

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

МІКУЛІЧ СТАНІСЛАВ БОРИСОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**ДИНАМІЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛАСТИНЧАСТИХ
ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ВКЛЮЧЕННЯМИ**

Спеціальність – 113 Прикладна математика

Галузь знань – 11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії. Дисертація містить
результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і
текстів

інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ С.Б. Мікуліч

Науковий керівник: **Сяський Андрій Олексійович**, доктор технічних
наук, професор

Луцьк 2026

АНОТАЦІЯ

Мікуліч С.Б. Динамічний напружений стан пластинчастих елементів конструкцій з включеннями. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика». Луцький національний технічний університет Міністерства освіти та науки України, Луцьк, 2026.

Дисертаційна робота присвячена розробці, обґрунтуванню та реалізації чисельно-аналітичної методики оцінки динамічного напруженого стану пластинчастих елементів конструкцій із системою жорстких неоднорідностей. Дослідження спрямоване на отримання інженерно значущих характеристик: нормальних та кільцевих напружень на межі розподілу фаз, на основі поєднання методів динамічної теорії пружності, інтегральних перетворень та гранично-елементного числового моделювання. Особливу увагу приділено виявленню складних хвильових ефектів, таких як дифракційне екранування та високоамплітудні резонанси у міжвключеному просторі, що дозволяє прогнозувати динамічну міцність і довговічність композитних систем та зварних з'єднань без залучення надлишкових обчислювальних потужностей сіткових методів у рамках методі неруйнівного контролю.

У **вступі** окреслено наукову й прикладну актуальність проблеми дослідження динамічної концентрації напружень у контексті зростаючої потреби авіабудування, машинобудування та будівництва у створенні надійних методів розрахунку неоднорідних структур. Визначено цілі, наукові завдання, методи дослідження, а також описано новизну отриманих результатів, їх прикладну значущість, структуру та обсяг роботи. Обґрунтовано необхідність застосування непрямого методу граничних

елементів для забезпечення високої точності аналізу в зонах геометричних сингулярностей та при високих частотах зовнішнього навантаження.

У **першому розділі** проведено систематичний аналіз наукової літератури щодо закономірностей розподілу напружень в околі отворів та включень. Розглянуто фундаментальні внески П. Бенерджі, К. Бреббія, В.С. Гудрамовича, О.М. Гузя, В.Ф. Ємця, С.О. Калоєрова, Г.С. Кіта, В.Д. Кубенка, Я.І. Кунця, В.В. Михаськіва, В.Г. Попова, Г.М. Савіна М.П. Саврука, І.М. Турчина, В.І. Шваб'юк, та ін. Описано сучасні аналітичні та чисельні підходи до оцінки НДС пластинчастих елементів. Проаналізовано переваги й обмеження МСЕ та МГЕ при розв'язанні динамічних задач. На основі огляду обґрунтовано вибір абсолютно жорстких включень як розрахункових моделей для зварних швів та армуючих елементів, що дозволяє уніфікувати підходи до оцінки динамічної надійності конструкцій.

У **другому розділі** розроблено математичну модель та чисельно-аналітичний алгоритм дослідження НДС на основі непрямого методу граничних елементів. Побудовано розв'язувальні системи граничних інтегральних рівнянь для плоскої задачі дифракції пружних хвиль. Наведено формулювання рівнянь руху Нав'є-Коші у просторі трансформант, представлено фундаментальні розв'язки та реалізовано процедури регуляризації сингулярних ядер. Розділ виступає теоретичним підґрунтям для програмної реалізації розрахунків напружень на границях включень різної конфігурації. Проведено верифікацію підходу шляхом порівняння з відомими аналітичними розв'язками для кругових включень, що підтвердило високу точність методики (похибка 2–3%).

У **третьому розділі** реалізовано описану методику для аналізу поодиноких абсолютно жорстких нерухомих та рухомих включень. Для випадку прямокутних включень досліджено вплив розмірів включення на концентрацію напружень в околі кутових точок. Встановлено, що перехід до гладких (еліптичних) форм сприяє перерозподілу зусиль, проте не знімає проблему високого фронтального тиску при динамічному навантаженні.

Доведено, що інерційні властивості жорсткого включення якісно змінюють характер його динамічної взаємодії з матрицею. На відміну від нерухомих дефектів, де домінує лобовий удар хвилі, масивні рухомі включення на низьких частотах зазнають найбільшої напруженості на бічних гранях внаслідок поперечного зміщення середовища. Виявлено ефект частотного нівелювання розбіжностей між розглянутими моделями: при збільшенні частотного параметра рухомий об'єкт за рахунок власної інерції починає поводитися як нерухома перешкода, що призводить до стабілізації напружено-деформованого стану.

У **четвертому розділі** досліджено динамічну взаємодію у системах кількох включень: послідовне, паралельне та асиметричне розташування. Виявлено та кількісно описано ефекти «дифракційної тіні» та «енергетичної пастки». Вперше встановлено явище екстремального резонансного підсилення напружень у системах із різною товщиною включень, де амплітуда зусиль зростає у десятки разів. Запропоновано напрями практичного використання результатів для вдосконалення алгоритмів неруйнівного контролю та проектування акустичних метаматеріалів. Сформульовано рекомендації щодо геометричної оптимізації систем включень з метою зниження ризиків резонансного руйнування.

Таким чином, дисертаційна робота комплексно охоплює цикл від математичної постановки до виявлення нових фізичних ефектів у складних топологічних системах жорстких включень. Запропонована методика довела свою ефективність у виявленні вузькосмугових резонансів, що робить її надійним інструментом для розрахунку динамічної витривалості сучасних пластинчастих конструкцій.

Ключові слова: *пластинчастий елемент, безмежний простір, неоднорідність, включення, нестационарне навантаження, коливання, метод граничних інтегральних рівнянь, , сингулярність, напружено-*

деформований стан, напруження, хвиля, пружність, математичне моделювання, резонанс, дисперсія, інтерференція, неруйнівний контроль, адгезія.

ABSTRACT

Mikulich S.B. Dynamic stress state of plate structural elements with inclusions. — Qualification scientific work as a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics. Lutsk National Technical University of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Lutsk, 2026.

The dissertation is devoted to the development, substantiation, and implementation of a numerical-analytical methodology for assessing the dynamic stress state of plate structural elements containing a system of rigid inhomogeneities. The study aims to obtain engineering-relevant characteristics—specifically, normal and circumferential stresses at the phase interface—based on a combination of dynamic elasticity theory, integral transforms, and boundary element numerical modeling. Special attention is paid to identifying complex wave effects, such as diffraction shielding and high-amplitude resonances in the inter-inclusion space, which enables the prediction of dynamic strength and durability of composite systems and welded joints without resorting to the excessive computational resources of mesh-based methods within the framework of non-destructive testing.

The **introduction** outlines the scientific and applied relevance of investigating dynamic stress concentration in the context of the growing demand in aerospace, mechanical engineering, and construction for reliable methods of analyzing inhomogeneous structures. The goals, scientific tasks, research methods, novelty of the obtained results, their applied significance, and the structure of the work are defined. The necessity of using the indirect boundary element method to ensure high accuracy in zones of geometric singularities and under high-frequency external loading is substantiated.

The first **chapter** provides a systematic analysis of scientific literature concerning the patterns of stress distribution around holes and inclusions.

Fundamental contributions by P. Banerjee, C. Brebbia, V.S. Gudramovych, O.M. Guz, V.F. Yemets, S.O. Kaloyerov, H.S. Kit, V.D. Kubenko, Ya.I. Kunets, V.V. Mykhas'kiv, V.G. Popov, H.M. Savin, M.P. Savruk, I.M. Turchyn, V.I. Shvabiuk, and others are reviewed. Modern analytical and numerical approaches to assessing the stress-strain state of plate elements are described. The advantages and limitations of the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM) in solving dynamic problems are analyzed. Based on this review, the choice of absolutely rigid inclusions as computational models for welded joints and reinforcing elements is justified, enabling a unified approach to assessing the dynamic reliability of structures.

The **second chapter** develops a mathematical model and a numerical-analytical algorithm for investigating the stress-strain state based on the indirect boundary element method. Systems of boundary integral equations for the plane problem of elastic wave diffraction are constructed. The formulation of the Navier-Cauchy equations of motion in the transform domain is provided, fundamental solutions are presented, and regularization procedures for singular kernels are implemented. This chapter serves as the theoretical foundation for the computational implementation of stress calculations at the boundaries of inclusions of various configurations. The approach is verified by comparison with known analytical solutions for circular inclusions, confirming the high accuracy of the methodology (error of 2–3%).

The **third chapter** implements the described methodology for the analysis of single absolutely rigid stationary and movable inclusions. For rectangular inclusions, the influence of aspect ratio on stress concentration near corner points is investigated. It is established that the transition to smooth (elliptical) shapes promotes the redistribution of forces but does not eliminate the problem of high frontal pressure under dynamic loading. It is proven that the inertial properties of a rigid inclusion qualitatively change the nature of its dynamic interaction with the matrix. Unlike stationary defects where frontal wave pressure dominates, massive movable inclusions at low frequencies experience the highest stress on

the lateral faces due to the transverse displacement of the medium. The effect of frequency-dependent leveling of differences between the considered models is revealed: as the frequency parameter increases, the movable object, due to its own inertia, begins to behave like a stationary obstacle, leading to the stabilization of the stress-strain state.

The **fourth chapter** investigates the dynamic interaction in systems of multiple inclusions: sequential, parallel, and asymmetric configurations. The effects of the "diffraction shadow" and "energy trap" are identified and quantitatively described. For the first time, the phenomenon of extreme resonant stress amplification in systems with inclusions of different thicknesses is established, where the stress amplitude increases by tens of times. Directions for the practical application of the results for improving non-destructive testing algorithms and designing acoustic metamaterials are proposed. Recommendations for the geometric optimization of inclusion systems to reduce the risks of resonant failure are formulated.

In conclusion, the dissertation comprehensively covers the cycle from mathematical formulation to the identification of new physical effects in complex topological systems of rigid inclusions. The proposed methodology has proven effective in detecting narrow-band resonances, making it a reliable tool for calculating the dynamic fatigue life of modern plate structures.

Keywords: *plate element, infinite space, inhomogeneity, inclusion, non-stationary loading, vibrations, boundary integral equation method, singularity, stress-strain state, stress, wave, elasticity, mathematical modeling, resonance, dispersion, interference, non-destructive testing, adhesion.*

СПИСОК НАУКОВИХ ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Публікації в наукових періодичних фахових виданнях України

1. В.І. Шваб'юк, Т.В. Фурс, Н.В. Коменда, **С.Б. Мікуліч** *Інтегральні рівняння задачі дифракції хвиль у пружних середовищах з включеннями за дії нестационарних навантажень*. Наукові нотатки, 75 (2023), С.95-99. <https://doi.org/10.36910/775.24153966.2023.75>
2. Делявський М. В., **Мікуліч С. Б.** *Аналіз рівноваги тонких ортотропних плит на трипараметричній пружній основі*. Механіка та математичні методи, Вип. 6, №. 2 (2024), С. 31–46. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-31-46>
3. Сяський А. О., Делявський М.В., **Мікуліч С.Б.** *Вплив розмірів включення на напружений стан пластинчастих елементів за динамічного навантаження*. Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві, 24 (2025), С. 516-524. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14\(24\)](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14(24))
4. **Мікуліч С.Б.**, Сяський А.О. *Використання непрямого підходу методу граничних елементів до дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів з включеннями*. Наукові нотатки, 84 (2025), С. 57-63. <https://doi.org/10.36910/775.24153966.2025.84>
5. **Мікуліч С.Б.** *Симуляційний аналіз взаємодії жорстких включень у пластинчастих елементах за динамічного навантаження*. Наукові нотатки, 85 (2026), С.133-137. <https://doi.org/10.36910/775.24153966.2026.85>

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Шваб'юк В.І., **Мікуліч С.Б.**, Фурс Т.В. Методика аналізу динамічного напруженого стану тіл з включеннями. Інновації у будівництві: збірник тез доповідей VIII Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. молодих учених та студентів (Луцьк, 12 травня 2023 р.) Луцьк: ЛНТУ, 2023. С. 54-56.

2. **Мікуліч С.**, Делявський М., Здолбіцька Н. *Макроелементний аналіз тонкої ортотропної плити на пружній основі Вінклера*. Інноваційні процеси в галузі дорожнього будівництва: II Міжнародна науково-практична інтернет-конференція молодих учених та студентів : Зб. тез доп., м. Луцьк, 6 листоп. 2024 р. С. 52–54.

3. Делявський М.В., **Мікуліч С.Б.** *Дослідження впливу динамічного навантаження на паяне з'єднання на основі методу граничних елементів*. Актуальні проблеми інженерної механіки: Матеріали XI Міжн. наук.-техн. конф. (Одеса, 21–23 травня 2025 р.) Одеса: ОДАБА, 2025, С. 78-80.

4. **Мікуліч С.Б.**, Делявський М.В., Сяський А. О. *Експериментальна оцінка міцності паяних з'єднань полімерних матеріалів*. Сучасні проблеми містобудування. Перспективи та пріоритети розвитку: Міжнародна науково-практична інтернет-конференція: м. Луцьк, 14 листопада 2025 р. <https://konf-mbg.wixsite.com/lntu-bci-mbg-2025/tezi-dopovidej>

ЗМІСТ

ВСТУП.....	13
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ВПЛИВУ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ НА ПЛАСТИНЧАСТІ ЕЛЕМЕНТИ З ВКЛЮЧЕННЯМИ.....	19
1.1. Дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів З включеннями	19
1.2. Визначальні співвідношення динамічної задачі теорії пружності для тіл з включеннями	27
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВКЛЮЧЕННЯМИ.....	34
2.1. Постановка задачі.....	35
2.2. Випадок дії нестационарного навантаження	36
2.3. Випадок дії гармонічного навантаження	39
2.4. Оцінка достовірності розробленої методики	42
2.5. Висновки до розділу 2.....	47
РОЗДІЛ 3 ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВКЛЮЧЕННЯМИ	49
3.1. Особливості числової реалізації методики аналізу НДС пластинчастих елементів з включеннями	51
3.2. Аналіз напруженого стану пластинчастих елементів з прямокутними включеннями	53
3.3. Напружений стан пластинчастих елементів з еліптичними включеннями	60
3.4. Напружений стан пластинчастих елементів з рухомими недеформівними включеннями	70
3.5. Висновки до розділу 3.....	77
РОЗДІЛ 4. ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ З СИСТЕМОЮ ВКЛЮЧЕНЬ	80

4.1. Постановка задачі.....	81
4.2. Методика розрахунку	83
4.3. Дифракційні ефекти та явища екранування в системі жорстких включень.....	84
4.3.1. Випадок послідовних включень.	86
4.3.2. Випадок паралельних включень.....	93
4.3.3. Випадок послідовних включень, розміщених перпендикулярно до фронту хвилі.	102
4.4. Вплив розмірів жорстких включень на дифракцію хвиль	109
4.5. Висновки до розділу 4.....	116
ВИСНОВКИ	119
ПЕРЕЛІК ЦИТОВАНИХ ПОСИЛАНЬ	122
ДОДАТКИ	134

ВСТУП

Актуальність теми дисертаційної роботи. Сучасний розвиток машинобудування, авіаційної та ракетно-космічної техніки висуває дедалі вищі вимоги до надійності та довговічності тонкостінних елементів конструкцій. Пластини та оболонки, що становлять основу таких об'єктів, часто містять структурні неоднорідності у вигляді жорстких впадок, армуючих елементів або зварних швів. Наявність таких включень зумовлює виникнення значної концентрації напружень на межі розподілу фаз, що стає критичним чинником при дії динамічних та вібраційних навантажень. Неточність у розрахунках на міцність таких елементів призводить до появи втомних тріщин та передчасного руйнування конструкцій.

Вивчення процесів дифракції пружних хвиль у тілах із дефектами належить до найбільш складних задач динамічної теорії пружності. Класичні аналітичні підходи дозволяють отримати розв'язки лише для обмеженого кола задач із канонічними (круговими) формами неоднорідностей. Застосування традиційних сіткових методів (зокрема МСЕ) у динамічних задачах часто стикається з проблемою недостатньої точності в зонах високих градієнтів напружень та значними обчислювальними витратами при високих частотах.

У зв'язку з цим зростає актуальність розробки чисельно-аналітичних методик на основі непрямого методу граничних елементів (НМГЕ), який дозволяє з високою точністю описувати напружено-деформований стан (НДС) в околі включень складної геометрії, зокрема з урахуванням кутових сингулярностей та резонансних явищ.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у рамках науково-дослідної роботи кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання (до 1 травня 2026 року – кафедри прикладної математики та механіки) Луцького національного технічного університету за темою: «Розвиток методів регулювання рівня напружень в

елементах конструкцій з урахуванням уточнених реологічних моделей матеріалів», терміни (2023–2025 рр.).

Мета роботи - розробка та реалізація чисельно-аналітичної методики для дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів із системою абсолютно жорстких нерухомих включень довільної форми за дії нестационарного та гармонічного навантаження.

З огляду на мету було поставлено наступні **задачі**:

- провести аналіз сучасних підходів до дослідження динамічної концентрації напружень в околі включень та отворів;
- сформулювати математичну постановку задачі дифракції пружних хвиль на системі жорстких включень у межах плоского напруженого стану;
- адаптувати алгоритм непрямого методу граничних елементів для розрахунку НДС на межах розподілу матриця–жорстке включення у рамках непрямого підходу методу інтегральних рівнянь з використанням методу інтегральних перетворень;
- дослідити вплив геометричної форми та просторової орієнтації включень на характер розподілу динамічних напружень на межі матриця-включення;
- виявити закономірності взаємодії хвиль у системах декількох включень, зокрема ефекти дифракційного екранування та резонансного підсилення;
- проаналізувати вплив розмірної асиметрії включень на формування екстремальних рівнів напруженості.

Об'єкт дослідження - динамічні процеси деформування пружних пластин із жорсткими неоднорідностями.

Предмет дослідження - концентрація динамічних напружень на межі матриця - абсолютно жорстке включення.

Методи дослідження. У роботі для розв'язання поставлених задач використано метод інтегральних перетворень у поєднанні з непрямым

підходом методу граничних елементів. Для числової реалізації використано метод механічних квадратур у поєднанні з методом колокації та методом розвитку у тригонометричні ряди для комп'ютерного моделювання.

Наукова новизна отриманих результатів:

- **удосконалено** чисельно-аналітичну методику дослідження НДС пластин із жорсткими включеннями на основі НМГЕ, що дозволило з високою точністю ідентифікувати вузькосмугові динамічні резонанси;
- **вперше встановлено** ефект аномального резонансного підсилення напружень у системах включень із розмірною асиметрією, де амплітуда зусиль значно перевищує амплітуду падаючого поля;
- **виявлено** закономірності трансформації зон концентрації напружень вздовж контуру прямокутних включень при переході від низькочастотних режимів до резонансних станів;
- **дістало подальший розвиток** вивчення явища «дифракційної тіні» у багатокомпонентних системах жорстких перешкод залежно від частотного параметра та їх взаємного розташування.

Практичне значення отриманих результатів:

- розроблено ефективний обчислювальний алгоритм для оцінки динамічної міцності елементів конструкцій зі зварними швами та жорсткими впайками;
- результати досліджень дозволяють визначати критичні частотні діапазони експлуатації, що є важливим для запобігання резонансному руйнуванню авіаційних та машинобудівних структур;
- сформульовані рекомендації щодо оптимальної орієнтації та геометрії підсилюючих елементів для мінімізації динамічних напружень у елементах конструкцій;
- запропонована методика може бути використана при вдосконаленні алгоритмів ультразвукової дефектоскопії для ідентифікації систем близько розташованих дефектів;

- отримані результати можуть бути використані для неруйнівного контролю та проектування композитних структур при оцінці залишкового ресурсу конструкції з груповими дефектами та при проектуванні спеціальних демпфувальних бар'єрів для захисту елементів конструкцій від хвильових ударів.

Впровадження результатів дослідження. Результати дисертаційної роботи впроваджено у практичну діяльність проектних та виробничих організацій, а також у навчальний процес Луцького національного технічного університету.

У конструкторську практику ТзОВ «Луцькспецбуд» впроваджено чисельно-аналітичну методику аналізу динамічного напружено-деформованого стану пластинчастих елементів металоконструкцій, що дозволило підвищити точність оцінки зон концентрації напружень у рамних конструкціях при дії хвильових навантажень. У виробничу діяльність ПрАТ «Луцьксантехмонтаж № 536» впроваджено розроблені алгоритми оцінки міцності та експлуатаційної надійності з'єднань конструктивних елементів, що працюють в умовах інтенсивних динамічних впливів.

Матеріали дисертаційного дослідження інтегровані в процесі викладання тем «Зсув. Розрахунок з'єднань елементів конструкцій» та «Розрахунок за динамічних навантажень» у межах викладання дисципліни «Опір матеріалів», що сприяє підвищенню якості підготовки фахівців інженерних спеціальностей.

Публікації та особистий внесок здобувача. За темою дисертації опубліковано 5 наукових статей, з них 1 одноосібна, у фахових виданнях України та 4 матеріали конференцій апробаційного характеру. Внесок здобувача в опублікованих у співавторстві наукових працях полягає у наступному.

У статті [31] здобувачу належить участь у побудові системи граничних інтегральних рівнянь задачі дифракції хвиль у пружних середовищах з включеннями, проведення аналізу особливостей підінтегральних функцій та

підготовка тексту статті; науковому керівнику належить загальна постановка задачі та обговорення отриманих результатів.

У статті [41] здобувач брав участь у розробці чисельного алгоритму на основі розвитку у тригонометричні ряди, який тестувався на задачі аналізу рівноваги тонких ортотропних пластин на трипараметричній пружній основі та проведенні відповідних розрахунків.

У статті [26] здобувачем особисто виконано числову реалізацію методики, проведено дослідження впливу розмірів включення на напружений стан пластинчастих елементів за динамічного навантаження та здійснено аналіз отриманих результатів.

Стаття [10] виконана здобувачем самостійно за участю наукового керівника в обговоренні постановки задачі; здобувачу належить розробка чисельного алгоритму на основі непрямого підходу методу граничних елементів, проведення усіх числових розрахунків та формулювання висновків.

Стаття [8] є одноосібною публікацією здобувача, в якій повністю особисто виконано постановку задачі, розробку методики симуляційного аналізу взаємодії жорстких включень, проведення числових розрахунків та інтерпретацію отриманих результатів.

У тезах доповідей [1, 7, 9, 32], опублікованих у співавторстві, здобувачу належить безпосередня участь у формулюванні задач досліджень, розробці та реалізації чисельних алгоритмів, проведенні розрахунків динамічного напруженого стану тіл з включеннями та паяних з'єднань, а також підготовка матеріалів доповідей.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати роботи обговорено на 4 міжнародних та всеукраїнських конференціях: VIII Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції молодих учених та студентів «Інновації у будівництві» (м. Луцьк, 12 травня 2023 р.), II Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції молодих учених та студентів «Інноваційні процеси в галузі дорожнього будівництва» (м. Луцьк,

6 листопада 2024 р.), XI Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», (Одеса, 21–23 травня 2025 р.), Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Сучасні проблеми містобудування. Перспективи та пріоритети розвитку» (м. Луцьк, 14 листопада 2025 р.).

Структура та обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації – 136 сторінок, з них 121 сторінок основного тексту, 39 рисунків, 101 найменування літератури, 3 додатків.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ВПЛИВУ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ НА ПЛАСТИНЧАСТІ ЕЛЕМЕНТИ З ВКЛЮЧЕННЯМИ

1.1. Дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів з включеннями

У сучасному машинобудуванні, ракетно-космічній, енергетичній, авіа-, корабле- та будівельній галузях пластинчі елементи та тонкостінні циліндричні оболонки широко застосовуються в умовах складних, високоінтенсивних та змінних у часі навантажень. Наявність структурних або конструктивних неоднорідностей — таких як включення, технологічні отвори, підсилювальні накладки та зварні чи паяні шви — суттєво ускладнює напружено-деформований стан (НДС) таких елементів. Вони виступають зонами різкої зміни жорсткості структури й спричиняють локальну концентрацію напружень, яка зазвичай стає головною причиною передчасного крихкого або втомного руйнування відповідальних конструкцій.

Напруження по контурах отворів та на межі розділу середовищ («матриця – включення») розподіляються вкрай нерівномірно: саме на ділянках з екстремальними локальними значеннями напружень виникають перші мікропошкодження, з'являються крихкі тріщини відшарування або розвиваються інтенсивні пластичні деформації, прогресуючий ріст яких призводить до повної втрати тримальної здатності об'єкта. Дослідження НДС у зонах подібних концентраторів набуває критичної актуальності за дії нестационарного динамічного, імпульсного чи вібраційного навантаження. У таких режимах навіть геометрично незначні неоднорідності через ефекти дифракції та інтерференції пружних хвиль здатні спровокувати локальне

сплескове підсилення амплітуд коливань та прогресивне накопичення втомних пошкоджень.

Концентрація напружень спостерігається як поблизу макроскопічних геометричних концентраторів, так і всередині композитних матеріалів зі структурними неоднорідностями у вигляді випадкових домішок, технологічних порожнин чи дискретних включень різної топології. Характер розподілу НДС в околі таких дефектів суттєво залежить від їхньої просторової форми, орієнтації відносно векторів діючих зусиль, а також від співвідношення пружних і геометричних характеристик матеріалу включення та матриці. З огляду на це, пошук ефективних конструктивних рішень для зниження коефіцієнта концентрації напружень за допомогою раціонального проектування параметрів включень у тонкостінних елементах є однією з центральних і першочергових задач механіки деформівного твердого тіла.

Проблематиці науково-обґрунтованого вирішення задач дослідження динамічних явищ та процесів, що спричинені поширенням пружних хвиль, у геометрично-неоднорідних пластинчастих елементах конструкцій присвятили наукові праці такі дослідники як О.Є. Андрейків, В.А. Баженов, П. Бе-нерджі, К. Бреббія, Н.Д. Вайсфельд, В.С. Гудрамович, О.М. Гузь, В.Ф. Ємець, С.О. Калоєров, Г.С. Кіт, О.С. Космодам'янський, В.Д. Кубенко, Я.І. Кунець, Р.М. Кушнір, В.В. Матус, В.В. Михаськів, Я.М. Пастернак, Г.С. Писаренко, О.П. Піддубняк, А.В. Подворний, В.Г. Попов, М.Л. Рябчиков, Г.М. Савін М.П. Саврук, В.Р. Скальський, В.З. Станкевич, Г.Т. Сулим, О.А. Сяський, С.П. Тимошенко, В.М. Трач, І.М. Турчин, В.І. Шваб'юк, С. Уокер, M.L. Baron, Y.M. Chen, M. Kitahara, A. Kromm, J. Milkowitz, C.C. Mow, Y.N. Rao, Ch. Zhang та ін.

Фундаментальний внесок у вивчення закономірностей розподілу напружень поблизу отворів у пластинках та оболонках зроблено у відомій монографії Г.М. Савіна [82], де було детально класифіковано та систематизовано точні аналітичні розв'язки для контурів різної геометричної

конфігурації, зокрема з урахуванням ефектів підсилення країв за допомогою тонких кілець чи пружних накладок. Монографія М.І. Мусхелішвілі створила строгу теоретичну базу методу функцій комплексної змінної (МФКЗ) та теорії конформних відображень. Цей математичний апарат згодом став надійним підґрунтям для широкого класу фундаментальних аналітичних досліджень плоских задач пружності для пластинок із суміжними отворами та неоднорідними включеннями.

Подальше систематичне дослідження НДС багатозв'язних ізотропних і анізотропних пластин, послаблених взаємодіючими системами отворів, тріщин та чужорідних включень, виконано у монографіях М.О. Калоєрова та його співавторів [3]. Ними було реалізовано детальний числовий аналіз взаємного впливу геометричних розмірів, кутів орієнтації та загальної кількості концентраторів на трансформацію полів напружень. Своєю чергою, дослідження динамічних процесів показало, що наявність колового отвору чи включення безпосередньо в тонкостінній оболонці за рахунок її серединної кривини призводить до суттєвого збільшення еквівалентних напружень порівняно з плоскою пластиною, що детально відображено та доведено у фундаментальних працях О.М. Гузя [45] та дослідників його наукової школи.

Класичні аналітичні розв'язки у формі нескінченних рядів для модельних задач про поодинокі кругові включення в ізотропних середовищах за умов статичного та квазістатичного однорідного навантаження побудовано у роботах О.М. Гузя, В.Д. Кубенка [45] та Г.М. Савіна [82]. Проте для дослідження включень складнішої, неканонічної геометрії — еліптичної, прямокутної чи кутової форми — аналітичні методи стикаються із серйозними математичними труднощами. У таких випадках автори традиційно застосовують метод збурення форми границі, який дозволяє апроксимувати шукані функції у вигляді степеневих рядів за малим параметром відхилення реального контуру від ідеального кола, а також метод багатократних відображень пружних хвиль.

Особливе місце в механіці руйнування посідає вивчення дифракції пружних хвиль та динамічної концентрації напружень, базові засади якого викладено у класичній монографії У.Н. Рао та С.С. Мов [75]. Авторами було наочно продемонстровано, що динамічний ККН є нестационарною функцією, яка суттєво залежить від хвильового числа, частоти збурення, профілю падаючої хвилі та коефіцієнта Пуассона матеріалу. Питанням математичної регулярності та подолання некоректності обернених задач присвячено роботу [6], де розроблено алгоритм регуляризації формули обернення інтегрального перетворення Лапласа. Це дозволило з високою точністю аналізувати кінетику концентрації динамічних напружень у пластинах з отворами під час проходження короточасних хвильових фронтів.

Дослідження динамічної концентрації на краю кругового отвору за дії складних несиметричних навантажень виконано у працях О.Є. Онишка [12, 84-86], де виявлено суттєві ефекти запізнювання хвильових сплесків та зміщення точок максимуму напружень в залежності від просторово-часової структури збурення. Водночас динамічну поведінку ортотропних пластин з отворами та включеннями досліджено у роботах [67, 83, 84], де встановлено специфічні особливості формування хвильового поля в анізотропних структурах, викликані розщепленням хвиль на поздовжні та поперечні компоненти з різними швидкостями поширення.

Окремий специфічний клас інженерних задач становить аналіз концентрації напружень у конструктивних елементах, межі яких розміщені поблизу геометричних меж або вільних країв деталей. Точний аналітичний розв'язок задачі про розподіл та концентрацію напружень у пружній півплощині з круговим отвором за умов розтягу під довільним кутом до прямолінійного краю отримано у дослідженнях О.М. Пономаренка та ін [12, 18]. Авторами встановлено, що максимальний рівень ККН локалізується в точці контуру отвору, яка є найближчою до вільного прямолінійного краю півплощини. Важливим фізичним висновком цієї роботи є те, що при

наближенні отвору до краю значення ККН стрімко зростає і прямує до нескінченності, суттєво перевищуючи класичне значення ККН ($K_t = 3$), характерне для безмежної пластини. Крім того, напрямок прикладеного зусилля відносно лінії краю визначено як один із ключових чинників, що керує траєкторією розподілу напружень. Зазначені закономірності мають безпосереднє практичне значення під час оцінки міцності та проектування елементів обшивки в авіабудуванні й суднобудуванні.

Серед числових методів розрахунку неоднорідних систем через свою універсальність найширшого впровадження набув метод скінченних елементів (МСЕ) [29, 71, 98]. Об'ємну серію розрахунків щодо впливу геометричних конфігурацій та механічних модулів пружності різних типів включень на зниження ККН навколо кругових отворів у пластинах та циліндричних оболонках виконано у працях Е.Л. Грат. Детальний скінченноелементний аналіз НДС тонких пластин, циліндричних і конічних оболонок з отворами і протяжними стрічковими включеннями представлено у роботах [48, 49]. Тут також досліджено ефекти впливу взаємного розташування симетрично розміщених еліптичних включень на коефіцієнти концентрації напружень навколо кругового отвору в циліндричній оболонці. У [48] вивчено варіацію пружних властивостей та просторової орієнтації еліптичних включень на деформування пластин.

