати є насторожуючими, бо відповіді для самої функції апроксимації та вектора похідних не збігаються.

Проведемо перевірку безпосереднім розв'язанням системи рівнянь функціональної апроксимації з мінімізацією середньоквадратичного відхилення апроксимуючої функції від вихідної функції.

Розв'язання рівняння блоком **given-find** відповіді не дає.

$$a := 10$$

Given

$$\left| y_{al} - \overrightarrow{\cos \left( \frac{\pi}{180} \cdot x_{al} \right)^a} \right| = 0$$

$$\text{Find}(a) =$$

Розпишемо рівняння в явному вигляді:

$$a := 20$$

Given

$$\sum_{i=0}^{i_{\max}} \left[ \left( y_{al_i} - \cos \left( x_{al_i} \cdot \frac{\pi}{180} \right)^a \right) \cdot \cos \left( x_{al_i} \cdot \frac{\pi}{180} \right)^a \cdot \ln \left( \cos \left( x_{al_i} \cdot \frac{\pi}{180} \right) \right) \right] = 0$$

$$\text{Find } a = 9.183$$

Обчислювальний блок видав відповідь 9.183. Проте значення відрізняється від отриманих раніше.

Перевіримо розв'язок функцією **minerr** для рівняння в векторному вигляді:

$$a := 10$$

Given

$$\left| y_{al} - \overrightarrow{\cos \left( \frac{\pi}{180} \cdot x_{al} \right)^a} \right| = 0$$

$$\text{Minerr}(a) = 9.183$$

Функція **minerr** видала відповідь, тотожну з відповіддю функції **find**.

Розрахуємо середньоквадратичні похибки для отриманих значень.

$$\frac{\left| y_{al} - \overrightarrow{fc(14.571, x_{al})} \right|}{imax} = 0.045 \quad \frac{\left| y_{al} - \overrightarrow{fc(9.186, x_{al})} \right|}{imax} = 0.023$$

$$\frac{\left| y_{al} - \overrightarrow{fc(13.728, x_{al})} \right|}{imax} = 0.041$$

З аналізу похибок видно, що значення, які отримані безпосереднім застосуванням функції **genfit** мають суттєво більші похибки.

Для другого виразу – гаусової апроксимації функція **genfit** взагалі не дає відповіді:

$$fe(ac, x) := e^{-\left(\frac{x}{ac}\right)^2}$$

$$\text{genfit}(x_{al}, y_{al}, 100, fe) = \blacksquare$$

Безпосереднє розв'язання рівняння в векторному вигляді функцією **minerr** дозволяє отримати відповідь, яка забезпечує відносну похибку наближення 0.021.

$$ac := 10$$

Given

$$\left| y_{al} - \left[ e^{-\left(\frac{x_{al}}{ac}\right)^2} \right] \right| = 0 \quad \frac{\left| y_{al} - \overrightarrow{fe(26.456, x_{al})} \right|}{imax} = 0.021$$

$$\text{Minerr}(ac) = 26.456$$

З наведеного прикладу очевидним є висновок про **ОБОВ'ЯЗКОВУ** перевірку результатів функціональної апроксимації функцією **genfit**.

### Завдання для самостійного виконання

1. Для функції, заданої викладачем здійснити тригонометричну апроксимацію – розкласти в ряд Фур'є:

- а) по синусах для парних номерів варіанта;
- б) по косинусах для непарних номерів варіанта.

2. Побудувати графіки функції, яка задана, а також частинної суми ряду Фур'є для  $n = 5$  та  $n = 10$ , де  $n$  – кількість членів частинної суми ряду Фур'є.

## Практична робота 6

### ЗАСОБИ ІНТЕГРУВАННЯ MATHCAD

Мета: ознайомлення із засобами та вбудованими функціями інтегрування у середовищі MathCAD.

#### Вказівки до виконання роботи

В MathCAD інтегрування проводиться в один клік введення звичних символів з панелі розширених операторів.

Інтегрування за замовчанням виконується методом Ромберга з точністю 0.001 [8]. Змінити метод інтегрування можна в контекстному меню оператора інтегрування (рис.6.1). Зміна точності проводиться значенням змінної TOL.

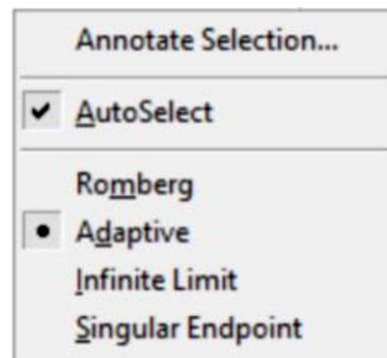


Рисунок 6.1 – Контекстне меню інтегрування

Нехай треба обчислити інтеграл  $I = \int_a^b f(x)dx$ , де  $f(x)$  неперервна на  $[a;b]$  функція. Якщо первісна функції  $f(x)$  не виражається в елементарних функціях, то користуються наближеним обчисленням визначених інтегралів, за допомогою якого можна знайти число  $I$  з будь-якою точністю.

Користуються при цьому різними формулами. Наведемо найбільш розповсюджені і найбільш прості з них.

1. Формули прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \quad (6.1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n),$$

$$y_k = f(x_k), \quad k := 0, 1, \dots, n-1, \quad k := 0, 1, \dots, n-1, \quad k := 0, 1, \dots, n-1$$

де  $n$  – кількість рівних частин, на які розбивається відрізок  $[a; b]$ .

2. Формула трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (6.2)$$

3. Формула парабол або формула Сімпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})) \quad (6.3)$$

Число  $n$  у цій формулі обов'язково повинно бути парним.

*Приклад.* Обчислити приблизно  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  за формулами прямокутників, трапецій та Сімпсона.

*Розв'язок.* У даному випадку  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  на відрізку  $[0;1]$ .

Розбиваємо відрізок  $[0;1]$  на 10 рівних частин і значення аргументу та функції заносимо в таблицю.

$x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y$	1	0,9901	0,9615	0,9174	0,8621	0,8000	0,7353	0,6711	0,6098	0,5525	0,5000

1. Формули прямокутників:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{10} \cdot (1 + 0,9901 + 0,9615 + \dots + 0,5525) = 0,8100.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{10} \cdot (0,9901 + 0,9615 + \dots + 0,5000) = 0,7600.$$

2. Формула трапецій

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{10} \left( \frac{1+0,5}{2} + 0,9901 + 0,9615 + \dots + 0,5525 \right) = 0,7850.$$

3. Формула Сімпсона

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{60} \cdot \left( 1 + 0,5 + 4 \cdot (0,9901 + 0,9174 + 0,8000 + 0,6711 + 0,5525) + 2 \cdot (0,9615 + 0,8621 + 0,7353 + 0,6098) \right) = 0,7854.$$

Точне значення інтеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

У пакеті Mathcad невизначений та визначений інтеграли обчислюються за допомогою спеціальних операторів. Для того щоб знайти невизначений інтеграл

клацнемо спочатку по вільному місцю у робочому документі. Потім на панелі математичних інструментів клацнемо по кнопці  $\int \frac{dy}{dx}$ .

Після клацання по цій кнопці відкривається нова панель, про яку ми вже казали раніш. Далі клацаємо по кнопці із зображенням  $\int$  на цій панелі і в документі з'являється символ інтеграла з чотирма квадратами справа. У ці квадрати заносимо вираз підінтегральної функції, або її означення, та змінну інтегрування. Далі натискуємо клавішу **Space** (пропуск) до тих пір, поки весь вираз не буде виділено синьою кутовою рамкою. Далі для отримання результату робимо як і при обчисленні похідних. При

обчисленні визначеного інтеграла клацаємо по кнопці  $\int_a^b$ .

*Приклади.* Знайти  $\int \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ .

Mathcad-документ має вигляд:

$$TOL := 10^{-4}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow \text{arctg}(x)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

Наближене обчислення подвійного інтеграла

Нехай треба обчислити  $\iint_D f(x,y) dx dy$ , де область  $D$  у прямокутній системі координат задається парою нерівностей:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x). \end{cases}$$

Як відомо, подвійний інтеграл обчислюється за допомогою зведення його до так званого повторного інтеграла – двох звичайних визначених інтегралів. Тоді

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy.$$

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$$

Спочатку обчислюється інтеграл  $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$  по змінній  $y$  при сталому  $x$ . Після інтегрування в межах від  $a$  до  $b$  отримуємо число. Коли первісна не виражається в елементарних функціях, користуються наближеним обчисленням. Покажемо, як це робиться за допомогою пакета Mathcad.

*Приклад.* Нехай треба обчислити подвійний інтеграл  $\iint_D (x^2 + xy) dx dy$ , де область  $D$  обмежена лініями  $y = 4x - x^2$ ,  $y = x - 4$ .

*Розв'язок.* Спочатку у пакеті Mathcad побудуємо графіки функцій  $f_1(x) = 4x - x^2$  та

$f_2(x) = x - 4$ . Потім знайдемо точки їх перетин (рис. 6.2).

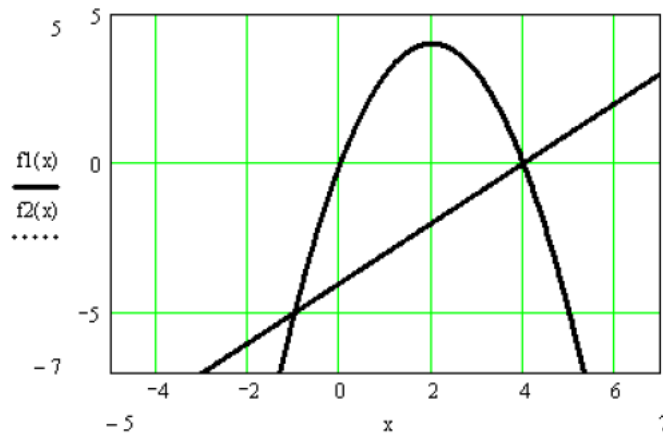


Рисунок 6.2 – Наближене обчислення подвійного інтеграла

Тепер задаємо область інтегрування  $D$  парою нерівностей:

$$D : \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ x - 4 \leq y \leq 4x - x^2 \end{cases}$$

Повторний інтеграл буде виглядати так:

$$I = \int_{-1}^4 dx \int_{x-4}^{4x-x^2} (x^2 + xy) dy$$

Залишається тільки обчислити його за допомогою пакета. Спочатку наберемо на клавіатурі символ  $I :=$ . Після цього на панелі математичних інструментів клацаємо по кнопці з зображенням інтеграла і вже потім у заново відкритій панелі клацаємо по кнопці визначеного інтеграла. В документі після знака «:=» з'являється зображення визначеного інтеграла, в який ми вносимо границі змінної « $x$ », а замість підінтегральної функції знову вносимо символ визначеного інтеграла. У другий інтеграл вносимо границі інтегрування змінної « $y$ » та підінтегральну функцію, а також диференціали змінних інтегрування: спочатку по  $dy$ , потім по  $dx$ . Вони в Mathcad-документі записуються в зворотному порядку.

Отже маємо:

$$\begin{aligned} TOL &:= 1 \cdot 10^{-4} \\ I &:= \int_{-1}^4 \int_{x-4}^{4x-x^2} (x^2 + xy) dy dx \\ I &= 98.9583 \end{aligned}$$

### Завдання для самостійного виконання

1. Обчислити інтеграли функцій за вказівкою викладача.
2. Навести графіки функцій та лістинг Mathcad-документа.

## Практична робота 7

### ЗАСОБИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ MATHCAD

Мета: ознайомлення із засобами та вбудованими функціями диференціювання у середовищі MathCAD.

#### Вказівки до виконання роботи

В MathCAD диференціювання проводиться в один клік введення звичних символів з панелі розширених операторів [3, 7-8].

Для чисельного диференціювання в призначені функції **diff**, **gradient**, **polyder**. Функція  $y = \text{diff}(x \langle n, \text{dim} \rangle)$  розраховує вектор/матрицю у кінцевих різниць між елементами вектора/матриці  $x$ . Для аргумента-матриці результатом є матриця з елементами  $Y = [X(2,:) - X(1,:); X(3,:) - X(2,:); \dots X(p,:) - X(p-1,:)]$ .

Опціональний аргумент  $n$  визначає кількість разів застосування функції. Наприклад, **diff(X,3)** є тотожним **diff(diff(diff(X)))**. Опціональний цілочисельний аргумент **dim** визначає в разі матриці  $x$  напрям дії. Значення 1 розраховує різницю між елементами стовпців, 2 – рядків. Наприклад,

```
X = [1 1 2 3 5]; Y = diff(X); Z=diff(X,2);
```

```
Y = 0      1      1      2
```

```
Z = 1 0 1
```

```
X = [1 1 1; 5 5 5; 25 25 25]; Y = diff(X)
```

```
Y = 4      4      4
```

```
20      20      20
```

```
X = [1 3 5; 7 11 13; 17 19 23]; Y = diff(X,1,2)
```

```
Y = 2      2
```

```
4      2
```

```
2      4
```

Функція  $\langle F_X \langle F_Y, F_Z, \dots, F_N \rangle = \text{gradient}(F \langle h_x, h_y, \dots, h_N \rangle)$  розраховує першу розділену різницю вектора-рядка/матриці  $F$ . Для аргументу  $F$  у вигляді вектора-рядка результатом є аналог першої похідної  $dF/dx$  або одномірного градієнта у вигляді вектора-рядка. Опціональний аргумент  $h_x$  визначає крок диференціювання. За замовчанням крок дорівнює 1. Тобто результати дій функцій **gradient** та **diff** є подібними. Різниця полягає в розмірі результату. Довжина вектора-результату функції **diff** є на 1 меншою від довжини вектора-аргументу. Довжина вектора-результату функції **gradient** дорівнює довжині вектора-аргументу.

Крім цього, чисельне диференціювання застосовується тоді, коли функцію не можна продиференціювати аналітично – наприклад, коли вона задана за допомогою

таблиці, або вираз функції такий громіздкий, що користуватися виразом похідної для обчислень дуже важко. У цьому випадку задану функцію  $f(x)$  апроксимують функцією  $\varphi(x, a)$ , яка легко обчислюється і приблизно покладають  $f'(x) = \varphi'(x, a)$ . Якщо ми працюємо у пакеті Mathcad, нам не треба хвилюватися про аналітичний вигляд виразу функції: пакет легко диференціює будь-яку функцію, будь-якого числа з мінних. Наприклад, треба обчислити значення похідної функції  $f(x) = 5x^2 + 3x + 18$  при  $x = 1,5$ , а також значення

частинної похідної функції  $g(x) = (x+y)^3$  по  $y$  і мішаної похідної  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$  при  $x = 1,5$ .

Фрагмент Mathcad-документа буде виглядати так:

$$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$$

$$x_1 = 1.5 \quad y := 2 \quad f(x) := 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 8$$

$$g(x, y) := (x + y)^3$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 10x + 3$$

$$f2(x, y) := \frac{d}{dx} g(x, y) \rightarrow 3 \cdot (x + y)^2$$

$$f3(x) := \frac{d}{dy} f2(x, y) \rightarrow 6 \cdot x + 6 \cdot y$$


$$x := 1.5 \quad y := 2 \quad f1(x) = 18 \quad f2(x, y) = 36.75$$

Таким чином ми обчислили значення похідних:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1.5} = 18, \quad \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=1.5 \\ y=2}} = 36.75 \quad \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1.5 \\ y=2}} = 21.$$

У наведеному фрагменті обчислень ми використали оператори диференціювання. Щоб викликати цей оператор у робочому документі, потрібно на панелі математичних інструментів пакета Mathcad натиснути кнопку із зображенням невизначеного інтеграла  $\int \frac{dy}{dx}$ . Це кнопка математичного аналізу.

Після натискання цієї кнопки відкривається додаткова панель, на якій розташовані кнопки математичних операцій. Натискання кнопки з відповідним символом додає до робочого документа шаблон оператора диференціювання з чорними квадратами знизу та справа.

У чорний квадрат справа вводимо ім'я функції або її вираз, який потрібно продиференціювати, а у квадрат знизу – аргумент диференціювання. Потім натискаємо клавішу Space (пропуск) доти, доки весь вираз не буде виділено синьою кутовою рамкою. Після цього натискаємо відповідну кнопку на панелі математичних символів . Через деякий час поруч із позначенням похідної з'являється результат диференціювання.

Якщо на початку документа були вказані значення аргументів, то оператор диференціювання видає значення похідної в точці. При обчисленні похідних вищих

порядків клацаємо по кнопці  $\frac{d^n}{dx^n}$ .

Як відомо, похідна функції, що задається параметрично рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,

$t \in [\alpha, \beta]$ , обчислюється за формулою  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ .

*Приклад.*

Знайти похідну функції  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  при  $t = \pi/4$ .

*Розв'язання у пакеті Mathcad.*

$$TOL := 1 \cdot 10^{-4}$$

$$x(t) := t - \sin(t) \quad y(t) := 1 - \cos(t)$$

$$k(t) := \frac{\frac{d}{dt} y(t)}{\frac{d}{dt} x(t)} \rightarrow \frac{\sin(t)}{(1 - \cos(t))}$$

$$k\left(\frac{\pi}{4}\right) := 2.4142$$

Таким чином, ми визначили значення похідної  $k(t)$  функції, яка задана параметрично у загальному вигляді  $k(t) = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$  та у точці  $t = \frac{\pi}{4}$ :  $k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.4142$

### **Завдання для самостійного виконання**

1. Обчислити похідні функцій за вказівкою викладача.
2. Навести графіки функцій та листинг Mathcad-документа.

## ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

### КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ

#### **Практична робота 8**

#### **МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ**

Мета: ознайомити студентів із принципами моделювання електричних кіл постійного струму в середовищі Tina-TI, навчити їх аналізувати параметри електричних схем, виконувати розрахунки напруг, струмів та потужностей, а також досліджувати роботу електричних кіл за допомогою віртуальних вимірювальних приладів. Розвинути навички використання сучасного програмного забезпечення для проектування та тестування електронних схем до їх фізичної реалізації.

#### **Вказівки до виконання роботи**

Моделювання електричних кіл постійного струму є важливим етапом у процесі проектування електронних пристроїв. Проектування електронних пристроїв виконується за допомогою комп'ютерних програм, які дозволяють проводити аналіз, оптимізацію та тестування схем ще до їх фізичної реалізації [1, 9-10].

Однією з таких програм є Tina-TI, розроблена компаніями DesignSoft та Texas Instruments [11]. Цей програмний пакет є сучасним, потужним і доступним інструментом для аналізу, проектування та тестування аналогових, цифрових, мікропроцесорних і змішаних електронних пристроїв.

##### **1. Підготовка до роботи.**

Після запуску Tina-TI відкривається вікно редактора схем. У цьому редакторі є стандартні меню, такі як «File», «Edit», «Insert», «View». Для зручності роботи необхідно виконати початкове налаштування (рис.8.1.):

- в меню «View», «Options» виберіть Європейський стандарт зображення – «European»;
- встановіть одиниці вимірювання в «міліметрах»;
- виберіть базову функцію для змінного струму – синусоїдальний сигнал.

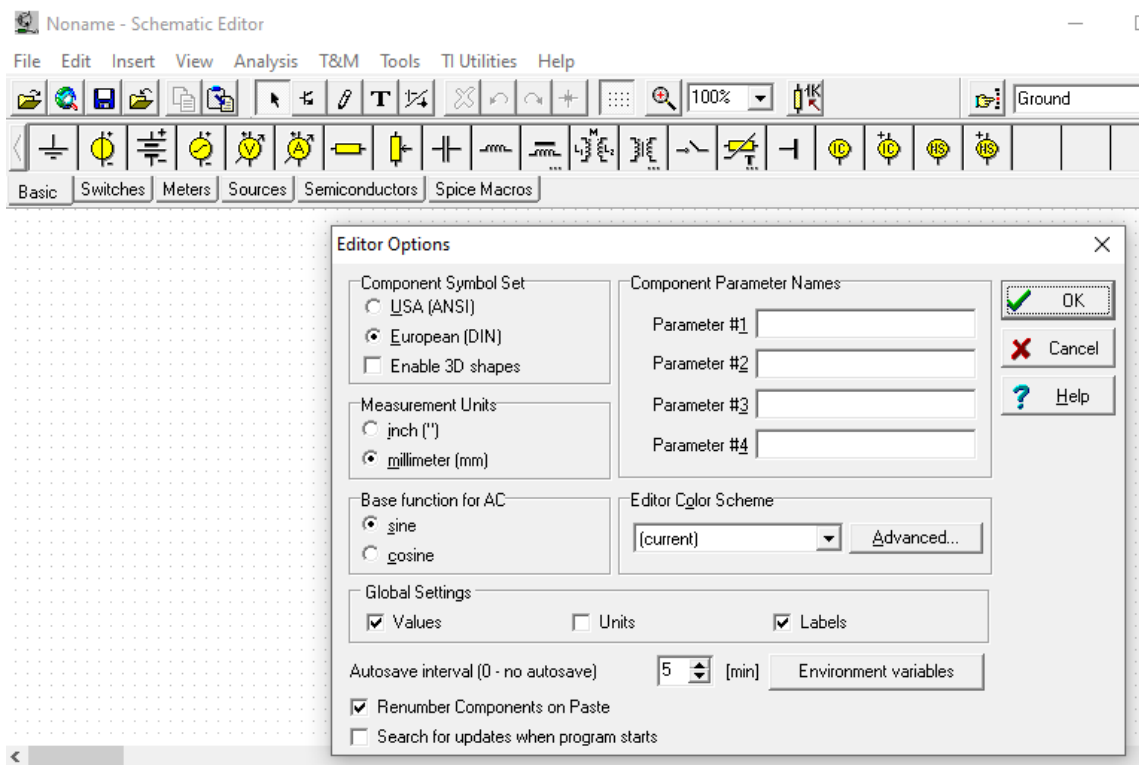


Рисунок 8.1 – Початкове налаштування Tіna-TI

## 2. Знайомство з інструментами.

У редакторі схем доступні такі основні інструменти (рис.8.2):

- кнопка «Analysis» дозволяє проводити аналіз на постійному струмі, змінному струмі, перехідних процесах, а також виконувати аналіз Фур'є;
- вкладка «T&M» забезпечує доступ до функціонального генератора, мультиметра, осцилографа та інших корисних інструментів.

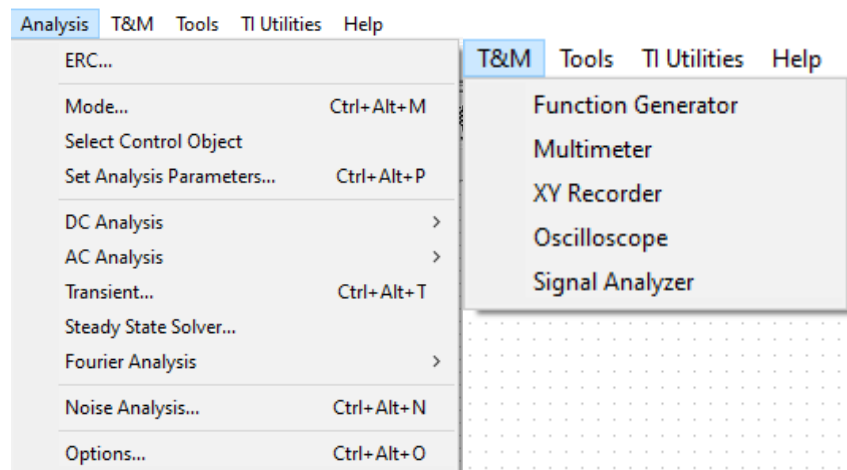


Рисунок 8.2 – Інструменти програми

## 3. Побудова першої схеми.

Розглянемо процес створення простої схеми з використанням батареї, резисторів, амперметра, вольтметра та заземлення.

З панелі основних елементів «Basic» виберіть батарею та резистори.

Для зміни розташування елементів виділіть елемент і натисніть праву кнопку

миші де є інструменти для зміни орієнтації «Rotate...».

Додайте амперметр і вольтметр аналогічно повернувши їх у потрібну сторону та розмістивши на схемі.

Не забудьте додати елемент «Земля».

Для з'єднання елементів підведіть курсор до червоної точки на виводі компонента. Натискаючи ліву кнопку миші, протягніть провідник до іншого елемента. У місцях з'єднання проводів з'являться вузли (чорні точки), які вказують на правильність підключення.

Далі налаштуємо параметри. Для цього виберіть джерело живлення (батарею) лівою кнопкою миші. Натисніть праву кнопку миші, виберіть «Властивості» та встановіть значення напруги 20 В. Підтвердьте зміни кнопкою «ОК». В результаті отримаємо схему рис. 8.3.

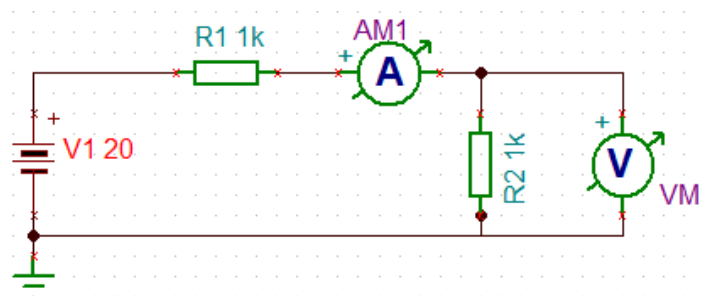


Рисунок 8.3 – Електрична схема кола

Коректність створення схеми можна перевірити за допомогою інструменту ERC.. із вкладки «Analysis» рис. 8.4.

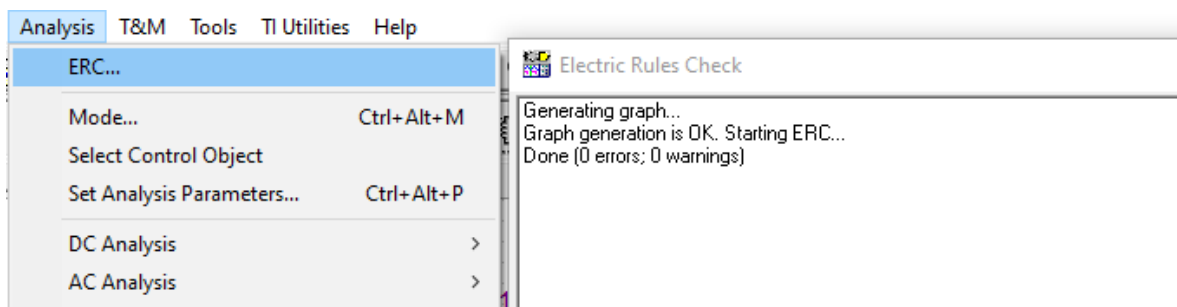


Рисунок 8.4 – Перевірка коректності схеми

#### 4. Аналіз електричних параметрів у колі.

При виконанні аналізу на постійному струмі «Analysis – DS Analysis – Calculate nodal voltages», ми можемо побачити одразу значення струму та напруги в точках кола рис. 8.5. У нашому випадку, амперметр показує 10 мА, а вольтметр – 10 В. Крім того, замість звичайного курсора з'являється шуп. Якщо ми торкаємося щупом до певного вузла, на екрані з'являється значення потенціалів вузлів. Так, наприклад, якщо ми торкнемося вихідного вузла R1, то на екрані побачимо значення 10 В.

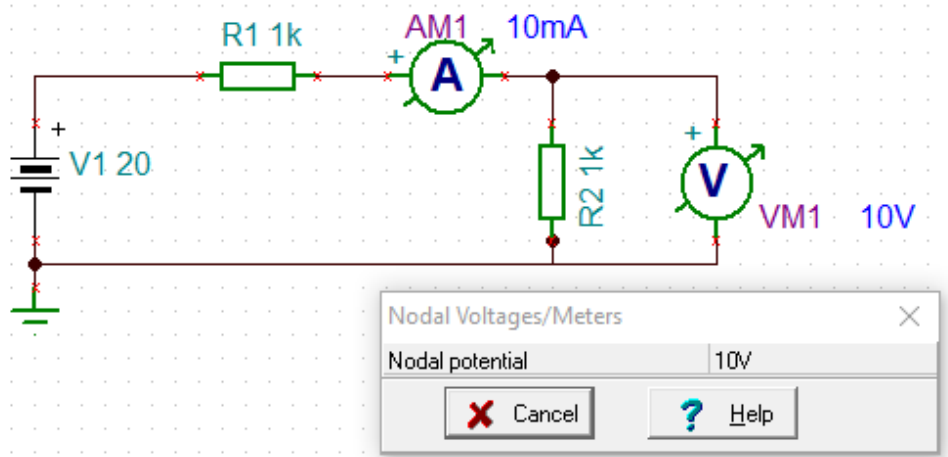


Рисунок 8.5 – Вимірювання параметрів схеми

### 5. Моделювання схеми по максимуму потужності на навантаженні

Для вимірювання потужності на навантаженні, яке ми будемо моделювати як резистор R2, додаємо ватметр. Тепер, для спрощення, приберемо з кола вольтметр, оскільки він нам більше не потрібен, а ось амперметр залишимо, але злегка змістимо його. Далі на вкладці «Meters» вибираємо ватметр і вставляємо його в схему. Підключаємо його за правилами вмикання ватметра рис. 8.6.

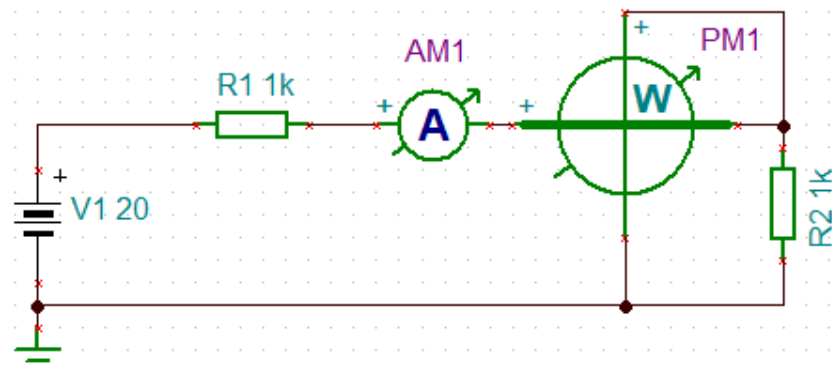


Рисунок 8.6 – Використання ватметра

Тепер визначимо, як змінюється потужність на навантаженні залежно від опору резистора R2. Для цього обираємо тип аналізу «DS Analysis» і в вікні аналізу передатних характеристик «DC Transfer Characteristic» вводимо значення резистора R2 в межах від 0 Ом до 3 кОм рис. 8.7.

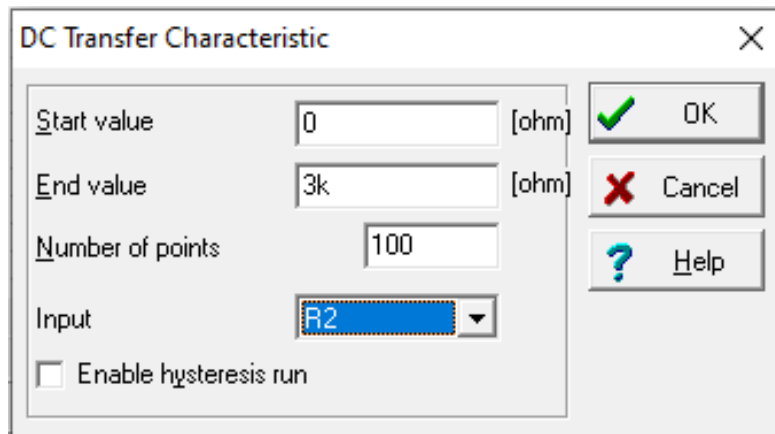



Рисунок 8.7 – Вікно аналізу передатних характеристик

В результаті ми отримаємо 2 графіка залежності потужності та струму від змінного опору рис.8.8.

Кожен графік в програмі має спеціальну мітку , яка дозволяє встановити його значення. Якщо ми підведемо цю мітку до верхнього графіка, на екрані з'явиться відповідна його назва PM1 і у нижньому рядку вікна величини опору і потужності в заданій точці.

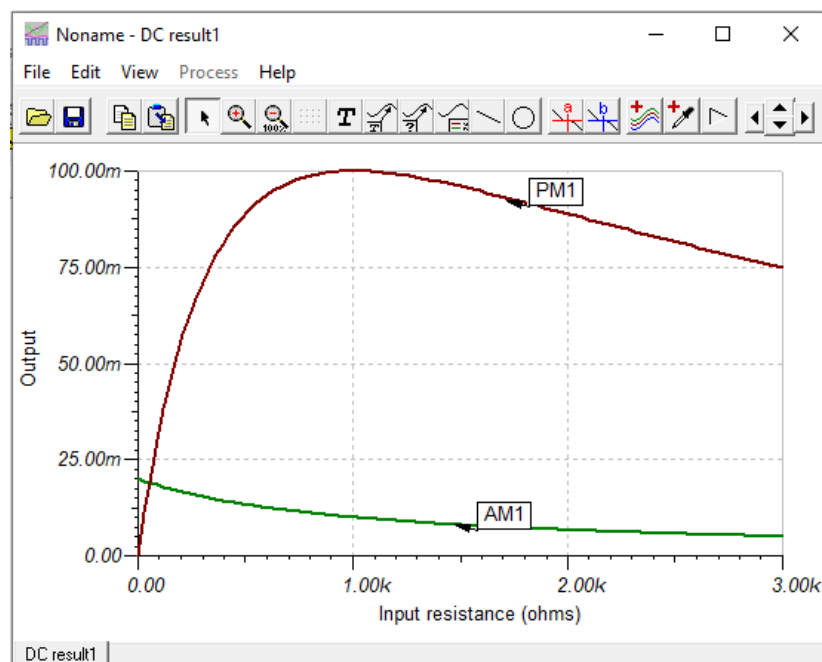



Рисунок 8.8 – графіки зміни струму і потужності на R2 від опору

Графік потужності має чітко виражений максимум. Щоб визначити точне значення цього максимуму, обираємо курсор  і переміщуємо його по графіку потужності до того моменту, поки у вікні результатів не з'явиться максимальне значення. В цьому вікні Y ми побачимо, що максимальне значення потужності складає близько 100 мВт рис. 8.9. При цьому значення опору резистора, параметр X, складає 1 кОм. Це означає, що при опорі навантаження 1 кОм потужність в колі досягає максимального значення.

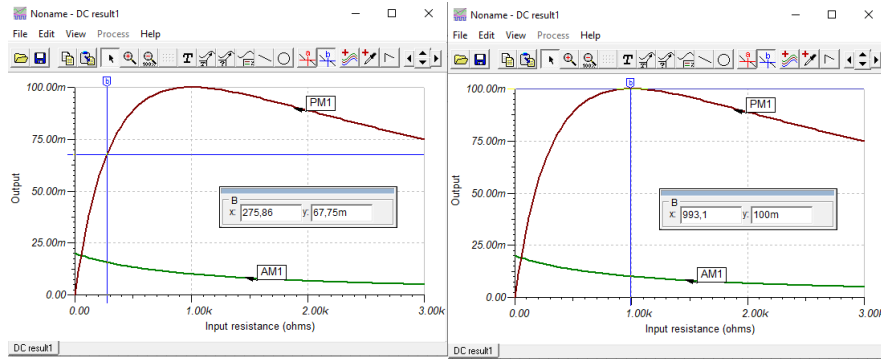


Рисунок 8.9 – Визначення максимуму потужності

Цей результат підтверджує теорему про еквівалентний генератор, згідно з якою максимальна потужність в навантаженні буде виділятися, коли опір навантаження дорівнює внутрішньому опору еквівалентного генератора. У нашому випадку, максимальна потужність спостерігається при опорі навантаження 1 кОм, що відповідає умовам теореми.

### Завдання для самостійного виконання

1. Зібрати схему для комп'ютерного моделювання рис.8.10. Встановити параметри елементів схеми задані викладачем.
2. Визначити струми у вітках схеми тільки при дії джерела напруги V1.
3. Визначити струми у вітках схеми тільки при дії джерела напруги V2.
4. Визначити струми у вітках схеми при дії обох джерел напруги.
5. Визначити і записати напруги у всіх вузлах схеми при дії V1 і V2.
6. Замість V2 ввімкнути опір навантаження  $R_n$ , послідовно до A2 ввімкніть ватметр. Знайти оптимальне значення опору навантаження, при якому в ньому виділяється найбільша потужність. Записати значення оптимального навантаження і значення струму на ньому.

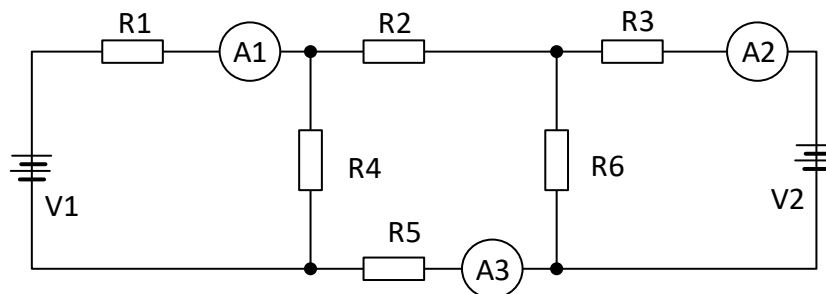


Рисунок 8.10 – Схема для самостійного виконання

## Практична робота 9

### МОДЕЛЮВАННЯ КІЛ ЗМІННОГО СТРУМУ ЗА ДОПОМОГОЮ TINA-TI

Мета: ознайомити студентів із моделюванням електричних кіл змінного струму в середовищі Tina-TI, навчити їх аналізувати амплітудно-частотні та фазові характеристики кіл, досліджувати поведінку RLC-елементів у різних конфігураціях та працювати з чотириполосниками. Розвинути навички використання програмного забезпечення для віртуального експериментування з електричними колами, що включають активні, індуктивні та ємнісні елементи.

#### Вказівки до виконання роботи

Програма Tina-TI пропонує ефективні засоби та інструменти для моделювання електричних кіл змінного струму. Розглянемо схему, яка включає генератор сигналів та вольтметри, підключені до кола із двома входними та двома вихідними затискачами (рис.9.1). Таке коло називають чотириполосником.

Спочатку під'єднаємо індуктивність і дослідимо RL-коло. Далі підключимо ємність для дослідження RC-кола. Після цього з'єднаємо індуктивність та ємність послідовно, утворивши RLC-коло. Також змодельуємо трьохелементні двополосники: один із двома індуктивностями та однією ємністю, а інший – з двома ємностями та однією індуктивністю.

#### 1. Створення RL схеми.

Нехай у нас є індуктивність  $L_1$  зі значенням 10 мГн та опором втрат  $R_{ser} = 5$  Ом, а резистор  $R_1$  має значення 100 Ом.

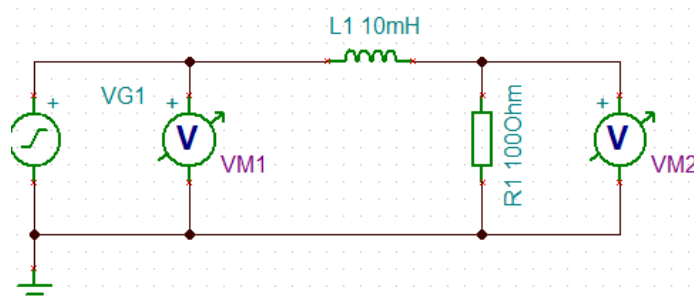


Рисунок 9.1 – Схема чотириполосника RL

Розрахуємо частоту  $f_1$ , за якої виконується умова: реактивний опір індуктивності на цій частоті дорівнює сумі  $R_1$  та опору втрат індуктивності, тобто 105 Ом. Виконавши обчислення, отримаємо  $f_1$ , приблизно 1,671 кГц.

$$X_L = 2\pi f_1 L_a = R_1 + R_{ser} = 100 + 5 = 105 \text{ Ом}$$

$$f_1 = \frac{X_L}{2\pi f_1 L_a} = 1,671 \text{ кГц}$$

На частоті  $f_1$  комплексний опір  $\underline{Z}$  становитиме  $105 + j105$  Ом, тоді його модуль і аргумент відповідно визначається:

$$\underline{Z} = (R_1 + R_{ser}) + j2\pi f_1 L_a = 105 + j105 \text{ Ом}$$

$$|Z| = 105\sqrt{2} \text{ Ом}, \varphi = \arctg \frac{X_L}{R_1 + R_{ser}} = \arctg 1 = 45^\circ$$

Щоб виконати моделювання, налаштуємо генератор сигналів. Вибираємо генератор у схемі, відкриваємо панель його властивостей «Properties» правою клавішею миші і встановлюємо наступні параметри: постійний рівень сигналу – 0 В, форма сигналу – синусоїдальний, амплітуда – 1 В, частота – 1,671 кГц, початкова фаза – 0, рис.9.2.

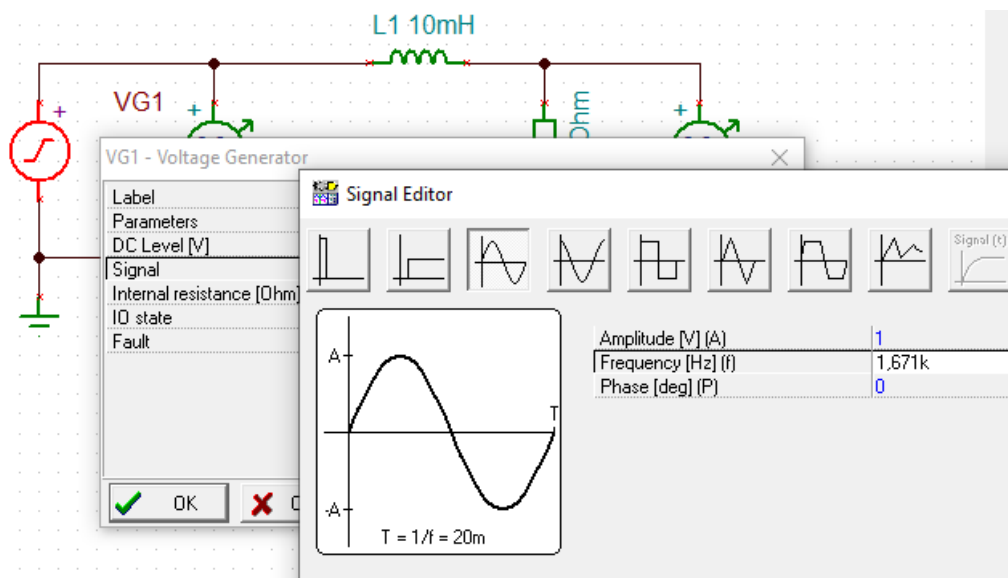


Рисунок 9.2 – Панель налаштування генератора сигналів

Перевіряємо правильність розрахованої частоти  $f_1$ . Виконуємо аналіз на змінному струмі «AC Analysis» та обчислюємо напругу в вузлах рис. 9.3. Результати показують, що вхідна напруга дорівнює 1 В, фаза  $0^\circ$ , вихідна напруга – 673 мВ, а фаза –  $-45^\circ$ . Це підтверджує правильність наших розрахунків.

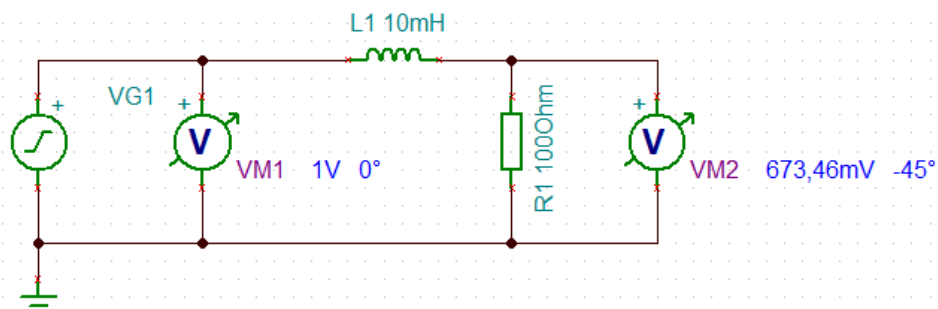


Рисунок 9.3 – Аналіз RL схеми

## 2. Налаштування віртуального осцилографа.

Осцилограф використовується для відображення форми змінних сигналів та аналізу часових зсувів між ними. Для безкоштовної версії Tina-TI осцилограф не представлений як окремий віртуальний прилад. Проте функції осцилографа інтегровані у програму як інструмент для аналізу сигналів.

У верхньому меню виберіть вкладку «Analysis». Оберіть пункт перехідні процеси «Transient». Налаштуйте параметри часу симуляції тривалість та крок моделювання Start display – 0 s, End display – 1 ms.

Результати будуть відображені у графічному вікні, яке виконує функцію осцилографа, рис. 9.4.

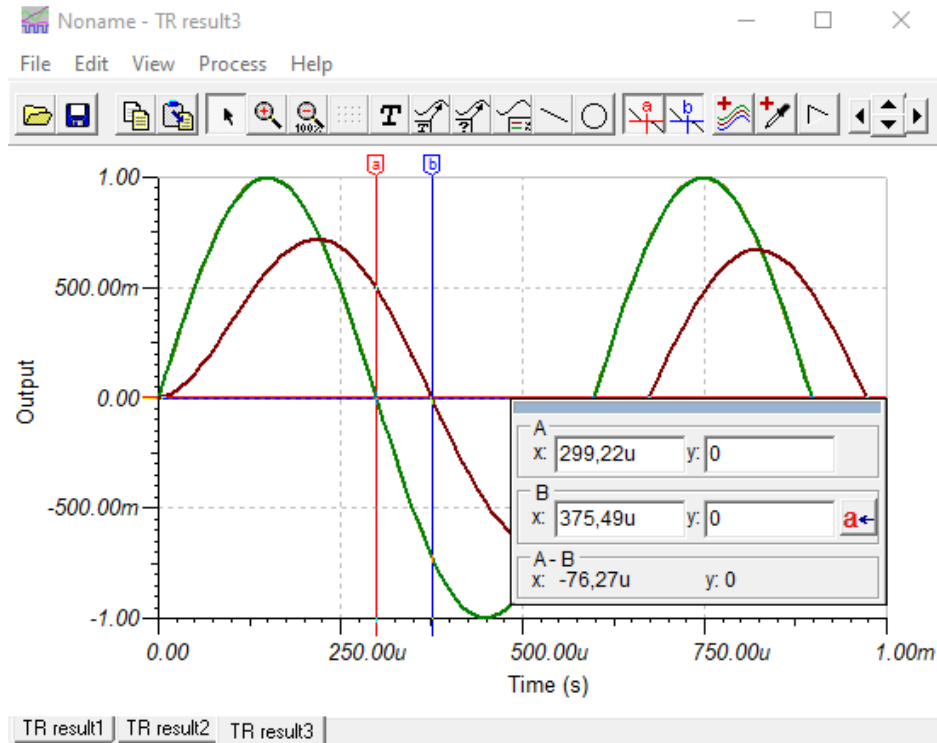




Рисунок 9.4 – Графіки вхідної напруги і напруги на резисторі R1

### 3. Визначення часового зсуву між сигналами.

Для визначення часового зсуву між вхідною напругою та напругою на резисторі використовуємо курсори А  і В  відповідно, для цього виставимо у вікні результатів нульові значення напруги (значення y), тоді координати будуть:

координата  $X_A = 299,22$  мкс;  $Y_A=0$ ;

координата  $X_B = 375,49$  мкс;  $Y_B=0$ ;

різниця між координатами  $X_{A-B} = 76,27$  мкс.

Часовий зсув перетворюємо в кутову величину за формулою:

$$\varphi = \Delta t \cdot 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 1671 \cdot 76,27 = 45^\circ.$$

Оскільки фазовий зсув між струмом і напругою у колі RL має напрямок від струму до напруги, він є негативним. Тому  $\varphi = -45^\circ$ .

### 4. Дослідження частотних характеристик кола.

Для подальшого дослідження зменшимо частоту генератора в 10 разів, тобто до  $f = 167$  Гц. Проведемо аналіз, щоб визначити фазовий зсув між вхідним і вихідним сигналами за цих умов. При частоті генератора  $f = 167$  Гц фазовий зсув між вхідною і вихідною напругами становить  $-5,71^\circ$ . Напруга на виході дорівнює 947,66 мВ, а на вході залишається 1 В.

Для отримання графіків в «Transient» налаштуйте параметри часу моделювання

від 0 с до 10 мс. На екрані з'являються два графіки, які майже збігаються за формою та амплітудою. Часовий зсув між ними мінімальний.

Те ж саме для частоти генератора, що у 10 разів перевищує розрахункову  $f = 16,71$  кГц. Графіки показуватимуть значно меншу напругу на виході, порівняно з вхідною, а фазовий зсув наближається до  $90^\circ$ .

Далі для аналізу використовуємо частотні характеристики амплітуди та фази. Комплексна частотна характеристика  $\underline{K}(j\omega)$  визначається як залежність від частоти відношення комплексної амплітуди вихідної напруги до комплексної амплітуди вхідної напруги [9]. Цю залежність можна також представити через експоненціальну функцію з показником, який відповідає фазовій різниці між вхідним і вихідним сигналами.