Узагальнений науковий підхід до проблеми цілеспрямованого зниження ККН навколо кругових отворів у тонкостінних елементах за допомогою проектування неоднорідних зон запропоновано у спільній роботі В.С. Гудрамовича [49], та співавторів. Зокрема, дослідження, яке базується на скінченноелементному моделюванні, показало, що інтеграція в структуру спеціального кільцевого включення, товщина якого плавно або ступінчасто зменшується у радіальному напрямку від краю отвору до матриці, дозволяє суттєво оптимізувати розподіл сил. Застосування такого типу підсилення дозволяє знизити ККН у пластині на 21–43%, а відповідну інтенсивність деформацій — на 22–44%. Обчислювальні експерименти автора довели, що

максимальний ефект зниження параметрів НДС — понад 45% — досягається при використанні включень із максимальною раціональною шириною як у плоских пластинах, так і в криволінійних циліндричних оболонках. Проте, попри високу ефективність, зазначені скінченноелементні дослідження обмежені переважно статичним або квазістатичним характером навантаження, тоді як хвильові динамічні задачі вимагають залучення принципово інших, точніших математичних підходів.

Паралельно з МСЕ активно розвиваються аналітично-числові підходи на основі теорії сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) [13, 19, 35, 37, 60]. Наближений метод розв'язання задач про напружений стан багатозв'язної ізотропної півплощини, послабленої довільно розташованими отворами та тріщинами, запропоновано у роботах С.О. Калоєрова [3], де систему граничних умов вдалося звести до нескінченних, але швидко збіжних циклічних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Апарат СІР також успішно застосовувався для побудови математичних моделей пластин із жорсткими лінійними включеннями [11, 73], моделювання згинальних коливань кругових пластин із криволінійними розрізами й тонкими включеннями [100], а також для теоретичного аналізу складних механізмів локального переходу геометрії деформування з двовимірного (2D) у тривимірний (3D) стан в околі включень [74].

Найбільш потужним та математично коректним інструментом для дослідження НДС безмежних або напівбезмежних пластинчастих елементів із неоднорідностями є метод граничних елементів (МГЕ), теоретичні засади якого викладено у працях J.T. Katsikadelis [53], J. Gwinner та E.P. Stephan [46]. Головними перевагами МГЕ над іншими числовими підходами (зокрема МСЕ) є зниження розмірності задачі на одиницю (перехід від інтегрування по області до інтегрування по її граничному контуру), а також автоматичне й точне задоволення умов згасання полів напружень на нескінченності. Це робить його незамінним при моделюванні крайових задач для необмежених областей. Високу ефективність та точність МГЕ при

аналізі динамічного напруженого стану пластинчастих елементів із прямолінійними розрізами за умов дії гармонічних зосереджених сил продемонстровано у спільній роботі В.І. Шваб'юка та інших авторів [87].

Для розв'язання складних задач дифракції хвиль у пружних середовищах із включеннями за дії нестационарних (імпульсних) навантажень у роботах В.І. Шваб'юка [31] та співавторів було розроблено оригінальний алгоритм непрямого підходу МГЕ. Завдяки застосуванню інтегральних перетворень за часом авторам вдалося звести нестационарну динамічну задачу до скінченної послідовності статико-відповідних задач у частотній області. У межах цього підходу було отримано нові потенціальні представлення фундаментальних функцій для плоскої динамічної задачі теорії пружності. На основі граничних умов жорсткого контакту сформовано розв'язувальні системи граничних інтегральних рівнянь другої основної задачі. Було встановлено та математично доведено, що ядра отриманих рівнянь мають складну структуру й містять сингулярну та гіперсингулярну особливості, що вимагало розробки спеціальних схем регуляризації та обчислення інтегралів у сенсі головного значення за Коші або скінченної частини за Адамаром.

Особливості числової реалізації методу інтегральних рівнянь здійснено у дослідженнях [13, 19, 32]. Для дискретизації контурних інтегральних рівнянь тут було ефективно поєднано метод механічних квадратур (зокрема, формули квадратур Гаусса-Чебишова для сингулярних інтегралів) та метод колокації. Тестування точності розробленого числового коду проведено на модельній задачі про дифракцію падаючої плоскої хвилі стиску на жорсткому нерухомому круговому включенні. Порівняння отриманих числових результатів із відомими точними аналітичними розв'язками показало, що максимальне відхилення не перевищує 3%, що підтвердило високу збіжність, достовірність та універсальність розробленого підходу.

Подальший розвиток даного підходу висвітлено у працях А.О. Сяського, М.В. Делявського та ін. [9, 10], де було досліджено вплив геометричних розмірів та витягнутості прямокутних жорстких включень на концентрацію динамічних напружень в нескінченних пластинах під дією одновісного імпульсного розтягу. На основі числових розрахунків ними встановлено важливий механічний ефект: зі збільшенням відносного подовження жорсткого включення характер розподілу колових та нормальних напружень уздовж лінії контакту суттєво змінюється. Водночас за умов високочастотних коливань (коротких хвиль) величини максимальних напружень стабілізуються, вирівнюються й практично перестають залежати від лінійних розмірів неоднорідності. Це дало змогу чітко локалізувати небезпечні точки збурення на границі розділу фаз, де концентрація напружень досягає екстремумів.

У роботах [4, 12] проведено комплексний симуляційний аналіз закономірностей динамічної взаємодії у системах, що містять неоднорідності. На прикладі моделювання взаємодії двох сусідніх жорстких включень різної довжини (що розглядається як розрахункова модель реальних дискретних зварних вузлів та паяних швів) було детально вивчено трансформацію радіальних і кільцевих напружень залежно від частоти зовнішнього поля та топології розташування елементів. Було виявлено та кількісно описано фізичні ефекти «взаємного екранування» (коли одне включення захищає інше від прямого удару хвилі, знижуючи рівень напружень у його околі) та «локального підсилення» полів напружень у вузьких зазорах між включеннями через фокусування хвильової енергії.

Варто також зауважити, що оцінка міцності аналогічних з'єднань є важливою не лише для металевих чи композитних структур, а й для сучасних елементів. У [4, 40, 52, 56] показано, що паяні з'єднання полімерів активно застосовуються під час проведення ремонтних робіт, відновлення цілісності деталей або як основний метод фіксації пластикових трубопроводів. Проведені авторами лабораторні випробування зразків

дозволили оцінити реальну зміну фізико-механічних властивостей (модуля Юнга, межі міцності) полімерної матриці під дією локальних термічних циклів пайки. Отримані ними експериментальні криві руйнування створюють надійну базу для верифікації та математичного моделювання розподілу напружень у неоднорідних пластинчастих елементах із включеннями, що виконується на основі описаного аналітично-числового підходу.

Таким чином, детальний аналіз опублікованих у світовій та вітчизняній науковій літературі досліджень свідчить про те, що, попри значний прогрес у розробці класичних числових (насамперед МСЕ) та аналітичних методів для вивчення НДС пластинчастих елементів при статичних навантаженнях, коло задач, пов'язаних із хвильовою динамічною взаємодією складних систем жорстких та пружних неоднорідностей у тонкостінних елементах, залишається розв'язаним лише частково. Більшість наявних підходів або ігнорують динамічні ефекти, або стикаються з труднощами при описі неканонічної геометрії границь. З огляду на це, розробка та вдосконалення аналітично-числового підходу на основі методу граничних інтегральних рівнянь у поєднанні з потужним апаратом теорії функцій комплексної змінної є вкрай перспективним і актуальним науковим напрямком. Він забезпечує математичну строгість, високу числову точність, швидку збіжність алгоритмів і відкриває можливість проведення глибокого параметричного аналізу напруженого стану пластинчастих елементів із включеннями практично довільної гладкої чи кутової форми за умов дії широкого спектра нестационарних динамічних навантажень.

1.2. Визначальні співвідношення динамічної задачі теорії пружності для тіл з включеннями

Розглянемо нескінченне пружне ізотропне середовище (матрицю), яке містить включення або систему взаємодіючих включень. Позначимо через Γ

- границю включення. Прийmemo, що тіло перебуває під дією зовнішнього нестационарного або гармонічного динамічного навантаження, яке зумовлює поширення пружних хвиль у середовищі.

Для опису поширення хвиль та дослідження впливу динамічного навантаження на напружено-деформований стан пластинчастого елементу віднесемо його до декартової системи координат Ox_1x_2 . Використаємо диференціальні рівняння руху плоскої задачі теорії пружності - рівняння Ляме [45, 81]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

де $\mathbf{u} = \{u_i\}$ - вектор динамічних переміщень; ρ — густина матеріалу матриці; ∇ — набла-оператор: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$.

Для випадку плоского напруженого стану пружні сталі λ та μ виражаються через модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона ν матриці на основі формул [45, 81]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.2)$$

Швидкості поширення хвиль розширення-стиску c_1 та зсуву c_2 у матриці визначаються через зазначені сталі відповідно до співвідношень [45, 81]:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.3)$$

або через пружні характеристики матриці [45, 81]:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}. \quad (1.3')$$

Для розв'язання початково-крайових динамічних задач за дії нестационарних або імпульсних навантажень у методі граничних інтегральних рівнянь ефективно застосовується метод інтегральних перетворень за часом [60], наприклад, перетворення Лапласа або Фур'є. Це

дозволяє виключити часову змінну t та звести вихідну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу до стаціонарних рівнянь еліптичного типу в просторі трансформант.

Використання методу інтегральних перетворень [60]:

$$\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, t)f(t)dt \quad (1.4)$$

де $K(\omega, t)$ є ядром перетворення, дозволяє звести нестационарну задачу до системи хвильових задач у частотній області.

Після застосування такого підходу, рівняння руху пружного ізотропного тіла у трансформантах у випадку використання перетворення Фур'є запишеться у вигляді:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) + \mu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \rho \omega^2 \tilde{\mathbf{u}} = 0. \quad (1.5)$$

де $\tilde{\mathbf{u}}$ — трансформанти вектору переміщень, що отримуються при застосуванні формули (1.4) для випадку, коли ядро перетворення $K(\omega, t) = e^{-i\omega t}$, ω — частота.

Для зручності числових розрахунків зручним є введення хвильових чисел поздовжніх ω_1 та поперечних ω_2 хвиль у просторі перетворення:

$$\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \omega_2 = \frac{\omega}{c_2} \quad (1.6)$$

дозволяє переписати систему (1.5) у компактній операторній формі через хвильові потенціали.

Представивши вектор переміщень $\mathbf{u}$ у вигляді суми скалярного потенціалу ϕ , що описує поздовжні хвилі та векторного потенціалу ψ , який описує поперечні хвилі, у вигляді [45]:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi, \quad \nabla \cdot \Psi = 0 \quad (1.7)$$

та підставивши їх його у рівняння Ляме (1.1), отримаємо два незалежні хвильові рівняння, що описують поздовжні Р-хвилі:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1.7')$$

та рівняння, що описують поперечні S-хвилі:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (1.7'')$$

У випадку плоского напруженого стану для 2D випадку співвідношення (1.7') та (1.7'') у компонентах вектору переміщень $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$ записується у вигляді [45, 81]:

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}. \quad (1.8)$$

Використовуючи інтегральне перетворення (1.4) до співвідношень (1.8) та підставляючи отримані представлення у трансформанти рівнянь руху (1.5) отримаємо рівняння Гемгольца для трансформант потенціалів для поздовжніх Р-хвиль:

$$\Delta \tilde{\Phi} - \omega_1^2 \tilde{\Phi} = 0 \quad (1.9')$$

та поперечних S-хвиль:

$$\Delta \tilde{\Psi} - \omega_1^2 \tilde{\Psi} = 0. \quad (1.9'')$$

Використання критерію Зоммерфельда [81] дозволяє виокремити такі розв'язки динамічної задачі теорії пружності, що не тільки задовольняють хвильові рівняння (1.9') та (1.9'') та пов'язані з переміщеннями згідно співвідношень (1.7), а і відповідають фізичному її змісту. Цей принцип містить два критерії [81]:

умову скінченності:

$$\Psi|_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad (1.10)$$

або

$$\Psi r \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

та умову випромінення:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - i\omega \Psi \right) \Big|_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) \text{ або} \quad (1.11)$$

$$\left| r \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - i\omega \Psi \right) \right| < K = \text{const},$$

фізичний зміст якої полягає у виборі такого розв'язку задачі, який описує хвилі, що розбігаються.

Для повного замикання системи визначальних співвідношень сформулюємо граничні умови на контурі розділу матриці та включення Γ . В залежності від фізико-механічної природи включення розглядають два основні типи контактних умов:

Абсолютно жорстке нерухоме включення

Дана модель описує включення, жорсткість яких на кілька порядків перевищує жорсткість матриці. Прикладом таких включень можуть бути, наприклад, металеві елементи або зварні шви чи пайові з'єднання у полімерних пластинах. У цьому випадку деформаціями всередині включення нехтують, а контур Γ вважається кінематично закріпленим. Граничні умови у просторі трансформант записуються в переміщеннях для випадку повного защемлення у вигляді [45]:

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega) \Big|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = 0. \quad (1.12)$$

Якщо жорстке включення має скінченну масу M і здатне зміщуватися під дією хвилі як єдине ціле без деформації форми, то умови (1.12) модифікуються [45]:

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega) \Big|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = \tilde{U}_i(\omega), \quad (1.12')$$

де $\tilde{U}_i(\omega)$ — невідомі поступальні переміщення центра мас включення, які визначаються з рівнянь руху самого включення під дією результируючих

контурних зусиль:

$$M\omega^2 \tilde{U}_i(\omega) = \int_{\Gamma} \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}, \omega) n_j(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}).$$

Пружне включення (умова ідеального контакту)

Якщо включення є пружним деформівним тілом, то на контурі Γ ставиться умова неперервності векторів переміщень та векторів напружень при переході з матриці як зовнішньої області у включення (внутрішня область). Граничні умови у цьому випадку записуються у вигляді [45]:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^{(+)}(\mathbf{x}, \omega) &= \tilde{u}_i^{(-)}(\mathbf{x}, \omega), \\ \tilde{\sigma}_i^{(+)}(\mathbf{x}, \omega) n_j(\mathbf{x}) &= \tilde{\sigma}_i^{(-)}(\mathbf{x}, \omega) n_j(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

де знаками (+) та (−) позначено граничні значення функцій при прямуванні до контуру з боку матриці та включення відповідно, а n_j — компоненти зовнішньої нормалі.

Розрахунок напружень на нахилених площинках у роботі буде продовитися за використання формул [81]:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\alpha - \sigma_{12} \sin 2\alpha, \\ \tau_{sn} &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha, \end{aligned} \quad (1.14)$$

тут (σ_n, τ_{sn}) — проекція вектора напружень, що діють на площинці, на нормаль та дотичну до неї, α — кут між нормаллю $\vec{n}$ і віссю Ox_1 , σ_{ij} , $i, j = 1, 2$ визначаються на основі закону Гука, який для випадку для плоского напруженого стану записується у вигляді [81]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Напруження у довільній точці площинки визначатимемо на основі

формул виду [81]:

$$2(\sigma_n - i\tau_{sn}) = \frac{2E}{1-\nu} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) + e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+\nu} \left(\frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right), \quad (1.16)$$

$$\text{тут } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Для розрахунку кільцевих напружень на границі включення-матриця використовуватимуться формули [81]:

$$2(\sigma_\theta - i\tau_{s\theta}) = \frac{2E}{1-\nu} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) - e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+\nu} \left(\frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right). \quad (1.17)$$

Для визначення напружень через потенціальні функції Ψ , Φ , які пов'язані з переміщеннями відповідно співвідношень (1.8), використовуватимемо формули [81]:

$$\sigma_{rr} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right); \quad (1.18)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right), \quad (1.19)$$

де

$$\cos \theta = \frac{x_1 - \xi}{r}, \quad \sin \theta = \frac{x_2 - \eta}{r}, \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

РОЗДІЛ 2.

МЕТОДИКА МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВКЛЮЧЕННЯМИ

Наявність включень та жорстких впайок у елементах конструкцій викликає істотну концентрацію напружень не тільки у зоні самих включень, а у їх околі, особливо при дії змінних у часі навантажень. Неточність у розрахунках на міцність і жорсткість цих елементів конструкцій призводить до появи тріщин та інших дефектів, а також до їх подальшого руйнування у процесі експлуатації.

Для більш точного розрахунку деталей та елементів конструкцій у машинобудуванні необхідно використовувати комплексні дослідження, що поєднують у собі теоретичні розрахунки та експериментальні випробування. Тому актуальним постає питання розробки методик аналізу напружено-деформованого стану елементів конструкцій, що мають жорсткі включення різної форми, за дії динамічного навантаження.

Вивчення процесів поширення та дифракції пружних хвиль за дії змінного у часі у тілах з дефектами ґрунтується на використанні громіздких математичних підходів. Тому ці задачі відносяться до одних з найбільш складних питань динаміки деформівного твердого тіла. Крім того, використовуючи аналітичні підходи можна отримати розв'язки лише для випадку включень та отворів кругової та сферичної форми [45, 75, 81]. Для дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій з дефектами іншої форми слід поряд з аналітичними методами використовувати і числові підходи, що також істотно ускладнює розв'язання задачі [71].

Застосування сіткових числових методів [71] при дослідженні механічної поведінки тіл з включеннями дає можливість отримати хороші результати лише у випадку статичного навантаження. За дії динамічних силових впливів напружено-деформований стан відповідних елементів

конструкцій описується швидкозмінними функціями, що при числовому диференціюванні вимагають істотного зростання числових потужностей у зв'язку з необхідністю згущення сітки, та спричиняють втрату точності розрахунків.

Тому актуальним є розробка підходу до дослідження напружено-деформованого стану пластинчастих елементів з включеннями на основі непрямого підходу методу граничних елементів, який виявився ефективним у випадку дефектів типу порожнин та отворів за дії нестационарного навантаження.

2.1. Постановка задачі

У процесі моделювання розглядався пластинчастий елемент, у який жорстко вкріплене недеформівне включення (рис. 2.1). Приймалося, що включення додатково зафіксовано таким способом, щоб на границі пластинчастого елемента та включення були відсутні переміщення (рис. 2.1). Через L позначали границю контуру включення, через D – область, яку займає пластинка. Пластинчастий елемент відносили до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, яку розміщували у центрі ваги включення (рис. 2.1).

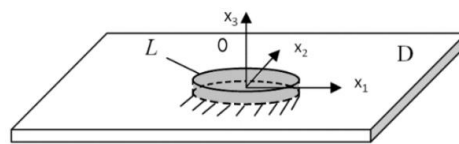


Рис. 2.1. Модель задачі

Граничні умови задачі записувалися у вигляді (1.12):

$$u_i|_L = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.1)$$

де u_1 та u_2 переміщення точок границі пластинки в напрямку Ox_1 та Ox_2 відповідно.

2.2. Випадок дії нестационарного навантаження

Використання методу інтегральних перетворень (1.4) дозволяє звести нестационарну задачу до системи хвильових задач у частотній області. Після застосування такого підходу, рівняння руху пружного ізотропного тіла запишуться у вигляді:

$$\partial_m \hat{\sigma}_{mj} + \hat{X}_j + \omega^2 \rho \hat{u}_j = 0, \quad (2.2)$$

де $\hat{\sigma}_{mj}$, $\hat{u}_j$, $\hat{X}_j$ — трансформанти напружень, переміщень та масових сил, що отримуються при застосуванні формули (1.4), ω — частота.

У випадку другої основної задачі за відсутності масових сил зображення для переміщень записується у вигляді [31]:

$$\hat{u}_k = - \int_L \hat{u}_j \cdot P_{kj}^* dL, \quad (2.3)$$

де $\hat{u}_k$ — трансформанти переміщень у k -му напрямку, P_{kj}^* — фундаментальні функції, що відповідають напруженню у k -му напрямку від дії одиничних сил у j -му напрямку. Для двовимірного випадку значення індексів приймаються: $k, j = 1, 2$.

Відповідно до [34, 37], використовуючи вектор Буссинеска, фундаментальний тензор функцій впливу рівняння (2.2), записанного у переміщеннях:

$$(c_1^2 - c_2^2) \partial_j \hat{\theta} + c_2^2 \Delta \hat{u}_j + \frac{\hat{X}_j}{\rho} = -\omega^2 \hat{u}_j,$$

можна отримати у вигляді для представлень типу (2.3):

$$P_{kj}^* = \sigma_{ij}^{(k)} n_j, \quad (2.4)$$

де

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \rho \left((c_1^2 - 2c_2^2) \frac{\partial U_{mk}^*}{\partial x_m} \delta_{ij} + c_2^2 \left(\frac{\partial U_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right),$$

$$U_{ij}^* = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} \left(\psi \delta_{ij} - \chi \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right),$$

при цьому відстань між точками визначається у вигляді:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2},$$

c_1 — швидкість поширення хвиль розширення у середовищі, c_2 — швидкість хвилі зсуву, що визначаються за формулами (1.3), ρ — густина матеріалу матриці, λ , μ — сталі Ляме, які визначаються на основі формул (1.2).

У випадку нестационарних навантажень для плоскої динамічної задачі класичної теорії пружності у [31, 34] представлення для функцій ψ та χ записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \psi &= K_0\left(\frac{kr}{c_2}\right) + \frac{c_2}{kr} \left(K_1\left(\frac{kr}{c_2}\right) - K_1\left(\frac{kr}{c_1}\right) \right), \\ \chi &= K_2\left(\frac{kr}{c_2}\right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} K_2\left(\frac{kr}{c_1}\right), \end{aligned}$$

де $K_0(r)$, $K_1(r)$, $K_2(r)$ — модифіковані функції Бесселя третього роду нульового, першого та другого порядку [39], $k = \pm i\omega$. Ці представлення побудовані з урахуванням відбору таких розв'язків, що описують хвилі, які прямують та затухають на нескінченності для необмежених областей та відкиданням таких розв'язків, що «прямують» з нескінченності.

Для задоволення трансформант граничних умов (2.1) та побудови інтегральних рівнянь задачі необхідно дослідити фундаментальні функції P_{ij}^* та встановити чи мають вони нерегулярні складові. Використовуючи представлення (2.4) для двовимірного випадку фундаментальні функції P_{ij}^* можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
P_{11}^* &= \frac{1}{2\pi} \left(F_1 n_1 \frac{\partial r}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial r}{\partial n} + 2F_3 \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} \right), \\
P_{12}^* &= \frac{1}{2\pi} \left(F_4 n_2 \frac{\partial r}{\partial x_1} + F_2 n_1 \frac{\partial r}{\partial x_2} + 2F_3 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right), \\
P_{21}^* &= \frac{1}{2\pi} \left(F_4 n_1 \frac{\partial r}{\partial x_2} + F_2 n_2 \frac{\partial r}{\partial x_1} + 2F_3 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right), \\
P_{22}^* &= \frac{1}{2\pi} \left(F_1 n_2 \frac{\partial r}{\partial x_2} + F_2 \frac{\partial r}{\partial n} + 2F_3 \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} \right),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

де $\mathbf{n}$ — вектор нормалі до границі, а функції F_1, F_2, F_3, F_4 виражаються через функції χ та ψ , а також їх похідні по r у вигляді:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 1 \right) \psi' + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \chi' + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + 1 \right) \frac{\chi}{r}; \\
F_2 &= \psi' - \frac{\chi}{r}, \quad F_3 = -\chi' + 2 \frac{\chi}{r}, \quad F_4 = \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) (\psi' + \chi') + \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\chi}{r}.
\end{aligned}$$

Для побудови інтегральних рівнянь задачі у області зображень дослідимо функції P_{ij}^* на основі отриманих залежностей (2.5) та їх складові F_1, F_2, F_3, F_4 на наявність нерегулярності у околі $r=0$:

$$\begin{aligned}
F_1 &\square -\frac{1}{2r} \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) \left(\frac{2c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_1}{c_2} + 1 \right); \quad F_2 \square -\frac{1}{2r} \frac{(c_1 + c_2)c_2}{c_1^2}, \\
F_3 &\square -\frac{1}{r} \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2}, \quad F_4 \square -\frac{1}{2r} \left(\frac{2c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_1}{c_2} - 3 - \frac{2c_2}{c_1} \right).
\end{aligned}$$

Аналіз останніх залежностей показує, що функції F_1, F_2, F_3, F_4 мають особливість порядку $\sim \frac{1}{r}$.

Використовуючи останні залежності інтегральні рівняння другої основної задачі у області трансформант можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
c_1 \hat{u}_1 + c_2 \hat{u}_2 + c'_1 \hat{u}'_1 + c'_2 \hat{u}'_2 + \int_L \hat{u}_1 \cdot f_1 + \hat{u}_2 \cdot f_2 dL &= 0, \\
c_3 \hat{u}_1 + c_4 \hat{u}_2 + c'_3 \hat{u}'_1 + c'_4 \hat{u}'_2 + \int_L \hat{u}_1 \cdot f_3 + \hat{u}_2 \cdot f_4 dL &= 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

де позаінтегральні члени отримуються при використанні формул Племеля-Сохоцького при граничному переході [61], коефіцієнти $c_i, i=1..4$ відповідають сингулярним складовим підінтегральних функцій $f_i, i=1..4$, а $c'_i, i=1..4$ — гіперсингулярним складовим функцій F_3 ,

$$f_1 = P_{11}^* \Big|_{\substack{(x_1, x_2) \in L \\ (x_1^0, x_2^0) \in L}} ; \quad f_2 = P_{21}^* \Big|_{\substack{(x_1, x_2) \in L \\ (x_1^0, x_2^0) \in L}} ; \quad f_3 = P_{12}^* \Big|_{\substack{(x_1, x_2) \in L \\ (x_1^0, x_2^0) \in L}} ; \quad f_4 = P_{22}^* \Big|_{\substack{(x_1, x_2) \in L \\ (x_1^0, x_2^0) \in L}} .$$

2.3. Випадок дії гармонічного навантаження

У випадку дії гармонічного навантаження при розв'язанні задачі використовувався метод граничних елементів [34, 37]. При цьому представлення для переміщень подавалося у вигляді [10]:

$$u_i(x_1, x_2) = - \int_L u_j(x_1^0; x_2^0) \cdot P_{ji}^*(x_1; x_2; x_1^0; x_2^0) ds. \tag{2.7}$$

Тут P_{kj}^* — фундаментальні функції, що будуються відповідно до діючого навантаження. Для плоского напруженого стану приймалося: $k, j = 1, 2$.

Використовуючи вектор Буссинеска, фундаментальний тензор функцій впливу, що входять до інтегрального представлення (2.7), для випадку квазістатичного навантаження можна записати у вигляді, аналогічному до пункту 2.2 у вигляді:

$$\begin{aligned}
P_{ii}^* &= \frac{1}{2\pi} \left(F_1 n_i \frac{\partial r}{\partial x_i} + F_2 \frac{\partial r}{\partial n} + 2F_3 \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} \right), \\
P_{ij}^* &= \frac{1}{2\pi} \left(F_4 n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} + F_2 n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} + 2F_3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} \right),
\end{aligned}$$

де $\vec{n}$ — вектор нормалі до границі. Тут функції F_1, F_2, F_3, F_4 мають аналогічну структуру до функцій, отриманих у п. 2.2 [10]:

$$F_1 = \frac{c_1^2}{c_2^2} \left(\psi' + \chi' + \frac{\chi}{r} \right) - \psi' - 2\chi' + \frac{\chi}{r};$$

$$F_2 = \psi' - \frac{\chi}{r},$$

$$F_3 = -\chi' + 2\frac{\chi}{r},$$

$$F_4 = \frac{c_1^2}{c_2^2} \left(\psi' + \chi' + \frac{\chi}{r} \right) - 2(\psi' + \chi').$$

У випадку вказістатичного навантаження відповіно до [10, 34] функції ψ та χ можна записати у вигляді:

$$\psi = \frac{i\pi}{2} \left(-H_0^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) + \frac{c_2}{\omega r} \left(H_1^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2}{c_1} H_1^2 \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \right) \right),$$

$$\chi = \frac{i\pi}{2} \left(H_2^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} H_2^2 \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \right),$$

де $r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$, $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$; $H_k^2(z) = J_k(z) - iY_k(z)$ — функції Ганкеля II роду; $J_k(z)$, $Y_k(z)$ — відповідно функції Бесселя I та II роду [39], $i, j=1, 2$. Інтегрування вздовж границі проводиться за змінними x_1^0, x_2^0 .

Розв'язання задачі зводилося до системи інтегральних рівнянь, які отримувалися шляхом задоволення граничних умов (2.1) при підстановці інтегральних представлень (2.7) з урахуванням представлень для підінтегральних функцій, встановлення їх особливостей, виділення нерегулярних складових та використання формул Племеля-Сохоцького [61] при граничному переході.

Інтегральні рівняння задачі у випадку гармонічного навантаження у матричній формі записуються у вигляді:

$$C \cdot U + \int_L F \cdot U ds = P, \quad (2.8)$$

де $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ - матриця коефіцієнтів, що визначається при граничному переході за використання формул Племеля-Сохоцького [61], $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ - матриця невідомих переміщень, $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ - матриця відомих величин, що отримується при урахуванні впливу заданого навантаження шляхом задоволення граничних умов (2.1); $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ - матриця відомих підінтегральних функцій, які отримуються при задоволенні граничних умов (2.1) та мають вигляд:

$$f_{jk} = P_{jk}^* \Big|_{\substack{(x_1, x_2) \in L \\ (x_1^0, x_2^0) \in L}}$$

Для розв'язання система інтегральних рівнянь (2.8) використовувалася комбінація ефективних числових методів, таких як метод механічних квадратур, метод колокації та метод розвитку у тригонометричні ряди, тестування та ефективність якого відображена у [1, 41].

Враховуючи особливості підінтегральні функції f_{jk} при малих значеннях аргументу для числових розрахунків використано уточнені квадратурні формули для слабосингулярних функцій [57]:

$$\int_{\Omega} f(t, z_v) \ln r dt = h \sum_{n=1}^K f_{vn} \left(\ln \frac{r_n}{\xi_n} - \sum_{m=1}^M \frac{\xi_n^m}{m} \cos(\theta - \theta_n) \right) g'_n,$$

$$\int_{\Omega} qf(t, z_v) dt = h \sum_{n=1}^K q_n f_{vn} g'_n$$

де

$$g'_n = g'(\theta_n), \quad \theta_n = hn, \quad z_v = z(\tilde{\theta}_v), \quad \tilde{\theta}_v = \theta_v + \frac{h}{2}, \quad v = \overline{1, K}, \quad h = \frac{2\pi}{K}, \quad M = \frac{K}{2}.$$

Після числового визначення невідомих для розрахунку напружень використовувалися наступні формули:

$$\sigma_{ij} = \int_L H_{ik} u_k ds, \quad j=1 \dots 2, \quad (2.9)$$

тут функції H_{ij} визначаються числово у відповідних точках. Вирази для функцій H_{ij} отримані у аналітичній формі:

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left(G_1 n_j + 2r_j \frac{\partial r}{\partial x_i} G_2 + e^{2i\alpha} n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} \Psi_1 + n \Psi_2 + 2r_j \Psi_3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n} \right)$$

де

$$\begin{aligned} G_1 &= F_4' + \frac{F_4}{r} + 2 \frac{F_2}{r}; \\ G_2 &= F_2' - \frac{F_2}{r} + F_3' + \frac{F_3}{r}, \\ \Psi_1 &= F_1' - \frac{F_1}{r}, \\ \Psi_2 &= F_2' + \frac{F_2}{r}, \\ \Psi_3 &= F_3' - \frac{3}{r}. \end{aligned}$$

2.4. Оцінка достовірності розробленої методики

Для перевірки достовірності та точності запропонованого аналітично-числового підходу проведемо тестування на задачі про дослідження концентрації напружень на границі жорстко впаяного кругового нерухомого включення. Числові розрахунки проведемо для різних значень коефіцієнта Пуассона у випадку дії «падаючої» хвилі стиску, потенціали якої задаються [10, 31, 45]:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \omega_1 x_1)}, \Psi = 0, \quad (2.10)$$

де ω - частота, $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $\Phi_0 = \frac{\rho}{\omega^2}$. Хвиля поширюється у напрямку осі Ox_1 .

2D модель навантаження представлена на рис. 2.2.

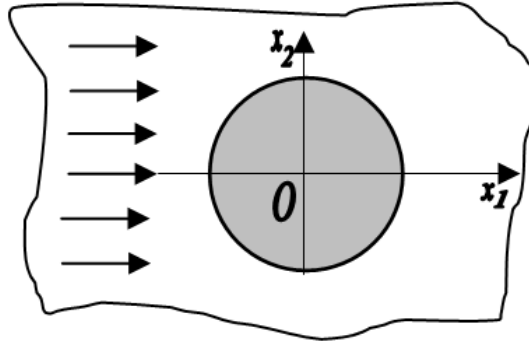


Рис. 2.2. 2D модель тестової задачі.

Така задача є динамічним аналогом задачі про концентрацію напружень біля отворів (включень) при двоосьовому основному напруженому стані. У випадку усталених коливань математично таке навантаження описується з допомогою плоскої пружної хвилі, що падає на отвір (включення). Така хвиля породжує відбиті хвилі. Сумарне хвильове поле визначає напружений стан у пружній пластинці. При цьому, на контурі включення виникають відбиті хвилі стиску, потенціали (2.10) Ψ та Φ яких задовольняють рівнянням Гемгольца [45].

У роботах О.М. Гузя та В.Д. Кубенка [45] за використання методу рядів отримано аналітичний розв'язок задачі у вигляді нескінченного ряду, що характеризується високою збіжністю. Відповідні результати у вигляді зображення з книги [45] наведено на рис. 2.3. Тут приймалося, що $\alpha = \omega_2 =$

$$\frac{\omega}{c_2}.$$

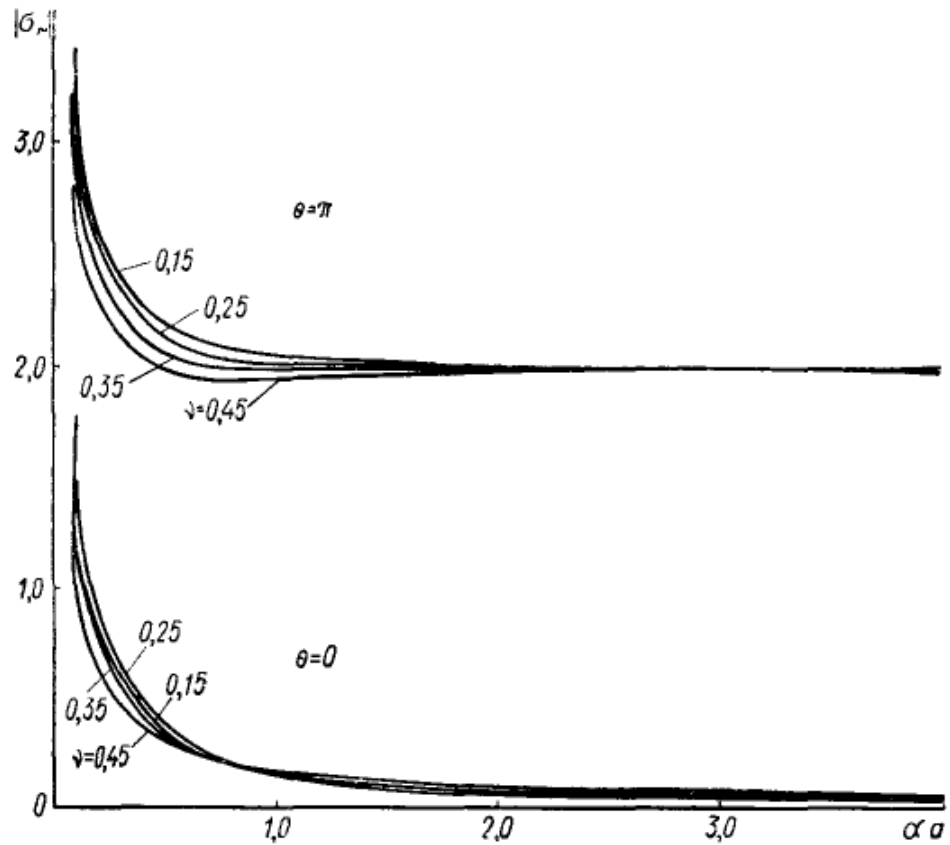


Рис. 2.3. Розподіл радіальних напружень на границі кругового нерухомого включення, отримані у [45] методом рядів

Тому для тестування запропонованого підходу отримаємо розв'язок цієї ж задачі при аналогічних значеннях вхідних параметрів. Розрахунки проводитимемо у двох точках границі контуру жорсткого включення: $\theta = 0$ та $\theta = \pi$.

Результати числових розрахунків на основі розвиненої у роботі методики представлено на рис. 2.4. Тут наведено криві радіальних напружень для випадку аналогічних значень величин коефіцієнта Пуассона: $\nu=0,15$, $0,25$, $0,35$ та $\nu=0,45$ для зручності порівняння та аналізу. При розрахунках було вибрано $n=50$ точок розбиття границі включення.

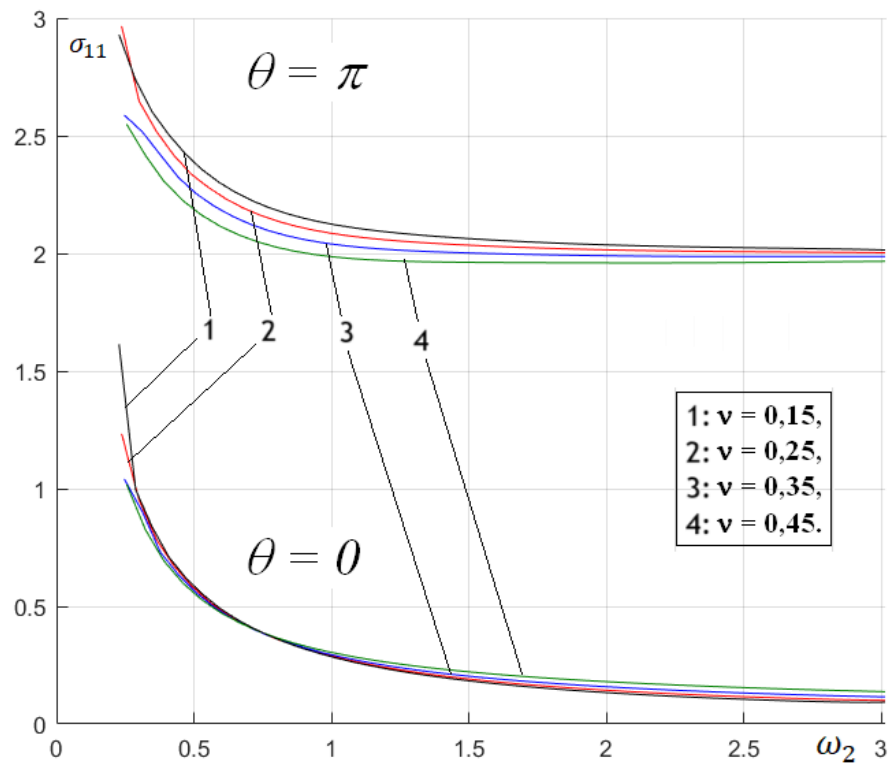


Рис. 2.4. Розподіл радіальних напружень на границі кругового нерухомого включення, отримані на основі розробленої методики

При порівнянні результатів, наведених на рис. 2.3 та рис. 2.4, видно, що напруження відрізняються на 2-3%, що підтверджує ефективність запропонованого підходу. Крім того, серед переваг розробленої методики є можливість проводити аналіз напруженого стану вздовж усіх точок границі включення, оскільки, на відміну від методу рядів, розв'язок будується для усіх точок границі одночасно.

На рис. 2.5 наведено зміну розподілу нормальних напружень вздовж границі включення, що розраховані для декількох значень частотної характеристики $\omega_2 = 0,25; 0,5; 1,0; 1,5$.

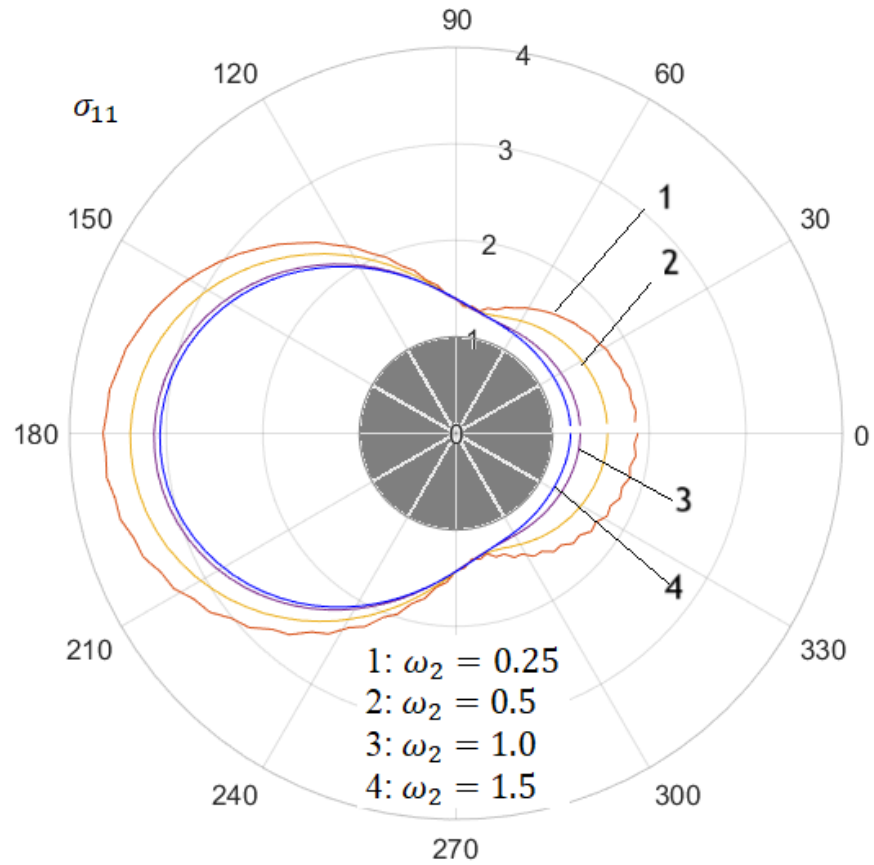


Рис 2.5. Зміна розподілу нормальних напружень вздовж границі включення

Кільцеві напруження вздовж границі включення є значно меншими від радіальних напружень. Це пояснюється тим, що фронт хвилі діє вздовж осі Ox_1 , що у точці $\theta=0^\circ$ співпадає з напрямком нормалі до границі включення. Розподіл кільцевих напружень, розрахованих у аналогічних точках: $\theta = 0$, $\theta = \pi$ наведено на рис. 2.6.

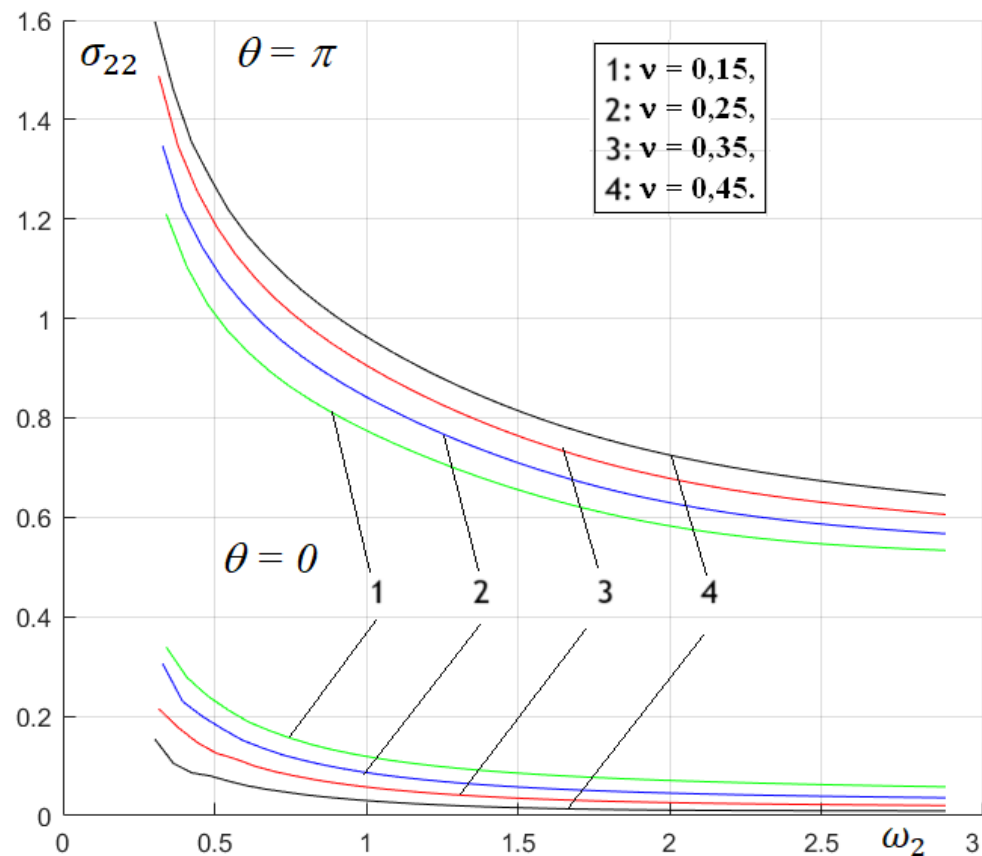


Рис. 2.6. Розподіл кільцевих напружень на границі кругового нерухомого включення, отримані на основі розробленої методики

Слід відмітити, запропонований у цій роботі підхід характеризується істотно ширшими можливостями розрахунків. Крім того, цей підхід є універсальним для дослідження напруженого стану у випадку включень іншої гладкої форми та не потребує, на відміну від методу рядів, жодних модифікацій. Переваги цього підходу будуть продемонстровані у наступних розділах дослідження.

2.5. Висновки до розділу 2

У розділі за використання інтегральних перетворень та непрямого підходу методу граничних елементів розроблено методику дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів з жорсткими

недеформівними включеннями довільної гладкої форми. Використання розробленого підходу дозволяє звести розв'язання як нестационарних, так і гармонічних задач до систем сингулярних граничних інтегральних рівнянь. Для випадку нестационарного навантаження застосування методу інтегральних перетворень дозволило звести вихідну задачу до системи хвильових задач у частотній області. Побудовано фундаментальний тензор функцій впливу з використанням вектора Буссинеска та встановлено характер особливостей підінтегральних функцій. У області трансформант записано інтегральні рівняння із виділенням сингулярних та гіперсингулярних складових. Для випадку гармонічного навантаження побудовано інтегральне представлення для переміщень та відповідні фундаментальні функції через функції Ганкеля другого роду. Система інтегральних рівнянь задачі у матричній формі розв'язувалась із застосуванням комбінації методу механічних квадратур, методу колокації та методу розвитку у тригонометричні ряди. Для розрахунку напружень отримано аналітичні вирази у інтегральній формі.

Для перевірки достовірності розробленої методики проведено порівняння одержаних числових результатів з відомими у літературі роз'язками, отриманими методом рядів для задачі про концентрацію напружень на границі жорстко впаяного кругового нерухомого включення за дії падаючої хвилі стиску. Розрахунки, виконані для різних значень коефіцієнта Пуассона, показали висоту точність та ефективність запропонованого підходу. Похибка становила не більше 2–3%. Серед переваг розробленої методики є можливість одночасного аналізу напруженого стану вздовж усіх точок границі включення, на відміну від методу рядів, який ефективний лише для включень кругової та сферичної форми.

Основні наукові результати розділу, які визначають новизну дисертаційної роботи, опубліковані в роботах [10, 31, 32].

РОЗДІЛ 3

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВКЛЮЧЕННЯМИ

Наявність сторонніх включень та жорстких впайок у елементах конструкцій зумовлює виникнення істотної концентрації напружень не лише безпосередньо у зоні контакту фаз, а й у значному їх okolí. Особливо критичним цей вплив стає за умов дії змінних у часі навантажень, коли хвильові процеси спричиняють додаткове динамічне підсилення зусиль. Неточність у розрахунках на міцність та жорсткість таких неоднорідних елементів призводить до передчасної появи втомних тріщин, деламінації та інших дефектів, що неминуче веде до катастрофічного руйнування конструкцій у процесі експлуатації.

Для забезпечення високої надійності деталей та вузлів у сучасній інженерії необхідно впроваджувати комплексні підходи, що поєднують глибокий теоретичний аналіз із сучасними методами обчислювальної механіки. У зв'язку з цим, актуальним постає питання розробки та вдосконалення методик аналізу напружено-деформованого стану (НДС) пластинчастих елементів конструкцій, що містять жорсткі включення складної геометрії, за умов інтенсивного динамічного та гармонічного навантаження.

Вивчення процесів поширення та дифракції пружних хвиль у тілах із дефектами ґрунтується на використанні складного математичного апарату теорії потенціалу та спеціальних функцій. Через необхідність врахування явищ інтерференції, розсіяння та резонансного поглинання енергії, такі задачі належать до найбільш трудомістких питань динаміки деформівного твердого тіла.

Відомо, що класичні аналітичні підходи дозволяють отримати замкнені розв'язки лише для обмеженого кола задач, де включення або отвори мають ідеалізовану кругову чи сферичну форму. Дослідження ж реальних

елементів конструкцій із дефектами довільної конфігурації вимагає залучення числових методів, що суттєво ускладнює математичне формулювання та реалізацію алгоритмів розв'язання.

Застосування традиційних сіткових числових методів, зокрема методу скінченних елементів, демонструє високу ефективність переважно у задачах статички. Проте за дії динамічних силових впливів НДС відповідних елементів описується швидкозмінними функціями, що потребує значного згущення сітки в зонах високих градієнтів напружень, особливо поблизу кутових точок включень. Це призводить до експоненціального зростання потреби в обчислювальних потужностях та часто спричиняє втрату точності внаслідок нагромадження похибок числового диференціювання на великих масивах даних.

Враховуючи зазначені обмеження, пріоритетним напрямком є розробка підходу до дослідження НДС пластинчастих елементів на основі непрямого методу граничних елементів (НМГЕ). Даний метод виявився надзвичайно ефективним при моделюванні дефектів типу порожнин та отворів за дії нестационарного навантаження, оскільки він дозволяє знизити вимірність задачі та забезпечує високу точність апроксимації напружень безпосередньо на межі розділу середовищ. Адаптація цього підходу для задач із жорсткими включеннями відкриває нові можливості для аналізу складних інтерференційних полів у багатокомпонентних структурах.

У межах даного розділу представлено результати комплексного дослідження динамічного напруженого стану пластин із системою абсолютно жорстких рухомих та нерухомих включень прямокутної та еліптичної форми. Основну увагу приділено вивченню впливу геометричних параметрів, розмірів включень та частотного діапазону зовнішнього збурення на характер розподілу нормальних та кільцевих напружень. Встановлені закономірності дозволяють ідентифікувати критичні зони концентрації зусиль та визначити резонансні режими, що є визначальними при оцінці довговічності реальних інженерних об'єктів.

3.1. Особливості числової реалізації методики аналізу НДС пластичних елементів з включеннями

Відповідно до методики, описаної у п. 2.2, розв'язання задачі зведено до системи інтегральних рівнянь, які отримувалися при задоволенні граничних умов (2.1) з використанням інтегральних представлень (2.7). Її записували у матричній формі:

$$\{c_{jk}\} \cdot \{u_j\} + \int_L \{f_{jk}\} \cdot \{u_j\} ds = \{P_j\}, \quad (3.1)$$

де c_{jk} - коефіцієнти, які визначаються при граничному переході за використання формул Племеля-Сохоцького [61], u_j - невідомі переміщення, P_j - функції впливу заданого навантаження, f_{jk} - відомі підінтегральні функції ($j, k = 1, 2$), причому :

$$f_{jk} = P_{jk}^* \Big|_{(x_1, x_2) \in L, (x_1^0, x_2^0) \in L}.$$

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь використовувалися числові методи: метод механічних квадратур, метод колокації, метод конформних відображень, метод розвинення у тригонометричні ряди, що був протестований у роботах [1, 41]. При числовій реалізації проводилася наступна параметризація границь пластинчастого елемента:

$$x_1 = \varphi(\theta); \quad x_2 = \psi(\theta), \quad t = g(\theta) = \varphi(\theta) + i\psi(\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Для підінтегральних функцій f_{jk} використовувалися уточнені квадратурні формули з урахуванням типу їх особливостей при малих значеннях аргументу [57]:

$$\begin{aligned} \int_L f(t, z_v) \ln r \, dt = \\ = h \sum_{n=1}^K f_{vn} \left(\ln \frac{r_n}{\xi_n} - \sum_{m=1}^M \frac{\xi_n^m}{m} \cos(\theta - \theta_n) \right) g'_n, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\int_L qf(t, z_v) dt = h \sum_{n=1}^K q_n f_{vn} g'_n \quad (3.3)$$

де

$$g'_n = \cos(\theta_n) \pm i \sin(\theta_n),$$

$$\theta_n = hn, \quad \tilde{\theta}_v = \theta_v + h/2, v = \overline{1, K}, h = 2\pi/K, \quad M = \frac{K}{2}.$$

$$f_{vn} = f(t_n, z_v).$$

При реалізації запропонованого підходу точки вибиралися з урахуванням наступних залежностей [34, 57]:

$$z_v = x_1 + ix_2, \quad t_n = x_1^0 + ix_2^0, r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}.$$

Використання квадратурних формул (3.2)-(3.3) до інтегральних рівнянь (3.1) дозволяє звести розв'язання задачі до системи рівнянь, що записується у вигляді:

$$A \cdot U = P, \quad (3.4)$$

де

$$A = \{A_{jk}\}, \quad A_{jk} = C_{jk} + F_{jk}, U = \{u_k\}, \quad P = \{P_j\}, j, k = \overline{1..K}$$

Для розрахунку головних нормальних напружень побудовано аналітичні залежності у інтегральній формі. Для цього використаємо формули для розрахунку напружень [81] для випадку плоского напруженого стану:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \rho \left(c_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (c_1^2 - 2c_2^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{22} &= \rho \left(c_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (c_1^2 - 2c_2^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

де c_1 , c_2 - швидкості хвиль розширення визначається та хвиль зсуву [45, 81], які у випадку плоского напруженого стану визначаються за формулами:

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}, c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1 + \nu)}.$$

Тут E - модуль пружності першого роду матеріалу (модуль Юнга), ρ - густина матеріалу, ν - коефіцієнт Пуассона.

Підставляючи представлення для переміщень у формули (3.5) отримаємо:

$$\sigma_{11} = \int_L H_{11} u_1 ds + \int_L H_{12} u_2 ds,$$

$$\sigma_{22} = \int_L H_{21} u_1 ds + \int_L H_{22} u_2 ds,$$

де функції H_{ij} наведені у розділі 2 та при розрахунку напружень визначаються числово у відповідних точках. У випадку розрахунку напружень на границі включення та матриці було додатково встановлено особливості підінтегральних функцій та використано формули Племеля-Сохоцького [61] при граничному переході.

3.2. Аналіз напруженого стану пластинчастих елементів з прямокутними включеннями

Для числового розрахунку розподілу напружень на межі матриця-включення використовувалися тригонометричне представлення для параметризації границі контуру включення L [81]:

- для прямокутної границі з відношенням сторін 5:

$$g(\theta) = a(e^{-i\theta} + 0.64e^{i\theta} - 0.098e^{3i\theta} - 0.0038e^{5i\theta} + \dots)$$

- для прямокутної границі з відношенням сторін 3,2:

$$g(\theta) = a(e^{-i\theta} + 0.5e^{i\theta} - 0.125e^{3i\theta} - 0.00375e^{5i\theta} + \dots)$$

Дослідження напруженого стану пластинчастих елементів з включеннями проводилися для випадку дії «падаючої» хвилі стиску, що за динамічних навантажень моделює випадок одновісного розтягу. Потенціали падаючої хвилі задавалися у вигляді [45]:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \omega_1 x_1)}, \Psi = 0,$$

де ω - частота, $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $\Phi_0 = \frac{\rho}{\omega^2}$, c_1 - швидкість хвиль розширення, що визначаються на основі формули (1.3) чи (1.3') для випадку плоского напруженого стану.

За числових розрахунків приймалося, що, що хвиля поширюється у напрямку осі Ox_1 . 2D модель навантаження пластинчастого елемента представлена на рис. 3.1.

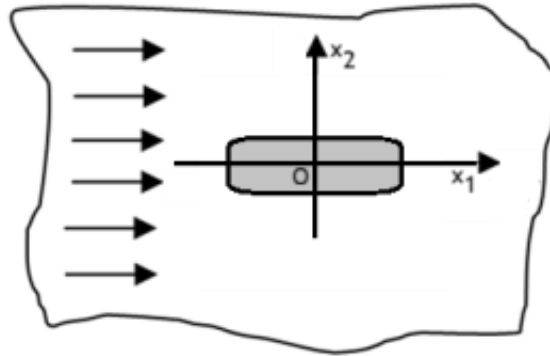


Рис. 3.1. 2D модель задачі.

На рис. 3.2 наведено результати числових розрахунків нормальних напружень вздовж границі включення, що розраховані для декількох значень частотної характеристики ω_1 : 0.25 (крива 1), 0.5 (крива 2), 1.0 (крива 3), 1.5 (крива 4) для двох випадків включень: з відношенням сторін 5:1 (рис. 3.2) та відношенням сторін 3.2:1 (рис. 3.3). При розрахунках вибиралися наступні значення механічних характеристики матеріалів: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

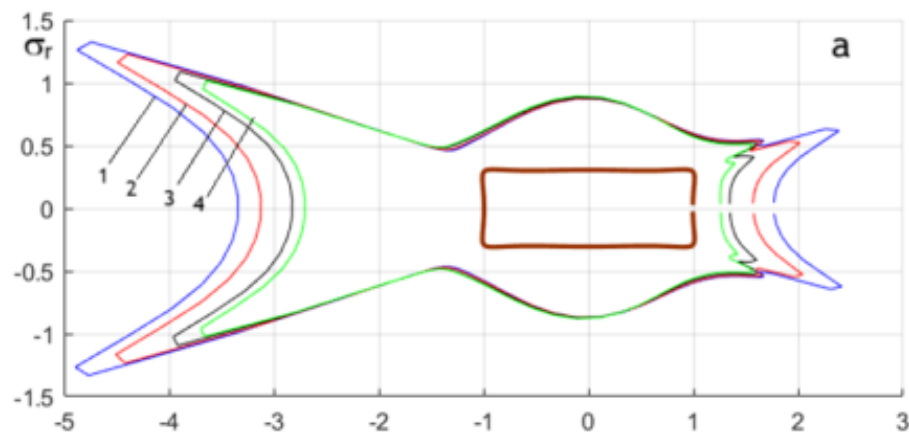


Рис. 3.2. Напружений стан вздовж границі включення з відношенням сторін 5:1

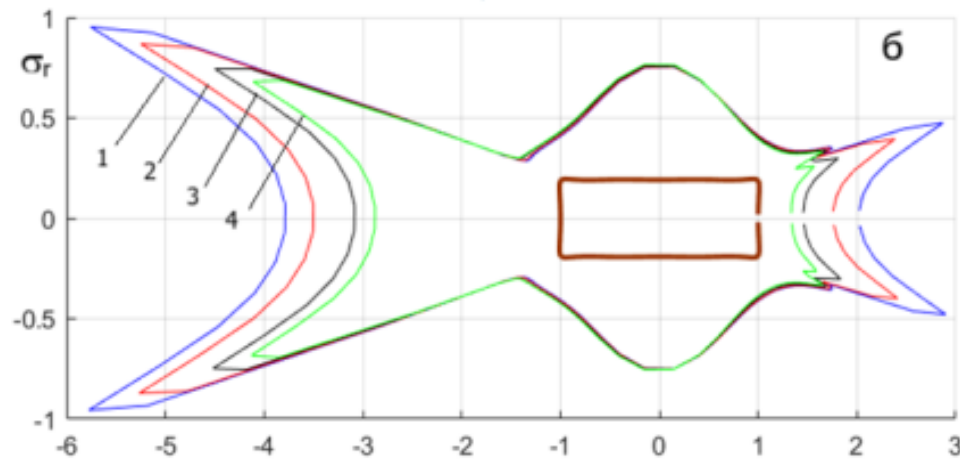


Рис. 3.3. Напружений стан вздовж границі включення з відношенням сторін 3.2:1

Аналіз результатів, представлених на рис. 3.2 та 3.3, дозволяє зробити наступні висновки щодо поширення хвильових процесів у середовищах з прямокутними включеннями та їх вплив на напружений стан елементів, а також як геометричний параметр: довжина включення, впливає на концентрацію напружень при дифракції пружних хвиль.

Порівняння результатів, наведених на рис. 3.2 та 3.3, дозволяють оцінити вплив відношення сторін включення на амплітуду напружень. У випадку відношення сторін $L/H=5:1$ (рис. 3.2) максимальні значення нормальних напружень у фронтальній зоні (крива 1) досягають значень $\sigma_r \approx (1.3 \dots 1.4)\sigma_0$. Для випадку $L/H=3.2:1$ (рис. 3.3) максимальні значення для аналогічного режиму (крива 1) є суттєво нижчими і становлять $\sigma_r \approx 0.9 \dots 1.0 \sigma_0$. З цього можна зробити висновок, що більш подовжені включення спричиняють вищу на 30–40% концентрацію напружень (приблизно вищу) у порівнянні з включеннями меншої довжини. Це пояснюється тим, що довга жорстка перешкода чинить більший опір деформаціям матриці вздовж осі поширення хвилі.

В обох випадках спостерігаються виражені піки напружень, що розходяться від кутів прямокутника. Проте у випадку, представленою на рис. 3.2 ця концентрація є більш гострою та витягнутою.

Це вказує на те, що для дуже тонких і довгих включень (наближення до жорсткої лінії/тріщини) кутова сингулярність проявляється значно інтенсивніше, що робить такі елементи більш вразливими до зародження тріщин у матриці саме з кутів фронтальної грані.

При високих частотах (криві 3 та 4) на обох рисунках спостерігається вигинання епюри в центральній частині горизонтальних граней, що характеризує ефект обтікання включення у відповідному режимі навантаження.

Для менш видовженого включення (рис. 3.3) центральне вигинання є більш вираженим відносно загальної амплітуди, ніж для довшого включення (рис. 3.4). Це свідчить про те, що у випадку меншого відношення сторін динамічна взаємодія хвилі з бічними поверхнями включення відбувається інтенсивніше відносно його довжини.

Для обох конфігурацій зберігається спільна закономірність: низька частота (крива 1) дає максимальну концентрацію на фронтальних кутах. Зі зростанням частоти (крива 4) амплітуда на фронті спадає, а напруження «розтікаються» вздовж усього периметра, стаючи більш рівномірними на бічних гранях.

Дослідження впливу геометричного параметру подовження прямокутного жорсткого включення дозволило встановити пряму залежність між відношенням сторін L/H включення та рівнем концентрації динамічних напружень.

Порівняльний аналіз контурних епюр для розглянутих випадків показав, що збільшення подовження включення призводить до суттєвого зростання амплітуди нормальних напружень σ_r у фронтальних кутових зонах — від $\sigma_r \approx 0.95\sigma_0$ до $\sigma_r \approx 1.35\sigma_0$ у низькочастотному режимі. Візуалізація напруженого стану демонструє, що для більш тонких включень характерна виражена локалізація зусиль у точках геометричної сингулярності (кутах), де формуються гострі піки напруженості, що значно виступають за межі контуру.