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{U_2(\omega) \cdot e^{j\varphi_2(\omega)}}{U_1(\omega) \cdot e^{j\varphi_1(\omega)}} = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} \cdot e^{j(\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega))}. \quad (9.1)$$

Амплітудно-частотна характеристика  $K(\omega)$  показує залежність амплітуди вихідного сигналу від амплітуди вхідного.

$$K(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)}. \quad (9.2)$$

Фазочастотна характеристика  $\psi(\omega)$  відображає зміну різниці фаз між вихідним і вхідним сигналами залежно від частоти.

$$\psi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega). \quad (9.3)$$

Для дослідження передатних характеристик виконуємо аналіз «AC Analysis» → «AC Transfer Characteristic». Задаємо початкову частоту 10 Гц і кінцеву 16,71 кГц. Встановлюємо параметри вимірювання амплітуди та фази сигналів із лінійною розгорткою по горизонталі, рис. 9.5.

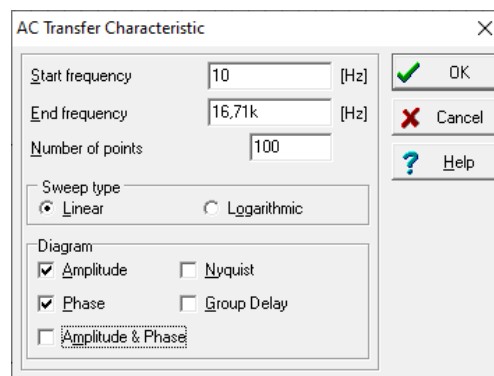


Рисунок 9.5 – Вікно параметрів побудови частотних характеристик

Після запуску аналізу отримуємо графік залежності вихідної напруги VM2 від

частоти, рис. 9.6, а). Графік показує, що з ростом частоти амплітуда вихідної напруги поступово зменшується.

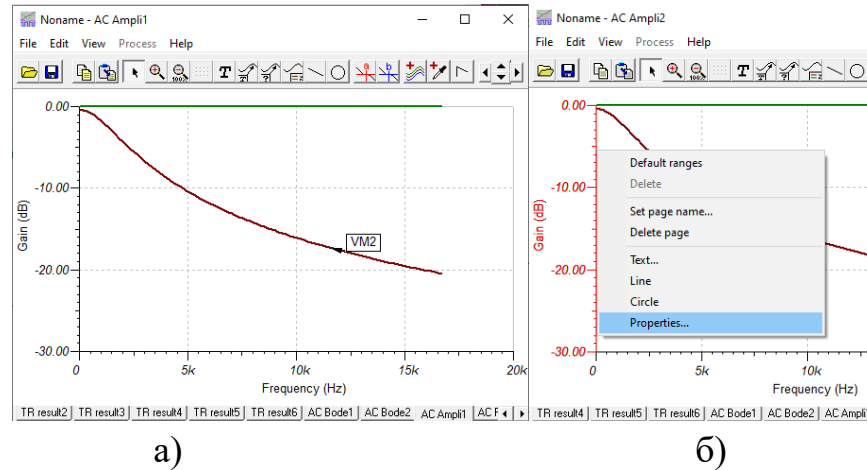


Рисунок 9.6 – Графік залежності вихідної напруги VM2 від частоти

Щоб зробити графік більш зрозумілим, змінюємо шкалу відображення напруги з децибелів на лінійне підсилення: виділяємо вісь графіка, натискаємо «Properties» рис 9.6, б). Вибираємо шкалу «Linear», у вікні шкали встановлюємо мінімальне значення 0, а максимальне 1. Натискаємо «ОК» і отримуємо графік у лінійних одиницях.

Дослідимо вихідну напругу на частоті 1670 Гц. Для цього встановлюємо курсор у точці, найближчій до цієї частоти. Значення напруги на виході становить 673 мВ, що відповідає нашим попереднім вимірюванням. рис. 9.7, а).

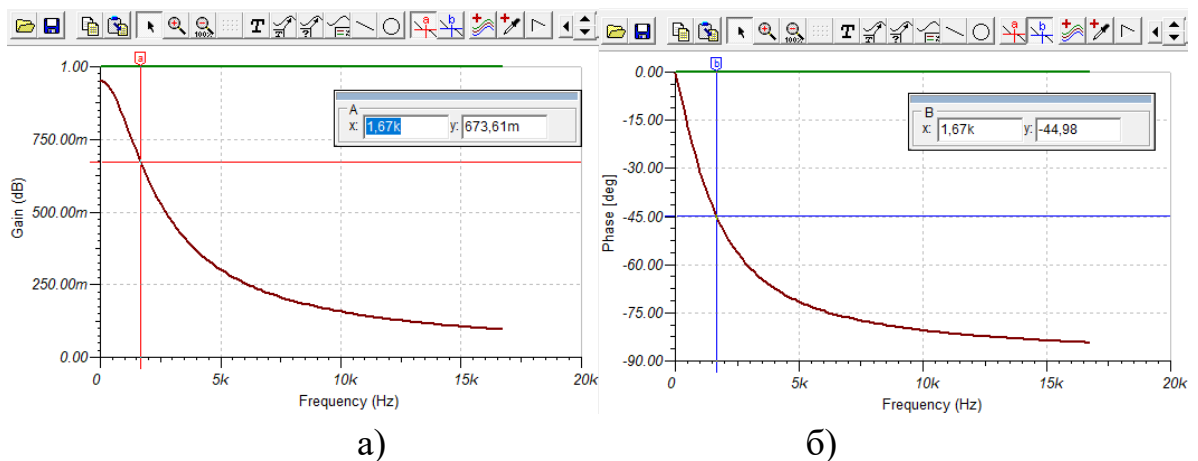


Рисунок 9.7 – Дослідження АЧХ і ФЧХ кола.

Розглянемо графік фазо-частотної характеристики рис. 9.7, б). Спостерігаємо зміну фази від  $0^\circ$  до  $-84^\circ$ . На частоті 1670 Гц фаза становить  $-45^\circ$ , що також узгоджується з розрахунками.

#### 5. Дослідження RC кола.

Підключаємо між затискачами ємність C1. Параметри ємності обираємо такими: значення ємності – 47 нФ, паралельний опір втрат – 500 кОм, рис. 9.8.

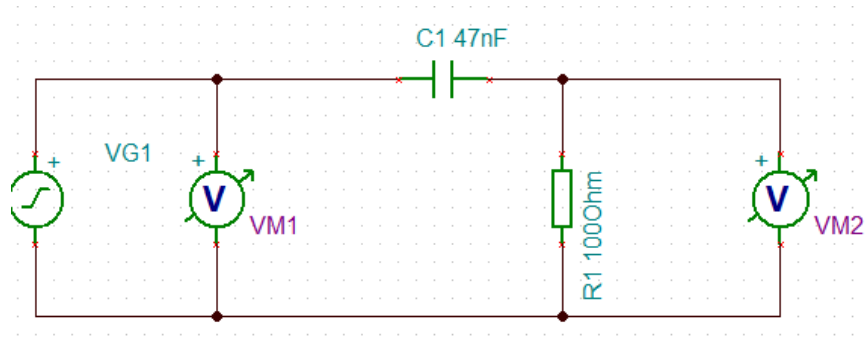


Рисунок 9.8 – Схема чотирьополюсника RC

Виконуємо амплітудно-частотний аналіз передавальних характеристик. Початкова частота встановлена на 1 кГц, кінцева – 100 кГц. Розгортка задається лінійною. Отримуємо графіки амплітуди та фази, рис. 9.9.

На графіку визначаємо частоту, за якої зсув фаз становить  $45^\circ$ . Встановлюємо курсор у точку з фазою  $45^\circ$  і зчитуємо значення частоти 33,7 кГц. Встановлюємо цю частоту в генераторі сигналів і перевіряємо графіки вхідної та вихідної напруги: «Analysis» → «Transient», параметри часу симуляції Start display – 0 с, End display – 50 мкс.

Аналіз показує, що в досліджуваному ланцюзі вхідна напруга відстає від струму на 4,05 мкс, тобто куту  $45^\circ$  при частоті 33,7 кГц, що відповідає теоретичним прогнозам.

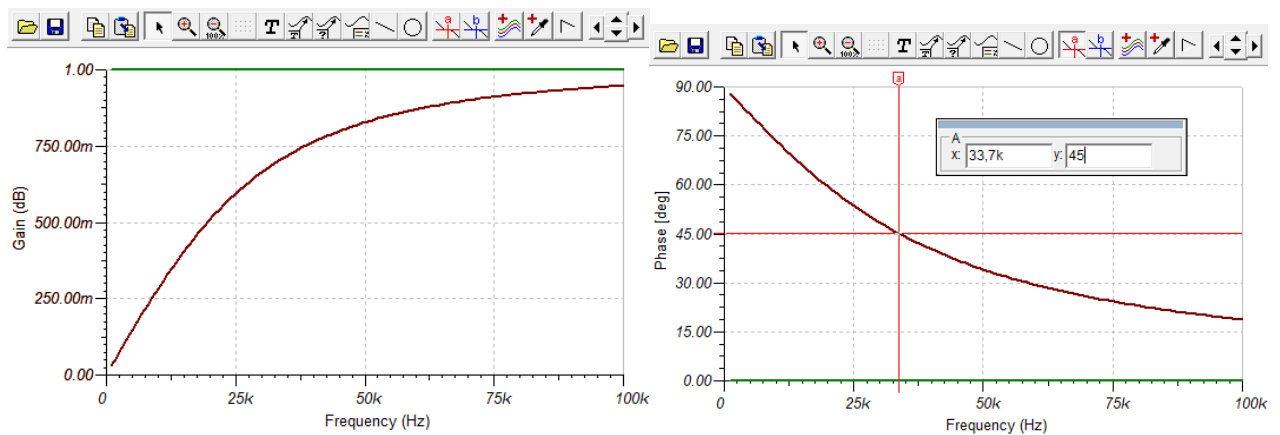


Рисунок 9.9 – Дослідження АЧХ і ФЧХ RC-кола.

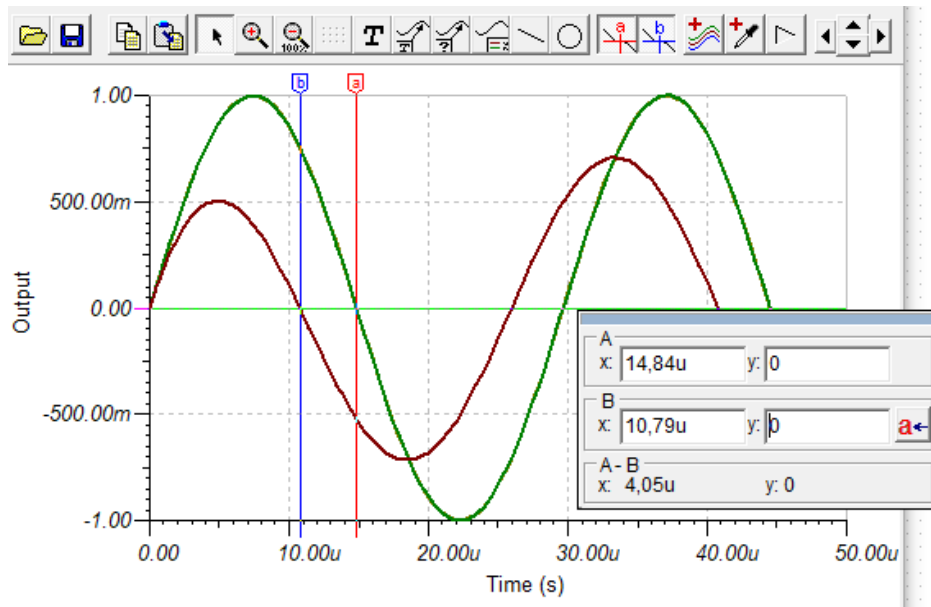


Рисунок 9.10 – Графіки вхідної напруги і напруги кола

### 6. Дослідження RLC-кола.

Для проведення експерименту послідовно підключаємо індуктивність і ємність. Індуктивність має послідовний опір втрат 5 Ом, а ємність – паралельний опір втрат 500 кОм, рис. 9.11.

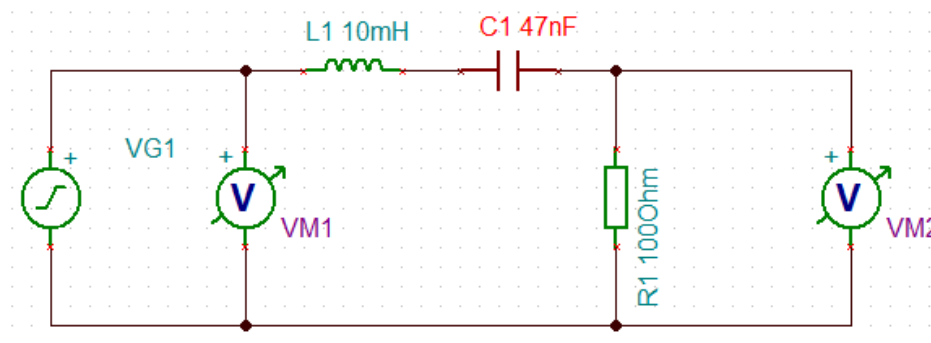


Рисунок 9.11 – Схема чотирьохполюсника RLC

Дослідження амплітудно-частотної характеристики проводимо через «AC Analysis» → «AC Transfer Characteristic» у частотному діапазоні від 1 кГц до 20 кГц із лінійною розгорткою по частоті. Отримано графік амплітудно-частотної характеристики резонансної кривої послідовного контуру.

Для визначення резонансної частоти встановлено курсор у точку максимального значення амплітуди. Резонансна частота виявилася рівною 7,34 кГц, а максимальне значення напруги – 940 мВ, рис. 9.12, а).

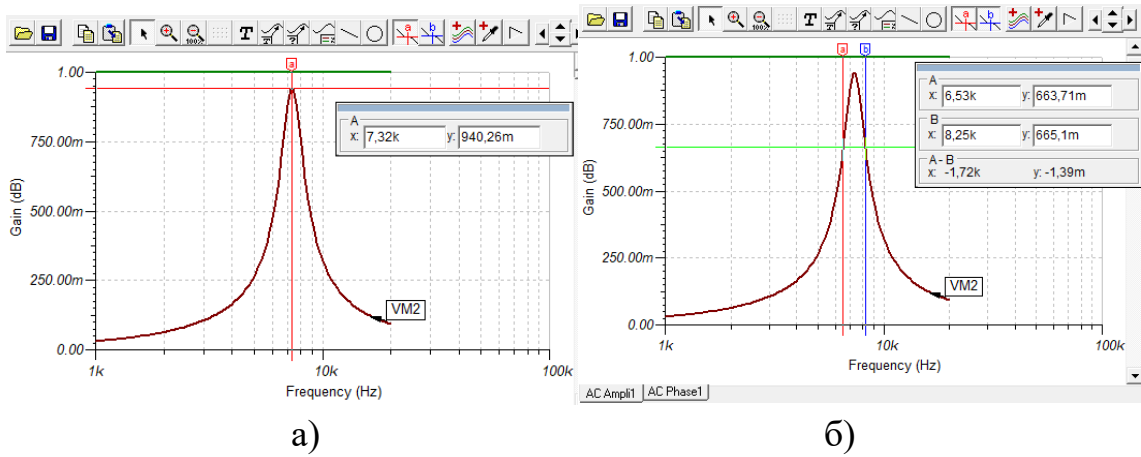


Рисунок 9.12 – Амплітудно-частотна характеристика RLC-кола

Смуга пропускання резонансного контуру визначається як діапазон частот навколо резонансної частоти, в межах якого підсилення зменшується не більше ніж у  $\sqrt{2}$  разів. Поділивши резонансне значення напруги на  $\sqrt{2}$ , отримали граничне значення напруги 665 мВ. Встановивши це значення, визначаємо частоту нижньої межі смуги пропускання 6,54 кГц, а верхню – як 8,25 кГц, рис. 9.12, б). Різниця між цими частотами становить 1,72 кГц, що і є шириною смуги пропускання.

Добротність контуру обчислимо як відношення резонансної частоти до ширини полоси пропускання  $Q = \frac{F_{\text{рез}}}{\Pi} = \frac{7,34 \cdot 10^3}{1,72 \cdot 10^3} = 4,27$ .

Аналіз фазо-частотної характеристики показав, що фаза дорівнює нулю на резонансній частоті, що підтверджує теоретичне припущення, рис. 9.13. На резонансній частоті вхідний опір контуру є чисто активним, а струм збігається за фазою з напругою.

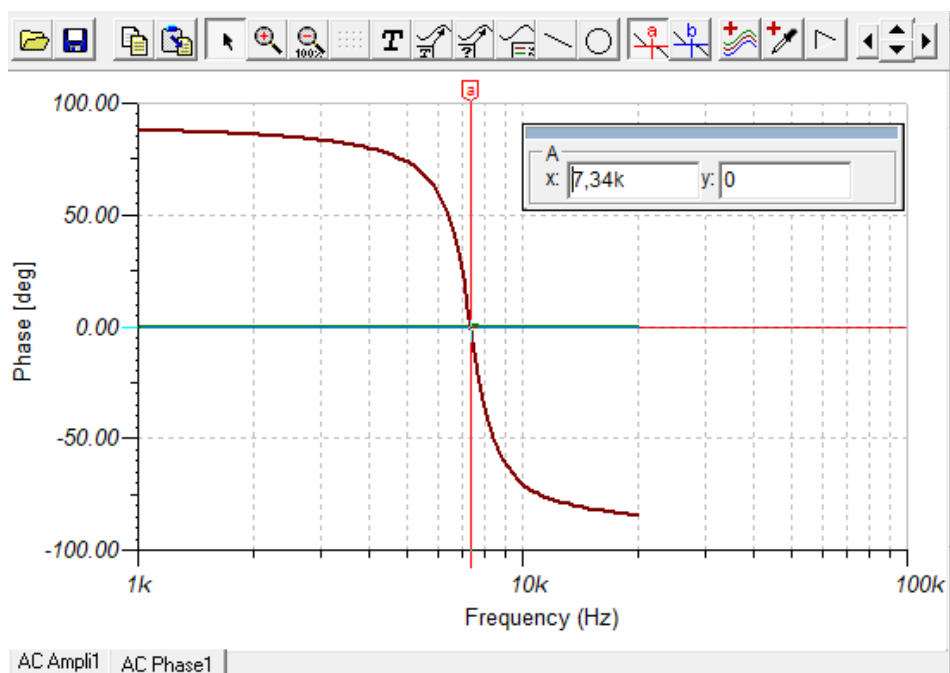


Рисунок 9.13 – Фазо-частотна характеристика RLC-кола

Таким чином, проведені дослідження підтверджують резонансні властивості

RLC-кола та забезпечують точне визначення його параметрів.

### Завдання для самостійного виконання

1. Зібрати схему для комп'ютерного моделювання що містить ємності і індуктивності, параметри елементів схеми задані викладачем.

2. Провести дослідження амплітудно-частотних характеристик за допомогою аналізу передатних характеристик змінного струму, виявити резонансні частоти для:

– кола з паралельним резонансом – паралельне ввімкнення індуктивності і ємності;

– трьохелементного двополюсника, де послідовно підключені конденсатор та індуктивність  $L1$ , а індуктивність  $L2$  включена паралельно до вітки  $L1-C1$ , значення  $L1$  і  $L2$  дорівнюють одна одній;

– трьохелементного двополюсника з двома ємностями та однією індуктивністю,  $C1=C2$ .

3. Порівняти частоту паралельного резонансу та частоту послідовного резонансу.

4. Переключити генератор в режим прямокутних імпульсів. Зібрати RL-коло, спостерігати зміну форми прямокутних імпульсів за допомогою «Transient». Теж саме для RC-кола.

## Практична робота 10

### МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ З ОПЕРАЦІЙНИМИ ПІДСИЛЮВАЧАМИ

Мета: дослідження кіл з операційними підсилювачами в режимах постійного та змінного струму.

#### Вказівки до виконання роботи

1. Операційні підсилювачі (ОП) – це інтегральні мікросхеми, які характеризуються високим коефіцієнтом підсилення в широкій смузі частот, зазвичай від 0 до сотень мегагерц. Їх власний коефіцієнт підсилення становить не менше кількох тисяч. На типовій схемі, рис. 10.1, а) зображено ідеалізований операційний підсилювач, який має два входи та один вихід.

Вхід зі знаком «+» називається неінвертуючим входом, на нього подається напруга  $U_2$ . Вхід зі знаком «-» називається інвертуючим входом, з напругою  $U_1$ . Вихід операційного підсилювача забезпечує вихідний струм та напругу. Для живлення операційного підсилювача зазвичай використовується двополярна напруга, наприклад, +15 В і -15 В.

Ідеальний операційний підсилювач має такі властивості:

1. Власний коефіцієнт підсилення є нескінченно великим.
2. Різниця напруг між неінвертуючим  $U_2$  і інвертуючим  $U_1$  входами дорівнює нулю і називається віртуальним нулем.
3. Вхідні струми для обох входів дорівнюють нулю.
4. Вхідний опір є нескінченно великим.
5. Вихідний опір дорівнює нулю.

Ці ідеалізовані властивості дозволяють значно спростити аналіз електричних кіл, що містять операційні підсилювачі. Використовуючи закони Кірхгофа та властивості ОП, можна вивести корисні аналітичні формули для розрахунку параметрів схем.

Для дослідження схем з ОП розглянемо декілька ключових конфігурацій підключення, які часто використовуються в електронних схемах, рис. 10.1, б). Однією з них є інвертуючий операційний підсилювач. У цій схемі неінвертуючий вхід підсилювача заземлений, а на інвертуючий вхід подається вхідна напруга через резистор  $R_{14}$ . У колі зворотного зв'язку між виходом підсилювача і його інвертуючим входом підключений резистор  $R_{15}$ .

Коефіцієнт передачі напруги для інвертуючого підсилювача визначається як відношення  $R_{15}/R_{14}$ . Якщо опори резисторів однакові  $R_{15} = R_{14}$ , коефіцієнт передачі дорівнюватиме -1, тобто сигнал буде інвертованим, але з тією ж амплітудою.

Якщо замість резисторів у схемі використати елементи з комплексними опорами, описаними операторними виразами  $Z_2(p)$  та  $Z_1(p)$ , то передаточна функція набуває вигляду  $-Z_2(p)/Z_1(p)$ . Це дозволяє вивести операторні передаточні функції та частотні

характеристики для різних типів схем із реактивними елементами, такими як конденсатори та індуктивності.

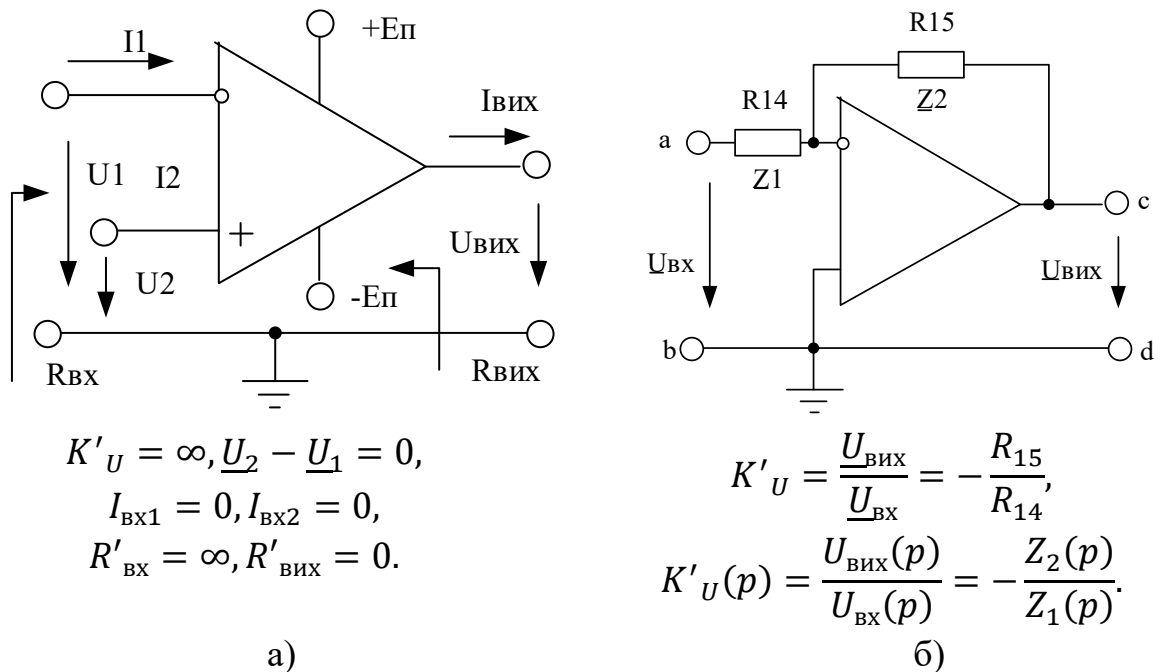


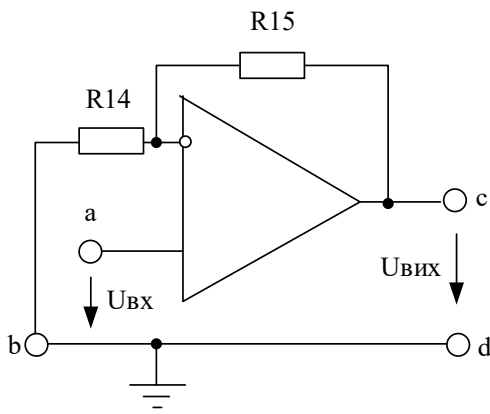
Рисунок 10.1 – Операційні підсилювачі: а) позначення і властивості ідеального ОП; б) інвертуючий ОП

Ще однією важливою конфігурацією є неінвертуючий операційний підсилювач, рис. 10.2. а). У цій схемі резистор R15 підключено в коло зворотного зв'язку, інвертуючий вхід через резистор R14 підключений до землі, а на неінвертуючий вхід подається вхідна напруга.