Встановлено, що зміна відношення сторін також трансформує характер розподілу зусиль вздовж горизонтальних граней контакту. Для менш подовженого включення ($L/H=3.2:1$) спостерігається інтенсивніше зростання напружень у середній частині бокових поверхонь при підвищенні частоти зовнішнього збурення, що вказує на зміну структури дифрагованого поля в околі перешкоди.

Отримані результати підтверджують гіпотезу про те, що включення з великим відносним подовженням є найбільш небезпечними концентраторами напружень у пластинчастих елементах за дії поздовжніх хвиль, оскільки вони створюють умови для максимального силового опору динамічному деформуванню матриці.

Отримані результати демонструють можливість переходу від якісного аналізу розподілу напружень при нестационарному навантаженні до кількісного порівняння відповідних значень напружень, що дозволяє не просто бачити картину напруженого стану пластинчастого елемента, а й точно розраховувати вплив геометричних пропорцій включення на міцність.

Також для аналізу напруженого стану було досліджено зміну розподілу напружень на границі включення та пластини для розглянутих випадків зі зміною частоти у декількох точках границі: $\theta = 0^\circ$ (крива 1), $\theta = 45^\circ$ (крива 2), $\theta = 90^\circ$ (крива 3), $\theta = 135^\circ$ (крива 4) та $\theta = 180^\circ$ (крива 5). На рис. 3.4 та 3.5 представлено розподіли кільцевих σ_θ (рис. 3.4) та нормальних σ_n (рис. 3.5) та динамічних напружень для відповідних точок границі.

Тут випадку прямокутного включення з відношення сторін 5:1 відповідають суцільні криві, а для випадку відношення 3.2:1 – пунктирні.

Числові розрахунки проведені для випадку розрахунку зміни залежності кільцевих та нормальних напружень від частотного параметра $\omega_2 = \frac{\omega}{c_2}$, де c_2 – швидкість хвиль зсуву, що визначаються за формулами (1.3) чи (1.3') для випадку плоского напруженого стану.

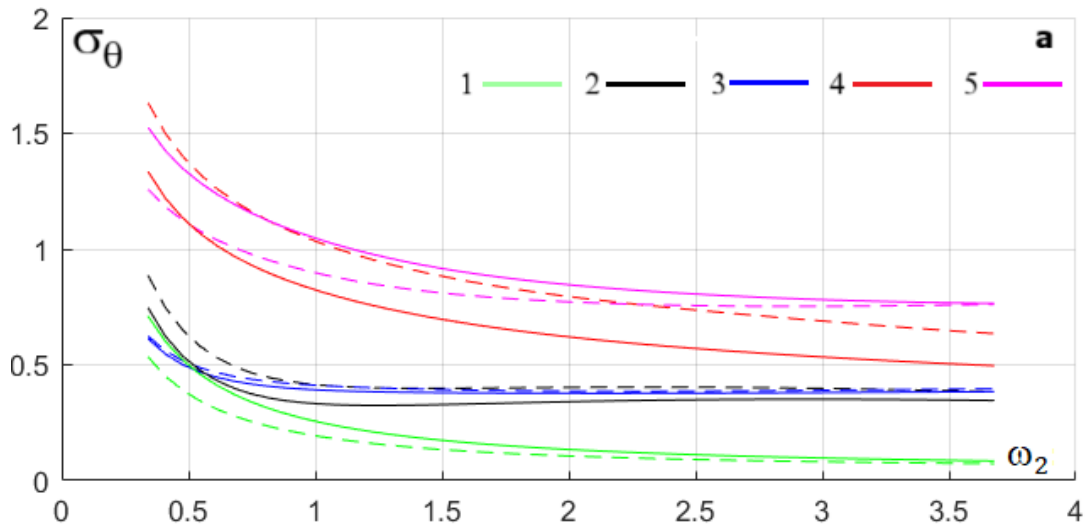


Рис. 3.4. Розподіл кільцевих напружень у пластинці з прямокутним включенням

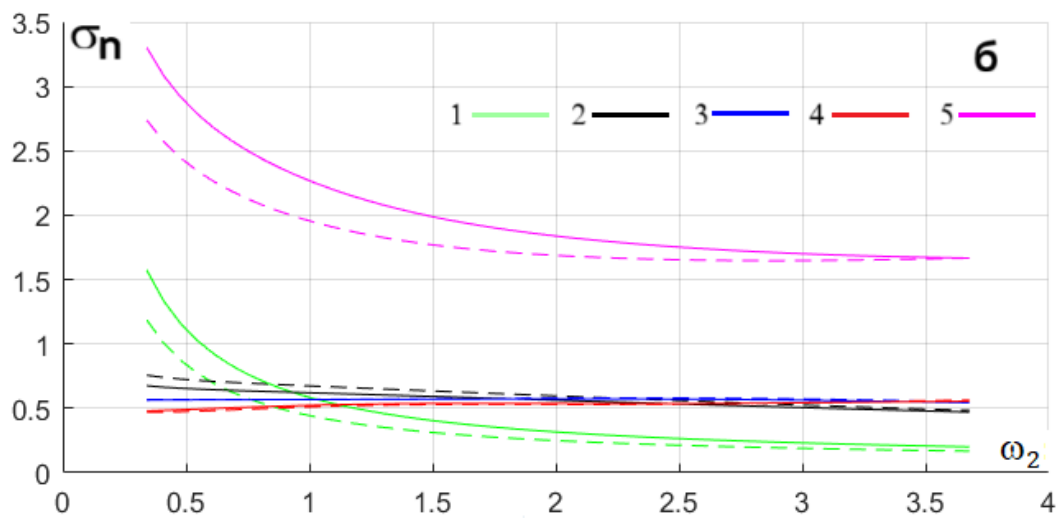


Рис. 3.5. Розподіл нормальних напружень у пластинці з прямокутним включенням

Аналіз кільцевих напружень σ_θ (рис.3.4) на границі матриця-включення дозволяє зробити аналіз щодо зон максимальної концентрації напружень. З рис. 3.4 видно, що найвищі значення кільцевих напружень зафіксовано у точках $\theta=180^\circ$ (крива 5) та $\theta=135^\circ$ (крива 4). Це свідчить про те, що фронтальна грань та кутові зони, повернуті до падаючої хвилі, зазнають найбільшого нормального розтягу/стиску.

Для всіх точок спостерігається тенденція до поступового зниження амплітуди напружень із зростанням відносного частотного параметра частоти ω_2 . Найбільш інтенсивне спадання характерне для низькочастотного діапазону ($\omega_2 < 1.0$), після чого криві виходять на відносно стабільний рівень - асимптотичне плато.

Вплив геометричного параметру відношення сторін включення L/H є оберненим до міцності пластинчастого елементу. Для подовжених включень ($L/H=5:1$) величина кільцевих напружень σ_θ характеризується дещо вищими значеннями у точках $\theta=180^\circ$ та $\theta=135^\circ$ у порівнянні з випадком $L/H=3.2:1$. Однак у точці $\theta=135^\circ$ (крива 4) при низьких частотах спостерігається інверсія: пунктирна крива лежить вище суцільної, що вказує на специфіку кутової концентрації для менш видовжених включень.

Аналіз результатів, представлених на рис. 3.5 дозволяє зробити висновок про домінування нормальних напружень σ_n у фронтальних точках. Найбільші нормальні напруження виникають у точці лобового удару хвилі $\theta=180^\circ$. Амплітуда динамічних нормальних напружень σ_n тут суттєво у 2–3 рази перевищує значення в усіх інших досліджених точках.

На відміну від кільцевих напружень, нормальні напруження демонструють дуже чітку залежність від видовження включення. Для випадку включення з відношенням сторін $L/H=5:1$ (суцільна крива 5) пікове значення при $\omega_2 \approx 0.3$ досягає $\sigma_n \approx 3.3\sigma_0$, тоді як для випадку включення $L/H=3.2:1$ (пунктирна крива 5) максимальне напруження становить лише $\sigma_n \approx 2.7\sigma_0$. Це підтверджує висновок про те, що довші включення створюють значно більший опір динамічному прогину пластини, що призводить до зростання нормального тиску на контактній границі.

У точці $\theta=0^\circ$ (криві 1) нормальні напруження стрімко спадають із зростанням частоти, досягаючи мінімальних значень. Це пояснюється формуванням стійкої геометричної тіні за включенням, де прямий вплив падаючої хвилі нівелюється жорстким тілом.

Аналіз рис. 3.4 та 3.5 дозволяє зробити висновки щодо загальних закономірностей та висновків щодо співвідношення нормальних та кільцевих напружень у пластинчастому елементі з включеннями. Порівняння масштабів осей на графіках показує, що максимальні нормальні напруження $\sigma_{n_{\max}}$ становлять $\approx 3.3\sigma_0$ та значно перевищують максимальні кільцеві напруження $\sigma_{\theta_{\max}}$, що становлять лише $\approx 1.6\sigma_0$. Таким чином, саме нормальний відрив або стиснення на межі контакту «матриця–включення» є визначальним фактором для оцінки міцності адгезійного з'єднання.

Встановлено, що параметр L/H відношення сторін прямокутного включення найбільше впливає на напруженість фронтальної зони. При збільшенні відношення сторін від 3.2:1 до 5:1 відбувається нелінійне зростання концентрації напружень, що необхідно враховувати при проектуванні армованих елементів.

Аналіз кривих розподілу кільцевих та нормальних напружень рис. 3.4 та 3.5 показує стабілізацію концентрації напружень у пластинчастому елементі при високих частотах. Характерний хід усіх кривих вказує на те, що при $\omega_2 > 3.0$ динамічна реакція системи стає менш чутливою до зміни частоти, що свідчить про перехід до режиму короткохвильової дифракції, де напружений стан визначається локальною геометрією окремих ділянок границі.

3.3. Напружений стан пластинчастих елементів з еліптичними включеннями

Дослідимо дію падаючої хвилі, що задається потенціалами:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \omega_1 x_1)}, \Psi = 0,$$

на пружений стан пластинчастих елементів з еліптичними включеннями. Тут ω - частота, $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$ – частотна характеристика, $\Phi_0 = \frac{\rho}{\omega^2}$, c_1 - швидкість хвиль розширення, що визначаються на основі формули (1.3).

Розглянемо випадок, коли фронт хвилі співпадає з більшою віссю осі еліпса (рис. 3.6).

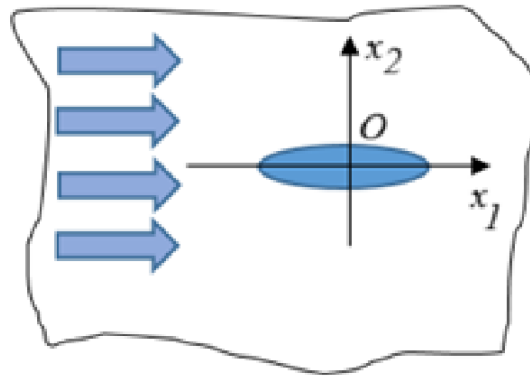


Рис. 3.6. 2D модель задачі.

На рис. 3.7 представлено результати розрахунку зміни нормальних напружень на границі включення та пластини зі зміною частоти у декількох точках границі: $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 90^\circ$, $\theta = 135^\circ$ та $\theta = 180^\circ$ для випадку еліптичного включення з відношенням півосей 2:1.

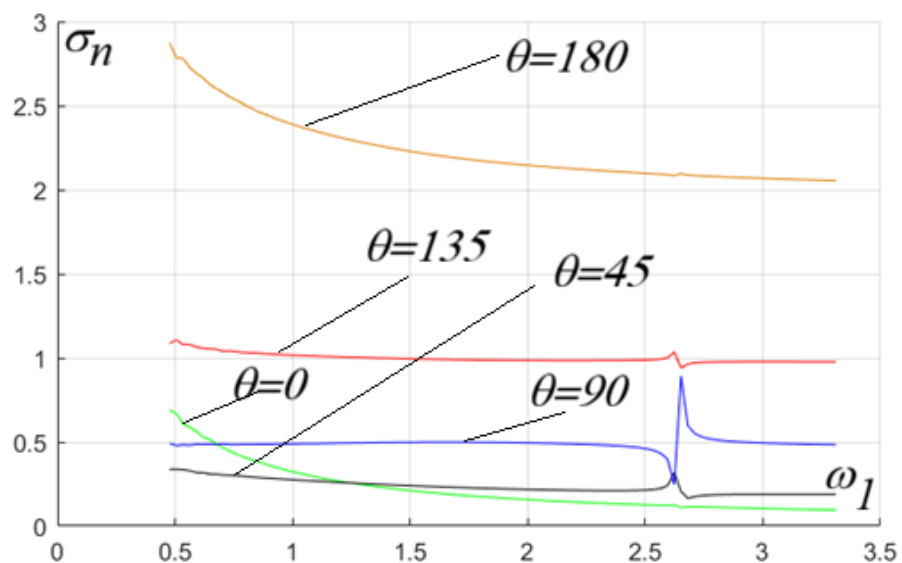


Рис. 3.7. Напруження на границі еліптичного жорсткого включення

Числові розрахунки підтверджують, що для еліптичного включення характер поширення напружень дещо відрізняється від прямокутного через відсутність гострих кутів, що згладжує концентрацію напружень, але посилює роль кривизни поверхні.

Аналіз результатів рис. 3.7 дозволяє провести аналіз частотних залежностей нормальних напружень σ_n на основі зміни їх амплітуди. Домінування фронтальної зони при $\theta=180^\circ$ показує наявність найвищих значень напружень в точці «лобового» зіткнення хвилі з включенням. Максимальне значення $\sigma_n \approx 2.8\sigma_0$ спостерігається при низьких частотах ($\omega_1 \approx 0.5$). Із зростанням частоти напруження поступово спадають до рівня $\sim 2.0 \sigma_0$, що свідчить про те, що жорстке еліптичне тіло чинить найбільший опір довгим хвилям.

У тилівій точці ($\theta=0^\circ$) напруження стрімко зменшуються вже при $\omega_1 > 1.0$. Це вказує на ефективне формування геометричної тіні за еліпсом. На відміну від прямокутника, еліпс «плавніше» обтікається хвилею, тому тіньова зона тут більш виражена і стабільна.

Числові розрахунки виявили динамічну аномалію при $\omega_1 \approx 2.65$. Для $\theta=90^\circ$ та $\theta=45^\circ$ спостерігається чітко виражений вузький стрибок. Це критична частота, яка, ймовірно, відповідає резонансу на межі розсіювання або моменту, коли довжина хвилі стає співмірною з великою піввіссю еліпса. Різке зростання напруження в точці $\theta=90^\circ$ вказує на інтенсивне поперечне стиснення включення в цей момент.

Точка $\theta=135^\circ$ займає проміжне положення і демонструє стабільний рівень напружень ($\sigma_n \approx 1.0 \sigma_0$) у широкому діапазоні частот, що робить цю зону найменш чутливою до зміни частоти зондувального сигналу.

Дослідження динамічної реакції абсолютно жорсткого еліптичного включення дозволило виявити характерні частотні зони нестабільності напруженого стану. Встановлено, що фронтальна точка включення ($\theta=180^\circ$) зазнає максимального силового впливу у всьому досліджуваному діапазоні

частот, причому пікові значення $\sigma_n \approx 2.8\sigma_0$ досягаються при низьких частотах ($\omega_1=0.5$).

Особливий науковий інтерес становить виявлена аномалія при частоті $\omega \approx 2.65$, де спостерігається різке зростання напружень у бічних точках еліпса ($\theta=90^\circ$). Даний ефект свідчить про виникнення резонансної взаємодії, пов'язаної зі співмірністю довжини хвилі та геометричних розмірів включення.

Порівняння з результатами для прямокутних включень показує, що еліптична форма забезпечує більш плавний розподіл напружень вздовж контуру без різких піків у кутових зонах, проте загальний рівень нормального тиску на фронтальній межі залишається високим, що обумовлено нерухомістю жорсткої впайки. Особливістю розподілу напружень на границі еліптичного включення є відсутність сингулярностей, що виникають у кутових точках прямокутного включення, тому він є більш ефективним елементом конструкції з точки зору втомної міцності.

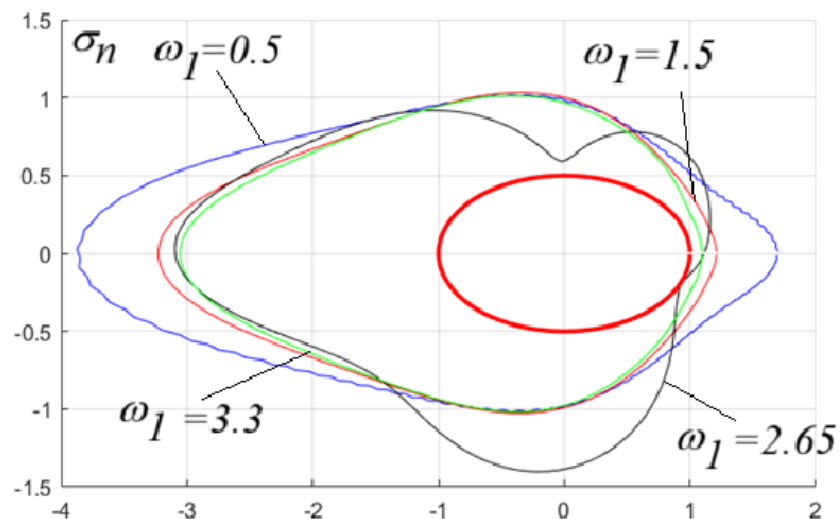


Рис. 3.8. Зміна динамічних напружень вздовж границі включення

На рис. 3.8 представлені контурні епюри амплітуд нормальних напружень σ_n , відкладені по нормалі до границі еліптичного жорсткого

включення для чотирьох значень безрозмірної частоти ω_1 : 0,5; 1,5; 2,65 та 3,3.

Для всіх частот характерною є виражена асиметрія відносно вертикальної осі: напруження на лівій стороні включення суттєво перевищують значення на «тіньовій» (правій) стороні. Це класичний прояв дифракції на жорсткому нерухомому тілі, де фронтальна частина бере на себе основний удар хвильової енергії.

При низькій частоті ($\omega_1=0.5$) спостерігається найбільший за площею «лобовий» масив напружень. Епюра має плавну, витягнуту вліво форму. Максимальна концентрація напружень локалізована строго у точці $\theta=180^\circ$. Відсутність гострих кутів (на відміну від прямокутного включення) забезпечує плавне спадання напружень при переході від фронтальної до бокових частин еліпса.

У резонансному стані ($\omega_1=2.65$) на контурі показано розподіл напружень у динамічній аномалії. Найбільша амплітуда виникає у точці $\theta=180^\circ$ серед усіх розглянутих випадків. Виразно помітно розширення епюри у бокових зонах (поблизу $\theta=90^\circ$ та $\theta=270^\circ$). Це підтверджує, що при даній частоті відбувається резонансна взаємодія, за якої включення інтенсивно «стискається» середовищем не лише з фронту, а й з боків. На відміну від інших частот, у тилівій зоні з'являється характерне «западання» контуру в тилівій точці ($\theta=0^\circ$), що свідчить про складну інтерференційну картину розсіяних хвиль, які огинають еліпс.

У високочастотних режимах розподіли напружень практично збігаються за своєю геометрією, що вказує на стабілізацію напруженого стану у пост-резонансній області. Тіньовий ефект при $\omega_1=3.3$ знаходиться найближче до контуру включення у правій частині, що ілюструє формування глибокої «акустичної тіні» при коротких довжинах хвиль.

На основі отриманих числових результатів можна зробити наступні висновки. Еліптична форма включення, на відміну від прямокутної, сприяє

самоорганізації напруженого стану без екстремальних піків сингулярності, проте зберігає високий рівень загальної концентрації на фронтальній межі ($\sigma_n \approx 2.8\sigma_0$).

Динамічний пік, що виникає при частоті $\omega_1 = 2.65$ є критичним для даної геометрії, оскільки викликає максимальне силове навантаження на межу контакту фаз. Цей ефект необхідно враховувати при розрахунку адгезійної міцності (опору відшаруванню включення від матриці).

На основі епюр встановлено, що найбільш імовірною зоною початку руйнування контактного шару є лобова частина еліпса ($\theta = 180^\circ$), проте при частоті $\omega_1 = 2.65$ зона ризику розширюється на бічні поверхні включення.

Вплив розміщення включення до фронту хвилі на зміну динамічного напруженого стану досліджено для випадку еліптичного включення з відношенням півосей 2:1. 2D модель задачі представлена на рис. 3.9.

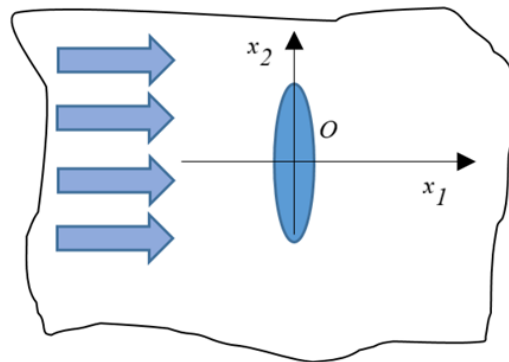


Рис. 3.9. 2D модель задачі.

Значення кільцевих σ_θ (суцільна крива) та нормальних σ_n (пунктирна крива) представлені на рис. 3.10 у декількох точках границі: $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 90^\circ$, $\theta = 135^\circ$ та $\theta = 180^\circ$ для випадку еліптичного включення з відношенням півосей 2:1.

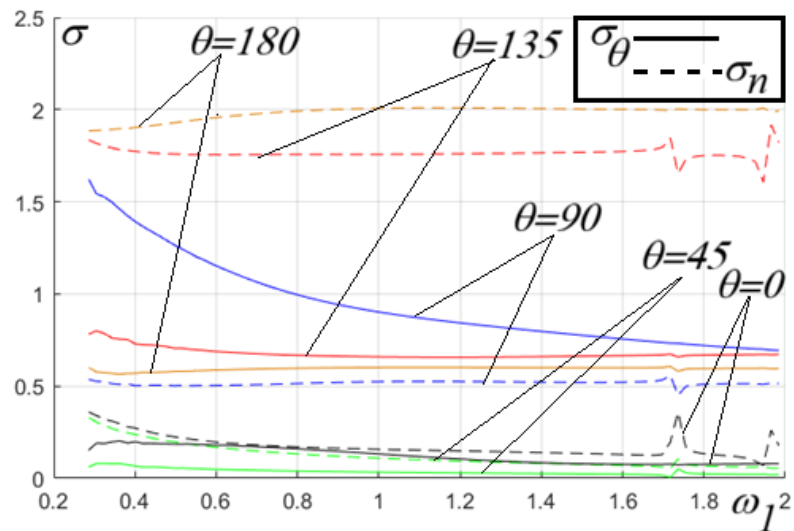


Рис. 3.10. Динамічний напружений стан пластинки з жорстким еліптичним включенням.

З рис. 3.10 видно, що у фронтальній зоні ($\theta=180^\circ$ та $\theta=135^\circ$) на межі пластинки та включення спостерігається переважання нормальних напружень σ_n . Найвищі значення зафіксовано у точці лобового удару при $\theta=180^\circ$ та у точці $\theta=135^\circ$ (пунктирна червона лінія). Значення σ_n у точці $\theta=180^\circ$ стабільно тримаються на рівні $\sim(1.9\ldots 2.0)\sigma_0$ у всьому частотному діапазоні.

Оскільки еліпс орієнтований вертикально, він створює значну перешкоду для поздовжньої хвилі. Матеріал матриці інтенсивно "тисне" на фронтальну поверхню, що призводить до високої концентрації нормальних зусиль, які майже не залежать від частоти. Це свідчить про високу жорсткість системи у напрямку осі Ox_1 .

У цих же точках кільцеві напруження σ_θ значно нижчі $\sigma_\theta \approx (0.6\ldots 0.8)\sigma_0$. Це підтверджує, що для жорстких включень основною причиною можливого руйнування межі контакту є нормальний відрив або стиснення, а не тангенціальний зсув.

З рис. 3.10 видно, що у верхніх точках еліптичного включення ($\theta=90^\circ$) спостерігається аномальне зростання кільцевих напружень. Найбільш

цікаву динаміку демонструє крива розподілу кільцевих напружень у точці $\theta=90^\circ$. При низьких частотах ($\omega_1 \approx 0.3$) тут спостерігаються високі значення кільцевих напружень $\sigma_\theta \approx 1.6\sigma_0$, які стрімко спадають із зростанням частоти до рівня $0.7\sigma_0$.

У точці $\theta=90^\circ$, де є вершина еліпса, тут кривизна границі максимальна. При низьких частотах хвиля намагається «розтягнути» еліпс вздовж його великої осі, що викликає значні кільцеві напруження. Зі зростанням частоти та зменшенням довжини хвилі цей ефект нівелюється за рахунок інтенсивнішої дифракції та «обтікання» вершини хвилею.

У тилувій чи «тіньовій» зоні ($\theta=0^\circ$ та $\theta=45^\circ$) напруження є мінімальними: $\sigma < 0.5\sigma_0$. Вертикальна орієнтація еліпса сприяє формуванню дуже стійкої акустичної тіні безпосередньо за включенням. Це підтверджує ефективність екранування тилувих зон жорстким тілом такої форми.

Резонансні явища та високочастотні стрибки спостерігаються при значеннях частотної характеристики $\omega_1 \approx 1.73$ та $\omega_1 \approx 1.95$. На багатьох кривих рис. 3.10 спостерігаються різкі «зубчасті» аномалії в зоні $\omega_1 \in [1.7; 2.0]$.

Ці вузькосмугові резонанси відповідають моментам, коли довжина падаючої хвилі стає співмірною з великою або малою півосями еліпса. Різкий стрибок нормальних напружень у точці $\theta=45^\circ$ при $\omega_1 \approx 1.73$ вказує на виникнення специфічної моди коливань, що «закручується» навколо включення.

Встановлено, що вертикальна орієнтація еліпса при $H/L=2:1$ призводить до зростання нормальних напружень на фронтальній грані порівняно з горизонтальною конфігурацією, що робить таку систему більш чутливою до нормального тиску хвилі. Ідентифіковано дві критичні зони: точка $\theta=180^\circ$ за нормальними напруженнями, де постійно високий рівень напружень $\sigma_n \approx 2.0\sigma_0$ та вершина еліпса $\theta=90^\circ$ за кільцевими напруженнями у низькочастотному діапазоні.

Виявлені резонансні стрибки напружень при частотах $\omega_1 \approx 1.73$ та $\omega_1 \approx 1.95$ свідчать про те, що навіть для гладких тіл існують «небезпечні» частоти, на яких локальні напруження можуть різко зростати на 15–20%, що може стати причиною миттєвої втрати адгезійної міцності.

При порівнянні напруженого стану еліптичних включень, що розміщені вздовж фронту хвилі (рис. 3.7) та впоперек фронту (рис. 3.10) видно, що еліптичне включення, що розміщене перпендикулярно до напрямку поширення хвилі працює як «жорсткий бар'єр», в той час включення вздовж фронту хвилі — як «обтічне тіло». У вертикального еліпса напруження σ_n на фронті вищі та стабільніші.

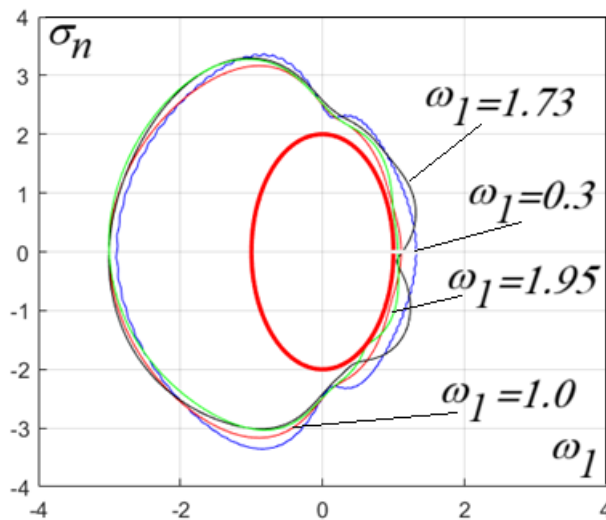


Рис. 3.11. Розподіл нормальних напружень вздовж границі еліптичного включення

Рис. 3.11 контурних епюр просторового розподілу нормальних напружень σ_n для вертикально орієнтованого еліптичного включення наочно демонструє, як геометрія перешкоди та частота падаючої хвилі трансформують зони силового контакту. Аналіз проведено для характерних значень безрозмірної частоти ω_1 , що відповідають різним режимам хвильової взаємодії.

Для всіх частот характерною є виражена концентрація напружень на фронтальній (лівій) частині включення, що безпосередньо сприймає удар падаючої хвилі. Завдяки вертикальній орієнтації еліпса та значній кривизні його вершин у $\theta=90^\circ$ та $\theta=270^\circ$, зони високої напруженості охоплюють не лише лобову точку, а й значну частину бічних поверхонь, що відрізняє цей випадок від горизонтально орієнтованих об'єктів.

У низькочастотному режимі при $\omega_1=0.3$ спостерігається найбільша просторова розгалуженість епюри. Для цього випадку крива має найбільшу амплітуду на фронтальній дузі та найбільш плавний перехід до бічних граней. Велика довжина хвилі зумовлює «всебічне» охоплення перешкоди, через що напруження у тилівій зоні для $\theta=0^\circ$ залишаються вищими порівняно з іншими частотами. Тому у квазістатичному режимі жорстке нерухоме включення працює як масивний бар'єр, що спричиняє рівномірне підсилення тиску по всьому фронту.

При $\omega_1=1.0$ настає режим стабілізації. Зі зростанням частоти від $\omega_1=0.3$ до $\omega_1=1.0$ спостерігається певне «стиснення» контуру напружень. При цьому епюра демонструє формування чіткої акустичної тіні на правій стороні еліпса, де напруження практично дорівнюють нулю. Це свідчить про перехід системи до режиму вираженої дифракції, де геометрія включення починає ефективно екранувати тилу зону матриці.

Резонансні режими відповідають частотам $\omega_1=1.73$ та $\omega_1=1.95$. У цих режимах граничні контури візуалізують виявлені раніше частотні аномалії. При $\omega_1=1.73$ на епюрі чітко видно появу додаткових локальних виступів у бічних зонах. Це підтверджує виникнення резонансної взаємодії, за якої енергія розсіяного поля фокусується у точках перегину контуру.

При $\omega_1=1.95$ профіль напружень стає більш витягнутим вздовж вертикальної осі. Це вказує на те, що при вищих частотах вертикальний розмір еліпса відіграє домінуючу роль у формуванні розсіяного поля, створюючи зони інтенсивного стиснення на вершинах включення.

На основі числових розрахунків встановлено, що вертикальна орієнтація еліптичного включення сприяє ширшій локалізації напружень вздовж фронтальної поверхні порівняно з подовженими прямокутними включеннями, що мінімізує ризик сингулярного руйнування в одній точці, але створює значне сумарне навантаження на контактну межу. Виявлено тенденцію до зменшення «лобового» тиску при зростанні частоти, що супроводжується формуванням глибокої зони тіні. Проте наявність резонансних частот ($\omega_1=1.73$) призводить до нелінійного перерозподілу зусиль із виникненням додаткових максимумів на бокових ділянках.

На основі контурного аналізу встановлено, що найбільш вразливими ділянками для вертикального еліпса є сектори для $\theta \in [135^\circ; 225^\circ]$ (фронтальна дуга) та вершини еліпса при низьких частотах, де спостерігається поєднання високих нормальних та кільцевих напружень.

На відміну від прямокутного включення, де є 4 гострі піки напружень у кутових точках, у еліпса напруження розподілені «гладко», але їхня абсолютна величина залишається критичною. Це ілюструє переваги та недоліки використання гладких включень у композитах.

3.4. Напружений стан пластинчастих елементів з рухомими недеформівними включеннями

Розширення математичної моделі на випадок рухомого недеформівного включення дозволяє врахувати інерційну взаємодію між неоднорідністю та пружною матрицею. У даній постановці переміщення включення визначаються інтегральним силовим впливом дифрагованого поля, що призводить до самоузгодженої системи рівнянь щодо поля переміщень середовища та вектору амплітуди руху жорсткого тіла.

Така модель найбільш адекватно описує поведінку зернистих композитів та масивних заглиблених структур за дії динамічних

навантажень. Врахування маси об'єкта вносить якісні зміни у розподіл динамічних напружень, зокрема спричиняє їх перерозподіл із фронтальної зони у бічні сектори, що обумовлено інерційним спротивом включення та фазовим зсувом між коливаннями фаз. Отримані результати є фундаментальною базою для оцінки циклічної міцності контактних шарів у високотехнологічних неоднорідних матеріалах."

Розглянемо пружну ізотропну пластину –матрицю, з пружними сталими λ , μ та густиною ρ . У пластину жорстко впає недеформівне (абсолютно жорстке) включення скінченної маси M .

На відміну від нерухомо закріпленого об'єкта, дане включення має можливість здійснювати поступальні переміщення під дією падаючого хвильового поля.

Дослідимо випадок, коли на систему падає плоска гармонічна поздовжня хвиля, що поширюється вздовж осі Ox_1 . Взаємодія хвилі з включенням спричиняє виникнення розсіяного поля хвиль u_{sc} та коливальний рух включення як цілого з невідомою амплітудою U .

Поведінка середовища описується рівняннями руху Нав'є-Коші у просторі трансформант. Рух включення описується другим законом Ньютона у векторній формі:

$$-M\omega^2 \mathbf{U} = \mathbf{F},$$

де ω — колова частота, $\mathbf{U}$ — вектор амплітуди переміщення включення, $\mathbf{F}$ — результуюча сила, що діє на включення з боку матриці [72]:

$$\mathbf{F} = \oint_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma,$$

де Γ — контур включення, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напружень, $\mathbf{n}$ — зовнішня нормаль до контуру.

Для розв'язання задачі необхідно задовольнити умови повного механічного контакту на межі розподілу фаз на Γ . Оскільки включення недеформівне, вектор переміщень точок матриці на границі повинен збігатися з вектором переміщення включення як твердого тіла [45]:

$$u(x, \omega)|_{x \in \Gamma} = \mathbf{U}(\omega).$$

Розсіяне поле

$$\mathbf{u}_{sc} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{inc}$$

задовольняє умовам випромінювання Зоммерфельда (1.10)- (1.11).

На рис. 3.12 наведено розподіл абсолютних величин нормальних напружень на гранці прямокутного недеформівного жорсткого рухомого включення для $L/H=5:1$ для декількох значень частотної характеристики $\omega_1=0.4, 0.5, 1.0, 1.5$. При числових розрахунках було вибрано, що густина ρ_1 включення у 10 разів більша, ніж густина матриці.

Для порівняння проведені числові розрахунки для такого ж жорстко закріпленого включення для таких же частотних характеристик, результати яких наведені на рис. 3.13.

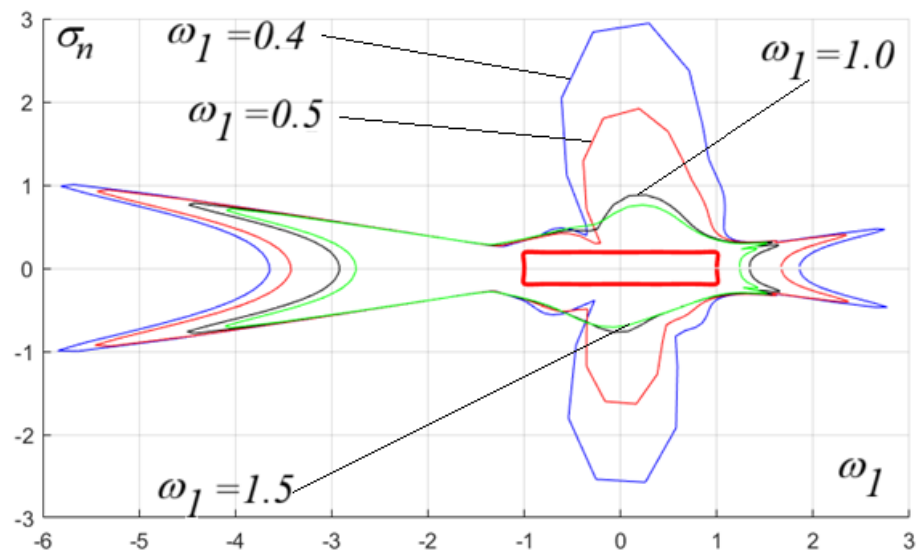


Рис. 3.12. Розподіл напружень вздовж прямокутного рухомого включення

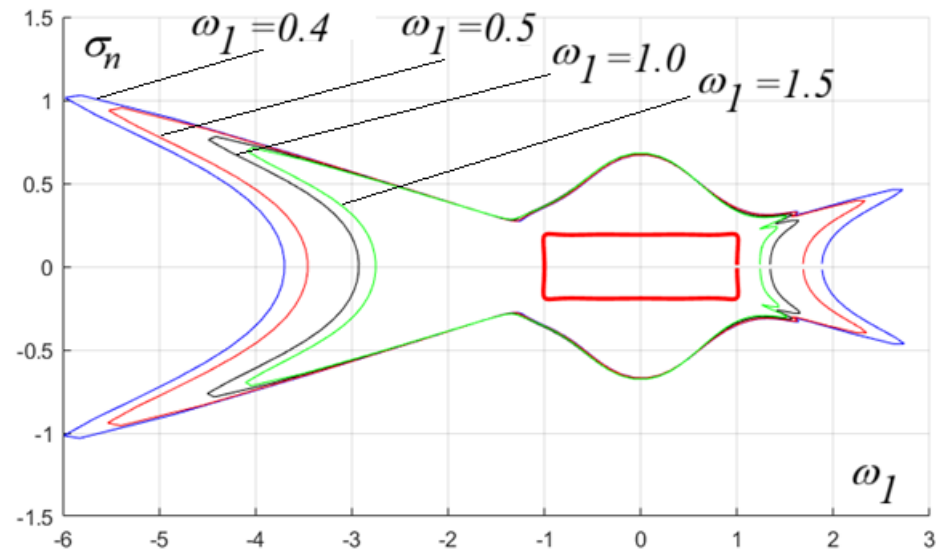


Рис. 3.13. Розподіл напружень вздовж прямокутного нерухомого включення

Порівняння результатів, наведених на рис. 3.12 та 3.13 дозволяє виявити фундаментальну різницю в механізмах формування динамічного напруженого стану (НДС) для випадків жорсткої фіксації та вільного інерційного руху включення. Врахування маси включення: $\rho_{l(incl)} = 10\rho_{(matr)}$ вносить суттєві корективи у картину дифракції хвиль у середовищі.

Для нерухомого включення (рис. 3.13) характерним є класичний прояв «лобового опору». Максимальні значення напружень зосереджені на передній (лівій) грані. Контур напружень має форму гострої кривої, що свідчить про значне стиснення матриці, яка впирається у нерухому перешкоду. Максимальна концентрація спостерігається при низькій частоті ($\omega_1 = 0.4$). Для рухомого включення (рис. 3.12) проявляється ефект інерційного розвантаження. У центрі фронтальної грані напруження суттєво нижчі, ніж у нерухомому випадку. Оскільки включення має можливість зміщуватися, воно частково «поступається» падаючій хвилі, що знижує прямий контактний тиск у лобовій точці. Проте на кутах фронтальної грані зберігаються гострі піки напружень, обумовлені геометричною сингулярністю.

Напруження на верхній та нижній гранях нерухомого включення (рис. 3.13) є мінімальними і розподілені відносно рівномірно. Основна енергія хвилі витрачається на подолання лобового опору. Для рухомого включення розподіл напружень тут має суттєву відмінність. На епюрах спостерігаються потужні поперечні «пелюстки» напружень, спрямовані вертикально. При низьких частотах ($\omega_1=0.4$ та $\omega_1=0.5$) ці бічні максимуми значно перевищують лобові напруження.

Це пояснюється тим, що масивне рухоме тіло – включення з густиною $\rho_1=10\rho$ під дією хвилі починає коливатися як єдине ціле. При цьому воно змушене «розштовхувати» навколишнє пружне середовище в поперечному напрямку, щоб просунутися вперед. Велика інерція включення призводить до інтенсивного стиснення/розтягу матриці саме на бічних (горизонтальних) поверхнях контакту.

При низьких частотах $\omega_1=0.4$ для рухомого включення є найбільш напруженим у поперечному напрямку. Велика довжина хвилі дозволяє ефективно розгойдувати масивне тіло. При високих частотах ($\omega_1=1.5$) картина НДС рухомого включення починає поступово наближатися до картини нерухомого. Бічні пелюстки зменшуються, а напруження знову концентруються на фронтальній частині.

На основі числових розрахунків можна встановити, що при високих частотах інерційний спротив масивного тіла стає настільки великим, що воно фактично поводить себе як нерухома перешкода («завмирає» через велику масу), і хвиля дифрагує на ньому як на нерухомому об'єкті.

В обох випадках на правій (тиловій) грані напруження мінімальні. Однак, для нерухомого включення форма епюри є більш витягнутою, тоді як для рухомого вона більш стиснута до контуру, що вказує на складнішу інтерференцію розсіяних хвиль навколо рухомого об'єкта.

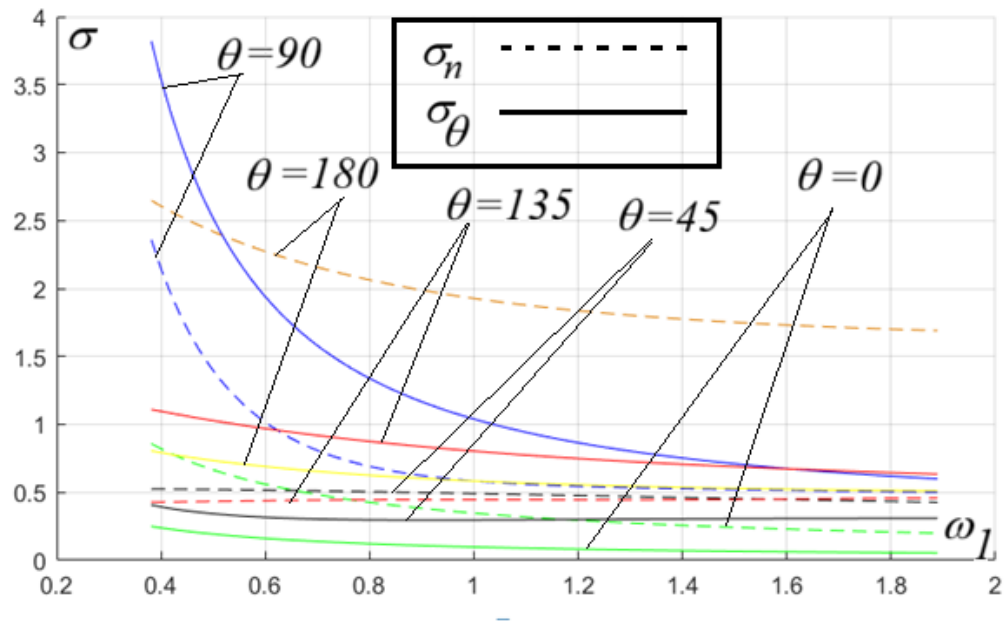


Рис. 3.14. Динамічний напружений стан пластинчастого елемента з жорстким рухомим прямокутним включенням.

На рис. 3.14 зображено залежності амплітуд нормальних σ_n (пунктирні лінії) та кільцевих σ_θ (суцільні лінії) напружень від безрозмірної частоти ω_1 для випадку рухомого абсолютно жорсткого включення.

Отримані результати демонструють специфічну фізику інерційної взаємодії включення з матрицею, що суттєво відрізняє цей випадок від нерухомої перешкоди.

Найбільш вираженою особливістю графіка є поведінка кільцевих напружень σ_θ при $\theta=90^\circ$. У низькочастотній області ($\omega_1 \approx 0.4$) спостерігається максимальний сплеск кільцевих напружень, що сягає значень $\sigma_\theta \approx 3.8 \sigma_0$. Це пояснюється тим, що включення рухоме, і під дією довгої хвилі воно здійснює поступальні коливання. При цьому воно інтенсивно «розсуває» матеріал матриці в поперечному напрямку нормально до напрямку руху. Це спричиняє значні кільцеві розтягувальні/стискальні зусилля саме на «екваторі» включення.

Зі зростанням частоти ця крива стрімко спадає, що свідчить про нівелювання інерційного впливу за рахунок переходу до режиму короткохвильової дифракції.

Нормальні напруження у точці $\theta=180^\circ$ характеризуються високими, але стабільнішими значеннями: при низьких частотах $\sigma_n \approx 2.6\sigma_0$. Це значення нижче, ніж було для нерухомого включення, оскільки рухоме тіло частково «поступається» хвилі, зменшуючи лобовий тиск. Крива напружень у точці $\theta=180^\circ$ демонструє монотонне спадання, що підтверджує, що для рухомих тіл основна небезпека руйнування контактного шару за нормальними напруженнями зміщується у бік низьких частот: вібраційних режимів.

Криві для точок $\theta=135^\circ$ та $\theta=45^\circ$ займають проміжне положення. Нормальні напруження σ_n у точці $\theta=45^\circ$ практично не залежать від частоти, залишаючись на рівні $\approx 0.5\sigma_0$. Це вказує на наявність «вузлових» зон на контурі, де динамічний стан є найбільш стабільним.

У точці $\theta=0^\circ$ відбувається формування акустичної тіні. Ці точки відповідають тилувій частині включення. Значення напружень тут є мінімальними: $\sigma < 0.5\sigma_0$ і швидко прямують до нуля зі зростанням частоти. Це підтверджує, що рухоме жорстке тіло, попри свої коливання, залишається ефективним екраном, створюючи глибоку зону тіні за собою.

На відміну від випадку нерухомого включення, де нормальні напруження зазвичай домінують, для рухомого об'єкта при низьких частотах кільцеві напруження σ_θ виявляються вищими за нормальні σ_n .

«Дослідження динамічного напруженого стану рухомого абсолютно жорсткого включення дозволило встановити визначальну роль інерційної складової у формуванні полів напружень. Встановлено, що на низьких частотах ($\omega_1 < 0.8$) домінуючим чинником є кільцеві напруження σ_θ , пік яких локалізується у бічних точках контуру ($\theta=90^\circ$) і сягає значень $\sigma_\theta \approx 3.8\sigma_0$, що суттєво перевищує лобовий тиск.

Виявлений ефект пояснюється механізмом поперечного витіснення матеріалу матриці під час поступального руху включення під дією падаючої хвилі. Водночас нормальні напруження на фронтальній межі ($\theta=180^\circ$) демонструють нижчу інтенсивність порівняно з нерухомими перешкодами, що зумовлено зменшенням лобового опору за рахунок рухливості тіла.

Отримані результати вказують на те, що для вільно розташованих включень (наприклад, армуючих частинок у композиті) найбільш критичним режимом є низькочастотне навантаження, яке може спровокувати руйнування матриці внаслідок надмірних кільцевих зусиль у бічних секторах контакту фаз.

3.5. Висновки до розділу 3

У даному розділі на основі розробленої методики проведено комплексне дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів з абсолютно жорсткими нерухомими та рухомими включеннями різної геометричної форми: прямокутної та еліптичної, за дії падаючої хвилі стиску. Для числової реалізації використовувалася комбінація методу механічних квадратур, методу колокації, методу конформних відображень та методу розвитку у тригонометричні ряди. Параметризація границь включень здійснювалася тригонометричним представленням контуру у комплексній формі.

Для пластинчастих елементів з прямокутними включеннями проведено дослідження впливу відношення сторін L/H на характер розподілу нормальних та кільцевих напружень вздовж границі матриця–включення. Встановлено пряму залежність між довжиною включення та рівнем концентрації динамічних напружень: збільшення довжини включення у 1,56 рази супроводжується нелінійним зростанням нормальних напружень у фронтальних кутових зонах — від $\sigma_r \approx 0,95\sigma_0$ до $\sigma_r \approx 1,35\sigma_0$ у низькочастотному режимі. Виявлено, що для більш подовжених включень

кутова сингулярність проявляється значно інтенсивніше, що робить кутові точки фронтальної грані критичними зонами зародження тріщин. При високочастотних режимах навантаження динамічна реакція системи стабілізується та стає менш чутливою до зміни частоти, що відповідає переходу до режиму короткохвильової дифракції.

Для пластинчастих елементів з еліптичними включеннями досліджено два випадки орієнтації включення відносно фронту падаючої хвилі — вздовж та впоперек напрямку поширення. Встановлено, що максимальні нормальні напруження у фронтальній точці $\theta=180^\circ$ досягають $\sigma_n \approx 2,8\sigma_0$ для горизонтальної орієнтації та $\sigma_n \approx 2,0\sigma_0$ — для вертикальної, причому в останньому випадку високий рівень напружень зберігається у всьому дослідженому частотному діапазоні. Виявлено динамічні аномалії — резонансні стрибки напружень при частотах $\omega_1 \approx 2,65$ (горизонтальна орієнтація), $\omega_1 \approx 1,73$ та $\omega_1 \approx 1,95$ (вертикальна орієнтація), за яких локальні напруження зростають на 15–20%, що є критичним для адгезійної міцності контактної межі.

Порівняльний аналіз результатів для включень різної форми показав, що еліптична форма, на відміну від прямокутної, забезпечує плавний розподіл напружень вздовж контуру без гострих сингулярних піків у кутових точках, однак загальний рівень нормального тиску на фронтальній межі залишається високим. Відсутність геометричних сингулярностей робить еліптичне включення більш ефективним елементом конструкції з точки зору втомної міцності.

Водночас встановлено, що найбільш небезпечними концентраторами напружень за дії поздовжніх хвиль є видовжені прямокутні включення з великим відносним подовженням, оскільки вони створюють умови для максимального силового опору динамічному деформуванню матриці.

Показано, що врахування рухливості жорсткого включення призводить до якісної перебудови поля динамічних напружень. Натомість для нерухомих елементів, таких як зварні шви, ребра жорсткості, головним

чинником руйнування залишається фронтальний тиск хвилі. Встановлено, що врахування маси жорсткого включення призводить до радикального перерозподілу динамічних напружень. Доведено, що для масивних рухомих включень у низькочастотному діапазоні критичними зонами є не лобові, а бічні поверхні контакту, де виникають аномальні максимуми напружень через інерційне витіснення матеріалу матриці. Виявлено ефект частотної стабілізації: при збільшенні частотного параметра $\omega_1 > 1.5$ відмінності між рухомим та нерухомим включенням нівелюються, оскільки інерційний спротив маси перетворює рухомий об'єкт на кінематично закріплену перешкоду.

Отримані дані підтверджують необхідність диференційованого підбору розрахункової моделі залежно від реальних умов закріплення елемента в конструкції, оскільки ігнорування рухливості включення може призвести до помилкового визначення зон найбільш імовірного відшарування та руйнування матриці.

Основні наукові результати розділу, які визначають новизну дисертаційної роботи, опубліковані в роботах [7, 10, 26, 41].

РОЗДІЛ 4

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ З СИСТЕМОЮ ВКЛЮЧЕНЬ

Сучасний розвиток машинобудування та будівництва висуває дедалі вищі вимоги до надійності та довговічності тонкостінних пластинчастих елементів, що складають основу критичних конструкцій. Найбільш вразливими ділянками таких елементів традиційно є зони з'єднання деталей, зокрема зварювальні шви, які докорінно змінюють однорідність силового поля конструкції. Реальні зварні з'єднання характеризуються складною мікроструктурою, наявністю зон термічного впливу та залишковими напруженнями, що робить їх пряме чисельне моделювання надзвичайно ресурсомістким. У зв'язку з цим виникає потреба у розробці аналітично-числових розрахункових моделей, здатних прогнозувати поведінку конструкції від дії різних типів навантаження, особливо, динамічних та імпульсних впливів.

Ефективним підходом до вирішення цієї задачі є перехід від детального опису геометрії шва до його представлення у вигляді жорсткого включення у пружній матриці пластинчастого елементу. Такий підхід до моделювання можна використовувати, оскільки модуль пружності та межа текучості матеріалу шва та прилеглих зон суттєво перевищують аналогічні показники основного металу, створюючи ефект локального "армування". Жорстке включення ідеально відтворює кінематичне обмеження деформацій, яке виникає в реальному зварному вузлі, дозволяючи зосередити увагу на головному чиннику руйнування — концентрації напружень на межі розподілу середовищ.

Особливо важливим є дослідження взаємодії кількох таких включень, оскільки в реальних об'єктах зварювальні шви часто розташовані близько один до одного, утворюючи складні топологічні системи. Симуляційний аналіз взаємодії цих елементів дає змогу виявити ефекти взаємного

підсилення напружень, які неможливо зафіксувати при розгляді поодиноких дефектів чи включень. Використання концепції жорстких включень дозволяє уніфікувати розрахункові схеми для різних типів зварювання, від точкового до переривчастого шва, зводячи їх до чітко визначених граничних задач механіки.

Таким чином, актуальність дослідження зумовлена необхідністю створення швидких та точних алгоритмів оцінки міцності пластинчастих систем із неоднорідностями. Результати симуляційного моделювання можна використовувати для теоретичного обґрунтування оптимізації розташування зварних вузлів з метою мінімізації ризиків крихкого руйнування. Розуміння механізмів перерозподілу зусиль між жорсткими включеннями дозволить значно підвищити експлуатаційну безпеку технічних об'єктів у авіаційній та суднобудівній галузях.

4.1. Постановка задачі

Аналіз існуючих публікацій свідчить, що попри значні успіхи в розробці числових методів для аналізу напружено-деформованого стану елементів з одиничними включеннями, питання динамічної взаємодії систем жорстких неоднорідностей у тонкостінних елементах залишається розв'язаним лише частково. Більшість класичних моделей обмежуються статичним навантаженням або канонічними формами включень, що не дозволяє повною мірою врахувати специфіку реальних зварних вузлів як складних топологічних систем.

Тому метою даного розділу дисертаційного дослідження є розвиток та поширення попередньо розробленого алгоритму симуляційного аналізу, який базується на концепції представлення зварних швів як жорстких включень у межах гранично-елементного підходу, що описаний у розділі 2 та реалізований у розділі 3 для випадку одного включення.

Це дозволяє не лише уніфікувати розрахункові схеми для різних типів з'єднань, а й детально дослідити ефекти взаємного підсилення напружень при їх близькому розташуванні. Такий підхід забезпечує високу обчислювальну ефективність при аналізі нестационарних процесів, створюючи теоретичне підґрунтя для оптимізації зварних конструкцій з метою запобігання їх крихкому руйнуванню.

Розглянемо пластинчастий елемент, що містить систему жорстких довільно розмішених включень (рис. 4.1), що є моделями зварних швів та паайкових з'єднань. Розглядається випадок, коли на границі пластинчастого елемента та включення відсутні переміщення (рис. 4.1).

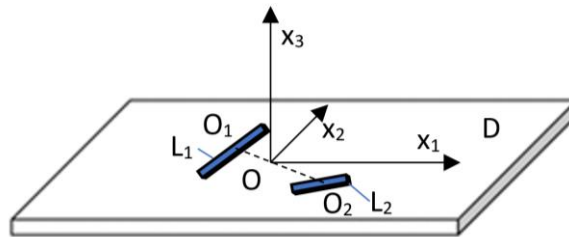


Рис. 4.1. Модель задачі

Позначимо через L_1 границю контуру одного з включень, а через L_2 границю контуру іншого включення. Область, яку займає пластинка, позначено через D . Віднесемо пластинчастий елемент до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, яку розмістимо у середині відрізка O_1O_2 , що з'єднує центри ваги включень (рис. 4.1). Граничні умови задачі для випадку відсутності переміщень у включеннях відповідно до [] записуються у вигляді:

$$u_i|_{L_j} = u_i^{(j)} = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (4.1)$$

Тут $u_1^{(j)}$, $u_2^{(j)}$ – відповідно переміщення точок на границі пластинка-включення в напрямку осей Ox_1 та Ox_2 .

4.2. Методика розрахунку

Використаємо запропонований у розділі 2 підхід, адаптувавши його для випадку дослідження двозв'язних областей. Позначимо через L – сумарний граничний контур:

$$L = \bigcup_j L_j.$$

Інтегральне представлення переміщень другої основної задачі у випадку двозв'язних областей запишемо у вигляді [8]:

$$u_i(x_1, x_2) = - \int_L u_j(x_1^0; x_2^0) \cdot P_{ji}^*(x_1; x_2; x_1^0; x_2^0) ds, \quad (4.2)$$

де P_{kj}^* — фундаментальні функції, побудовані у розділі 2 роботи. Для розглянутого двовимірного випадку значення індексів вибиралися $k, j = 1, 2$.

Використовуючи розроблений у розділі 2 алгоритм, побудуємо для розв'язання задачі систему інтегральних рівнянь. Для цього задовольнимо граничні умови (4.1) на кожному з граничних контурів, використовуючи інтегральні представлення для переміщень (4.2). Дослідивши нерегулярність підінтегральних функцій та встановивши їх особливості шляхом виділення нерегулярних складових та використавши формули Племеля-Сохоцького [61] при граничному переході, запишемо систему інтегральних рівнянь задачі у матричній формі:

$$C \cdot U + \int_L F \cdot U ds = P, \quad (4.3)$$

де $C = \{c_{ij}\}$ - матриця позаінтегральних коефіцієнтів, $U = \{u_i^{(k)}\}$ – матриця невідомих переміщень, $P = \{P_{ij}\}$ – матриця впливу заданого навантаження, $F = \{f_{ij}\}$ – матриця фундаментальних функцій.

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь (4.3) використано числовий алгоритм, що ґрунтується на числовому підході, розробленому у розділі 2.

Для визначення напружень на границі матриця - включення використовувалися отримані у [9] залежності у інтегральній формі:

$$\sigma_{ij} = \int_L H_{ik} u_k ds,$$

причому функції H_{ij} є відомими. Розрахунок напружень проводився числово у відповідних точках границь включень.

4.3. Дифракційні ефекти та явища екранування в системі жорстких включень

Розглянемо задачу про динамічне деформування пружного ізотропного пластинчастого елемента скінченної товщини, що містить систему включень. Позначимо через D область, яку займає пластинчастий елемент у тривимірному евклідовому просторі.

Для опису хвильового процесу введемо декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким чином, що серединна площина пластинки збігалася з площиною Ox_1x_2 , вісь Ox_3 спрямуємо нормально до її поверхні.

Геометрія задачі передбачає наявність у середині пластинки системи сторонніх включень (дефектів), які мають відмінні від матриці фізико-механічні характеристики (модуль зсуву μ , коефіцієнт Пуассона ν та густину ρ). 2D модель задачі для випадку колінеарних включень представлено на рис. 4.2.

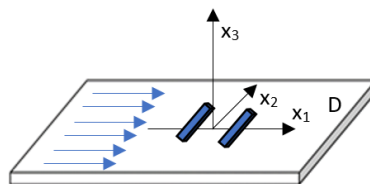


Рис. 4.2. 2D модель навантаження.

Розглянемо випадок, коли на пластинку діє зовнішнє динамічне навантаження у вигляді гармонічної за часом падаючої хвилі, що поширюється у додатному напрямку осі Ox_1 . Для випадку дослідження впливу «падаючої» хвилі стиску, потенціали задавалися у вигляді [8, 10]:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \omega_1 x_1)}, \Psi = 0,$$

де ω - частота, $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $\Phi_0 = \frac{\rho}{\omega^2}$.

Взаємодія цієї хвилі з включеннями призводить до виникнення вторинного розсіяного поля хвиль.

Актуальність та практична значущість дослідження взаємодії пружних хвиль із системою включень у пластинчастих елементах конструкцій зумовлена наступними аспектами.

По-перше, використання розробленого підходу при неруйнівному контролі та дефектоскопії. Пластини є основними конструктивними елементами в авіа- та суднобудуванні. Аналіз амплітудно-частотних характеристик розсіяних хвиль дозволяє ідентифікувати наявність внутрішніх дефектів, порожнин або сторонніх включень на ранніх стадіях їх виникнення, що є критичним для запобігання катастрофічним руйнуванням.

По-друге, результати можуть бути застосовані до опису механічної взаємодії композитних матеріалів. Сучасні високонавантажені конструкції часто виготовляються з армованих композитів. Моделювання включень як підсилюючих елементів дозволяє оцінити динамічну міцність матеріалу та дослідити концентрацію напружень поблизу меж розподілу фаз під дією вібраційних навантажень.

По-третє, при розробці акустичних метаматеріалів має враховуватися розподіл напружень та деформацій у середовищі, що може бути реалізоване на основі запропонованого підходу. Дослідження проходження хвиль крізь систему періодично розташованих включень дозволяє проектувати матеріали з керованими акустичними властивостями, що використовується для ефективної звуко- та віброізоляції в інженерних спорудах.

Числові розрахунки проведені для випадку, коли включення мають прямокутну форму. Для параметризації границі контуру прямокутних включень L_j використовувалося конформне відображення [81]:

$$t = g(\theta) = a(e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{3i\theta} + a_3 e^{5i\theta} + \dots), \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

де сталі $a_1, a_2, \dots$ визначають співвідношення між сторонами прямокутного включення, а стала a впливає на його довжину.

Приймалося, що включення є абсолютно жорсткими та нерухомо закріплені.

4.3.1. Випадок послідовних включень.

Проведемо числовий розрахунок для випадку послідовно розміщених включень у пластинчастому елементі та дослідимо зміну напруженого стану пружного середовища. На рис. 4.4 наведено результати числових розрахунків нормалізованих радіальних σ_r та кільцевих σ_θ напружень у точках A та B границь включень для випадку системи прямокутних включень, що розміщені послідовно вздовж фронту хвилі (рис. 4.3).

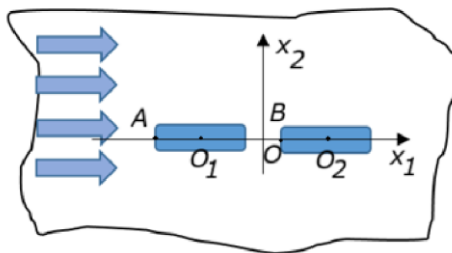


Рис. 4.3. Геометрія пластинчастого елемента

При розрахунках враховувалося, що відстань між центрами включень O_1O_2 дорівнює довжині включень. Відношення сторін включення вибиралося 1:3.2. При описі границь контурів включення використовувалося представлення у вигляді тригонометричного ряду у

комплексній формі:

$$g(\theta) = a \left(e^{-i\theta} + \sum_k \alpha_k e^{i\theta k} \right).$$

При цьому коефіцієнти у конформному відображенні були такими:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{8}, a_5 = -\frac{3}{80}, a_7 = -\frac{3}{896}, a_9 = \frac{5}{768}.$$

Інші коефіцієнти у конформному відображенні дорівнювали нулю:

$$a_i = 0.$$

Використання конформного відображення для опису границі включення дозволяє отримати представлення з закругленими кутовими точками, що є зручним для числових розрахунків для уникнення концентрації напружень у цих точках.

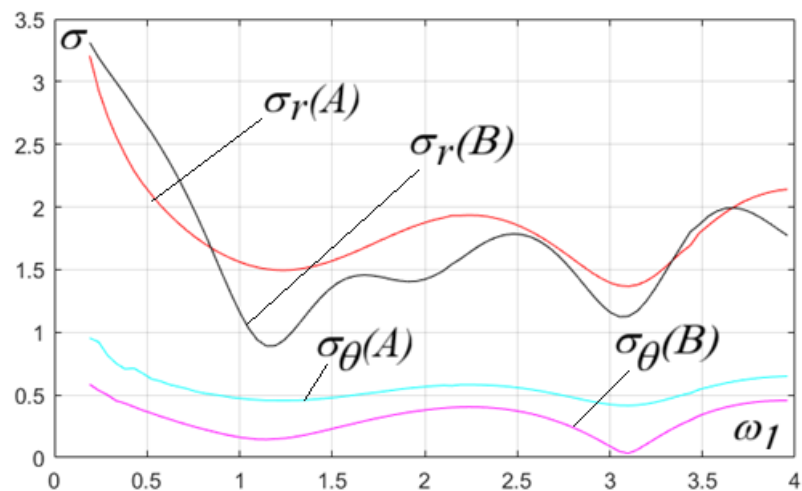


Рис. 4.4. Розподіл напружень у пластинчастому елементі

Аналіз динамічної взаємодії плоскої пружної хвилі з системою двох абсолютно жорстких нерухомо закріплених включень дозволив встановити наступні закономірності. Встановлено, що умова нерухомості перешкод призводить до значної концентрації нормальних напружень σ_r , амплітуда яких у низькочастотній області $\omega_1 < 0.5$ досягає значень, що у 3-3.2 рази перевищують амплітуду падаючого поля.