Коефіцієнт передачі напруги для такої схеми визначається як  $(R_{14} + R_{15})/R_{14}$ . Якщо резистори мають однаковий опір, коефіцієнт передачі становитиме 2.

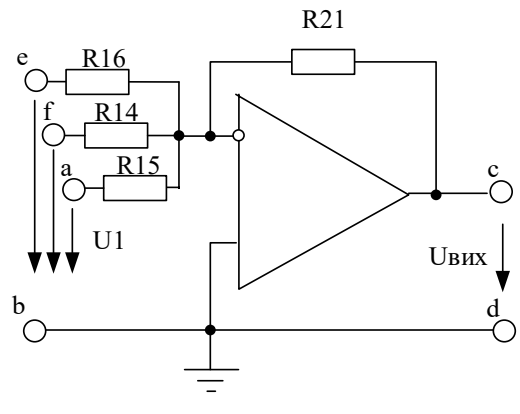
Інвертуючий суматор, рис. 10.2. б) є ще однією популярною конфігурацією. Неінвертуючий вхід підсилювача заземлений, на інвертуючий вхід через резистори R14, R15, R16 подаються кілька вхідних напруг  $U_1, U_2, U_3$ . У колі зворотного зв'язку використовується резистор R21.

Вихідна напруга у цьому випадку визначається як сума вхідних напруг, взята зі знаком мінус:  $-(U_1 + U_2 + U_3)$ , за умови, що всі резистори мають однакові опори.



$$K'_U = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{R_{14} + R_{15}}{R_{14}}$$

а)

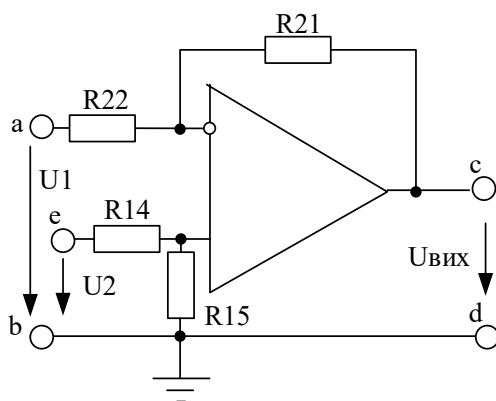


$$U_{\text{вих}} = -\left(\frac{R_{21}}{R_{15}} U_1 + \frac{R_{21}}{R_{14}} U_2 + \frac{R_{21}}{R_{16}} U_3\right)$$

б)

Рисунок 6.2 – Операційні підсилювачі: а) неінвертуючий ОП; б) інвертуючий суматор

Диференційний операційний підсилювач є варіантом, де відбувається віднімання одного сигналу з іншого, рис.10.3. У цій схемі неінвертуючий вхід через резистор R15 підключений до землі, а через резистор R14 на нього подається напруга  $U_2$ . На інвертуючий вхід подається напруга  $U_1$ , а в колі зворотного зв'язку використовується резистор R21. Вихідна напруга у цьому випадку визначається як  $U_2 - U_1$ , якщо всі резистори мають однаковий опір.



$$U_{\text{вих}} = \left[ \frac{1 + \frac{R_{21}}{R_{22}}}{1 + \frac{R_{15}}{R_{14}}} \right] \cdot \frac{R_{15}}{R_{14}} U_2 - \frac{R_{21}}{R_{22}} U_1,$$

при рівних  $R_{14} = R_{15} = R_{21} + R_{22}$

$$U_{\text{вих}} = U_2 - U_1.$$

Рисунок 10.3 – Диференційний ОП

Проведемо моделювання роботи підсилювачів різних типів.

2. Створимо схему, рис. 10.4, яка представляє інвертуючий ОП популярної моделі М301А. У колі зворотного зв'язку використовується резистор R1 з опором 10 кОм, а на вході встановлений резистор R2, 10 кОм. Неінвертуючий вхід підсилювача заземлений. Коефіцієнт підсилення для цієї конфігурації має дорівнювати -1, що відповідає теоретичним розрахункам.

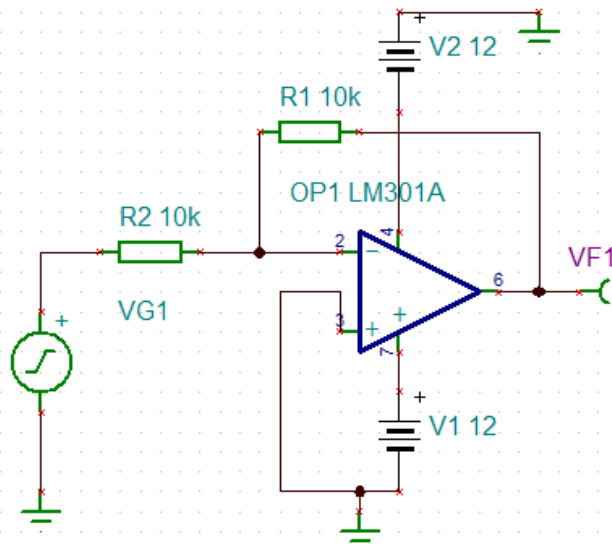


Рисунок 10.4 – Моделювання інвертуючого ОП

Для вивчення амплітудно-частотної (АЧХ) та фазо-частотної (ФЧХ) характеристик виконаємо аналіз передаточних характеристик на змінному струмі. Початкова частота встановлюється на рівні 10 Гц, а кінцева – 10 МГц, з логарифмічним масштабом для точності дослідження. У результаті отримуємо амплітудно-частотну характеристику, рис. 10.5. У широкому діапазоні частот коефіцієнт підсилення в децибелах дорівнює нулю, що свідчить про те, що коефіцієнт передачі від вихідної напруги до вхідної дорівнює одиниці. Для визначення смуги пропускання встановлюємо курсор на рівень -3 дБ. Аналіз показує, що смуга пропускання на рівні -3 дБ становить 555 кГц.

Фазова характеристика в широкому діапазоні частот залишається стабільною на рівні 180°, що відповідає інвертуючому типу підсилювача.

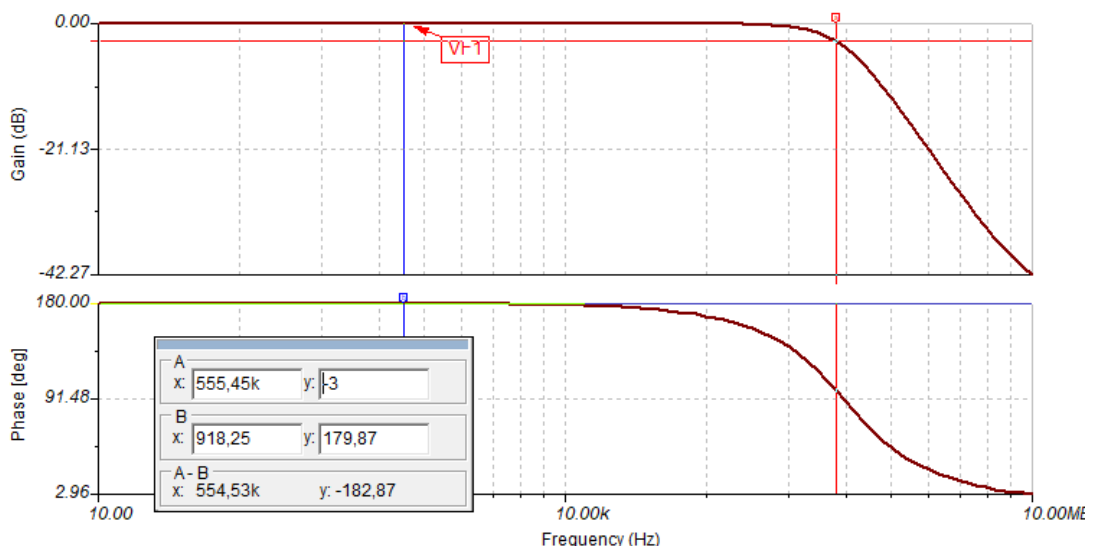


Рисунок 10.5 – Амплітудно-частотна та фазо-частотна характеристики інвертуючого ОП

3. Далі розглянемо схему рис. 10.6, яка є інвертуючим суматором.

У колі зворотного зв'язку використовується резистор R1 з опором 10 кОм, а

вхідні кола можуть бути з'єднані через комутатор. Спершу підключаємо до інвертуючого входу резистор R2 та подаємо через нього напругу  $U_3 = 2$ , В. Виконуємо аналіз постійного струму для обчислення вузлових напруг. Результат показує, що вихідна напруга є інверсією вхідної і становить -2, В, рис. 10.6.

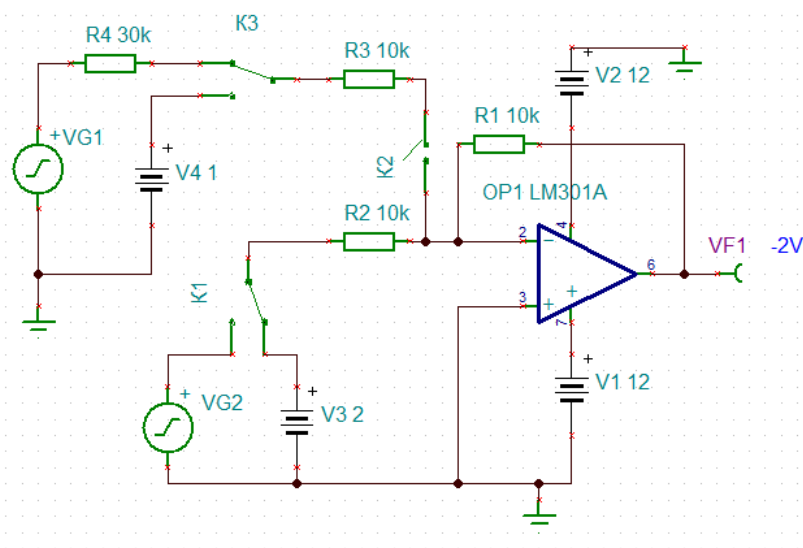


Рисунок 10.6 – Інвертуючий суматор

Потім додаємо до інвертуючого входу ще один резистор R3 (замикаємо ключі K2 і K3), через який подаємо напругу  $U_4 = 1$  В. Виконуємо повторний аналіз постійного струму. Результати обчислень показують, що вихідна напруга змінюється до -3 В, оскільки сума вхідних напруг 2 В та 1 В створює інверсію відповідно до властивостей інвертуючого підсилювача, рис. 10.7.

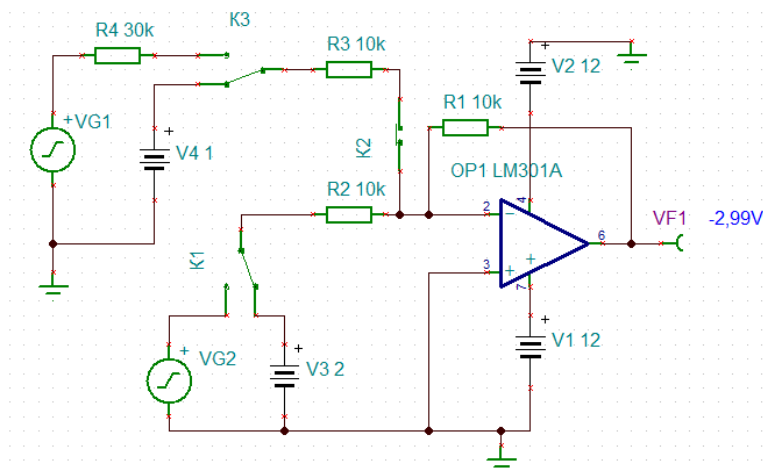


Рисунок 10.7 – Інвертуючий суматор

Підключаємо два джерела змінних сигналів. Перший генератор формує синусоїдальну хвилю з амплітудою 1 В і частотою 1 кГц. Після введення параметрів підтверджуємо налаштування. Другий генератор також формує синусоїдальну хвилю з амплітудою 1 В, але з частотою 100 Гц. Після введення цих параметрів теж натискаємо підтвердження. Для аналізу переходимо до дослідження перехідних

характеристик (Transient Analysis). Початковий час встановлюємо на рівні 0, а кінцевий – 10 мс. Після запуску моделювання отримуємо діаграми сигналів, рис. 10.8.

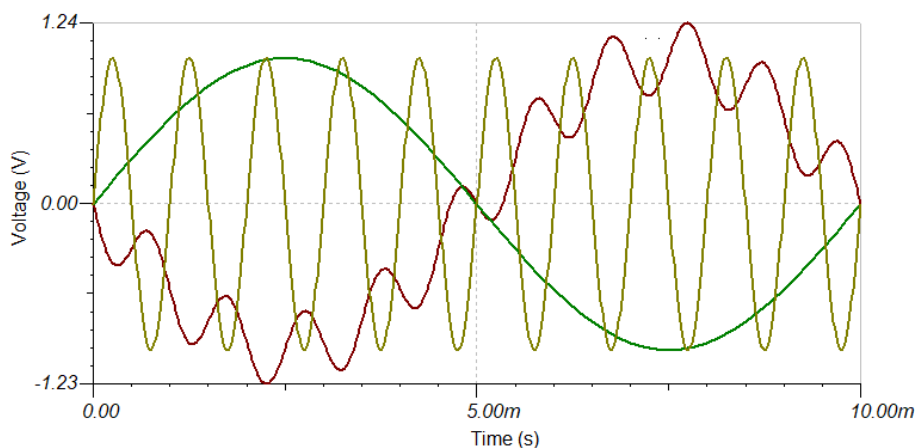


Рисунок 10.8 – Дослідження перехідних характеристик схеми рис. 10.7

На графіку можна побачити напругу від першого генератора і другого генератора, а також вихідний сигнал підсилювача. Форма вихідного сигналу демонструє накладання сигналів двох генераторів, що пояснюється властивостями інвертуючого підсилювача, який обробляє і підсумовує вхідні сигнали, враховуючи їх частоти, амплітуди та фази. Вихідний сигнал є результатом суперпозиції двох синусоїд, одна з яких має низьку частоту (100 Гц), а інша – високу (1 кГц). Це призводить до утворення складного сигналу, який має вигляд хвильових коливань із низькочастотним модулюючим впливом.

4. Далі створюємо схему рис. 10.9 а), яка представляє неінвертуючий операційний підсилювач. На його неінвертуючий вхід подається сигнал від функціонального генератора з амплітудою 1 В і частотою 100 Гц. Після підтвердження параметрів запускаємо аналіз перехідних процесів, встановлюючи початковий час на 0, а кінцевий – на 10 мс. Результати моделювання показують дві часові діаграми: напругу на виході підсилювача та напругу на вході від функціонального генератора.

На часових діаграмах рис. 10.9 б), видно, що вихідна напруга повторює форму вхідної синусоїдальної хвилі з певним посиленням, характерним для неінвертуючого підсилювача. Зміна амплітуди залежить від коефіцієнта підсилення, заданого резисторами у схемі зворотного зв'язку. Синусоїда на виході демонструє збереження фази вхідного сигналу, що відповідає властивостям неінвертуючого підсилювача. Таким чином, графіки відображають основні характеристики даної конфігурації операційного підсилювача, включаючи стабільність фази та амплітуду, яка визначається коефіцієнтом передачі.

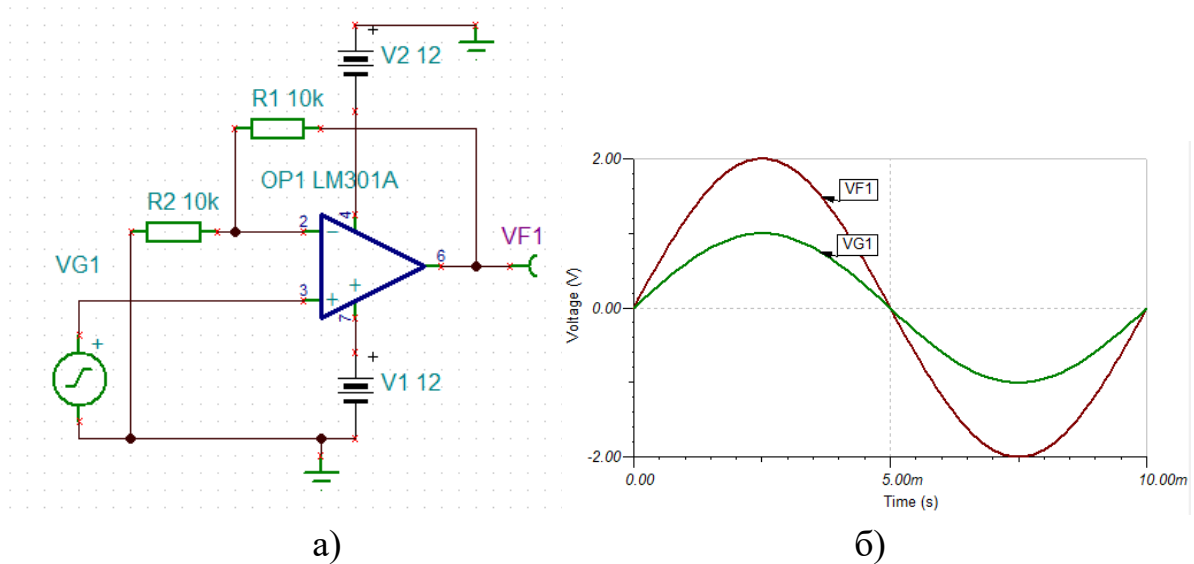


Рисунок 10.9 – Схема а) і часова діаграма б) неінвертуючого ОП

5. Розглянемо операційний підсилювач у конфігурації з різницею підключенням, рис. 10.10 а). Усі резистори в схемі мають однаковий опір, рівний 10 кОм. На неінвертуючий вхід через функціональний генератор VG1 подається синусоїдальний сигнал з амплітудою 1 В і частотою 100 Гц. На інвертуючий вхід подається сигнал від іншого функціонального генератора, який формує синусоїдальну хвилю з амплітудою 500 мВ і частотою 100 Гц.

Після налаштування параметрів обох генераторів запускаємо аналіз перехідних характеристик (Transient Analysis), встановлюючи початковий час на 0 і кінцевий на 10 мс. Отримуємо часові діаграми, на яких зображені напруги на виході підсилювача, а також сигнали обох функціональних генераторів.

На графіках рис. 10.10. видно, що вихідна напруга є різницею напруг, поданих на інвертуючий та неінвертуючий входи підсилювача. У даному випадку на неінвертуючий вхід подається сигнал із більшою амплітудою (1 В), а на інвертуючий – із меншою (0,5 В). Це призводить до формування на виході підсилювача синусоїдального сигналу з амплітудою, рівною різниці амплітуд вхідних сигналів, тобто 0,5 В. Частота вихідного сигналу збігається з частотою вхідних сигналів (100 Гц), що підтверджує лінійність роботи підсилювача у межах заданих параметрів.

Графіки демонструють фазову узгодженість сигналів, оскільки обидва вхідні сигнали мають однакову частоту та фазу. Вихідний сигнал також не змінює фазу, а лише відображає різницю амплітуд вхідних напруг.

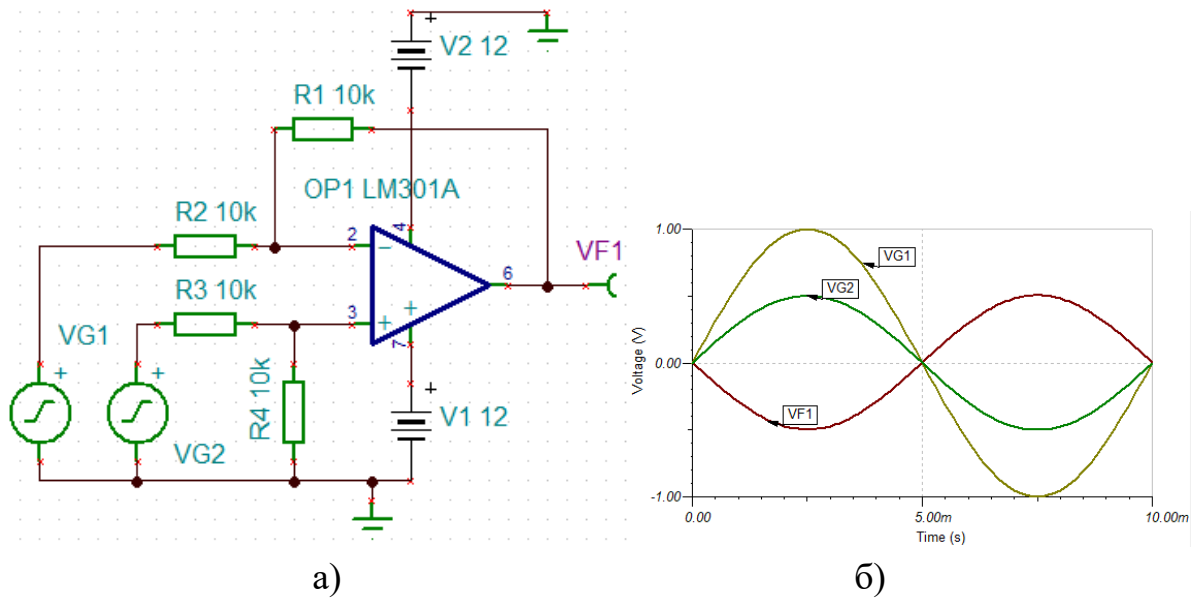


Рисунок 10.10 – Схема а) і часова діаграма б) ОП різницевої конфігурації

6. Досліджуємо частотно-залежні ланки з операційними підсилювачами. Схема рис. 10.11, а) представляє собою диференціюючу ланку. Основна особливість такої схеми полягає в тому, що сигнали нульової частоти не проходять через неї через ємність C1, розташовану на вході. У той самий час високочастотні сигнали проходять без значного послаблення.