Порівняння значень напружень у фронтальних точках першого та другого включень виявило наявність частотно-залежного екранування. Зокрема, у діапазоні частот $1.0 < \omega_I < 3.0$ спостерігається зниження амплітуди напружень σ_r у точці В порівняно з точкою А, що зумовлено дифракцією хвилі на першій перешкоді. Проте, характерною особливістю є складний коливальний характер кривої розподілу радіальних напружень $\sigma_r(B)$, що свідчить про конструктивну інтерференцію дифрагованих хвиль у міжвключеному просторі на певних частотах.

Кільцеві напруження σ_θ мають суттєво меншу інтенсивність порівняно з нормальними, що підтверджує основну роль нормального тиску у процесах можливого руйнування межі контакту матриці з жорстким включенням. Виявлений ефект мінімізації напружень $\sigma_\theta(B)$ при частоті $\omega_I \approx 3.1$ вказує на можливість керування динамічним станом системи шляхом підбору частотних характеристик зовнішнього впливу.

Порівняння нормальних напружень $\sigma_r(A)$ та $\sigma_r(B)$ у низькочастотній області ($\omega_I < 0.8$) демонструє парадоксальний на перший погляд ефект — напруження у точці В вищі, ніж у точці А. Це пояснюється тим, що при великих довжинах хвиль система включень працює як єдиний кластер. Хвиля, проходячи через вузький проміжок між точками O_1 та O_2 , зазнає перефокусування, що призводить до зростання тиску на фронтальну частину другого включення.

У середньочастотному діапазоні ($1.0 < \omega_I < 2.5$) максимальні значення нормальних напружень виникають у точці А. Перше включення приймає на себе основний удар хвилі. Крива, що описує зміну напружень $\sigma_r(B)$ має виражений осцилюючий характер з локальними мінімумами, зокрема, при $\omega_I \approx 1.2$. Це результат дифракційної тіні: перше включення екранує друге, а коливання напружень у точці В викликані хвилями, що огинають перше включення та інтерферують у просторі між ними.

Чіткі піки та спади на радіальних напружень у точці В $\sigma_r(B)$ вказують на те, що точка В є критично залежною від відстані між включеннями та

довжини хвилі.

Для детального аналізу локального напруженого стану було обрано характерні значення частотного параметра ω_l , що відповідають різним режимам дифракції: квазістатичному ($\omega_l = 0.4$), режиму інтенсивного екранування ($\omega_l = 1.2$) та режиму конструктивної інтерференції ($\omega_l = 2.5, \omega_l = 3.1$). Для цих значень розраховані абсолютні значення радіальних напружень на лівому (рис. 4.5) та правому (рис. 4.6) включеннях.

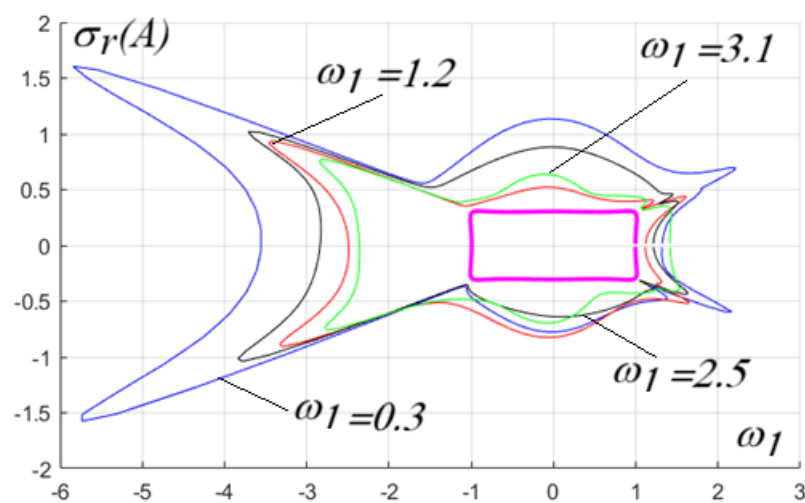


Рис. 4.5. Абсолютні значення радіальних напружень на лівому включенні.

На рисунку 4.5 зображено просторовий розподіл амплітуди нормальних напружень $\sigma_r(A)$ по периметру абсолютно жорсткого прямокутного включення. Візуалізація дозволяє оцінити не тільки величину напружень, а й зони їхньої максимальної концентрації залежно від частоти падаючої хвилі.

Рис. 4.5 демонструє класичний ефект «лобового опору» та концентрації напружень на кутах. З рисунку видно виражену асиметрію напруженого стану, що характерно для взаємодії падаючої хвилі з нерухомою жорсткою перешкодою.

Найбільші значення напружень зосереджені на лівій грані

включення, яка безпосередньо приймає на себе енергію падаючої хвилі. Максимальна амплітуда спостерігається при низькій частоті $\omega_1=0.3$. Це пояснюється тим, що при великих довжинах хвиль жорстке включення працює як масивна стіна, створюючи максимальний опір руху середовища.

На рис. 4.5 чітко видно гострі піки розподілу напружень у кутових точках прямокутного включення, що демонструє класичний прояв концентрації напружень в околі кутових точок жорсткого включення.

Саме в цих зонах (лівий верхній та лівий нижній кути) існує найбільша ймовірність зародження тріщин у матриці або відшарування включення. Найгостріші піки відповідають низькій частоті $\omega_1=0.3$, тоді як із зростанням частоти ця концентрація істотно зменшується

Аналіз результатів рис. 4.5 демонструє, що із зростанням частоти ω_1 загальний рівень напружень на включенні зменшується.

Крива для $\omega_1=3.1$ знаходиться найближче до контуру включення. Це свідчить про те, що при коротких довжинах хвиль (високих частотах) енергія хвилі інтенсивніше дифрагує (огинає) перешкоду або розсіюється, створюючи менший сумарний тиск на фронтальну поверхню порівняно з квазістатичним режимом.

На правій (тиловій) грані включення напруження є мінімальними для всіх частот. Це підтверджує формування «власної тіні» об'єкта, де взаємодія з основним полем падаючої хвилі мінімальна.

Результати розрахунку нормальних напружень σ_r на межі розподілу фаз для першого включення дозволили виявити домінуючу роль фронтальної поверхні у процесі динамічного деформування. Встановлено, що для абсолютно жорсткого нерухомого включення характерною є максимальна концентрація напружень на стороні, що є найближчою до падаючої хвилі, причому пікові значення локалізуються в околі кутових точок.

Виявлено зворотну залежність амплітуди напружень від частотного параметра ω_1 : найбільша інтенсивність силового впливу спостерігається при

низькочастотному режиму. Зі зростанням частоти до $\omega_1 = 3.1$ спостерігається ефект "динамічного розвантаження" фронтальної грані, що зумовлено зміною характеру дифракції пружних хвиль.

Отриманий характер розподілу з вираженими кутовими максимумами вказує на те, що критичними зонами з точки зору міцності конструкції є саме кути фронтальної грані включення, де виникає значна сингулярність напруженого стану, здатна призвести до руйнування адгезійного контакту або зародження втомних тріщин у матриці.

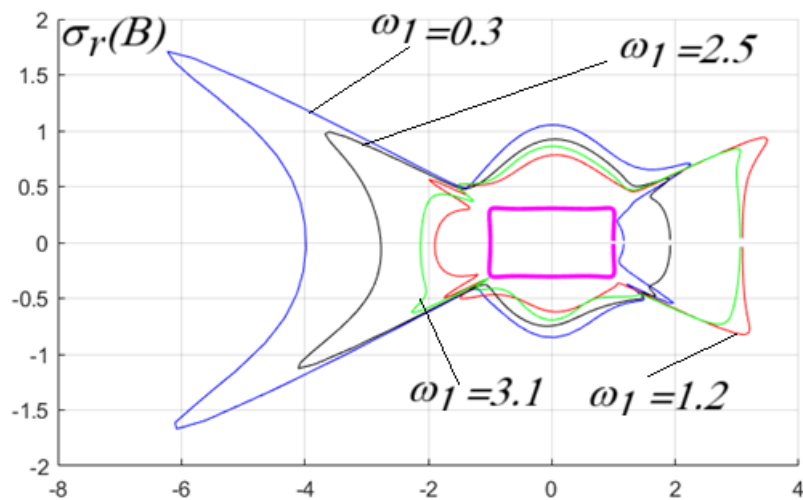


Рис. 4.6. Абсолютні значення радіальних напружень на правому включенні.

Рис. 4.6 демонструє розподіл радіальних напружень для другого (правого) включення, яке знаходиться у геометричній «тіні» першого, що дозволяє вивчити надзвичайно важливі ефекти дифракційного екранування та частотної вибірковості.

У порівнянні з рис. 4.5 розподіл напружень на правому включенні є більш складним через вплив хвиль, що вже пройшли крізь першу перешкоду або огинали її. Аналіз результатів дозволяє виявити специфіку взаємодії пружних хвиль у системі перешкод, де друге включення знаходиться під впливом дифрагованого поля від першого об'єкта.

Як і для першого включення, максимальна концентрація напружень спостерігається при $\omega_1=0.3$. Це свідчить про те, що у низькочастотному діапазоні (довга хвиля) перше включення майже не створює ефекту затінення, і друге включення сприймає хвильовий удар практично так само інтенсивно, як і перше. Велика довжина хвилі дозволяє їй «не помічати» вузький проміжок між включеннями, взаємодіючи з системою як з єдиним цілим.

Для вищих частот ($\omega_1 = 1.2$ та $\omega_1 = 3.1$) спостерігається суттєве зниження напружень на фронтальній грані порівняно з низькою частотою, що підтверджує екрануючу роль першого включення: при зменшенні довжини хвилі перша перешкода ефективніше відбиває та розсіює енергію, створюючи зону зниженого тиску для другого об'єкта. Найбільш виражене затінення фронтальної частини спостерігається при $\omega_1=1.2$.

Для всіх частот характерним залишається наявність концентрації напружень у кутових точках фронтальної грані. Це підтверджує, що кути жорстких включень є найбільш критичними зонами незалежно від того, яким за рахунком стоїть об'єкт у системі.

На відміну від першого включення, тут профілі мають більш «стиснуту» форму вздовж осі поширення хвилі, що вказує на зміну структури падаючого поля після проходження першої перешкоди.

Цікавою особливістю другого включення є збільшення напружень на правій (тиловій) грані для частот $\omega_1 = 1.2$ та $\omega_1 = 3.1$ порівняно з низькою частотою. Це пояснюється дифракційними ефектами: коротші хвилі інтенсивніше огинають включення і фокусуються або інтерферують за ним, створюючи додатковий тиск на тилу поверхню. Це явище є специфічним саме для динамічних задач і не має аналогів у статичі.

Дослідження напруженого стану другого (правого) включення дозволило встановити закономірності формування дифракційної тіні у системі жорстких перешкод. Встановлено, що ефект екранування має чітко виражену частотну залежність: у низькочастотному режимі ($\omega_1=0.3$) перше

включення практично не впливає на рівень навантаження другого, що призводить до виникнення значних нормальних з вираженою концентрацією у кутових зонах.

Зі зростанням частотного параметра спостерігається суттєве зниження інтенсивності силового впливу на фронтальну поверхню другого включення, що свідчить про ефективну роботу першого об'єкта як захисного екрана. Водночас виявлено зростання напружень на тилівій грані для цих частот, що зумовлено інтерференцією дифрагованих хвиль, які огинають систему включень.

Отримані результати вказують на те, що при проектуванні багатокомпонентних конструкцій, що піддаються динамічним навантаженням, необхідно враховувати можливість "прориву" низькочастотних збурень у глибину системи, де вони можуть викликати критичні напруження навіть на затінених елементах.

4.3.2. Випадок паралельних включень.

Виконаємо числовий розрахунок для випадку паралельно розміщених включень у пластинчастому елементі (рис. 4.7). Дослідимо зміну напруженого стану пружного середовища та вивчимо відбиття хвиль від границь включень.

На рис. 4.8 наведено результати числових розрахунків нормалізованих радіальних σ_r та кільцевих σ_θ напружень у точках A та B границь включень для випадку системи прямокутних включень, що розміщені паралельно до фронту хвилі (рис. 4.7).

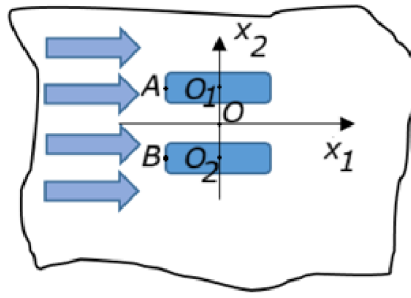


Рис. 4.7. 2D модель задачі

При розрахунках враховувалося, що відстань між центрами включень O_1O_2 дорівнює довжині включень.

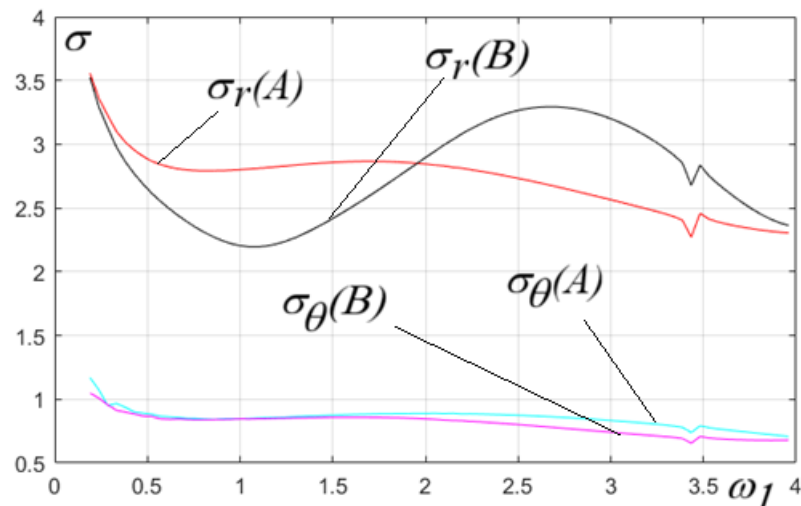


Рис. 4.8. Розподіл напружень у пластинчастому елементі

У випадку, коли включення розташовані паралельно одне одному відносно напрямку поширення хвилі під час її поширення створюється між ними своєрідний «канал», по якому проходить частина хвильової енергії. На відміну від п. 4.3.1 у даному випадку виникає ефект динамічної взаємодії в міжвключенному просторі.

Незважаючи на геометричну симетрію розташування точок А і В відносно осі Ox_1 , графіки розподілу напружень демонструють різну поведінку, що свідчить про складні інтерференційні процеси.

У квазістатичній області при $\omega_1 < 0.5$ спостерігається початкова симетрія, де напруження на обох включеннях практично збігаються. Це пояснюється тим, що довга хвиля сприймає обидва включення симетрично.

Високі значення напружень зумовлені жорстким закріпленням перешкод.

Зі зростанням частоти спостерігається ефект, де напруження у точці А стабілізуються, тоді як у точці В вони суттєво зменшуються, досягаючи мінімуму при $\omega_1 \approx 1.1$. Це вказує на те, що на певних частотах енергія хвилі «перерозподіляється» всередину каналу між включеннями, частково розвантажуючи фронтальні зони в певних точках за рахунок фазового зсуву розсіяних хвиль.

Найбільш вираженою особливістю графіка розподілу напружень є потужний резонансний пік для кривої $\sigma_r(B)$ у діапазоні $\omega_1 \in [2.0, 3.5]$. Амплітуда напружень у точці В стає суттєво вищою, ніж у точці А, досягаючи значення $\sim 3.3 \sigma_0$.

На цих частотах виникає конструктивна інтерференція хвиль, що відбиваються від внутрішніх граней включень. Канал між ними починає працювати як резонатор, що «накачує» енергію в зону фронтальної частини нижнього включення. Це критичний режим, за якого ризик руйнування другого включення значно вищий, ніж першого.

На всіх кривих спостерігається різкий «зубчастий» злам, що є характерною ознакою резонансу на власних формах коливань шару (пластини) або прояву вищих мод хвиль Лемба. Такі сингулярності зазвичай виникають, коли довжина хвилі стає сумірною з товщиною пластини або відстанню між включеннями.

Як і в попередній задачі (п. 4.3.1), нормалізовані значення кільцевих напружень σ_θ є достатньо низькими $\approx (0.7-1.0)\sigma_0$ порівняно з нормальними напруженнями. Проте їхній хід повторює загальну тенденцію нормальних напружень, що підтверджує узгодженість розрахунків.

Дослідження динамічного напруженого стану системи двох паралельно розташованих абсолютно жорстких включень дозволило виявити специфічні ефекти взаємодії, зумовлені наявністю міжвключенного каналу. Встановлено, що попри геометричну симетрію системи, частотні залежності напружень у характерних точках А та В суттєво відрізняються у

середньочастотному діапазоні.

Ключовою особливістю виявлено резонансне зростання нормальних напружень $\sigma_r(B)$ при $\omega_1 \approx 2.8$, де амплітуда зусиль перевищує відповідні показники для точки А на 20-25%. Дане явище пояснюється багаторазовим перевідбиттям хвиль між паралельними границями включень та формуванням у міжвключенному просторі стійкої інтерференційної картини, що призводить до локального підсилення силового впливу.

Наявність різких екстремумів у зоні частот $\omega_1 \approx 3.4$ свідчить про чутливість системи до вищих мод хвильового процесу в пластині. Отримані результати вказують на те, що для паралельних включень найбільш небезпечними є не низькочастотні (квазістатичні) режими, а резонансні частоти, де взаємний вплив об'єктів призводить до значної концентрації динамічних напружень на межах розподілу фаз.

Для детального аналізу локального напруженого стану було обрано характерні значення частотного параметра ω_1 , що відповідають різним режимам дифракції: квазістатичному ($\omega_1=0.3$), режиму локального розходження ($\omega_1=1.1$), головний резонансний пік ($\omega_1=2.8$) та точка сингулярності та дослідження впливу вищих мод ($\omega_1=3.4$). Для цих значень розраховані абсолютні значення радіальних напружень на лівому (рис. 4.9) та правому (рис. 4.10) включеннях.

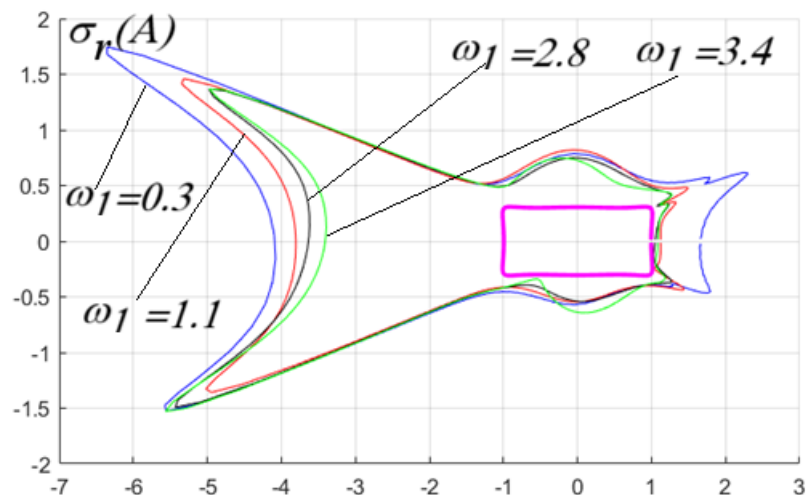


Рис. 4.9. Абсолютні значення радіальних напружень на лівому

включенні.

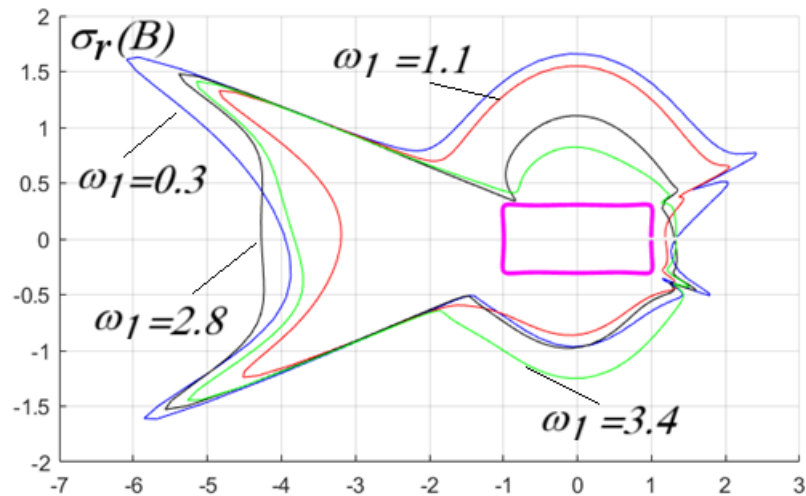


Рис. 4.10. Абсолютні значення радіальних напружень на лівому включенні.

Аналіз результатів, представлених на рис. 4.9 та 4.10 демонструють порушення симетрії напруженого стану в системі геометрично симетричних тіл. Хоча верхнє і нижнє включення розташовані симетрично відносно осі Ox_1 , їх взаємодія через «канал» між ними створює зовсім різні картини розподілу напружень.

Порівняльний аналіз розподілу напружень для системи паралельних включень, представлених рисунках 4.9 - 4.10, дозволяє зробити висновки про характер динамічної взаємодії в системі паралельних перешкод.

При низьких частотах розподіли нормальних напружень на обох включеннях є практично ідентичними. Спостерігається класична для жорстких тіл концентрація напружень на фронтальних кутах (ліва сторона). Це підтверджує, що при великих довжинах хвиль взаємний вплив включень є слабким, і вони працюють як незалежні перешкоди. Максимальні значення величини σ_r у фронтальній зоні сягають $\sim 1.7\sigma_0$.

Найбільш суттєві розбіжності розподілу напружень виявляються із зростанням частоти, особливо для горизонтальних граней, що формують

простір між включеннями. Для верхнього включення у точці *A* напруження на його нижній грані що «дивиться» на нижнє включення дещо зростають, але загальна форма контуру залишається відносно стабільною. Поряд з цим напруження на нижньому включенні у точці *B* аномально зростають на верхній грані з боку каналу. Особливо це помітно для частот $\omega_1=2.8$ (чорна крива) та $\omega_1=3.4$ (зелена крива). Напруження тут значно вищі, ніж на зовнішній грані цього ж включення.

На верхньому включенні для значення частоти $\omega_1=2.8$ демонструється помірна концентрація радіальних напружень. Поряд з цим, на нижньому включенні при даній частоті виникає потужний сплеск напружень, що охоплює майже всю фронтальну та верхню частини контуру. Це пояснює той факт, що у системі паралельних включень виникає специфічний резонанс, при якому енергія хвилі перерозподіляється на користь нижнього включення. Це свідчить про те, що в динамічних задачах навіть ідентичні тіла в групі можуть знаходитися в кардинально різних умовах експлуатації.

На рис. 4.9 та 4.10 при $\omega_1=1.1$ та $\omega_1=2.8$ спостерігається зміщення піків концентрації напружень. Якщо при статиці максимуми чітко прив'язані до кутів, то при динаміці області концентрації напружень розширюються і можуть зміщуватися вздовж граней. Це важливо для розрахунку міцності, оскільки зона потенційного руйнування стає більшою за площею.

Порівняльний аналіз контурних розподілів нормальних напружень σ_r для системи двох паралельних жорстких включень дозволив встановити характер впливу міжвключенної взаємодії на локальний напружений стан.

Встановлено, що при низьких частотах ($\omega_1=0.3$) система поводить себе стабільно, а розподіли напружень на включеннях є симетричними. Проте зі збільшенням частоти спостерігається ефект динамічної асиметрії. Зокрема, у міжвключенному просторі («каналі») виникає перерозподіл енергії, що

призводить до значного підсилення напружень на внутрішній грані одного з включень.

Найбільш виражений резонансний ефект зафіксовано при $\omega_1=2.8$, де амплітуда напружень на нижньому включенні суттєво перевищує відповідні показники верхнього. Це вказує на виникнення конструктивної інтерференції хвиль, відбитих від внутрішніх граней включень.

Отримані результати підтверджують, що в багатокомпонентних системах жорстких включень наявність вузьких проміжків між елементами може ставати джерелом додаткової концентрації напружень на певних частотах, що необхідно враховувати при оцінці динамічної витривалості конструкцій. Критичними зонами залишаються фронтальні кути включень, де спостерігається виражена сингулярність напруженого стану для всього досліджуваного діапазону частот.

Збільшення відстані між паралельними включеннями суттєво змінює характер хвильової взаємодії. З точки зору хвильової механіки збільшення відстані призводить до того, що фазовий набіг хвиль між включеннями відбувається швидше відносно зміни частоти.

Аналіз впливу геометричних параметрів на динамічну взаємодію паралельних включень при збільшенні відстані між їх центрами представлено на рис. 4.11. Тут наведено залежності компонентів напружень від безрозмірної частоти ω_1 для випадку, коли відстань між паралельними жорсткими включеннями збільшена у два рази порівняно з базовою моделлю.

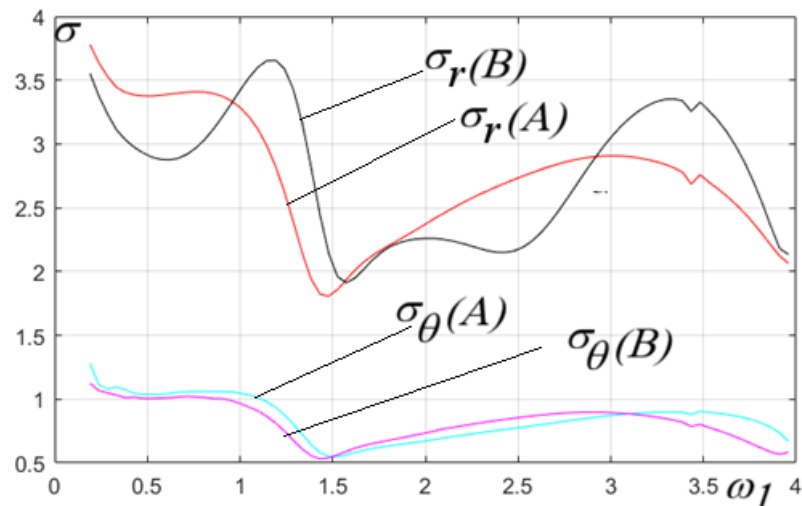


Рис. 4.11. Розподіл напружень у пластинчастому елементі

У випадку збільшення відстані між включеннями у 2 рази (рис. 4.11), видно, що відбувається збільшення кількості локальних максимумів та мінімумів на графіках у тому самому діапазоні частот. Оскільки шлях, який долають дифраговані хвилі між включеннями, зріс, умови конструктивної та деструктивної інтерференції (додавання або гасіння хвиль) виконуються частіше при зміні довжини хвилі. Це призводить до більш коливного характеру кривих.

Якщо при меншій відстані спостерігався один широкий резонансний пік, то тепер ми бачимо два виражені максимуми для нормальних напружень $\sigma_r(B)$: перший при $\omega_1 \approx 1.1$ та другий, ширший, у діапазоні $\omega_1 \in [2.5, 3.5]$.

Максимальне значення напружень у точці В досягає $\sigma \approx 3.7 \sigma_0$. Це підтверджує, що навіть при збільшенні відстані «канал» між включеннями продовжує працювати як резонатор, але тепер він має декілька резонансних частот.

Для обох включень спостерігається дуже глибокий мінімум усіх компонентів напружень при частоті $\omega_1 \approx 1.5$. У цій точці напруження падають до значень $\sigma \approx 1.8 \sigma_0$ для радіальних напружень σ_r та $\sigma \approx 0.5 \sigma_0$ для кільцевих напружень σ_θ . Це вказує на стан майже повного динамічного розвантаження фронтальних зон включень за рахунок інтенсивної деструктивної

інтерференції. Збільшення відстані зробило цей мінімум значно гострішим та вираженішим, ніж у попередній конфігурації.

Кільцеві напруження демонструють високу кореляцію з нормальними напруженнями, але залишаються стабільно нижчими за амплітудою. Збільшення відстані призвело до того, що розрив між величинами $\sigma_\theta(A)$ та $\sigma_\theta(B)$ став мінімальним майже у всьому діапазоні частот, що свідчить про вирівнювання зсувного впливу на обидва тіла.

Злам на кривих при частоті $\omega_1 \approx 3.4$ залишається незмінним. Це підтверджує, що даний ефект пов'язаний не з взаємодією між включеннями, а з власними характеристиками пластини, оскільки він не залежить від відстані між перешкодами.

Дослідження впливу геометричного параметру відстані між паралельними включеннями дозволило встановити, що збільшення дистанції у два рази призводить до значної інтенсифікації інтерференційних процесів. Це проявляється у зростанні кількості частотних резонансів та формуванні зон глибокої деструктивної інтерференції (зокрема, при $\omega_1 = 1.5$).

Встановлено, що при збільшенні відстані система стає більш чутливою до зміни частоти зовнішнього збурення: навіть незначні флуктуації частоти можуть призвести до переходу від стану динамічного розвантаження до критичних пікових навантажень. При цьому амплітуда максимальних напружень на нижньому включенні залишається порівняно нижчою з амплітудою на верхньому включенні при низькочастотних діапазонах деформування, що спростовує можливість ефективного захисту елементів шляхом простого рознесення їх на більшу відстань у паралельній конфігурації. Отримані результати підкреслюють необхідність точного частотного налаштування при проектуванні композитних систем із заданою відстанню між армуючими елементами.

4.3.3. Випадок послідовних включень, розміщених перпендикулярно до фронту хвилі.

Виконаємо числовий розрахунок для випадку послідовно розміщених включень у пластинчастому елементі у напрямку. Що перпендикулярний до фронту хвилі (рис. 4.12). Дослідимо зміну напруженого стану пружного середовища та дослідимо явища відбиття хвиль від границь включень.

На рис. 4.13 наведено результати числових розрахунків нормалізованих радіальних σ_r та кільцевих σ_θ напружень у точках A та B границь включень для випадку системи прямокутних включень, що розміщені перпендикулярно до фронту хвилі (рис. 4.12).

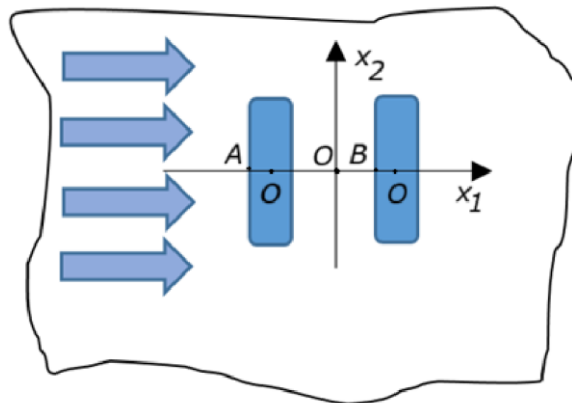


Рис. 4.12. 2D модель задачі

При розрахунках враховувалося, що відстань між центрами включень O_1O_2 дорівнює довжині включень.