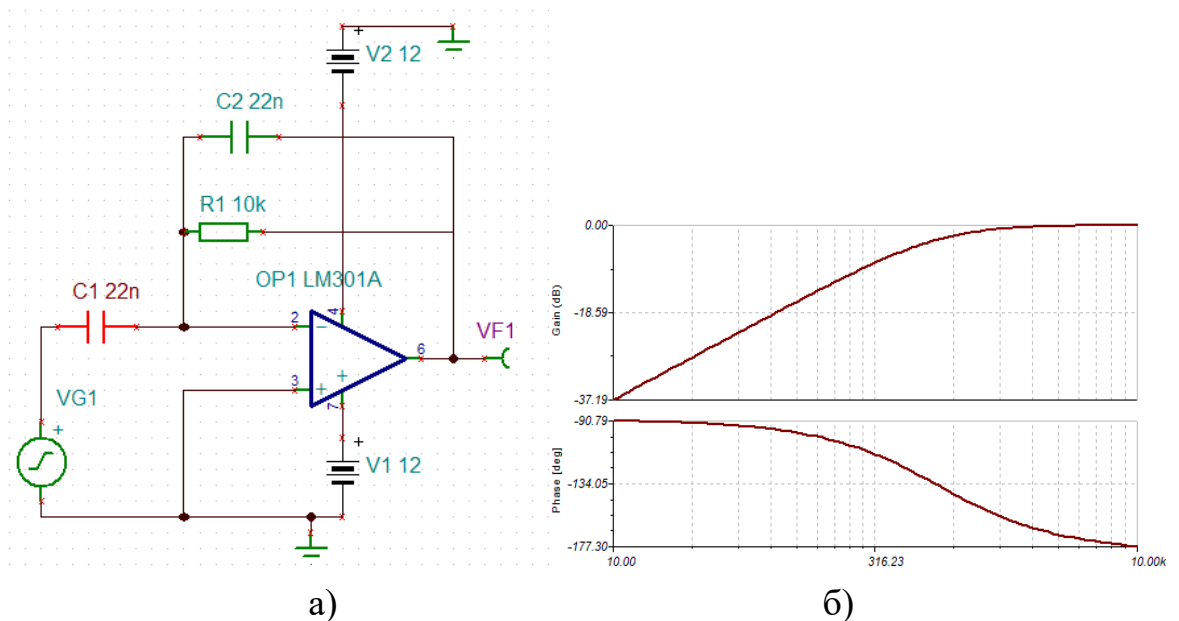


Рисунок 10.11 – Схема а) і АЧХ та ФЧХ б) диференціюючої ланки

Спочатку проведемо аналіз амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик диференціювальної ланки. Виконуємо аналіз у режимі змінного струму, досліджуючи передаточні характеристики у діапазоні частот від 10 Гц до 10 кГц з логарифмічною розгорткою. На графіках спостерігаємо амплітуду та фазу, рис. 10.11, б). Результати показують, що на низьких частотах коефіцієнт передачі дуже малий, приблизно -37 дБ, а на високих частотах він наближається до 0 дБ. Це означає,

що відношення вихідної напруги до вхідної наближається до одиниці на високих частотах. Фазова характеристика змінюється в межах від  $-90^\circ$  до  $-180^\circ$ , що відповідає властивостям диференціувальної ланки.

Далі налаштуємо функціональний генератор VG1 на прямокутну форму сигналу з амплітудою 100 мВ і частотою 50 Гц. Виконуємо аналіз перехідних характеристик у часовому діапазоні від 0 до 40 мс. На графіках отримуємо результати, які демонструють поведінку диференціувальної ланки, рис. 10.12.

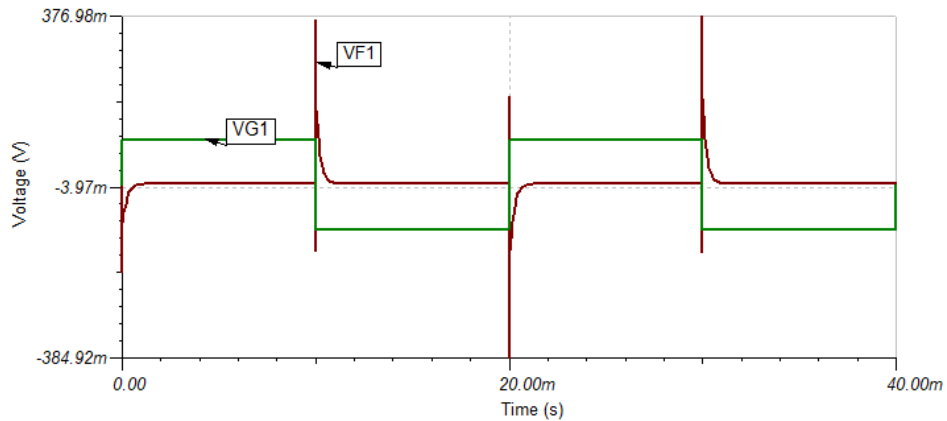
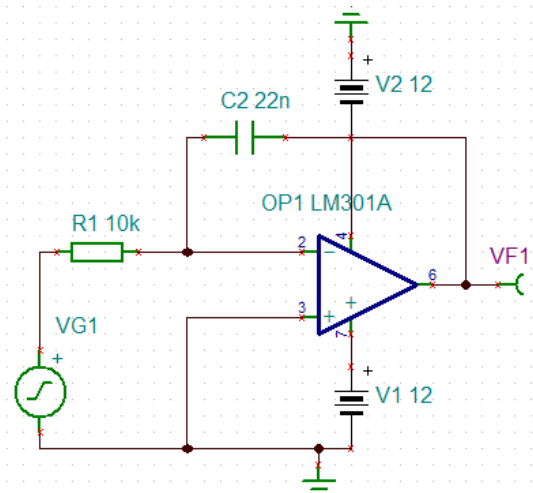


Рисунок 10.12 – Часова діаграма диференціюючої ланки для прямокутного сигналу

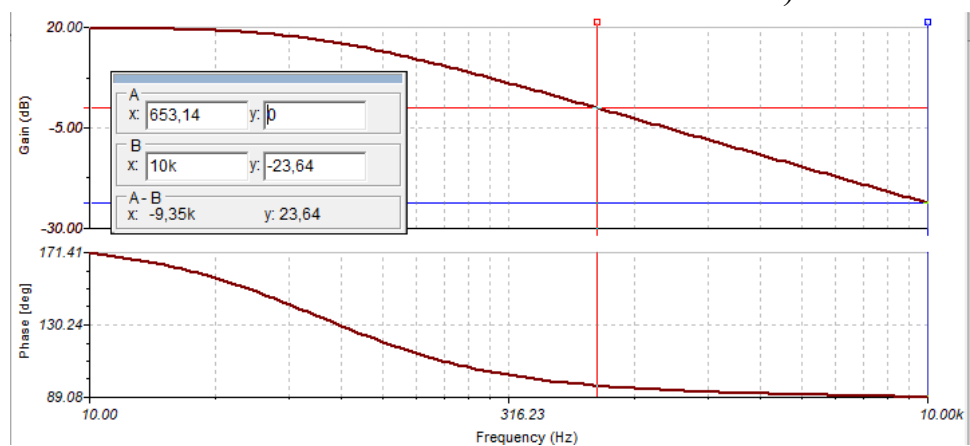
Зелений графік (VG1) відображає вхідну напругу функціонального генератора. При зміні вхідного сигналу від +100 мВ до -100 мВ (від’ємний падаючий фронт) на виході ланки формується позитивний імпульс, який є інверсною похідною від спадного фронту вхідного сигналу. У свою чергу, при збільшенні вхідної напруги від -100 мВ до +100 мВ ми спостерігаємо негативний імпульс на виході. Таким чином, на виході диференціувальної ланки ми отримуємо сигнал, що відповідає похідній вхідного сигналу, але з інверсним знаком.

Ці результати підтверджують принцип дії диференціувальної ланки, яка дозволяє обробляти швидкі зміни вхідного сигналу, ефективно підкреслюючи його високочастотні компоненти.

7. Розглянемо інтегрувальну ланку, яка представлена у схемі 10.13, а). У цій схемі в колі зворотного зв’язку використовується ємність  $C_2 = 22$  нФ, а на вході встановлений резистор  $R_1 = 10$  кОм. Спершу проведемо аналіз амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик. Виконуємо аналіз у режимі змінного струму, досліджуючи передаточні характеристики у діапазоні частот від 10 Гц до 100 кГц.



a)



б)

Рисунок 10.13 – Схема а) і АЧХ та ФЧХ б) інтегруючої ланки

На отриманій амплітудно-частотній характеристиці видно, що в логарифмічному масштабі по осі частот характеристика має лінійний спад. Значення амплітудного коефіцієнта починається приблизно з 20 дБ, проходить через нуль на частоті 653 Гц і знижується до -2а дБ на частоті 10 кГц, рис. 10.13 ,б). Це відповідає властивостям інтегрувальної ланки, яка послаблює високочастотні компоненти сигналу.

Тепер дослідимо, як виглядатимуть вихідні сигнали, якщо на вхід подавати прямокутні імпульси з амплітудою 100 мВ і частотою 50 Гц. Виконуємо аналіз перехідних характеристик у часовому діапазоні від 0 до 40 мс (в параметрах «Transient Analysis» встановить позначку на «Use initial condition»). На графіках видно, що коли вхідний сигнал становить +100 мВ, вихідна напруга лінійно знижується до значення приблизно -4,1 В. Коли вхідний сигнал змінює знак і стає -100 мВ, інтеграція продовжується, але вихідна напруга починає лінійно зростати, досягаючи значень порядку 200 мВ. Процес повторюється циклічно.

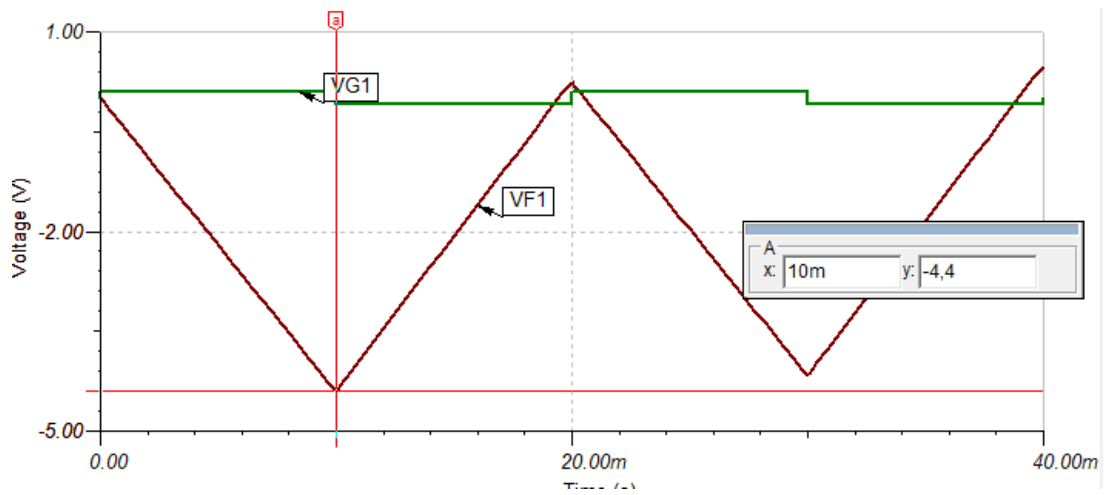


Рисунок 10.14 – Часова діаграма інтегруючої ланки для прямокутного сигналу

Таким чином, інтегровальна ланка працює відповідно до свого принципу: вона інтегрує вхідну напругу, перетворюючи прямокутні імпульси на пилкоподібну форму сигналу. Це ще раз підтверджує те, що на виході інтегровальної ланки відображаються накопичені зміни вхідної напруги.

### Завдання для самостійного виконання

Побудуйте модель інвертуючого та неінвертуючого операційного підсилювача в Tina-TI. Проведіть моделювання з різними значеннями резисторів у зворотному зв'язку (наприклад,  $R_1 = 10$  кОм,  $R_2 = 20$  кОм, 50 кОм). Визначте, як змінюється коефіцієнт підсилення напруги залежно від опорів резисторів, та зробіть висновки.

Створіть моделі інтегруючої та диференціюючої ланки з операційним підсилювачем. Виконайте аналіз амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик у діапазоні частот від 10 Гц до 100 кГц. Зробіть висновки щодо особливостей роботи цих ланок на різних частотах.

Побудуйте модель диференційного підсилювача та інвертуючого суматора. Подайте на входи різні сигнали (гармонійні, імпульсні) та дослідіть вихідні сигнали. Проаналізуйте, як змінюється вихідний сигнал при зміні амплітуд та частот вхідних сигналів.

## Практична робота 11

### ДОСЛІДЖЕННЯ ГАРМОНІЙНИХ СПОТВОРЕНЬ У ПІДСИЛЮВАЧАХ ЗА ДОПОМОГОЮ TINA-TI

Мета: ознайомлення з методами якісної та кількісної оцінки нелінійних спотворень у підсилювальних каскадах за допомогою засобів комп'ютерного моделювання в середовищі Tina-TI.

#### Вказівки до виконання роботи

У підсилювачах, навіть якщо вхідний сигнал є ідеальним синусом, вихідний сигнал може змінити свою форму. Якщо це відбувається, то виникають спотворення. Серед основних типів спотворень виділяють:

- амплітудні спотворення (нелінійні) – пов'язані з нелінійністю схеми;
- гармонійні спотворення – виникають при появі частот, кратних базовій (гармоніки);
- інтермодуляційні – з'являються при наявності декількох частот на вході;
- фазові та часові – порушення співвідношень між фазами сигналів.

Оцінку спотворень здійснюють за допомогою загального коефіцієнта гармонійних спотворень (THD), %, що визначає частку енергії, яка припадає на всі гармоніки, крім основної. Якщо THD = 1%, це означає, що 99% сигналу – це основна частота, а 1% – сума гармонік (2-а, 3-я, 4-а тощо):

$$THD = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + \dots}}{V_1} \cdot 100\%. \quad (11.1)$$

де  $V_1$  – амплітуда основної частоти,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$ , ... – амплітуди гармонік.

Крім цього здійснюють оцінку симетрії сигналу. Симетрія сигналу відображає ступінь однаковості його форми відносно осі часу або амплітуди. У контексті гармонічних спотворень особливе значення має парна симетрія – коли верхня та нижня півхвилі сигналу є дзеркальними відображеннями одна одної. Такий сигнал містить лише непарні гармоніки, тобто 3-тю, 5-ту, 7-му тощо. Якщо ж сигнал не є симетричним (наприклад, спотворена лише одна півхвиля), то з'являються також парні гармоніки – 2-га, 4-та і т.д.

Симетрія має важливе значення для аудіоапаратури, оскільки наявність парних гармонік зазвичай вважається менш приємною для слуху і свідчить про сильніші нелінійні спотворення. Аналіз симетрії допомагає виявити джерело спотворень та оптимізувати роботу підсилювачів і інших аналогових пристроїв [1, 9].

1. Змоделюємо схему підсилюючого каскаду рис.11.1. Створіть простий підсилювач з загальним емітером, без шунтування емітерного резистора. Встановіть синусоїдальний вхідний сигнал з амплітудою 20 мВ.

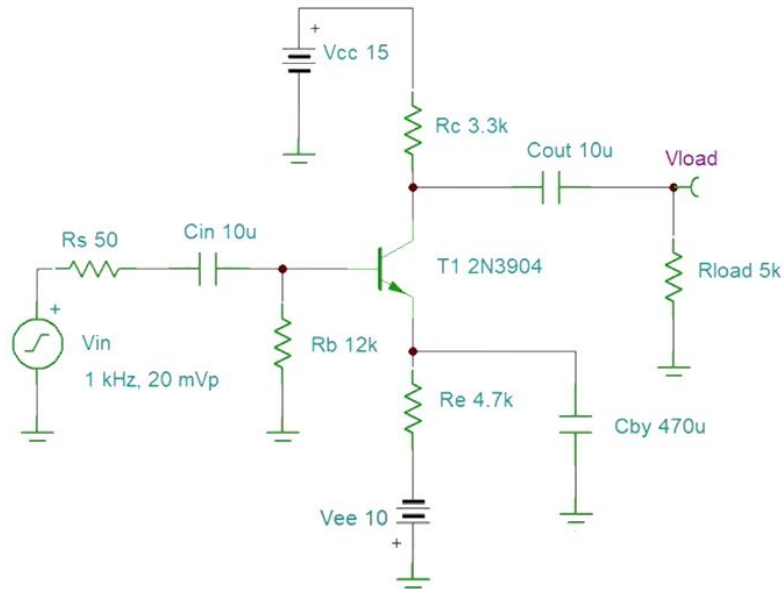


Рисунок 11.1 – Схема підсилюючого каскаду

Проведіть часовий аналіз процесу Analysis → Transient на тривалості 1мс ...5 мс. Спостерігайте форму сигналу у часовій області, рис. 11.2.

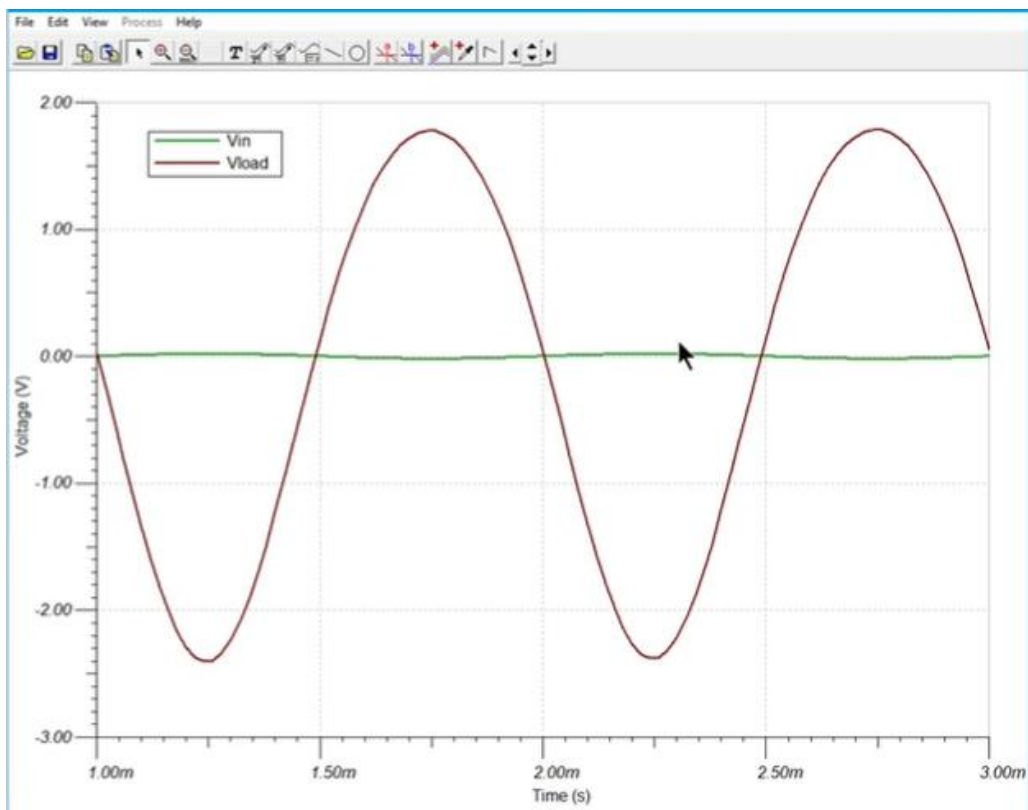


Рисунок 11.2 – Осцилограми вихідного сигналу

Вихідний сигнал має асиметричну форму, відрізняється від чистого синуса.

Якщо сигнал втрачає симетрію або змінюється його форма – це ознака гармонійних спотворень і появи гармонік в частотній області, що кратні базовій частоті:  $2f$ ,  $3f$ ,  $4f$  тощо.

2. Розрахунок THD.

У минулому для вимірювання спотворень використовували наступний метод: на виході підсилювача встановлювався вузькосмуговий смуговідсікаючий фільтр (Notch filter), який вилучав основну частоту (синусоїду) сигналу. У результаті залишались лише гармоніки. Цей гармоніконасичений сигнал подавали на вольтметр з істинним середньоквадратичним (RMS) вимірюванням. Отримане RMS значення порівнювали з амплітудою початкової синусоїди, щоб обчислити THD у відсотках.

У програмі Tina-TI сигнал автоматично оцифровується. Далі виконується математичний спектральний аналіз – розкладання сигналу на гармоніки за допомогою перетворення Фур'є. Це дозволяє отримати амплітуди і фази кожної гармоніки, а також обчислити THD і також побачити повний спектр сигналу.

Проведіть аналіз частотного спектра (Analysis → Fourier Analysis) вихідного сигналу. У вікні налаштувань виберіть вузол для аналізу, наприклад, V(load) або той, що відповідає вихідному сигналу. За замовчуванням буде розраховано перші 16 гармонік. Отримаєте таблицю результатів, рис. 11.3., що включає амплітуду (у вольтах), фазу (в градусах), гармоніку порядку 0 (DC-компонента), 1 (основна частота), 2 (2-га гармоніка) і т. д.

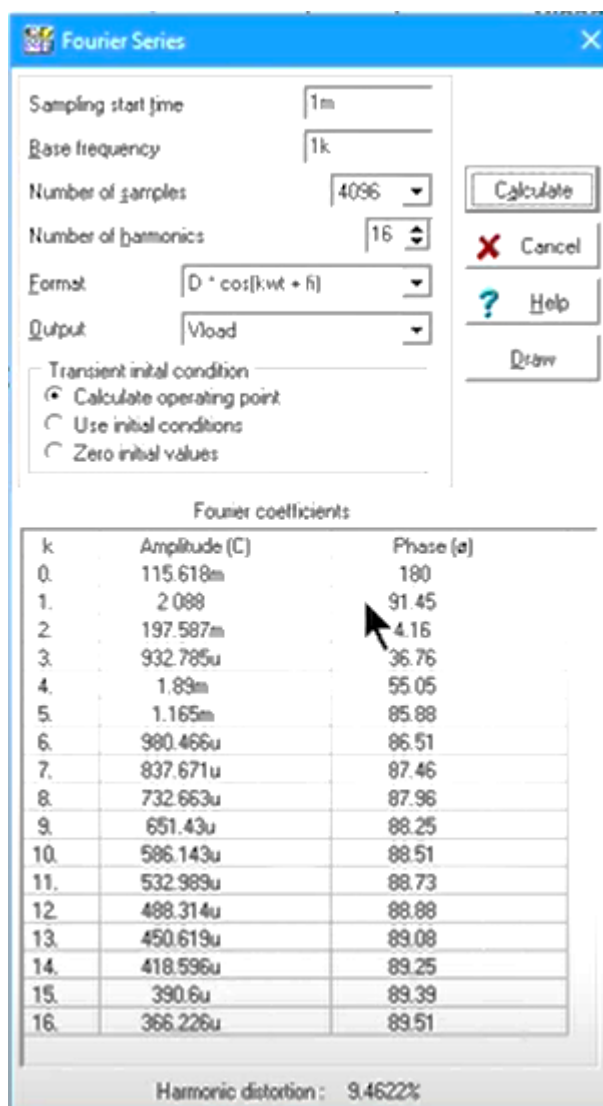


Рисунок 11.3 – Налаштування Фур'є-аналізу

Загальний THD = 9.46%. Це значення вказує на високий рівень спотворень.

Для Hi-Fi аудіоапаратури THD має бути < 1%, а в ідеалі – < 0.1%.

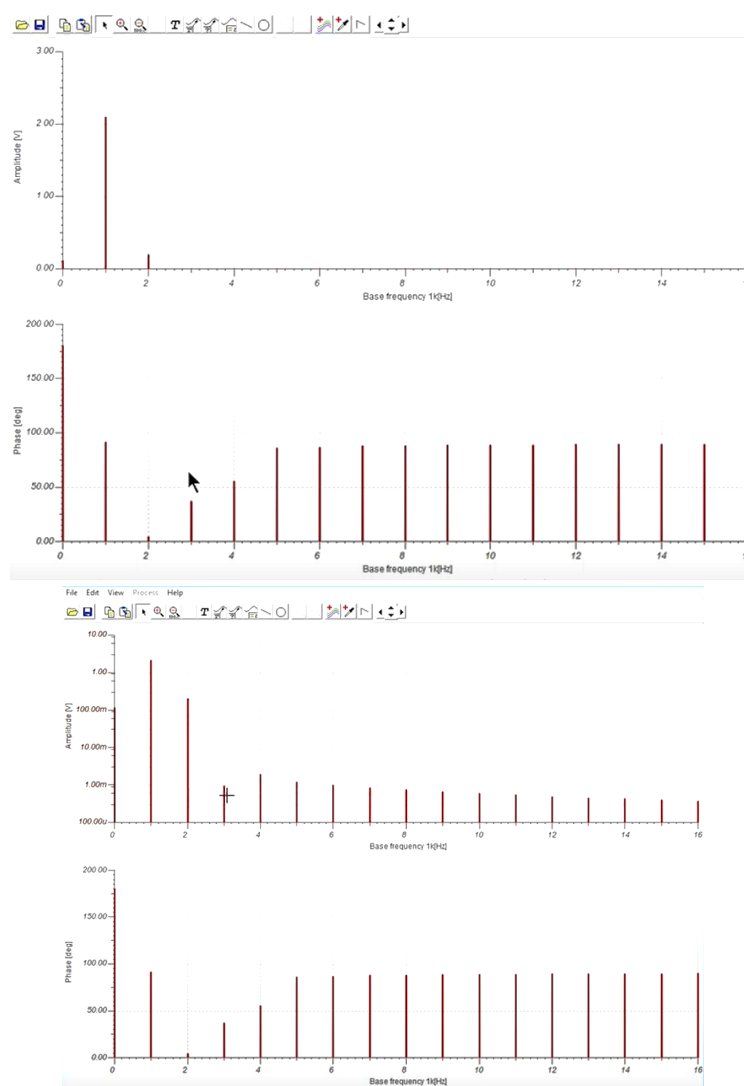
Для систем, де якість звучання не є критичною (наприклад, переговорні пристрої), 9% може бути прийнятним.

### 3. Оцінка асиметрії.

Якщо на око видно асиметрію хвилі (наприклад, різна форма позитивної і негативної півхвиль або відсутність чверть-хвильової симетрії) – спотворення перевищують 1% THD.

Якщо спотворення непомітні візуально, це не означає, що їх немає – просто вони менші за поріг сприйняття (~0.2% і менше), і для виявлення потрібні аналітичні інструменти.

Отримайте графічне відображення спектру. Для цього у вікні аналізу натисніть Draw. З'явиться спектр, рис. 11.4. а, де верхній графік – амплітуди гармонік, нижній графік – фазові зсуви.



а)

б)

Рисунок 11.4 – Графічне відображення спектру

Клацніть правою кнопкою миші на вертикальній осі → Properties. Змініть шкалу з лінійної на логарифмічну (Linear → Logarithmic), щоб краще побачити слабші гармоніки. За потреби, змініть нижню межу шкали, наприклад, з 1 мВ до 0.1 мВ, щоб побачити малопомітні компоненти рис. 11.4. б.

Два підсилювачі можуть мати однаковий THD, але розподіл гармонік може бути різним – і звучатимуть вони по-різному. Наприклад, один має сильну 2-гу і 4-ту гармоніки; інший – лише 3-тю і 5-ту, але сумарно – той самий THD.

Таким чином, THD – це грубий показник, який не враховує розподіл спотворень по спектру.

Отже, будь-яке викривлення синусоїди у часі – це поява нових частот у спектрі. Будь-який неідеальний синусоїдальний сигнал може бути розкладений на базову частоту та набір гармонік. Для малих значень THD (< 1%) – необхідний частотний аналіз, візуально це непомітно.

### **Завдання для самостійного виконання**

1. Побудувати схему підсилювача за варіантом (за завданням викладача) у Tina-TI.
2. Отримати осцилограми сигналу на виході при подачі синусоїдального сигналу частотою 1 кГц, амплітуда 10 В.
3. Оцінити симетрію сигналу, порівняти верхню та нижню півхвилю.
4. Провести Fourier Analysis вихідного сигналу.
5. Побудувати графік гармонік у логарифмічному масштабі.
6. Збільшити і зменшити вхідну амплітуду сигналу на 50% та простежити зміну THD в кожному випадку.

## Практична робота 12

### АНАЛІЗ ПІДСИЛЮВАЧА КЛАСУ А З РЕАКТИВНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Мета: дослідити, як складна реактивна природа навантаження впливає на параметри підсилювача: форму сигналу, напругу та струм колектора, розташування та форму навантажувальної прямої.

#### Вказівки до виконання роботи

У класичних прикладах аналізу підсилювачів класу А навантаженням зазвичай є резистор, що спрощує побудову вхідних і вихідних характеристик, розрахунок робочої точки та оцінку амплітудних меж сигналів. Проте в реальних умовах навантаженням підсилювача часто є більш складна система, наприклад, динамік. Динамік не є просто резистором – він має індуктивну обмотку, а також акустичну масу та пружність, що моделюються додатковими реактивними компонентами.

У цій роботі розглядається поведінка підсилювача класу А, навантаженням якого є спрощена модель гучномовця.

1. Складіть схему підсилювача (рис.12.1). Ця модель включає в себе голосову котушку з опором  $R_{VC}$  та індуктивністю  $L_{VC}$ , а також елементи, що імітують масу рухомої системи гучномовця (подібну до інерції), пружність (або «еластичність») дифузора, а також повітря, що захоплене в корпусі (воно також діє як пружина).

Ці елементи реалізуються у вигляді індуктивності та ємності в еквівалентному RLC-колі. Таке навантаження має частотно-залежний характер: при деяких частотах воно є переважно індуктивним, при інших – ємнісним, а на резонансній частоті – резистивним.

Зазвичай, коли на виході стоїть простий резистор (наприклад, на 10 Ом), графік навантажувальної характеристики (load line) виходить прямолінійним: по одній осі – струм колектора ( $I_C$ ), по іншій – напруга колектор-емітер ( $U_{CE}$ ). Така діаграма дозволяє чітко визначити робочу точку (Q-point) транзистора і амплітуду коливань сигналу.

Але проблема полягає в тому, що реактивний опір залежить від частоти сигналу. І саме це ускладнює ситуацію: при зміні частоти змінюється і поведінка навантаження, а отже – і форма навантажувальної характеристики, що більше не є простою прямою лінією.

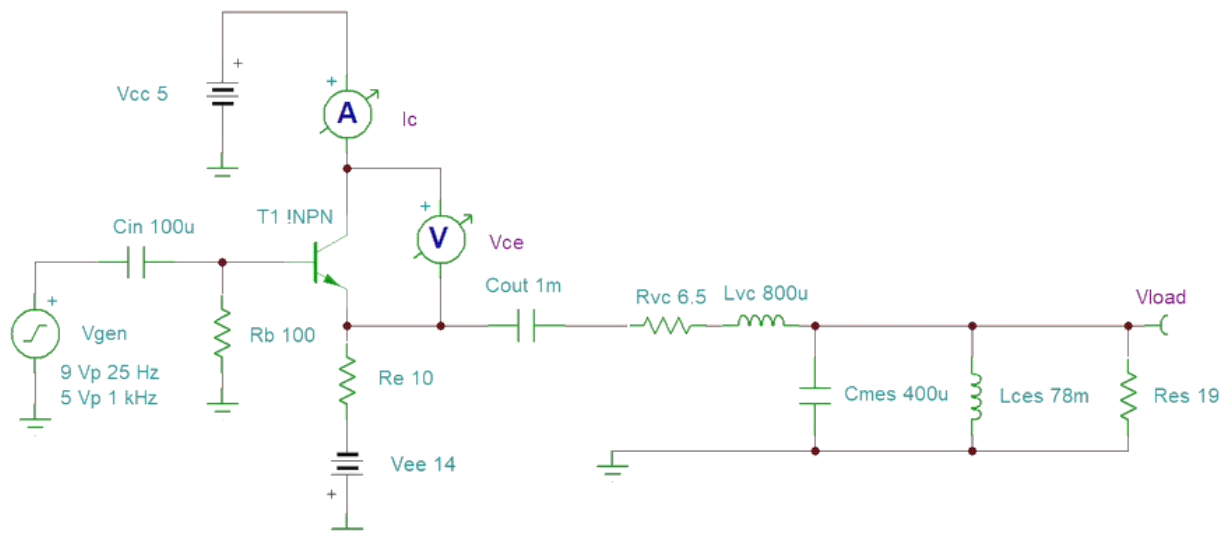


Рисунок 12.1 – Схема підсилювача класу А з реактивним навантаженням

## 2. Аналіз результатів моделювання. Низькочастотна робота (25 Гц).

На початку моделювання підсилювач працює з синусоїдальним сигналом частотою 25 Гц. Для побудови навантажувальної прямої використовується графік залежності  $V_{CE}$  від  $I_C$ . Виконаємо Analysis→Transient Analysis (рис. 12.2) .

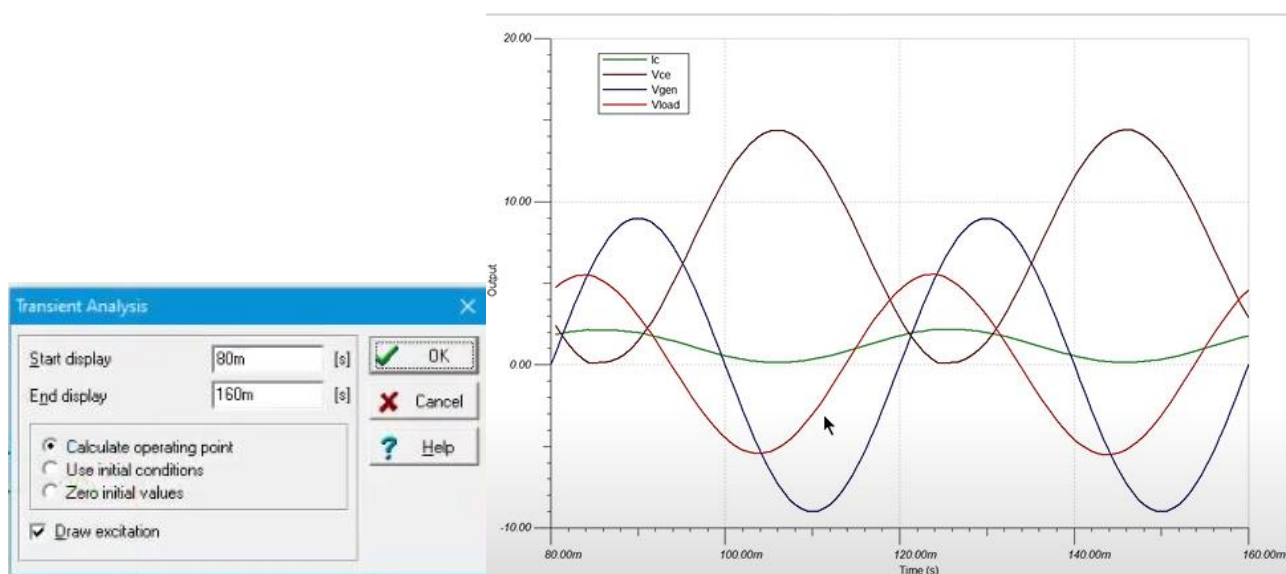


Рисунок 12.2 – Осцилограми напруг

Спостерігаємо такі результати у вигляді 4 кривих.

Вибираємо кнопку пост-обробки (Post-Processor) рис. 12.3.

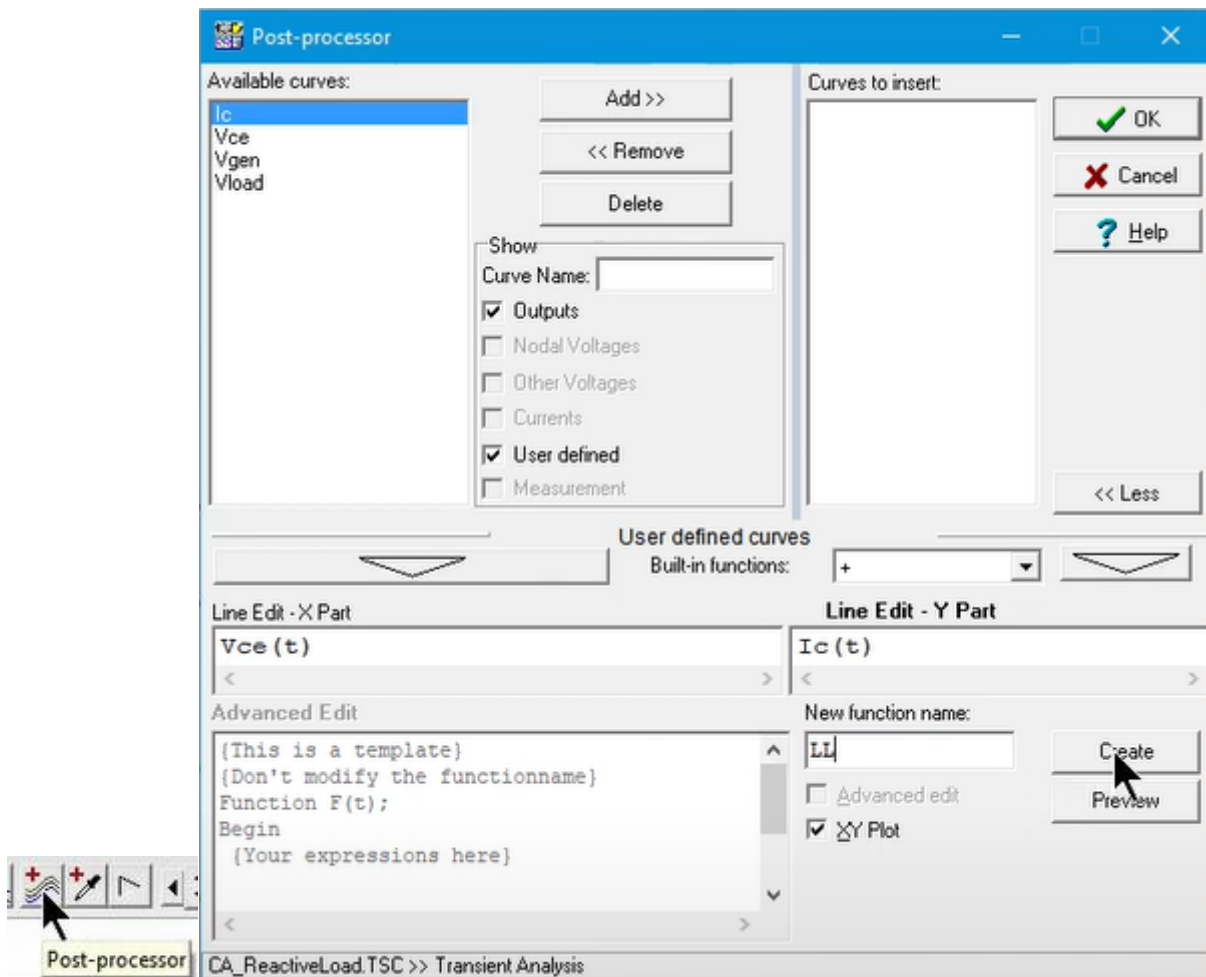


Рисунок 12.3 – Аналіз графіків

Відмічаємо значення Осі X –  $V_{CE}$  та осі Y –  $I_C$ . Натискаємо Create - OK.

Сигнал генератора (рис. 12.4) має амплітуду, достатню для близького наближення до межі відсікання (cutoff), однак не викликає спотворень.

Струм колектора ( $I_C$ ) змінюється до нуля, підтверджуючи, що ми наближаємось до межі, але ще не досягаємо насичення або відсічки.

Отримана пряма лінія підтверджує, що у цьому режимі навантаження є здебільшого резистивним, а робоча точка підсилювача досить добре центрована.

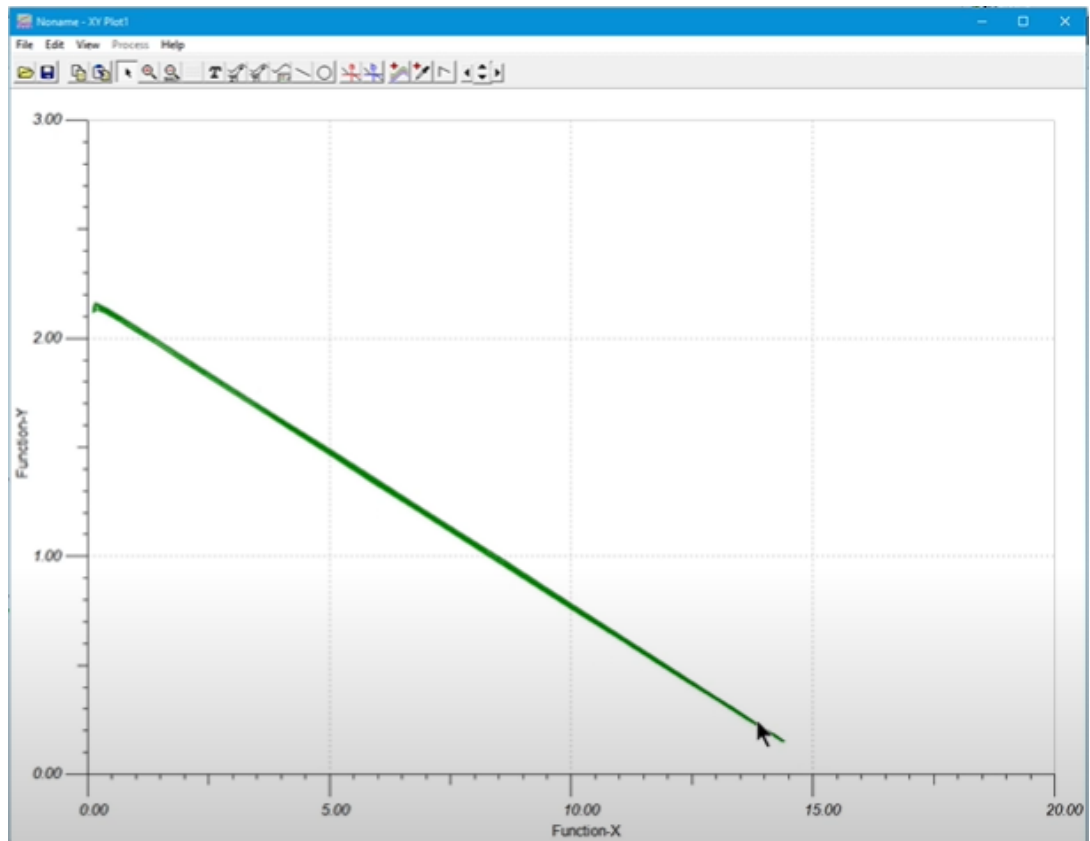


Рисунок 12.4 – Робоча характеристика

### 3. Зміна частоти на 1 кГц

Далі частота генератора змінюється на 1 кГц, а амплітуда сигналу зменшується до 5 В, щоб уникнути обрізання сигналу, коли його амплітуда перевищує допустимий рівень, який може відтворити підсилювач (clipping).

На цій частоті реактивна природа навантаження змінює свою поведінку, з'являється зсув фази між струмом і напругою.

Побудова графіку  $I_C$  від  $V_{CE}$  (навантажувальна характеристика) показує еліпс, а не пряму (рис. 12.5). Це вказує на наявність фазового зсуву між струмом і напругою на навантаженні – характерну ознаку реактивного навантаження.

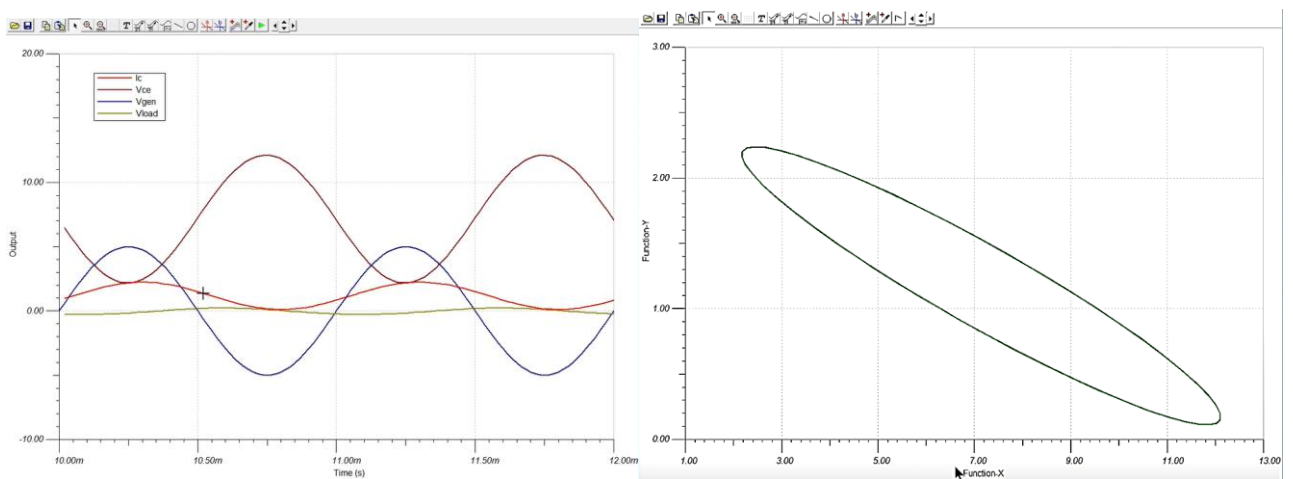


Рисунок 12.5 – Навантажувальна характеристика

При цьому:

- якщо навантаження є суто індуктивним або ємнісним, графік приймає форму кола.
- якщо навантаження має нульовий фазовий зсув (тобто резонанс), крива – пряма.
- за наявності неповного фазового зсуву (наприклад,  $30\text{--}60^\circ$ ), спостерігається еліптична траєкторія.

Отримані результати демонструють важливу особливість: при реактивному навантаженні форма навантажувальної характеристики змінюється.

Безпечна зона роботи (SOA) транзистора залежить від частоти та типу навантаження. При великих фазових зсувах робоча траєкторія може вийти за межі SOA, що потенційно загрожує виходом транзистора з ладу.

Реальні навантаження, такі як динаміки, є реактивними і частотно-залежними, що створює додаткові вимоги до проєктування підсилювачів.

### **Завдання для самостійного виконання**

1. Змініть частоту сигналу на інші значення (наприклад, 500 Гц, 2 кГц) і проаналізуйте, як змінюється форма навантажувальної характеристики, зробіть висновки.
2. Використайте інші моделі транзисторів із бібліотеки Tina-TI згідно вказівок викладача, порівняйте результати.
3. Проведіть аналіз при зміні типу навантаження, для цього додати паралельно конденсатор або індуктивність.

## Практична робота 13

### АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ МОДЕЛЕЙ ЕЛЕКТРОННИХ КОМПОНЕНТІВ ТА СХЕМ У TINA-TI

Мета: ознайомитися з поняттям точності моделей електронних компонентів у комп'ютерному моделюванні, дослідити різні типи моделей операційних підсилювачів (ОП), порівняти ідеальні та фізичні моделі компонентів, а також оцінити вплив складності моделі на результати симуляції.

#### Вказівки до виконання роботи

Ідеальні та фізичні моделі компонентів

Під час аналізу електричних схем у теоретичних розрахунках ми зазвичай працюємо з ідеальними моделями компонентів. Наприклад, коли ми малюємо символ резистора, ми маємо на увазі чисту, нескінченно точну опірність – «резистор резисторів». Така модель не враховує жодних додаткових ефектів – ні паразитної ємності, ні температурних залежностей.

Проте, у реальності будь-який фізичний компонент – це лише наближення до цієї ідеальної концепції [10]. Коли ми тримаємо в руках реальний резистор, це – фізичне втілення моделі опору, яке має певні обмеження:

- паразитні ємності та індуктивності;
- температурні зміни опору;
- наявність еквівалентного послідовного опору (ESR) у конденсаторів;
- витоки струму.

Ці ефекти залежать від конструкції, матеріалів та вартості компонента. Наприклад, точніші конденсатори мають складнішу структуру й дорожчі у виробництві.

Точність моделей у комп'ютерному моделюванні. У середовищах комп'ютерного моделювання (наприклад, Tina-TI) використовуються моделі компонентів для симуляції їх поведінки. Чим точніша модель, тим більше параметрів у неї включено – паразитні ємності, частотні обмеження, температурні ефекти тощо. Це дозволяє наблизити результати симуляції до реальної поведінки пристрою, але водночас збільшує складність розрахунків [10].

У Tina-TI доступні базові (спрощені) моделі – мінімум параметрів, швидка симуляція та макромоделі SPICE – детальні моделі з урахуванням багатьох фізичних ефектів, але з вищими обчислювальними витратами.

У реальних умовах компоненти мають допуски (наприклад, резистор 4.7 кОм може мати  $\pm 5\%$  похибки), тому симуляція з точністю  $\pm 10\%$  часто є абсолютно прийнятною. Завдання – не досягнути абсолютної точності, а зрозуміти, наскільки модель відображає реальність достатньо добре для інженерного аналізу.

1. Здійснити аналіз відмінностей в амплітудному або частотному відгуку для

різних моделей одного й того ж компонента (на прикладі ОП 741). Для цього необхідно створити схему рис.13.1.