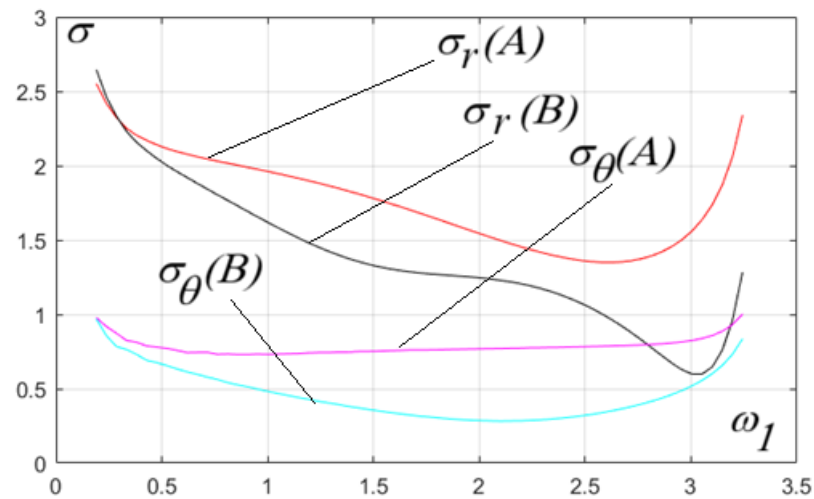


Рис. 4.13. Розподіл напружень у пластинчастому елементі

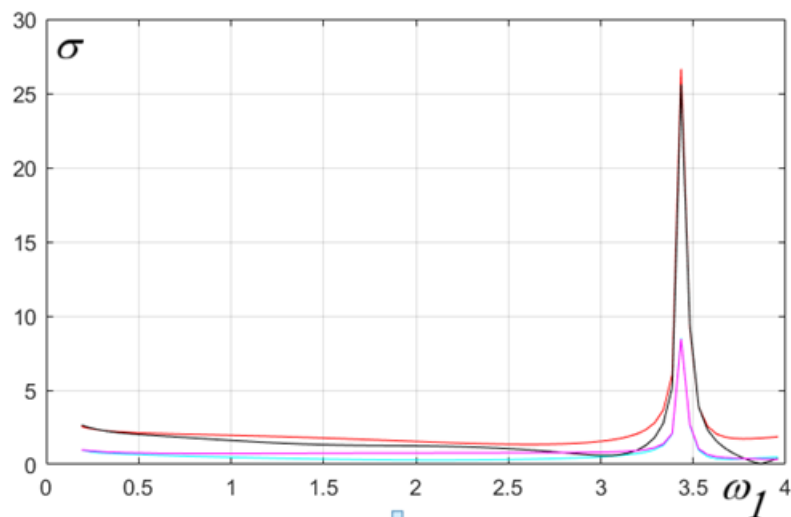


Рис. 4.13, а. Резонансні явища у пластинчастому елементі

Конфігурація вертикально орієнтованих включень, що розташовані послідовно у напрямку, перпендикулярному до фронту хвилі демонструють класичну модель «хвильового резонатора»: за певних частот система переходить у стан інтенсивного резонансу, де напруження зростають майже в 10 разів порівняно з квазістатичним станом.

На рис. 4.13 та 4.13, а наведено залежності нормальних σ_r та кільцевих σ_θ напружень у точках на фронтальних поверхнях першого та другого включень від безрозмірної частоти ω_1 .

У діапазоні частот $\omega_1 \in [0.5, 3.0]$ спостерігається чітко виражений

ефект затінення. Напруження $\sigma_r(A)$ на першому включенні (червона крива) стабільно вищі, ніж напруження $\sigma_r(B)$ на другому (чорна крива лінія). Це свідчить про те, що перше включення ефективно відбиває частину енергії падаючої хвилі, створюючи захисну «тінь» для другого об'єкта. У цьому діапазоні напруження плавно спадають із зростанням частоти, що є типовим для жорстких перешкод поза зонами резонансу.

Головною особливістю отриманих результатів для випадку послідовно розміщених включень є виникнення надпотужного резонансного піка при частоті $\omega_1 \approx 3.4$. Амплітуда нормальних напружень σ_r стрімко зростає від значень $\sim (2-3) \sigma_0$ до пікового значення $\sim 27 \sigma_0$. Це означає, що концентрація напружень у цій точці стає в десятки разів більшою за амплітуду падаючої хвилі.

Даний ефект пояснюється виникненням резонансу типу «пастки» у просторі між двома вертикальними жорсткими включеннями. Система починає працювати як акустичний резонатор Фабрі-Перо: хвиля, потрапляючи у простір між включеннями, зазнає багаторазового перевідбиття від жорстких стінок. Коли відстань між включеннями стає кратною половині довжини хвилі або відповідає іншій резонансній умові, відбувається різке накопичення енергії у міжвключенному шарі матриці.

На рис. 4.13, а чітко видно, що резонансний пік проявляється одночасно як для точки В, так і для точки А. Це вказує на те, що при резонансі ефект екранування зникає, і вся система: обидва включення та шар матриці між ними, працює як єдиний коливальний вузол. Кільцеві напруження σ_θ також демонструють сплеск, хоча їхня амплітуда становить $\sim 8 \sigma_0$ і залишається меншою за нормальні напруження.

Виявлений резонанс є критично небезпечним для цілісності конструкції. Навіть якщо матеріал розрахований на статичне навантаження, при експлуатації на частоті $\omega_1 \approx 3.4$ відбудеться миттєве відшарування включення або руйнування матриці через колосальну концентрацію напружень.

Цей пік може бути використаний у неруйнівному контролі як ідентифікатор наявності системи близько розташованих дефектів. Різка зміна амплітуди відгуку на цій частоті є однозначним сигналом про наявність резонансної порожнини або групи включень.

Встановлено, що для системи вертикально орієнтованих послідовно розташованих жорстких включень характерним є виникнення вузькосмугового високоамплітудного резонансу. Доведено, що при частоті $\omega_1 \approx 3.4$ амплітуда нормальних напружень на межі розподілу фаз зростає майже в 10 разів порівняно з квазістатичним рівнем.

Фізичний механізм даного явища пов'язаний із формуванням резонансної зони у міжвключенному просторі, де жорсткі перешкоди обмежують відтік енергії дифрагованого поля. Виявлено, що в умовах резонансу ефект дифракційного екранування нівелюється, і обидва включення зазнають екстремальних навантажень.

Отримані результати дозволяють визначити критичні частотні діапазони експлуатації конструкцій, у яких динамічна міцність матеріалу може бути вичерпана внаслідок геометричної конфігурації включень. Даний ефект резонансного підсилення напружень слід враховувати при проектуванні багатокомпонентних композитних матеріалів та систем моніторингу їхнього стану.

Дане явище називатимемо явищем локалізації енергії пружних хвиль у системі дискретних жорстких перешкод.

Для детального аналізу локального напруженого стану було обрано характерні значення частотного параметра ω_1 , що відповідають різним режимам дифракції: для $\omega_1=0.3$, що демонструє початкову концентрацію зусиль на фронтальних кутах системи за відсутності вираженої хвильової взаємодії; $\omega_1=2.0$, що ілюструє формування зони інтенсивної дифракційної тіні, де перше включення виконує роль захисного екрана для другого; $\omega_1=3.8$, що показує стабілізацію напруженого стану після виходу системи з резонансного режиму. Для цих значень розраховані абсолютні значення

радіальних напружень на лівому (рис. 4.14) та правому (рис. 4.15) включеннях.

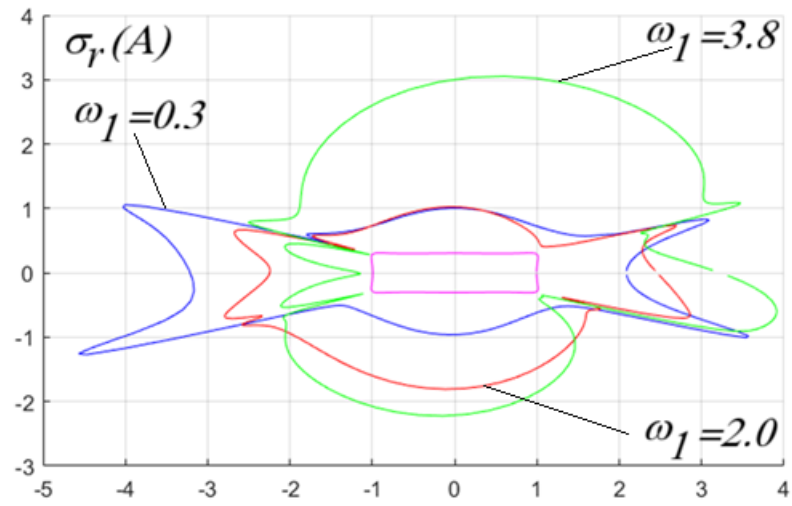


Рис. 4.14. Абсолютні значення радіальних напружень на лівому включенні.

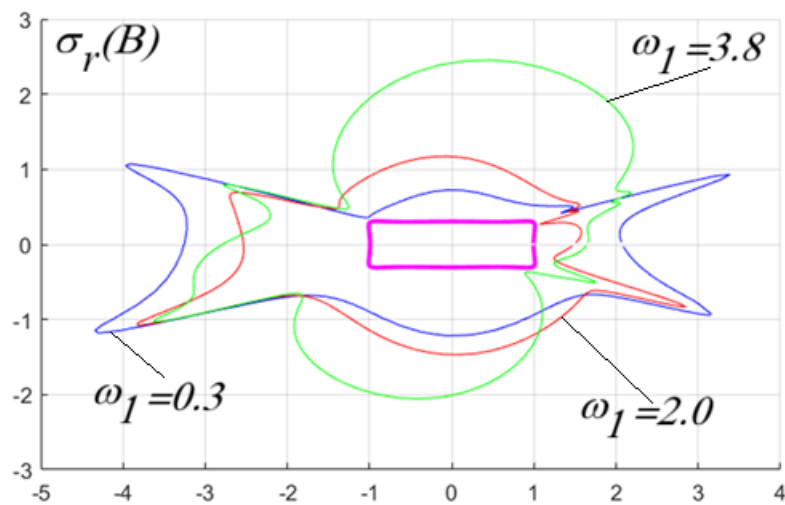


Рис. 4.15. Абсолютні значення радіальних напружень на правому включенні.

Рис. 4.14 та 4.15 дозволяють візуалізувати просторовий розподіл амплітуд нормальних напружень σ_r по периметру обох включень. Такий підхід дозволяє побачити де саме на границі включення виникають зони ризику.

На рисунках 4.14 та 4.15 представлено контурні епюри амплітуд нормальних напружень σ_r для фронтального (лівого) та тилового (правого) включень. Величина напруження у кожній точці відкладена за нормаллю до відповідної ділянки границі.

На лівому фронтальному включенні (рис. 4.14) спостерігається трансформація зон концентрації напружень. У низькочастотному діапазоні включення працює відповідно класична жорстка перешкода — максимуми напружень локалізовані на фронтальних кутах. Концентрації напружень у кутових точках вказують на те, що при великих довжинах хвиль основне зусилля припадає на точки геометричної сингулярності (кути), що безпосередньо зустрічають хвилю.

У середньочастотному діапазоні зони концентрації починають зміщуватися з кутів до центрів горизонтальних граней. Це свідчить про посилення ефекту "обтікання" включення пружною хвилею. Випадок високочастотних хвиль відповідає стану після проходження головного резонансу. Спостерігається радикальна зміна картини розподілу напружень: максимуми напружень зосереджені в центрах бокових граней, тоді як фронтальна (ліва) сторона залишається відносно розвантаженою. Це ілюструє перерозподіл енергії від лобового зіткнення до інтенсивного стиснення бокових поверхонь.

Аналіз рис. 4.15 демонструє ефекти екранування та інтерференції на тиловому включенні. При низькочастотних та середньочастотних впливах спостерігається режим екранування. Порівняння синьої та червоної кривої показує, що чітко видно ефект "дифракційної тіні". Для включення тилового включення амплітуда фронтальних піків є значно меншою. Перше включення виконує роль демпфера, розсіюючи енергію та захищаючи фронтальну частину другого об'єкта.

У пострезонансному режимі (зелена крива) картина напружень на тиловому включенні стає майже ідентичною до включення фронтального. Велика "петля" напружень на бокових гранях вказує на те, що на високих

частотах ефект екранування нівелюється, і система починає працювати як єдиний хвилевід, де напруження визначаються загальною структурою дифрагованого поля в пластині.

Для всіх частот спостерігається вертикальна симетрія відносно осі Ox_1 , але виражена горизонтальна асиметрія (ліва сторона включення) завжди навантажена інакше, ніж права. Найбільш небезпечними є зони кутів при низьких частотах та центри бокових граней при високих частотах. Такі результати є важливими для проектування адгезійних з'єднань: руйнування може початися з різних точок залежно від частотного спектру навантаження.

Аналіз контурних розподілів нормальних напружень дозволив встановити механізм трансформації зон концентрації зусиль у системі послідовних жорстких включень. Встановлено, що зі збільшенням частоти ω_1 відбувається зміщення максимумів напружень від фронтальних кутових точок (при $\omega_1 = 0.3$) до центральних ділянок бокових граней (при $\omega_1 = 3.8$).

Візуалізовано ефект дифракційного екранування, що проявляється у суттєвому (до 30-40%) зниженні амплітуди напружень на фронтальній грані тилового включення у порівнянні з фронтальним у дорезонансній області. Доведено, що у пост-резонансному режимі ($\omega_1 = 3.8$) картина напруженого стану обох об'єктів уніфікується, а зони максимальної інтенсивності локалізуються на горизонтальних поверхнях контакту "матриця—включення".

Отримані результати вказують на необхідність диференційованого підходу до оцінки міцності композитних структур: при низькочастотних вібраціях критичним є стан кутових зон фронтальних елементів, тоді як при високочастотних резонансних впливах небезпека зміщується на бокові поверхні всієї системи включень.

Слід відмітити, що розподіл напружень для $\omega_1 = 3.8$ демонструє «залишковий» стан після резонансу ($\omega_1 = 3.4$). Він показує, що навіть після

піка напруження залишаються високими і мають зовсім іншу геометрію, ніж при статичних навантаженнях.

4.4. Вплив розмірів жорстких включень на дифракцію хвиль

Дослідимо вплив інерційних та геометричних властивостей бар'єрів на фазовий набіг хвилі. У динамічній теорії пружності товщина перешкоди визначає час взаємодії фронту хвилі з об'єктом. Коли два включення мають різну товщину, виникають такі ефекти як фазова асиметрія, вибіркова фільтрація та ефект подвійного бар'єру.

Для фазової асиметрії характерним є те, що хвиля, яка огинає або проходить повз перше включення товщиною d_1 , зазнає певної затримки та трансформації фази. Друге включення іншої товщини d_2 взаємодіє вже з полем, яке має іншу спектральну структуру. Вибіркова фільтрація на системі з двох включень різної товщини працює як «сходинковий фільтр». Кожне включення має свій набір резонансних частот, пов'язаних з його геометрією. Комбінація різних товщин дозволяє перекривати ширші частотні діапазони, що неможливо в симетричних системах. Ефект подвійного бар'єру дозволяє дослідити, як зміна масивності першого бар'єра впливає на «виживання» другого бар'єра в умовах динамічного удару.

Отримані результати можна використати при проектуванні багатоступеневих віброгасників. В інженерії для гасіння вібрацій часто використовують послідовні вставки. Дослідження дозволить оптимально підібрати спосіб комбінування товстих та тонких елементи для максимального розсіювання енергії.

Крім того, такі результати є важливими для дефектоскопії зварних швів та наплавлень. При неруйнівному контролі часто зустрічаються дефекти різної масивності (наприклад, включення шлаку різної ширини). Запропонована методика допоможе зрозуміти, як розрізнити два близьких дефекти, якщо один із них масивніший за інший.

Крім того, незначна модернізація та адаптація розробленого алгоритму дозволить використовувати його для проектування сейсмозахисту критичної інфраструктури. Моделювання підземних захисних бар'єрів - сейсмічних метаматеріалів, шляхом використання бар'єрів різної товщини дозволяє ефективніше відбивати сейсмічні хвилі різної довжини.

Також запропонована методика є актуальною для розробки композитів з градієнтними властивостями. При розробці матеріалів, де армуючі елементи змінюють свою геометрію по глибині пластини для кращого поглинання ударних навантажень необхідне врахування поширення та відбиття хвиль у середовищі.

Розглянемо пружну ізотропну пластину, у серединній площині якої розташовані два абсолютно жорстких нерухомих включення з центрами у точках O_1 та O_2 . Включення мають прямокутну форму з розмірами $d_1 \times L$ та $d_2 \times L$, відповідно, де d_1 та d_2 — їх товщини вздовж осі Ox_1 , а L — їх висота. Центри включень розташовані на осі Ox_1 на відстані S один від одного.

2 D модель задачі представлена на рис. 4.16. За числових розрахунків приймалося, що $d_1 = 0.31$, $d_2 = 0.2$, $L = 1$, $O_1 O_2 = 1$. Потенціали падаючої хвилі задавалися у вигляді:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \omega_1 x_1)}, \Psi = 0,$$

де ω - частота, $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $\Phi_0 = \frac{\rho}{\omega^2}$.

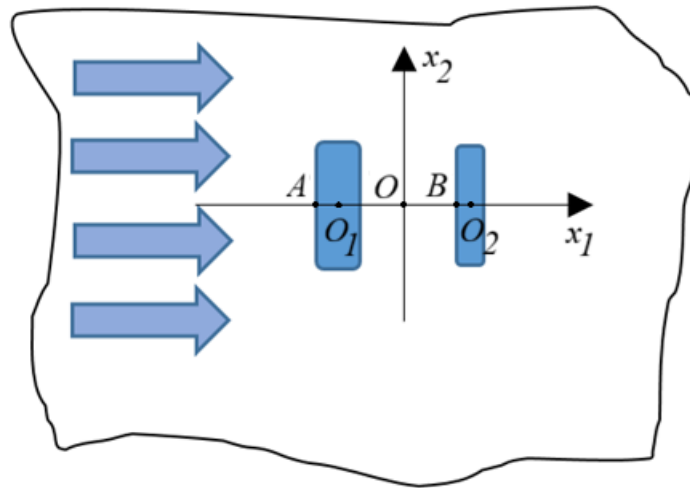


Рис. 4.16. 2D модель задачі.

Розподіл динамічних нормальних та кільцевих напружень на у точках А та В включень на границі матриця-включення представлені на рис. 4.17.

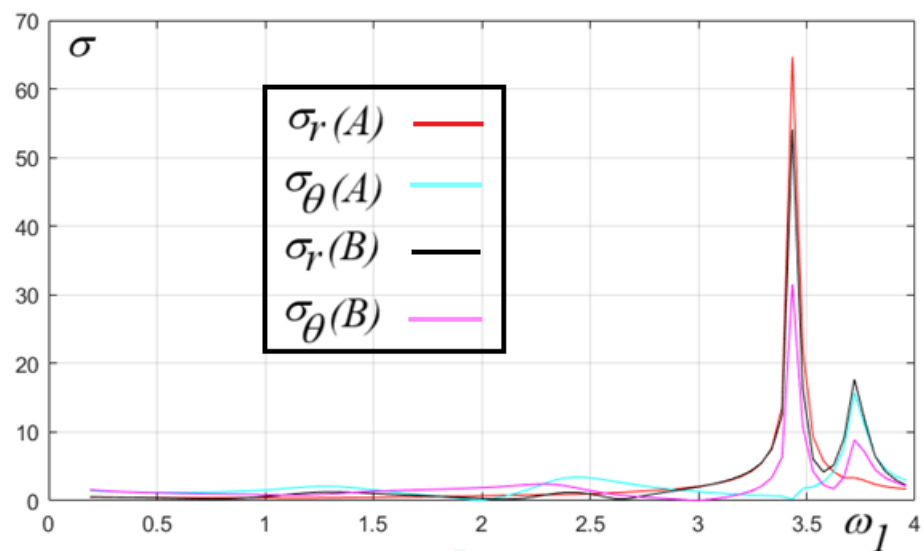


Рис. 4.17. Напруження у пластинчастому елементів з системою різних включень

Зміна нормальних напружень вздовж границі включень представлені на рис. 4.18 (включення товщиною d_1) та рис.4.19 (включення товщиною d_2) для випадку декількох значень частотного параметра $\omega_1=0.2, 1.1, 2.0$ та 3.0 .

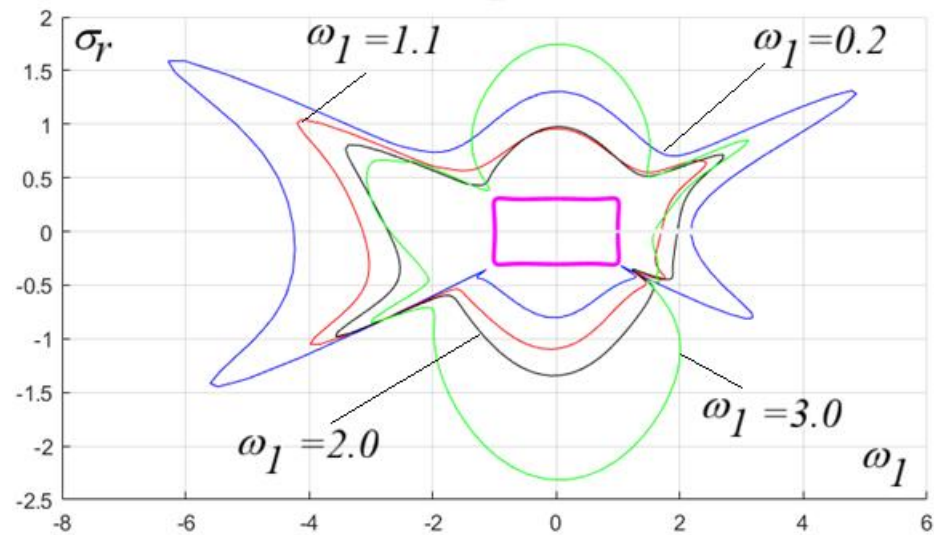


Рис. 4.18. Розподіл динамічних нормальних напружень вздовж
границі прямокутного включення товщиною d_1

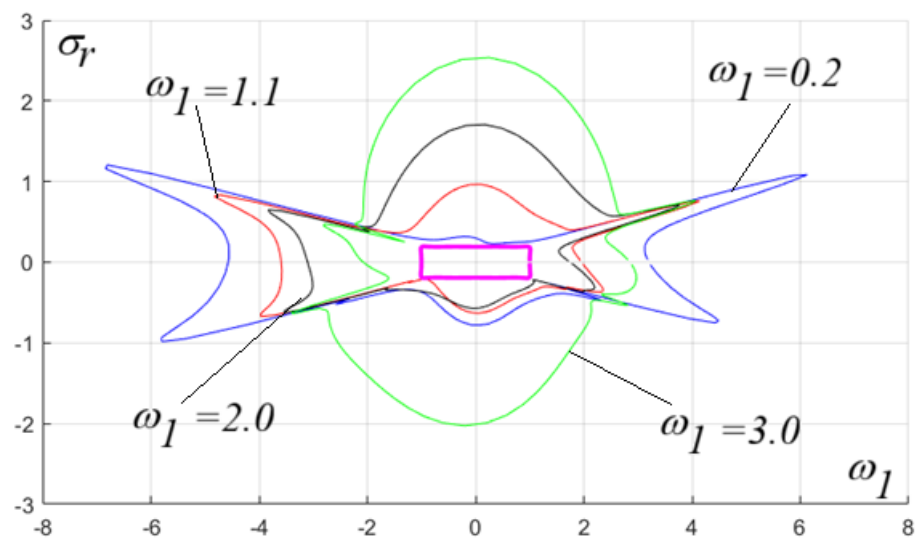


Рис. 4.19. Розподіл динамічних нормальних напружень вздовж
границі прямокутного включення товщиною d_2

Представлені на рис. 4.17 – 4.19 результати для випадку включень різної товщини дають важливі з точки зору хвильової механіки результати. Числовий розрахунок дозволив виявити ефект екстремального резонансного підсилення, який значно перевищує результати для випадку включень однакової товщини.

Аналіз динамічного напруженого стану системи включень різної товщини дозволяє дослідити вплив геометричної асиметрії товщин послідовно розташованих абсолютно жорстких включень на формування напруженого стану пластини. Фронтальне включення з центром у точці O_1 має значну товщину, тоді як тилове включення з центром у точці O_2 є тонким, наприклад, пластинчастим.

На графіку частотних залежностей зафіксовано виникнення надпотужного вузькосмугового резонансу при частоті $\omega_1 \approx 3.42$. Максимальне значення нормальних напружень на першому включенні $\sigma_r(A)$ досягає критичної величини $\sim 65\sigma_0$, а на другому включенні $\sigma_r(B)$ — $\sim 55\sigma_0$. Порівняння з симетричним випадком, результати якого представлені на рис. 4.13,а показує, що у випадку системою ідентичних включень, де максимальний пік напружень становив $\sim 27\sigma_0$, введення потовщеного фронтального бар'єра призвело до більш ніж двократного зростання інтенсивності напружень при резонансі. Такий ефект пояснюється тим, що масивне перше включення працює як потужний акустичний рефлексор. Більша частина енергії, що потрапляє у простір між включеннями, не може вийти назад крізь товстий бар'єр з центром у точці O_1 і багаторазово перевідбивається від тонкого бар'єра з центром у точці O_2 , створюючи ефект «високодобротного резонатора».

Контурні епюри для потовщеного включення з центром у точці O_1 (рис. 4.18) демонструють трансформацію зон концентрації напружень. При низькочастотних коливаннях ($\omega_1 = 0.2$) основне навантаження припадає на фронтальні кути включення. При наближенні до резонансу ($\omega_1 = 3.0$) спостерігається аномальне зростання напружень на горизонтальних (бічних) гранях. Це свідчить про те, що масивне тіло зазнає інтенсивного стиснення з боку матриці через «затискання» хвилі між його широкими границями.

Для тонкого включення (рис. 4.19) картина НДС має специфічний характер. Концентрація на кутах включення відбувається через малу

товщину включення з центром у точці O_2 . Тут кутові піки напружень є набагато гострішими та довшими порівняно з масивним включенням. Це вказує на те, що тонкі жорсткі включення працюють аналогічно до жорстких лінійних розрізів, створюючи екстремальні градієнти напружень у матриці.

При високочастотних коливаннях ($\omega_1 = 3.0$) епюра нормальних напружень стає витягнутою вертикально, що ілюструє домінування поперечних деформацій пластини, які намагаються «вигнути» тонке включення.

Проведений порівняльний аналіз динамічної реакції систем із ідентичними (рис. 4.13 – 4.15) та асиметричними за товщиною (рис. 4.17 – 4.19) включеннями дозволив виявити фундаментальні відмінності у механізмах формування напруженого стану. Ключовою розбіжністю є інтенсивність резонансних явищ: якщо у системі ідентичних включень максимальна амплітуда нормальних напружень становила приблизно $27\sigma_0$, то введення масивного фронтального бар'єра призвело до екстремального зростання напружень, пікові значення яких сягнули позначки $65\sigma_0$. Таке більш ніж двократне підсилення свідчить про те, що геометрична асиметрія товщин радикально підвищує добротність коливальної системи, перетворюючи її на надчутливий динамічний резонатор.

Фізична природа такої аномалії зумовлена виникненням ефекту «енергетичної пастки» у міжвключенному просторі. У випадку однакових товщин енергія дифрагованого поля частково розсіюється назад у матрицю через обидві перешкоди відносно рівномірно. Натомість масивне перше включення у асиметричній системі виконує роль ідеального акустичного рефлектора, який перешкоджає відтоку хвильової енергії з проміжку. Це призводить до багаторазового перевідбиття хвиль від тонкого тилового бар'єра, що спричиняє лавиноподібне накопичення пружної енергії та формування надвисоких градієнтів напружень на межах розподілу фаз.

Суттєвих трансформацій зазнає і просторова морфологія напруженого стану. Для системи ідентичних включень характерним є відносно

симетричний розподіл зусиль на обох тілах із подібною структурою кутових максимумів. У системі з різними товщинами спостерігається чітка спеціалізація: масивне включення зазнає інтенсивного стиснення переважно вздовж своїх подовжених горизонтальних граней, тоді як тонке тилове включення демонструє надзвичайно гострі, сингулярні піки напружень на кутах. Це вказує на те, що тонкі елементи в асиметричних парах стають зонами першочергового ризику руйнування, попри наявність попереду масивного «захисного» екрана.

Аналіз ефекту дифракційного екранування показав, що збільшення товщини фронтального включення дійсно покращує захист тилового об'єкта у дорезонансній області, суттєво знижуючи амплітуду падаючого поля. Проте у вузькому діапазоні резонансних частот ($\omega_1 \approx 3.42$) цей захист повністю нівелюється. Більше того, масивний бар'єр починає працювати проти цілісності системи, сприяючи локалізації енергії, що призводить до набагато важчих наслідків для конструкції, ніж у випадку з тонкими ідентичними елементами.

Таким чином, перехід від симетричної до асиметричної моделі товщин змінює характер задачі з простої дифракції на складний процес фокусування пружної енергії. Виявлений стрибок амплітуд підтверджує, що ігнорування реальних геометричних пропорцій включень у розрахунках може призвести до значної недооцінки (у 2-3 рази) реальних динамічних навантажень, особливо при експлуатації конструкцій у високочастотних вібраційних режимах.

На основі числових розрахунків встановлено, що геометрична асиметрія послідовно розташованих жорстких включень є чинником аномального підсилення динамічних напружень. Виявлено зростання амплітуди напружень у 2.4 рази порівняно з системою ідентичних включень. Доведено, що збільшення товщини першого бар'єра перетворює міжвключенний простір на «пастку для хвиль», де амплітуда зусиль значно разів перевищує амплітуду падаючого поля, що є критичним для адгезійної

міцності конструкції. Тонке тилове включення зазнає інтенсивних кутових навантажень навіть за наявності масивного екрана, що спростовує можливість повного динамічного захисту тонких елементів за допомогою простих масивних перешкод на резонансних частотах.

Отримані результати можна використати при проектуванні багатошарових композитів, де слід уникати поєднань масивних та тонких елементів на відстанях, що сприяють формуванню високих резонансів, або використовувати демпфуючі прошарки для розсіювання енергії у міжвключеному просторі.

Числові результати, отримані на основі розробленого алгоритму, що базується на використанні непрямого методу граничних елементів, показали, що запропонований підхід є потужним та ефективним, оскільки здатен вловлювати такі тонкі та потужні резонанси, які звичайні сіткові методи могли б «прогавити» через недостатню дискретизацію.

4.5. Висновки до розділу 4

У даному розділі трансформовано розроблений підхід до дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів з системою жорстких нерухомих включень, що моделюють зварювальні шви. Інтегральне представлення переміщень узагальнено на випадок двозв'язних областей шляхом об'єднання граничних контурів усіх включень у сумарний контур.

Систему інтегральних рівнянь у матричній формі побудовано на основі задоволення граничних умов на кожному з граничних контурів з використанням формул Племеля-Сохоцького при граничному переході. Для параметризації границь прямокутних включень застосовано тригонометричне представлення у вигляді ряду, що дозволяє отримати рівняння граничного контуру із закругленими кутовими точками, що

забезпечило усунення геометричних сингулярностей та підвищення точності числових розрахунків.

Для випадку послідовно розміщених включень уздовж напрямку поширення хвилі встановлено наявність частотно-залежного дифракційного екранування: у діапазоні $1,0 < \omega_1 < 3,0$ перше включення знижує рівень напружень на фронтальній грані другого. Виявлено низькочастотний ефект «перефокусування» хвилі у вузькому проміжку між включеннями, що в квазістатичній області призводить до парадоксального перевищення напружень на другому включенні порівняно з першим. Встановлено, що кільцеві напруження є суттєво меншими за нормальні, що підтверджує домінуючу роль нормального тиску у процесах руйнування межі контакту.