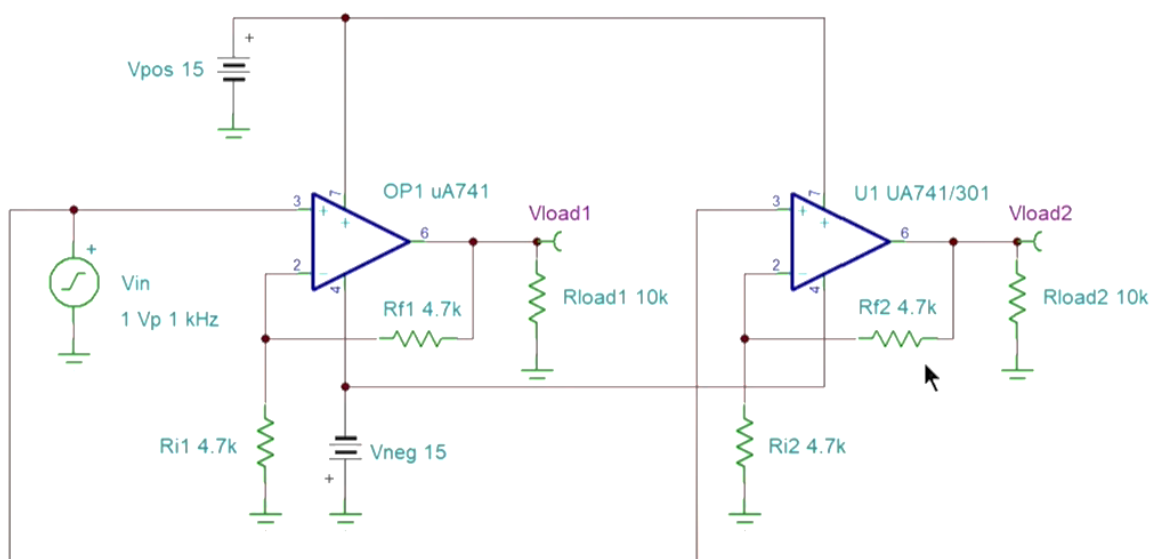


Рисунок 13.1 – Схема для моделювання

Схема містить два елементи з однакою структурою – неінвертуючий підсилювач напруги зі зворотним зв'язком. Обидва елементи використовують однакові джерела живлення  $\pm 15$  В, однакові входні сигнали (синусоїда 1 В, 1 кГц) і однакові навантаження (10 кОм). Проте:

- перша частина схеми використовує стандартну модель ОП 741, доступну в бібліотеці компонентів Tina-TI (рис. 13.2.,а).

- друга використовує SPICE-макромодель того ж ОП ( $\mu$ A741), взяту з бібліотеки Spice Macros (рис. 13.2.,б).

Попри однакову назву, ці моделі не ідентичні: базова модель є спрощеною, тоді як SPICE-модель – більш детальною і відображає поведінку реального чіпа.

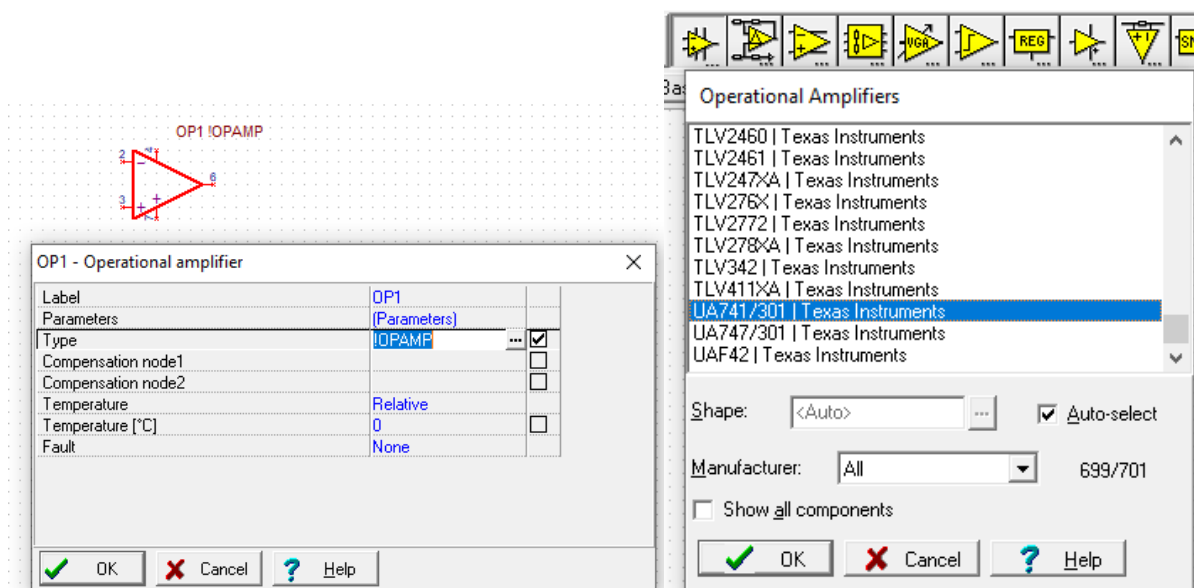


Рисунок 13.2 – Бібліотеки компонентів моделей

2. Встановіть джерело сигналу  $V_{in}$  на синусоїду частотою 1 кГц та амплітудою 1 В (пікове значення). Виконайте аналіз перехідної характеристики (Transient): Menu → Analysis → Transient. У полі End Display вкажіть 2 мс. Запустіть моделювання.

3. Проаналізуйте:

- чи співпадають вихідні сигнали з обох моделей (Vload1 і Vload2)?
- чи відповідає підсилення очікуваному значенню (2 рази або 6 дБ)?

Якщо сигнали майже однакові – це свідчить про ідентичну поведінку моделей у стандартних умовах.

3. Аналіз зміщення по постійному струму (DC offset).

Виміряйте рівень зміщення (DC level) на виході обох моделей. Для цього на схемі встановіть вимірювальні зонда (проби) на вихід обох операційних підсилювачів Vload1, Vload2.

Запустіть обчислення напруг (Analysis → DC Analysis → Calculate Node Voltages). Порівняйте результати.

Значення можуть відрізнитись (наприклад, 400 мкВ проти 2.3 мВ). Це зумовлено тим, що моделі використовують різні значення вхідного зміщення, які характерні для різних реальних зразків мікросхем.

4. Аналіз частотної характеристики.

Виконайте АС аналіз: Analysis → AC Analysis → AC Transfer Characteristic.

Встановіть частотний діапазон: від 10 Гц до 10 МГц, крок – логарифмічний. Побудуйте АЧХ.

Зверніть увагу на:

- основне підсилення (приблизно 6 дБ).
- розбіжності між моделями на високих частотах.
- появу значних відмінностей (до 10 дБ) у діапазоні сотень кілогерц і вище.

5. Аналіз здатності до навантаження.

Випадок 1 – нормальне навантаження. Встановіть резистори навантаження  $R_{load} = 10$  кОм для обох підсилювачів.

Повторіть перехідний аналіз. Перевірте вихідні сигнали. Вони мають бути правильними без обмеження по струму.

Випадок 2 – мале навантаження. Замініть навантаження на 100 Ом, потім на 10 Ом.

Для кожного випадку: повторіть перехідний аналіз, зауважте, чи виникає спотворення або обмеження амплітуди (clipping).

Використовуйте курсор для вимірювання максимальної амплітуди.

6. Зробіть висновки щодо поведінки моделей у стандартних умовах (10 кОм, 1 кГц) та на високих частотах або малих навантаженнях. В стандартних умовах обидві моделі повинні поводитись ідентично, інакше можуть бути помітні розбіжності. Отже, модель, яка враховує обмеження струму, краще підходить для аналізу навантажувальної здатності.

Саме тому у реальних умовах важливо знати обмеження SPICE-моделей: деякі з них не моделюють шум, спотворення, обмеження по струму, що містяться в коментарях до SPICE-моделі.

### **Завдання для самостійного виконання**

1. Дослідження впливу зміни частоти сигналу.

Проведіть дослідження перехідної характеристики при зміні частоти вхідного сигналу: 100 Гц, 1 кГц, 10 кГц, 100 кГц. Побудуйте графіки вихідних напруг для обох моделей. Проаналізуйте, як змінюється точність моделювання при високих частотах.

2. Дослідження АЧХ різних моделей.

Побудуйте амплітудно-частотні характеристики (AC Transfer) для обох моделей ОУ. Знайдіть частоту зрізу (-3 дБ) кожної моделі. Поясніть можливу різницю між моделями та її значення для практичного використання.

3. Перевірка на струмове насичення.

Для кожної з моделей поступово зменшуйте опір навантаження: 10 кОм, 1 кОм, 100 Ом, 10 Ом. Зафіксуйте рівень сигналу на виході та визначте момент, коли вихідний сигнал перестає відповідати очікуваному через обмеження струму навантаження.

4. Проаналізуйте і поясніть ОП, які краще підходять для:

- високочастотних підсилювачів;
- прецизійного вимірювання;
- роботи з великим навантаженням.

## Практична робота 14

### МОДЕЛЮВАННЯ АНАЛОГОВИХ ФІЛЬТРУЮЧИХ ЛАНОК

Мета: дослідження кіл з аналоговими фільтрами на основі операційних підсилювачів.

#### Вказівки до виконання роботи

Аналогові фільтри є ключовим компонентом багатьох електронних пристроїв, що використовуються для обробки сигналів. Їх призначення полягає у виділенні або пригніченні певних частотних складових сигналу, що дозволяє адаптувати сигнал до потреб конкретної системи. Схема Саллена-Кея (Sallen-Key) – це один із найпоширеніших типів активних фільтрів, що забезпечує високу стабільність і простоту реалізації. Вона широко використовується для побудови низькочастотних (LPF), високочастотних (HPF), смугових (BPF) і загороджувальних (notch) фільтрів [1, 9].

Схема базується на операційному підсилювачі, який виконує роль активного елемента, і пасивних компонентів (резисторів і конденсаторів), які визначають частотні характеристики. Різні комбінації цих елементів дозволяють реалізувати фільтри з потрібним типом АЧХ. Параметри фільтра визначаються співвідношенням номіналів резисторів і конденсаторів, це зокрема: гранична частота – частота, на якій сигнал починає послаблюватися (від -3 дБ); смуга пропускання – діапазон частот, які фільтр пропускає; смуга затримання – діапазон частот, які фільтр повинен блокувати; крутість спаду – наскільки швидко фільтр зменшує рівень сигналу поза смугою пропускання (залежить від порядку фільтра); гладкість АЧХ – стабільність форми АЧХ без пульсацій у смузі пропускання.

Використання різних коефіцієнтів для  $R$  і  $C$  дозволяє реалізувати фільтри з бажаними характеристиками:

- фільтри Баттерворта забезпечують гладку АЧХ без пульсацій у смузі пропускання, що робить їх універсальним рішенням для систем зв'язку та обробки сигналів, де важлива рівномірність передачі;

- фільтри Чебишева відрізняються крутішим спадом АЧХ, але мають нерівності у смузі пропускання, тому підходять для вузькосмугових систем, як-от радіотехнічні пристрої;

- для задач, що потребують збереження форми сигналу, наприклад, при роботі з імпульсами, використовують фільтри Бесселя, які мінімізують фазові спотворення;

- еліптичні фільтри Кауера забезпечують найшвидший спад АЧХ, але супроводжуються значними нерівностями, що обмежує їх застосування до задач із жорсткими вимогами до ширини смуги.

За допомогою комп'ютерного моделювання перевіряються характеристики схеми перед складанням.

1. Розглянемо схему рис. 14.1, яка представляє активний фільтр нижніх частот першого порядку. Візуально цей фільтр схожий на інтегруючий підсилювач, однак у його коло зворотного зв'язку, крім ємності, підключено також резистор R2 10 кОм.

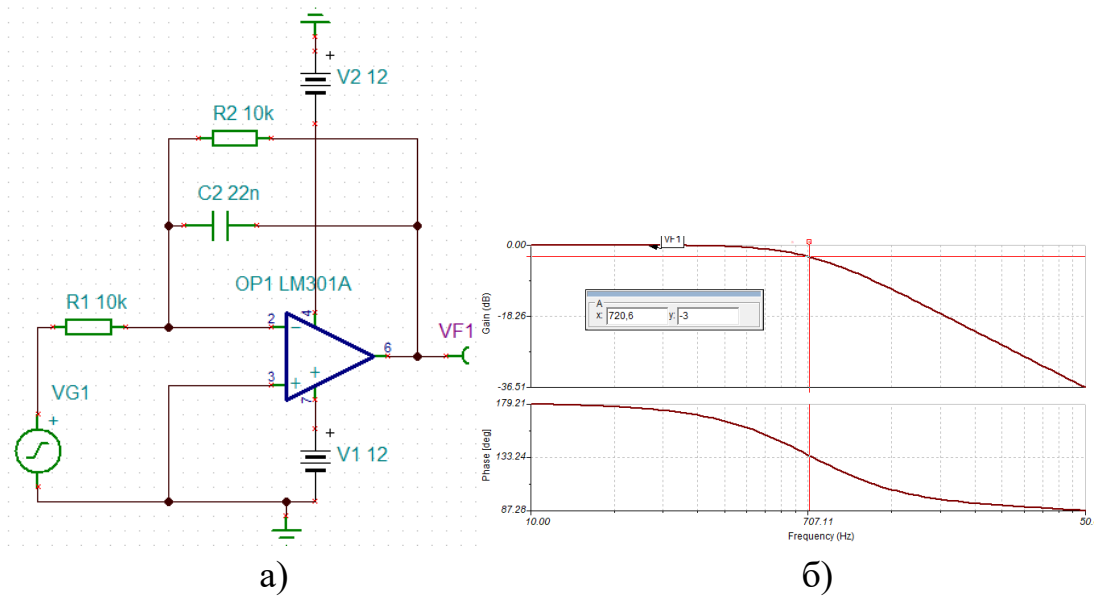


Рисунок 14.1 – Активний ФНЧ першого порядку: а) схема; б) АЧХ і ФЧХ

Розглянемо частотні характеристики цього фільтра, виконавши аналіз змінного струму у логарифмічному масштабі в діапазоні частот від 10 Гц до 50 кГц. На отриманій амплітудно-частотній характеристиці видно, що на низьких частотах коефіцієнт підсилення відповідає нулю децибел, що характерно для фільтрів нижніх частот.

Щоб визначити ширину смуги пропускання фільтра, встановлюємо значення рівня -3 дБ, рис. 14.1,б). Згідно з отриманими даними, гранична частота смуги пропускання становить 720 Гц. Це означає, що фільтр ефективно пропускає сигнали в цьому частотному діапазоні, поступово пригнічуючи компоненти з вищою частотою.

Тепер оцінюємо крутизну спаду амплітудно-частотної характеристики. Для цього один курсор встановлюємо на частоті 25 кГц, а другий – на частоті в 10 разів меншій, тобто 2,5 кГц. Аналіз показує, що при зміні частоти в 10 разів коефіцієнт підсилення зменшився на 20 дБ, рис. 14.2. Це відповідає крутизні спаду -20 дБ на декаду, яка є типовою для фільтрів першого порядку.

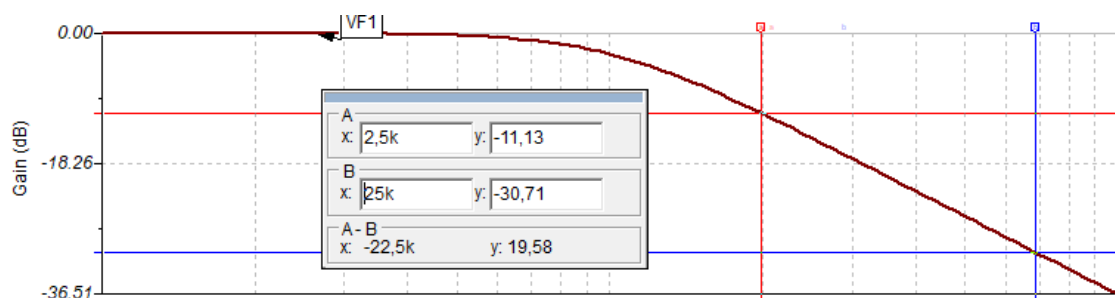


Рисунок 14.2 – Оцінка крутизни спаду АЧХ ФНЧ

2. Досліджуємо схему рис. 14.3., яка є активним фільтром високих частот першого порядку.

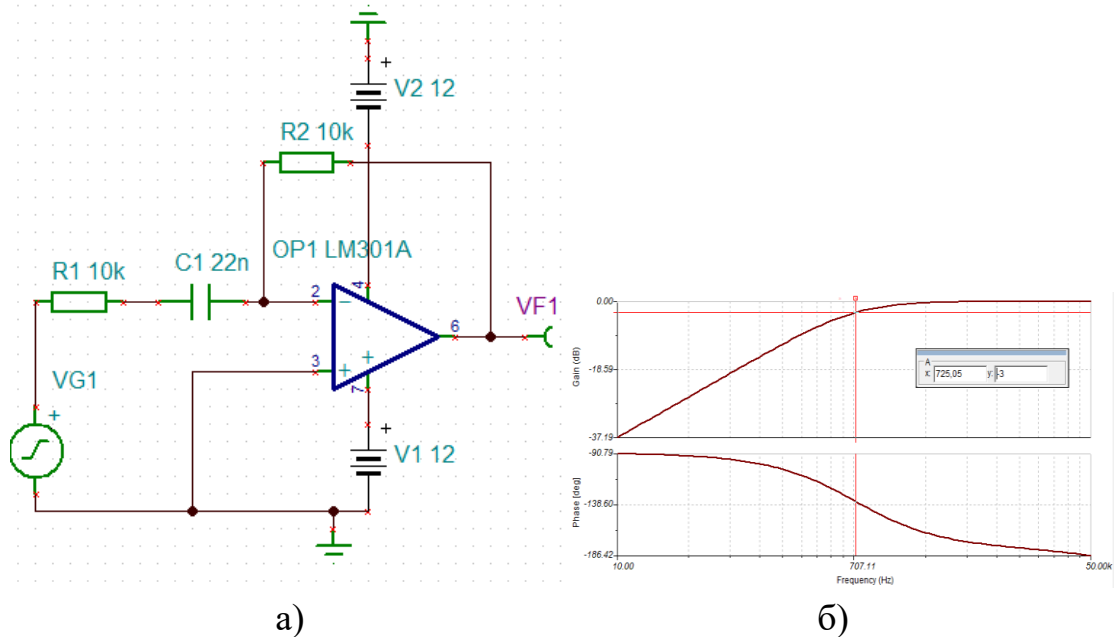


Рисунок 14.3 – Активний ФВЧ першого порядку: а) схема; б) АЧХ і ФЧХ

Виконуємо аналіз змінного струму для визначення амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик. Досліджуємо їх у логарифмічному масштабі в діапазоні частот від 10 Гц до 50 кГц.

Амплітудно-частотна характеристика показує, що на високих частотах коефіцієнт передачі в децибелах дорівнює 0, що відповідає відношенню вихідної напруги до вхідної, рівному одиниці, рис. 14.3, б). Це підтверджує, що фільтр пропускає високочастотні сигнали без значного пригнічення.

Щоб визначити граничну частоту смуги пропускання, встановлюємо значення рівня -3 дБ. Згідно з отриманими результатами, гранична частота становить 725 Гц. Це частота, нижче якої фільтр починає значно пригнічувати сигнали.

Для оцінки крутизни наростання амплітудно-частотної характеристики встановлюємо червоний курсор на частоті 300 Гц, а синій – на частоті 30 Гц. Аналіз показує, що при зміні частоти в 10 разів (одна декада) амплітудно-частотна характеристика зростає на 24,65 дБ, що відповідає типовому значенню для фільтрів першого порядку, близькому до 20 дБ на декаду.

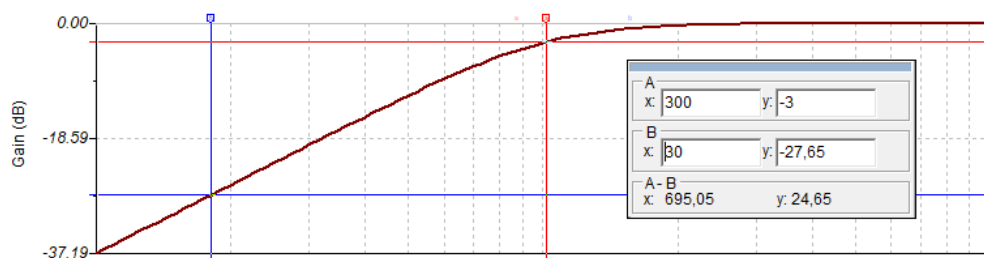


Рисунок 14.4 – Оцінка крутизни спаду АЧХ ФВЧ

Таким чином, активний фільтр високих частот першого порядку демонструє поступове посилення сигналів із підвищенням частоти, забезпечуючи ефективно придушення низькочастотних компонент.

3. Активні фільтри нижніх частот другого порядку є важливим елементом електроніки, оскільки вони використовуються для виділення низькочастотних сигналів та придушення високочастотних завад у багатьох електронних пристроях. На відміну від фільтрів першого порядку, фільтри другого порядку мають складнішу схему, що включає додаткові компоненти, такі як конденсатори та резистори у зворотному зв'язку. Це дозволяє досягати крутішого спаду амплітудно-частотної характеристики, приблизно  $-40$  дБ на декаду, що є ключовою відмінністю.

Розглядаємо схему активного фільтра нижніх частот другого порядку, рис. 14.5. У цій схемі зворотний зв'язок та вхідні кола мають складнішу структуру порівняно з фільтрами першого порядку, що забезпечує вищу крутизну спаду амплітудно-частотної характеристики.

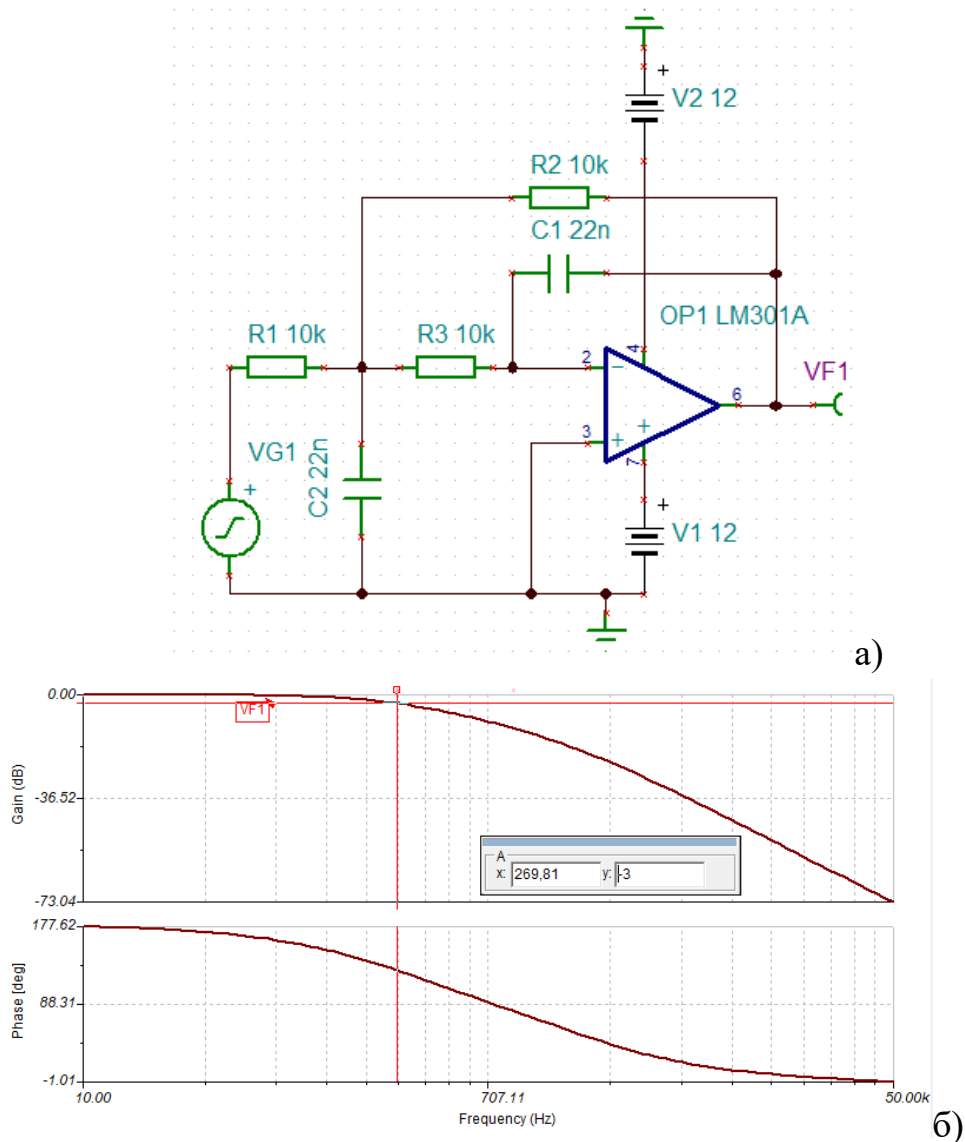


Рисунок 14.5 – Активний ФНЧ другого порядку: а) схема; б) АЧХ і ФЧХ

Виконуємо аналіз амплітудно-частотної характеристики для діапазону частот від 10 Гц до 50 кГц. Результати аналізу показують, що на низьких частотах підсилення

залишається максимальним і відповідає нульовій позначці в децибелах. Для визначення граничної частоти смуги пропускання встановлюємо рівень -3 дБ. З аналізу випливає, що гранична частота становить 269 Гц.

Щоб визначити крутизну спаду характеристики, встановлюємо курсори: один на частоті 20 кГц, інший на частоті 2 кГц. Відношення частот у цьому випадку становить 10, а різниця значень підсилення дорівнює приблизно -37 дБ, що близьке до теоретичного значення -40 дБ на декаду, рис. 14.6. Це підтверджує, що активні фільтри другого порядку мають крутизну спаду, яка приблизно вдвічі перевищує крутизну спаду фільтрів першого порядку.

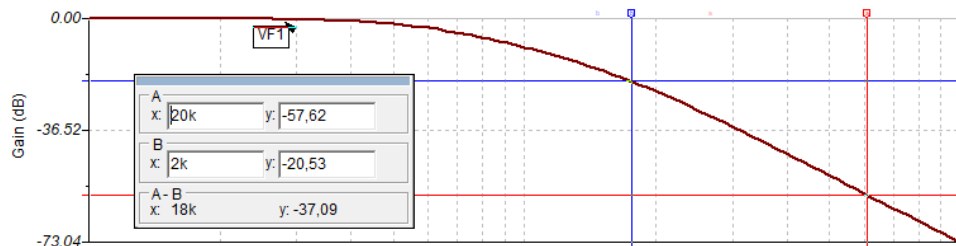


Рисунок 14.6 – Оцінка крутизни спаду АЧХ ФНЧ

Фазочастотна характеристика цього фільтра демонструє зміну фази від  $180^\circ$  на низьких частотах до  $0^\circ$  на високих. Це відповідає теоретичній поведінці фільтрів нижніх частот другого порядку, які забезпечують більш крутий спад і значне зміщення фази сигналу в залежності від частоти.

4. Активний фільтр високих частот другого порядку, рис. 14.7. є ключовим елементом для виділення високочастотних сигналів у складних електронних системах.

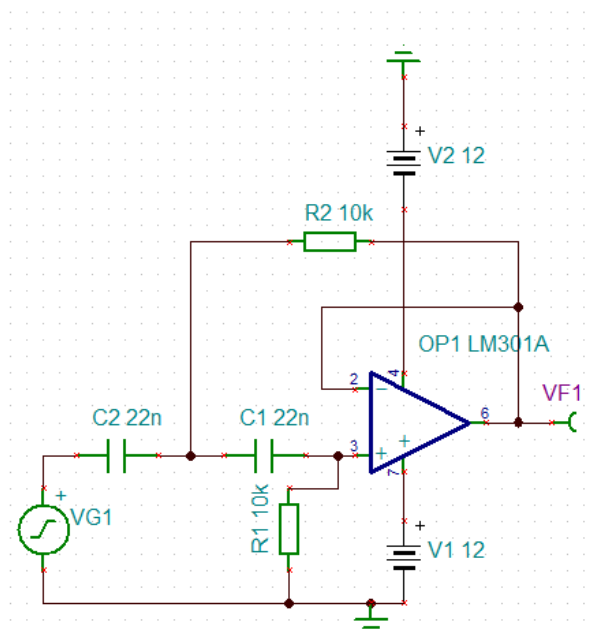


Рисунок 14.7 – Активний ФВЧ другого порядку

Під час аналізу амплітудно-частотної характеристики фільтра другого порядку, рис. 14.8. видно, що його гранична частота, визначена за рівнем -3 дБ, становить 1,13

кГц. Це означає, що частоти нижче цього значення значно пригнічуються, тоді як частоти вище проходять практично без змін. Така характеристика робить фільтр корисним у завданнях, де важливо відокремити високочастотні компоненти, наприклад, у телекомунікаціях, аудіосистемах чи в системах обробки радіочастотних сигналів.

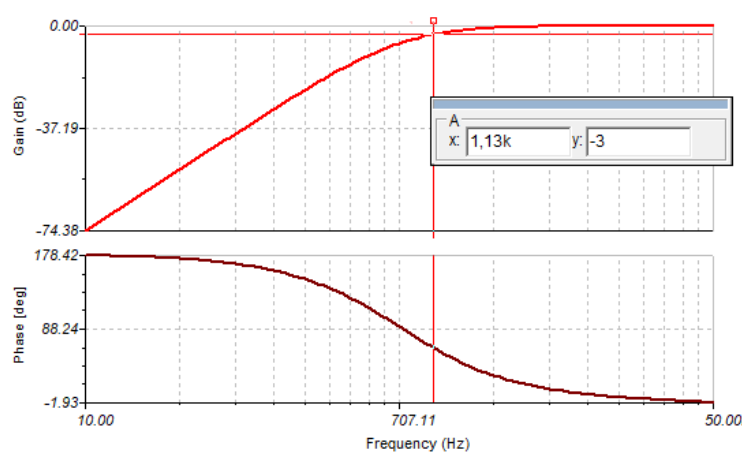


Рисунок 14.8 – АЧХ та ФЧХ ФВЧ другого порядку

Фазо-частотна характеристика фільтра демонструє, як змінюється фаза сигналу залежно від частоти. Це важливий параметр, який варто враховувати під час проектування систем, щоб уникнути небажаних фазових спотворень, які можуть призводити до зниження якості сигналу.

Практичне використання таких фільтрів включає очищення сигналів від шумів, виділення інформаційних компонентів і реалізацію передпідсилювачів.

### Завдання для самостійного виконання

Побудуйте моделі активного фільтра нижніх частот (ФНЧ) і високих частот (ФВЧ) першого порядку в Tina-TI. Виконайте аналіз амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) при різних значеннях резисторів та конденсаторів. Визначте, як змінюється гранична частота фільтра при зміні номіналів компонентів, та зробіть висновки.

Створіть моделі активних ФНЧ та ФВЧ першого та другого порядку. Виконайте аналіз крутизни спаду АЧХ (-20 дБ/декада для першого порядку та -40 дБ/декада для другого порядку). Зробіть висновки про доцільність використання фільтрів другого порядку для завдань, що потребують більшого придушення небажаних частот.

Побудуйте модель активного смугового фільтра (BPF) та загороджувального фільтра (Notch-фільтр). Виконайте аналіз АЧХ та визначте смугу пропускання і смугу загородження для різних налаштувань компонентів. Дослідіть, як змінюється фільтрація сигналу при подачі тестового багаточастотного сигналу.

## Практична робота 15

### ТЕМПЕРАТУРНИЙ АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ СХЕМ

Мета: Ознайомитися з функціями температурного аналізу в Tina-TI та дослідити температурну чутливість пасивної RC-ланки. Навчитися встановлювати температурні коефіцієнти елементів і оцінювати вплив температури на частотну характеристику схеми.

#### Вказівки до виконання роботи

У сучасній електроніці точність і стабільність роботи схем значною мірою залежать від їхньої поведінки за різних температурних умов. Майже всі пасивні та активні компоненти мають певну залежність своїх параметрів від температури, що вимагає врахування цих змін як під час проектування, так і під час експлуатації пристроїв. Особливо це важливо в таких сферах, як автомобільна електроніка, телекомунікаційні системи, медичні прилади та пристрої військового призначення, де обладнання функціонує в широкому діапазоні температур [1].

Резистори, конденсатори та напівпровідникові елементи змінюють свої електричні характеристики зі зміною температури. Наприклад, опір резистора може зростати або спадати, залежно від типу матеріалу, з якого він виготовлений. Така зміна описується температурним коефіцієнтом, що вказує на відносне відхилення параметра на кожен градус Цельсія зміни температури. Нехтування температурними впливами може призводити до зниження точності вимірювань, спотворення сигналів і навіть до виходу з ладу окремих компонентів.

Програмне середовище Tina-TI надає можливість моделювати температурну поведінку електричних схем за допомогою вбудованих засобів аналізу. У Tina-TI ви маєте два інструменти для температурного аналізу: AC Temperature Stepping – для дослідження зміни частотної характеристики фільтрів; DC Temperature Analysis – для дослідження змін напруг у постійних схемах.

Ці методи дозволяють легко аналізувати чутливість електронної схеми до температури. Це дозволяє дослідити, як змінюється напруга, струм або частотна характеристика схеми в залежності від температури довкілля, не виконуючи фізичного експерименту.

1. У Tina-TI температура за замовчуванням становить  $27^{\circ}\text{C}$ . Щоб змінити температуру середовища: перейдіть у меню Analysis → Set Analysis Parameters. У полі Temperature of the environment задайте потрібне значення температури.

2. Схема для дослідження – RC-ланка типу «Lead Network»  $R1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $C1 = 1 \text{ мкФ}$ . (рис. 15.1)

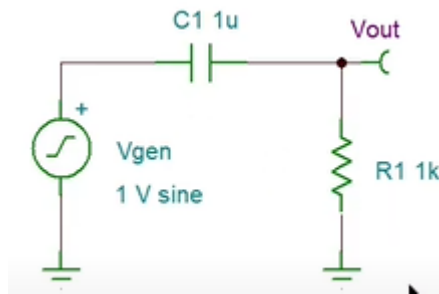


Рисунок 15.1 – Схема для дослідження

Частота зрізу для номінальних значень розраховується за формулою:

$$F_c = 1/2\pi RC \approx 159 \text{ Гц.}$$

Це точка, де амплітуда вихідного сигналу знижується до приблизно 0.707 від амплітуди вхідного сигналу (тобто на 3 дБ).

3. Проведіть АС аналіз (Transfer Characteristic). Визначте положення точки зрізу (–3 дБ) на частотній характеристиці (рис.15.2). Переконайтеся, що частота зрізу наближено дорівнює 159 Гц.

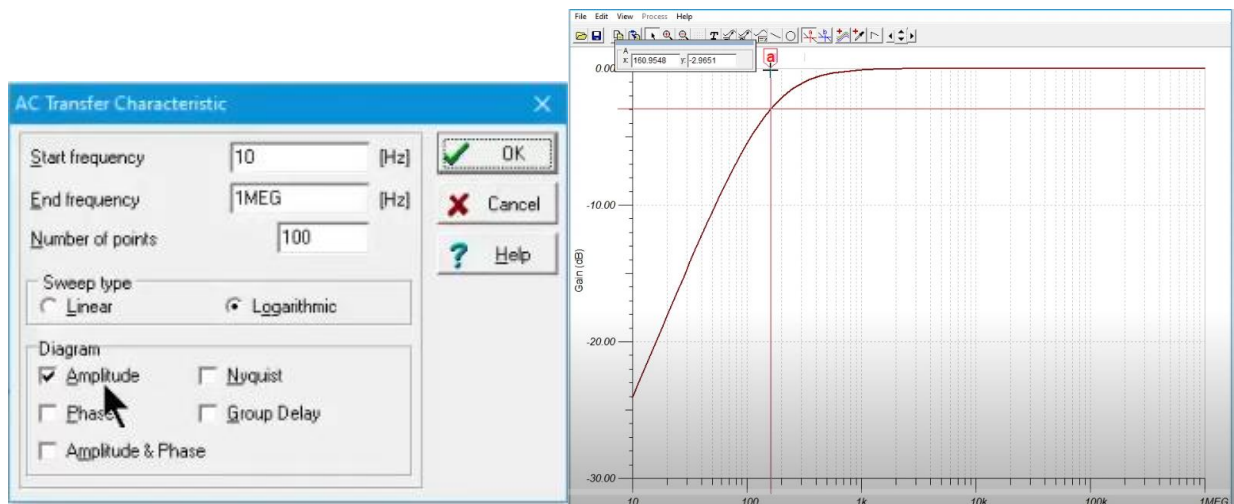


Рисунок 15.2 – Налаштування аналізу на змінному струмі

4. Задайте температурну залежність для резистора R1. Відкрийте властивості елемента R1.

У полі Temperature переконайтеся, що значення задане відносно номінальної температури (Relative).

Установіть Temperature coefficient (linear) – лінійний температурний коефіцієнт, наприклад: 0.01 (тобто 1% на градус Цельсія).

За потреби можна задати додаткові коефіцієнти:

- Quadratic coefficient – для моделювання квадратичної залежності.
- Exponential coefficient – для складнішої поведінки компонентів.

Реальні значення температурних коефіцієнтів можна дізнатися з технічної документації на компоненти (datasheet). Типові значення для якісного резистора:  $\pm 100 \dots 500 \text{ ppm}/^\circ\text{C}$  (parts per million per degree Celsius).

5. Запустіть температурний аналіз. Для налаштування температурного кроку

виконайте Analysis → Mode виберіть Temperature stepping.

Встановіть:

- Start temperature = 0°C.
- End temperature = 40°C.
- Number of runs = 3.

Це означає, що буде побудовано 3 графіки відповідно до температур: 0°C, 20°C, 40°C.

Проведіть аналіз частотної характеристики (AC Transfer Characteristic) в цьому діапазоні.

Ви побачите три криві:– для 0°C,– для 20°C, – для 40°C. Номінальна температура системи = 27°C, тому жоден із обраних варіантів не відображає саме номінальні умови.

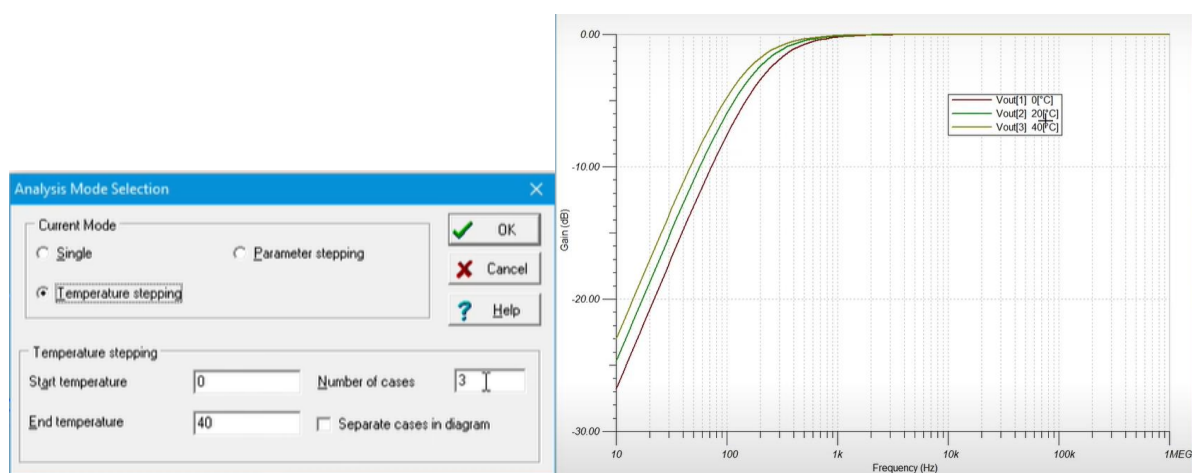


Рисунок 15.3 – Аналіз частотних характеристик для різних температур

Оцініть зміну частоти зрізу (при –3 дБ), а також загальну зміну амплітудно-частотної характеристики. Порівняйте з теоретичним значенням для 1 кОм та 1 мкФ ( $\approx 159$  Гц), враховуючи, що опір при 20°C трохи менший за номінальний (при 27°C).

Температурний коефіцієнт резистора позитивний, отже з підвищенням температури зростає опір, зменшується частота зрізу ( $f_c$ ). Це видно на графіку: при 40°C  $f_c$  найнижча, при 0°C – найвища.

9. Вплив температурної залежності кількох елементів. Додайте температурну залежність і для конденсатора.

Відкрийте властивості C1, встановіть Linear temperature coefficient = 0.01 (тобто +1% на °C).

Повторіть AC-аналіз з кроком температури рис.15.4. Ви побачите, що при високих температурах і R і C збільшуються. Це дає ще меншу частоту зрізу, ніж при зміні лише одного елемента. Наприклад, при 40°C частота зрізу може знизитись аж до близько 130–140 Гц.

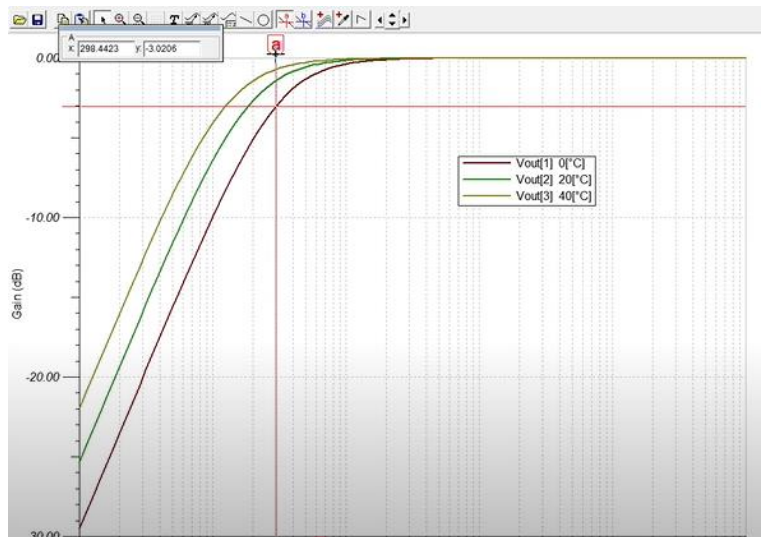


Рисунок 15.4 – Оцінка частоти зрізу

Для наочності використані великі коефіцієнти температурної залежності, які значно перевищують типові параметри реальних компонентів. У реальних умовах зміни будуть меншими.

10. Побудуйте простий резистивний дільник (рис. 15.5):

Джерело: 12 В,  $R_1 = 10$  кОм,  $R_2 = 20$  кОм

Очікувана напруга на R2 (вихідна напруга):

$$U_{out} = 12 \cdot 20 / (10 + 20) = 8 \text{ В.}$$

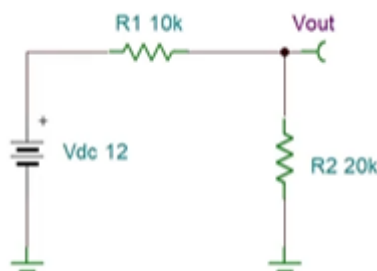


Рисунок 15.5 – Подільник напруги

Встановіть позитивний температурний коефіцієнт для резисторів:  $R_1 = 0.01/^\circ\text{C}$ ,  $R_2 = 12 \cdot 0.012/^\circ\text{C}$ .

Таке налаштування забезпечує неоднакову зміну опорів з температурою, тобто співвідношення між  $R_1$  та  $R_2$  буде змінюватись при зміні температури.

Перейдіть у меню Analysis → DC Analysis → Temperature Analysis. 2. У вікні налаштувань встановіть:

- Start Temperature: 0 °C,
- End Temperature: 100 °C,
- Number of Points: 100.

Це дозволяє побудувати гладку криву напруги  $U_{out}$  в залежності від температури.

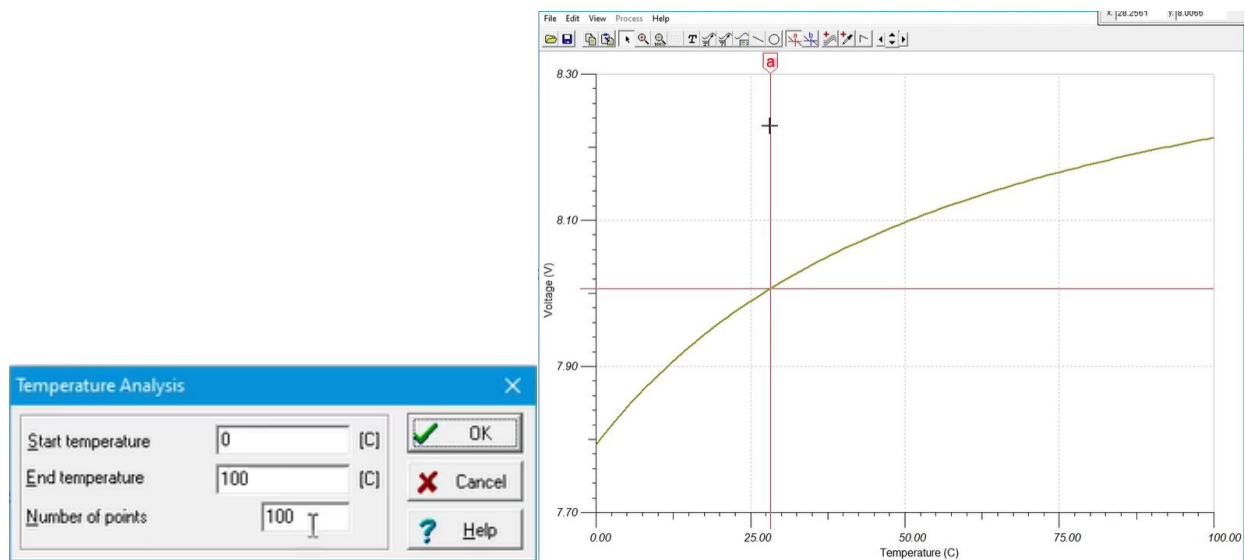


Рисунок 15.6 – Зміна напруги при зміні температури

На графіку відображається зміна  $U_{out}$  в залежності від температури (0–100 °C).

При 27 °C спостерігаємо очікувані 8 В. При 0 °C – близько 7.94 В. При 100 °C – приблизно 8.2 В. Це підтверджує, що через різні коефіцієнти температурного дрейфу опорів співвідношення  $R_2/(R_1+R_2)$  змінюється з температурою, що впливає на вихідну напругу.

### Завдання для самостійного виконання

1. Проведіть температурний аналіз для фільтра другого порядку.
2. Змініть коефіцієнти на негативні, зробіть висновки про вплив на результати.
3. Додайте температурозалежні елементи до складніших схем за вказівкою викладача (наприклад, дільник з терморезистором).
4. Зробіть висновки щодо температурної стабільності схеми.

## ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА

1. Галаган Р. М. Комп'ютерне проєктування електронних схем. Навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 170 с.
2. Жученко А. І., Ладієва Л. Р., Піргач М. С., Жураковський Я. Ю. Математичне моделювання процесів і систем. Навч. посіб. Київ: КПІ ім. І. Сікорського, 2021. 351 с.
3. Комп'ютерне моделювання процесів і систем. Організація розрахунків у середовищі MathCAD. Навчальний посібник для самостійної роботи студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / уклад.: О. О. Квітка, А. М. Шахновський. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 89 с.
4. Конспект лекцій з дисципліни «Обчислювальні методи» / уклад. В. В. Пастернак. Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2023. 95 с.
5. Матвійчук В. А., Веселовська Н. Р., Шаргородський С. А. Математичне моделювання новітніх технологічних систем. Монографія. Вінниця, 2021. 193 с.
6. Математичне моделювання систем і процесів. Методичні вказівки до самостійної роботи для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня зі спеціальності 172 «Електронні комунікації та радіотехніка» / уклад.: О. М. С'янов, М. С. Загребасв. Кам'янське, ДДТУ, 2024. 93с.
7. Моделювання сигналів і процесів в радіотехніці в середовищах MathCAD та Multisim. Частина I. Навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / уклад.: О. В. Гусєва, О. І. Павлов. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 118 с.
8. Робота в системі Mathcad. URL: [https://elearning.sumdu.edu.ua/free\\_content/Lectured:876f79037206171518c31a71d8f5603acb21b2c2/latest/476297/index.html](https://elearning.sumdu.edu.ua/free_content/Lectured:876f79037206171518c31a71d8f5603acb21b2c2/latest/476297/index.html) (дата звернення 25.09.2025 р).
9. Цифрова схемотехніка. Моделювання та аналіз: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Електронні системи мультимедіа та засоби Інтернету речей» спеціальності 171 «Електроніка» / уклад.: В. В. Макаренко, В. М. Співак. Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 490 с.
10. Якимчук Н. М., Лишук В. В. Методологія інтегрованого моделювання та спільного проєктування в сучасних електронних системах. *Актуальні проблеми автоматизації та управління*. Луцьк, № 13, 2025. С. 156 – 161.
11. TINA-TI. SPICE-based analog simulation program URL: <https://www.ti.com/tool/TINA-TI> (дата звернення 25.09.2025 р)

М – 74 Математичне та комп'ютерне моделювання та проєктування. Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітніх програм «Електроніка», «Автомобільна електроніка» галузі знань 17 (G) Електроніка, автоматизація та електронні комунікації, спеціальності 171 (G5) Електроніка, всіх форм навчання / уклад. Н. М. Якимчук. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 100 с.

Комп'ютерний набір  
Редактор

Наталія ЯКИМЧУК  
Наталія ЯКИМЧУК

Підп. до друку «\_\_»\_\_\_\_\_ 2025 р.  
Формат 60x84/16. Папір офс.  
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 1.  
Тираж 50 прим.

Відділ іміджу та промоції  
Луцького національного технічного університету  
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75  
Друк – ВІП ЛНТУ