Для випадку паралельно розміщених включень виявлено ефект динамічної асиметрії: попри геометричну симетрію системи, частотні залежності напружень у характерних точках суттєво відрізняються у середньочастотному діапазоні. Встановлено, що між паралельними включеннями формується «канал», який при певних частотах виконує роль резонатора. Ключовою особливістю є резонансне зростання нормальних напружень при $\omega_1 \approx 2,8$, де амплітуда перевищує відповідні показники для точки А на 20–25%. Показано, що збільшення відстані між паралельними включеннями удвічі призводить до інтенсифікації інтерференційних процесів, збільшення кількості резонансних піків та формування зон глибокої деструктивної інтерференції при $\omega_1 \approx 1,5$, де напруження знижуються до рівня динамічного розвантаження.

Для випадку послідовних включень, орієнтованих перпендикулярно до фронту хвилі, виявлено явище локалізації енергії пружних хвиль у міжвключенному просторі. Система вертикально орієнтованих включень функціонує як акустичний резонатор: при частоті $\omega_1 \approx 3,4$ амплітуда нормальних напружень досягає значень $\sim 27\sigma_0$, що майже на порядок перевищує квазістатичний рівень. Встановлено, що в умовах резонансу ефект дифракційного екранування нівелюється, і обидва включення

зазнають екстремальних навантажень. Зі збільшенням частоти зафіксовано зміщення максимумів напружень від фронтальних кутових точок до центральних ділянок бокових граней.

Дослідження системи включень різної товщини показало, що геометрична асиметрія послідовно розташованих жорстких включень є визначальним чинником аномального підсилення динамічних напружень. Встановлено, що масивне фронтальне включення виконує роль потужного акустичного рефлектора, що перешкоджає відтоку хвильової енергії з міжвключеного простору, перетворюючи систему на «пастку для хвиль». У резонансному режимі при $\omega_1 \approx 3,42$ амплітуда нормальних напружень досягає $\sim 65\sigma_0$, що у 2,4 рази перевищує відповідні значення для системи ідентичних включень.

Доведено, що тонке тилове включення зазнає інтенсивних кутових навантажень навіть за наявності масивного фронтального екрана, що спростовує можливість повного динамічного захисту тонких елементів на резонансних частотах. На основі числових результатів досліджено вплив геометричної асиметрії товщин послідовно розташованих включень на формування зон динамічної тіні.

Доведено, що варіювання товщини першого включення дозволяє зміщувати резонансні піки напружень на другому включенні, що відкриває можливості для частотної оптимізації захисних елементів конструкцій.

Основні наукові результати розділу, які визначають новизну дисертаційної роботи, опубліковані в роботах [1, 8, 9].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розроблено методику дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів з жорсткими включеннями довільної форми на основі непрямого підходу методу граничних елементів. Отримані результати дозволяють зробити такі висновки.

1. Удосконалено чисельно-аналітичний підхід на основі непрямого методу граничних елементів (НМГЕ) для розв'язання задач дифракції пружних хвиль на системі включень довільної конфігурації. Доведено, що запропонована методика забезпечує високу точність (похибка 2–3% порівняно з методом рядів) та, на відміну від традиційних сіткових методів, дозволяє ефективно ідентифікувати вузькосмугові високоамплітудні резонанси, які виникають у міжвключеному просторі.
2. Встановлено вплив геометричної форми включень на характер концентрації напружень. Для прямокутних включень виявлено виражену сингулярність напруженого стану в околі кутових точок, амплітуда яких зростає на 30–40% при збільшенні відношення сторін L/H від 3,2 до 5,0. Доведено, що перехід до еліптичної форми сприяє «самоорганізації» напруженого стану та усуненню кутових піків, проте зберігає високий рівень нормального тиску на фронтальній межі.
3. Виявлено закономірності формування «дифракційної тіні» у системах послідовно розташованих включень. Встановлено, що ефект екранування має чітку частотну залежність: у низькочастотному діапазоні ($\omega_1 < 0.8$) система працює як єдиний кластер без вираженого затінення, тоді як у середньочастотній області перше включення ефективно знижує навантаження на тилове тіло. Проте в зонах

динамічного резонансу ефект екранування нівелюється, що призводить до критичного перевантаження всієї системи.

4. Доведено існування ефекту «міжвключенного каналу» для паралельно розташованих об'єктів. Встановлено, що попри геометричну симетрію, динамічна взаємодія призводить до порушення симетрії напруженого стану. Виявлено резонансні частоти (зокрема $\omega_1 \approx 2.8$), на яких енергія дифрагованого поля фокусується у вузькому проміжку між включеннями, спричиняючи підсилення напружень на внутрішніх гранях, що значно перевищує рівень навантаження поодиноких дефектів.
5. Продемонстровано явище екстремального резонансного підсилення (ефект «енергетичної пастки») у системах із розмірною асиметрією товщин. Встановлено, що поєднання масивного фронтального бар'єра та тонкого тилового включення призводить до зростання амплітуди динамічних напружень у 2,4 рази порівняно з системою ідентичних включень. Це обґрунтовує критичну небезпеку експлуатації неоднорідних композитних структур у високочастотних вібраційних режимах.
6. Визначено практичні критерії оцінки міцності адгезійного контакту «матриця–включення». Доведено, що для абсолютно жорстких тіл нормальні напруження σ_n є домінуючим чинником руйнування, оскільки їх амплітуда у 2,5–3 рази перевищує кільцеві зусилля. Встановлено, що найбільш небезпечними зонами ініціації руйнування є кути фронтальних граней при низьких частотах та центри бокових поверхонь у пост-резонансних режимах.
7. Результати роботи мають прикладне значення для вдосконалення методів неруйнівного ультразвукового контролю та розробки акустичних метаматеріалів. Отримані дані дозволяють прогнозувати «безпечні» та «резонансні» частотні діапазони для багатокомпонентних пластинчастих систем, що є критично важливим

для авіабудування, зварних конструкцій та захисних сейсмічних бар'єрів.

ПЕРЕЛІК ЦИТОВАНИХ ПОСИЛАНЬ

1. Делявський М.В., Мікуліч С.Б. Дослідження впливу динамічного навантаження на паяне з'єднання на основі методу граничних елементів. Актуальні проблеми інженерної механіки: Матеріали XI Міжн. наук.-техн. конф. (Одеса, 21–23 травня 2025 р.) Одеса: ОДАБА, 2025, С. 78-80.
2. Дияк І., Михаськів О. Схема методу граничних елементів для моделі жорсткого сферичного включення у полі пружної гармонічної хвилі. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2012, 14, с.39-50.
3. Калоєров С.А., Авдюшина Є.В., Мироненко А.Б. Концентрація напружень у багатозв'язних ізотропних пластинках. Донецьк: ДНУ, 2013.
4. Кунець Я. І., Матус В. В. Асимптотичний підхід у динамічних задачах теорії пружності для тіл з тонкими пружними включеннями, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2020, **63**, No. 1, с. 75–93 , <https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.1.75-93>
5. Литвин О., Попов В. Дослідження хвильових полів, дифрагованих тонкими абсолютно жорсткими включеннями, при плоскій деформації. Машинознавство, 2009, 2: 8-14.
6. Максимович О., Соляр Т. та ін. Визначення концентрації напружень поблизу отворів при динамічних навантаженнях. Науковий вісник Національного гірничого університету. Випуск 3, 2021. С.19-24.
7. Мікуліч С., Делявський М., Здолбіцька Н. Макроелементний аналіз тонкої ортотропної плити на пружній основі Вінклера. Інноваційні процеси в галузі дорожнього будівництва: II Міжнародна науково-практична інтернет-конференція молодих учених та студентів : 3б. тез доп., м. Луцьк, 6 листоп. 2024 р. С. 52–54.
8. Мікуліч С.Б. Симуляційний аналіз взаємодії жорстких включень у пластинчастих елементах за динамічного навантаження. Наукові

нотатки, 85 (2026), С.133-137.
<https://doi.org/10.36910/775.24153966.2026.85>

9. Мікуліч С.Б., Делявський М.В., Сяський А. О. Експериментальна оцінка міцності паяних з'єднань полімерних матеріалів. Сучасні проблеми містобудування. Перспективи та пріоритети розвитку: Міжнародна науково-практична інтернет-конференція: м. Луцьк, 14 листопада 2025 р. <https://konf-mbg.wixsite.com/lntu-bci-mbg-2025/tezi-dopovidej>
10. Мікуліч С.Б., Сяський А.О. Використання непрямого підходу методу граничних елементів до дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів з включеннями. Наукові нотатки, 84 (2025), С. 57-63. <https://doi.org/10.36910/775.24153966.2025.84>
11. Назаренко О.М. Моделювання взаємодії плоских гармонічних хвиль з циліндричними включеннями. Вісник Національного технічного університету ХП. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2015, 18, с. 108-115.
12. Онишко Л. Й., Варивода Ю. Ю., Пономаренко О. М. Дослідження динамічної концентрації напружень на краю колового отвору за дії на нього несиметричного навантаження. Науковий вісник ЛНУВМБТ ім. С. З. Гжицького. 2011. 13, № 4 (50), ч. 4. С. 106–114.
13. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярних інтегральних рівнянь у двовимірних задачах дифракції / К: Наук. думка, 1984. - 344 с.
14. Панченко Б., Северин М. Математичне моделювання дифракції плоских гармонічних хвиль на жорсткому циліндричному включенні довільного поперечного перерізу, Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми управління та інформатики», 2024, 69(3), с. 33–43. doi: 10.34229/1028-0979-2024-3-2.
15. Панченко Б., Буката Л., Багачук Д. Математична модель взаємодії стаціонарних sh-хвиль з системою криволінійних тріщин у

- напівпросторі. Інфокомунікаційні та комп'ютерні технології, 2023, 1(05), 73-84. <https://doi.org/10.36994/2788-5518-2023-01-05-09>
16. Пастернак Я., Сулим Г., Пастернак Р. Взаємодія гармонічних SH-хвиль із тріщинами та тонкими пружними включеннями. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2012, 16: 112-121.
 17. Подворний А.В., Трач В.М. Вплив шаруватості на напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском в просторовій постановці. Міжвузівський збірник Наукові нотатки. Луцьк. 2023. Вип. 75. С. 240-245.
 18. Пономаренко О. та ін. Розподіл напружень у півплощині з круговим отвором при розтягу під кутом до прямолінійного краю. Агроінженерні дослідження. 2024. Вип. 28. С. 117–124.
 19. Сайко І.М. Математичне моделювання поведінки систем відбивачів при гармонічних впливах на основі сингулярних інтегральних рівнянь [Текст]: автореферат... канд. техн. наук, спец.: 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи / І.М. Сайко. - К.: Ін-т кібернетики НАН Укр. ім. В.М. Глушкова, 2016. - 23 с.
 20. Северин М. В. Дифракція плоских гармонічних хвиль на жорсткому циліндричному включенні довільного поперечного перерізу / М. В. Северин, А. Ю. Гунченко, Б. Є. Панченко // Інформатика, інформаційні системи та технології: тези доповідей двадцять першої всеукраїнської конференції студентів і молодих науковців. Одеса, 26 квітня 2024 р. - Одеса, 2024. – С. 86-88.
 21. Селезов І.Т., Кривоніс Ю.Г., Яковлєв В.В. Розсіяння хвиль локальними неоднорідностями в суцільних середовищах / К: Наук. думка, 1985. - 136 с.
 22. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки. Прикладна механіка. 2023. 59, № 1. с. 91-102.

23. Станкевич В., Светлов О., Гриньків Р. Аналіз міцності безмежної матриці, послабленої одноперіодичним масивом залікованих тріщин під крутним навантаженням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2024. – № 39. – с. 43-48.
<https://doi.org/10.15407/fmmit2024.39.043>
24. Станкевич В.З., Станкевич О.М., Баб'як М.О. Усталені коливання двошарового композита з тріщиною / Фізико-хімічна механіка матеріалів, 2025, № 6, с. 77-83.
<https://doi.org/10.15407/pmmm2025.06.077>
25. Станкевич, В. З., Бутрак, І. О., Жбадинський, І. Я. Дифракція хвилі Релея на податливому включенні у пружному півпросторі. Математичні методи та фізико-механічні поля, 2016, 59, № 2, с. 125-131.
26. Сяський А. О., Делявський М.В., Мікуліч С.Б. Вплив розмірів включення на напружений стан пластинчастих елементів за динамічного навантаження. Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві, 24 (2025), С. 516-524. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14\(24\)](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14(24))
27. Трач В.М., Подворний А.В. Вплив підсилення анізотропними композитами сталевих оболонок тунельних споруд на надійність параметрів їх вільних коливань. Вісник НУВГП. Технічні науки. Рівне, 2024. Випуск 3 (107). С. 247- 260.
28. Трач В.М., Подворний А.В. Забезпечення надійних параметрів вільних коливань залізобетонних циліндричних оболонок, підсилених анізотропним композитом / Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. Випуск 46. – НУВГП. Рівне. 2024. – С. 327-332.
29. Трач В.М., Подворний А.В., Літніцький В.І. Використання тривимірної та скінченоелементної підходів щодо встановлення напруженого стану тунельних циліндричних оправ. Ресурсоекономні

- матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. Випуск 48. – НУВГП. Рівне. 2025. – С. 269-278.
30. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Напружено-деформований стан колового циліндричного кофердаму під дією гідростатичного тиску / Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. Випуск 44. НУВГП. Рівне, 2023. Випуск 44. С. 206- 213.
 31. Шваб'юк В.І., Фурс Т.В., Коменда Н.В., Мікуліч С.Б. Інтегральні рівняння задачі дифракції хвиль у пружних середовищах з включеннями за дії нестационарних навантажень. Наукові нотатки, 75, Луцьк, 2023, С. 95-99.
 32. Шваб'юк В.І., Мікуліч С.Б., Фурс Т.В. Методика аналізу динамічного напруженого стану тіл з включеннями. Інновації у будівництві: збірник тез доповідей VIII Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. молодих учених та студентів (Луцьк, 12 травня 2023 р.) Луцьк: ЛНТУ, 2023. С. 54-56.
 33. Alblas J. B. and Kuypers W. J. J. On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate. Appl. Sci. Res., 1966. 15, 429–439.
<https://doi.org/10.1007/BF00411576>
 34. Banerjee P. Boundary Element Method in Engineering Science. McGraw Hill, New York, London, 1994.
 35. Banjai L., Sayas F.-J. Integral Equation Methods for Evolutionary PDE: A Convolution Quadrature Approach, Springer, 2022, 268 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-031-13220-9>
 36. Becker A.A. The Boundary Element Method in Engineering. A complete course. McGRAW-HILL BOOK, Cambridge, 1992, 338 p.
 37. Bonnet M.: Integral equations and boundary elements. Mechanical application of solids and fluids. (Équations intégrales et éléments de frontière. Application en mécanique des solider et des fluids), CNRS Éditions / Éditions EYROLLES, Paris, 1995. 316 p.

38. Brebbia C., Telles J., Wrobel L.: Boundary element techniques. Springer, New York, 1984.
39. Brychkov Yu. A. Handbook of Special Functions Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas, Chapman & Hall, 2008, 700 p.
40. Crampin S. Wave propagation through fluid-filled inclusions of various shapes: interpretation of extensive-dilatancy anisotropy. *Geophysical Journal International*, 1991, 104(3), 611-623.
41. Delyavskyy M., Mikulich S. Equilibrium analysis of thin orthotropic plates on a triparametric elastic base. *Mechanics And Mathematical Methods*, Vol. 6, no. 2 (2024), P. 31–46. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-31-46>
42. Dong C. Y., Lo S. H., Cheung Y. K. Stress analysis of inclusion problems of various shapes in an infinite anisotropic elastic medium. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2003, 192, 683–696. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00579-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00579-0)
43. Dravinski M., Yu M. C. Scattering of plane harmonic SH waves by multiple inclusions. *Geophysical Journal International*, 2011, 186(3), 1331-1346.
44. Grilitsky D. V. and Sulim, G. T. Stress state of a piecewise homogeneous plane with a thin-walled elastic inclusion of finite length, *Appl. Mech.*, 1972, **8** (10), 58–65 (1972).
45. Guz' A. N., Kubenko V. D., Cherevko M. A. Diffraction of elastic waves/ *International Applied Mechanis*, Volume 14, pages 789–798 (1978).
46. Gwinner J., Stephan E.P. *Advanced Boundary Element Methods: Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems*, Springer, 2018, 652 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92001-6>
47. Hardiman N. J. Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1954, 7, 226–230. <https://doi.org/10.1093/qjmam/7.2.226>
48. Hart E. L., Terokhin B. I. Computer Simulation of the Stress-Strain State of the Plate with Circular Hole and Functionally Graded Inclusion. *Journal*

- of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA), 2021, 29, 1, PP. 42–53, <https://doi.org/10.15421/142103>
49. Hart E.L., Hudramovich V.S. Computer Simulation of the Stress-Strain State of Plates with Reinforced Elongate Rectangular Holes of Various Orientations. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 2022, 108, PP. 77-86. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>
 50. Hasheminejad S. M., Badsar S. A. Elastic wave scattering by two spherical inclusions in a poroelastic medium. *Journal of Engineering Mechanics*, 2005, 131(9), 953-965.
 51. Jakobsen M. The interacting inclusion model of wave-induced fluid flow. *Geophysical Journal International*, 2004, 158(3), 1168-1176.
 52. Karim M. R., Awal M. A., Kundu T. Elastic wave scattering by cracks and inclusions in plates: in-plane case. *International journal of solids and structures*, 1992, 29(19), 2355-2367.
 53. Katsikadelis J.T. *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists: Theory and Applications (Second Edition)*, Academic Press, 2016, 446 p.
 54. Kikuchi M. Dispersion and attenuation of elastic waves due to multiple scattering from inclusions. *Phys Earth Planet Inter.* 1981a; 25, P:159–162.
 55. Korneev V. A., Johnson L. R. Scattering of elastic waves by a spherical inclusion—I. Theory and numerical results. *Geophysical Journal International*, 1993, 115(1), 230-250.
 56. Kozin O.B., Papkovskaya O. B. Analysis of stress-strain state of the shell with the inclusion in bending. *Праці Одеського політехнічного ун-ту*. 2016. Вип. 1(48). С. 24–29.
 57. Krenk. S. On quadrature formulas for singular integral equations of the first and second kind. *Quarterly of Applied Mathematics*, 33(3), 1975, 128-136. <https://doi.org/10.1090/qam/448967>

58. Krivoi A. F., Popov G. Y. Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space. J. Appl. Math. Mech., 2008. 72, 499–507
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.08.001>
59. Lavrenyuk V. I., Lavrenyuk N. V. The Stress–Strain State of a Plate with a Multilayer Inclusion. International Applied Mechanics, 2007, 43, 3, PP.329–334.
60. Lifanov I. K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices, VSP, Utrecht, 1996.
61. Linkov A. Rybarska-Rusinek L. Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges. Int. J. Eng. Sci., 2012, 61, pp. 87–93. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.06.012>
62. Liu E., Zhang Z. Numerical study of elastic wave scattering by cracks or inclusions using the boundary integral equation method. Journal of Computational Acoustics, 2001, 9(03), 1039–1054.
63. Maksimenko V., Podruzhin E., Ryabchikov M. Stress-strain state of an anisotropic plate with curved cracks and thin rigid inclusions. Mechanics of Solids. 2007, 42. 223–230. <https://doi.org/10.3103/S0025654407020070>.
64. Maksymovych O., Podhorecki A. Determination of stresses in anisotropic plates with elastic inclusions based on singular integral equations. Eng. Anal. Bound. Elem., 2019. 104, 364–372.
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.039>
65. Manoogian M.E., Lee V.W. Diffraction of SH-waves by subsurface inclusion of arbitrary shape. J Eng Mech. 1996;122(2):123–129.
66. McIver P., Linton M.C. Handbook of mathematical techniques for wave/structure interactions, Loughborough University, 2001, 304 P.
67. Mehdi Panji. A half-space TD-BEM model for a seismic corrugated orthotropic stratum. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2023, 152, pages 655–677.
68. Mkhitarian S., Kanetsyan E., Mkrtchyan M. Application of a Novel Elastic Thin Inclusion Model to the Stress State Problem of an Infinite Elastic Plate

- Reinforced with an Inclusion. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2026, 46(8): 4087-4105. <https://doi.org/10.1134/S1995080225609130>
69. Mohammadi M., Dryden J. R. Jiang L. Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate. Int. J. Solids Struct., 2011, 48, Iss. 3-4, pp. 483-491. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013> Received 09.04.20
 70. Mojtabazadeh-Hasanlouei S., Panji M., Kamalian M. On subsurface multiple inclusions model under transient SH-wave propagation. Waves in Random and Complex Media, 2022, 32(4), 1937-1976.
 71. Motamedy D., Mohammadi S.: Dynamic analysis of fixed cracks in composites by extended finite element method. Engineering Fracture Mechanics, 2010, 77, 3373–3393.
 72. Mykhas'kiv V., Kunets Y., Matus V., Khay O. Elastic wave dispersion and attenuation caused by multiple types of disc-shaped inclusions. International Journal of Structural Integrity, 2018, 9(2), 219-232.
 73. Nazarenko O., Usov A., Volkova M., Kozin O. Mathematical Modeling of the Stress-Strain State of a Plate with Rigid Linear Inclusion and Mixed Boundary Conditions. Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського, 1/2023 (138), PP. 22-28. <https://doi.org/10.32782/1995-0519.2023.1.2>
 74. Oshri O., Biswas S., Balazs A.C. Modeling the behavior of inclusions in circular plates undergoing shape changes from two to three dimensions. Phys. Rev. E, 2019, 100, 043001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.043001>
 75. Pao Y., Mow C.: Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. Crane Russak. New York, 1971. 698 p.
 76. Qi H, Yang R, Guo J, et al. Dynamic responses of a plate with multiple inclusions and depressions subjected to SH-waves. Mech Adv Mat Struct. 2020. DOI:<https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1801915>.
 77. Rana A.K., Paul S.K., Dey P.P. Stress field in an isotropic elastic solid containing a circular hard or soft inclusion under uniaxial tensile stress.

- Materials Today: Proceedings, 2019, 11, PP. 657–666.
<https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.03.024>
78. Robert, S., Conoir, J. M., & Franklin, H. Propagation of elastic waves through two-dimensional lattices of cylindrical empty or water-filled inclusions in an aluminum matrix. *Ultrasonics*, 2006, 45(1-4), 178-187.
 79. Ru Y., Wang G. F., Wang T. Diffractions of elastic waves and stress concentration near a cylindrical nano-inclusion incorporating surface effect. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2009, 131(6), 061011 DOI:10.1115/1.4000479
 80. Sadd M.H., Shukla A., Mei H., Zhu C.Y. The Effect of Voids and Inclusions on Wave Propagation in Granular Materials. In: Weng, G.J., Taya, M., Abé, H. (eds) *Micromechanics and Inhomogeneity*. Springer, 1990, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8919-4_23
 81. Savin G. N. Stress distribution around holes. NASA, 1970, 1008 p.
 82. Salam Budiman Ekere N.N., Jung Jae Pil A Study on the Comparison of Solderability Assessment. *Journal of the Korean institute of surface engineering*, 2002, 35 (2), 129-137.
 83. Savruk M. P., Kazberuk, A., Kravets, V. S., Chornenkyi, A. B. Stress state of an orthotropic plate at the holes with sharp and rounded tips. *Mater. Sci.*, 2023. 58, No. 6, 709–716. <https://doi.org/10.1007/s11003-023-00720-3>
 84. Savruk M. P., Onyshko L. I., Kvasnyuk O. I., Bida N. M. Stressed state of an orthotropic plane with two-section kinked crack under antiplane deformation. *Mater. Sci.*, 2020. 56, No. 2, 143–151. <https://doi.org/10.1007/s11003-020-00408-y>
 85. Savruk M. P., Onyshko L. Yo., Kvasniuk O. I. Stress distribution near sharp and rounded V-notches in anisotropic elastic body under antiplane strain, *Mater. Sci.*, 2023. 58, No. 4, 427–436. <https://doi.org/10.1007/s11003-023-00681-7>
 86. Savruk M., Kravets V., Onyshko L. Kvasniuk O. Determination of the Stress State of an Anisotropic Body with Smooth Curvilinear Inclusions

- Under Longitudinal Shear. *Materials Science*. 2024, 59. <https://doi.org/10.1007/s11003-024-00815-5>.
87. Shvabyuk V. et all. (2015) Stress State of Plate with Incisions under the Action of Oscillating Concentrated Forces, *Acta Mechanica et Automatica*, 9(3), 140-144. <https://doi.org/10.1515/ama-2015-0023>
 88. Shvabyuk V. et all. Dynamic Stress Concentration at the Boundary of an Incision at the Plate under the Action of Weak Shock Waves. // *Acta Mechanica et Automatica*. — 2017. —11(3).— PP. 217-221.
 89. Sigalas M. M., Economou E. N. Elastic waves in plates with periodically placed inclusions. *Journal of Applied Physics*, 1994, 75(6), 2845-2850.
 90. Sigalas M. M., Economou E. N. Elastic waves in plates with periodically placed inclusions. *Journal of Applied Physics*, 1994, 75(6), 2845-2850.
 91. Simons DA. Scattering of SH-waves by thin, semi-infinite inclusions. *Int J Sol Struct*. 1979;16:177–192.
 92. Stankevych V.Z. Analysis of 3D problems of dynamic loading of elastic piecewise-homogeneous bodies with internal cracks / *Journal of Mathematical Sciences*. – 2023. – 274, No. 5, P. 641-659. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06628-2>
 93. Stankevych V.Z., Stankevych O.M. Acoustic emission in elastic bimaterial with crack under different contact conditions on interface plane / *International Applied Mechanics*. – 2024. – 60, No. 2, P. 203-211. <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01274-w>
 94. Ting T. C. T., Schiavone P. Uniform antiplane shear stress inside an anisotropic elastic inclusion of arbitrary shape with perfect or imperfect interface bonding. *Int. J. Eng. Sci.*, 2010, 48, Is. 1, 67–77. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.06.008>
 95. Trach V.M., Podvornyi A.V., Zhukova N.B., Bondarskyi O.G. Free vibrations of layered anisotropic thick-walled cylindrical shells // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles*. – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 113. – P. 250-264 .

96. Tsuchida E., Arai Yo., Zheng Yi. Stresses in a Thick Plate Containing an Oblate Spheroidal Inclusion Under Axisymmetric Bending.. TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS Series A., 2002, 68. 631-637.
<https://doi.org/10.1299/kikaia.68.631>.
97. Wang Y.S., Wang D. Scattering of elastic waves by a rigid cylindrical inclusion partially deboned from its surrounding matrix-I. Int J Sol Struct. 1996;33(19):2789–2815.
98. Yang Q. Q., Gao C. F. Chen W. T. (2012). Stress concentration in a finite functionally graded material plate. Sci. China Phys. Mech. Astron., 55, pp. 1263-1271. <https://doi.org/10.1007/s11433-012-4774-x>
99. Zeeshan Alam, Prabhat Kaushik, Atul Kumar Sharma, Bin Wu, Weiqiu Chen. Obliquely propagating incident SH waves in periodic hard-magnetic soft laminates. International Journal of Mechanical Sciences, 2025, 287, pages 109945.
100. Zelenyak V., Kolyasa L., Klapchuk M., Oryshchyn O., Vozna S. Determining Patterns in Thermoelastic Interaction between a Crack and a Curvilinear Inclusion Located in a Circular Plate, Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2021, 6/7 (114), PP. 52-58.
<https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.24399>
101. Zhao J.X., Qi H. Scattering of plane SH-wave from a partially deboned shallow cylindrical elastic inclusion. J Mech. 2009;25(4):411–419.

ДОДАТКИ



УКРАЇНА
Волинська область

Товариство з обмеженою відповідальністю «ЛУЦЬКСПЕЦБУД»

Код 31398460, IBAN UA143003350000000260012211112 у АТ "Райффайзен Банк" м. Київ, МФО 300335, вул. Клима Савура, 29, тел./факс (0332) 74-60-04, 74-60-05 (бухгалтерія)

Індивідуальний податковий номер 313984603176

Свідоцтво № 02810478 видане 16.03.2001р.

«22» травня 2026 р.

Вих. № 021

АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи

Комісія у складі:

Голова комісії: Володимира АНДРОЩУКА, директора ТзОВ «Луцькспецбуд»

Члени комісії: Святослава ЛЮЩИКА, начальника дільниці №1,

Миколи ШПАЛАРЧУКА, начальника дільниці № 2,

склала цей акт про те, що результати дисертаційної роботи С.Б. Мікуліча на тему «ДИНАМІЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ВКЛЮЧЕННЯМИ», яка представлена на здобуття наукового ступеня доктора філософії (PhD) за спеціальністю «Прикладна математика» використані та впроваджені у виробничу практику підприємства.

У практику проектно-конструкторських робіт підприємства було впроваджено розроблені автором методики та алгоритми для аналізу динамічного напружено-деформованого стану пластинчастих елементів металоконструкцій, що містять локальні неоднорідності та включення різної фізико-механічної природи.

Зокрема, використано підходи автора для оцінки впливу динамічних (хвильових) навантажень на зони концентрації напружень поблизу включень у рамних конструкціях.

Застосування запропонованих у дисертації методів дозволило:

- Підвищити точність прогнозування динамічної міцності та тривалої довговічності тонкостінних елементів конструкцій при циклічних та імпульсних навантаженнях;
- Оптимізувати геометричні та матеріальні параметри підсилювальних включень (накладок), що дозволило знизити матеріаломісткість конструкцій на 7-10 % без втрати їхньої несучої здатності;
- Скоротити терміни проектування та проведення перевірочних розрахунків на міцність завдяки інтеграції розроблених алгоритмів у процес комп'ютерного моделювання підприємства.

Впровадження результатів дисертаційного дослідження дозволило підвищити експлуатаційну надійність металоконструкцій, зменшити ризики виникнення втомних тріщин у зонах структурних неоднорідностей та забезпечити техніко-економічний ефект за рахунок раціонального використання металопрокату.

Акт складено для подання до разової вченої ради.

Голова комісії:

Володимир Андрощук

Члени комісії:

Святослав Лющик

Микола Шпаларчук





« 7 » 05 2026 р.

УКРАЇНА
Волинська область
Приватне акціонерне товариство
“Луцьксантехмонтаж № 536”

43005 м.Луцьк, вул. К.Савура, 29, тел/факс 8(0332)746001, код ЄДРПОУ 30248307,
р/р UA333253650000026001011211154 в ПАТ “Кредобанк”,
інд. под. № 302483003177, e-mail: su536@ukr.net

**ЛИСТ ПІДТРИМКИ
щодо використання результатів
дисертаційного дослідження
у виробничі процеси**

ПрАТ «Луцьксантехмонтаж № 536» в особі першого заступника генерального директора по виробництву ВОЙТЮКА Ігоря Миколайовича засвідчує апробацію та використання розроблених методик та отриманих числових результатів дисертаційного дослідження Мікуліча С.Б. на тему: **«ДИНАМІЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ВКЛЮЧЕННЯМИ»** у виробничу практику підприємства.

Отримані у дисертаційній роботі результати та розроблені методики є затребуваними та перспективними. ПрАТ «Луцьксантехмонтаж № 536» підтверджує розуміння того, що використання отриманих у дисертаційній роботі нових наукових теоретичних результатів, прикладних програмних розробок та практичних числових результатів дозволяє ефективно проводити оцінку міцності та експлуатаційної надійності з'єднань конструктивних елементів, особливо за динамічних навантажень.

Перший заступник
генерального директора
по виробництву
ПрАТ «Луцьксантехмонтаж № 536»



Войтюк І. М.



УКРАЇНА

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

вул. Львівська, 75, м. Луцьк, 43018, тел.: +38(0332)74-61-03

e-mail: rector@lntu.edu.ua, web: www.lntu.edu.ua

код ЄДРПОУ 05477296

20.05.2026 № 1431/01-14

на № _____ від _____

Проректор з науково-педагогічної роботи
та дослідженьЛуцького національного технічного
університету«20» 05 2026 року
проф. О. ЛЮТАК

АКТ

**впровадження (використання) результатів
дисертаційного дослідження
у навчальний процес**

**Тема дисертаційної роботи: «ДИНАМІЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН
ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ВКЛЮЧЕННЯМИ»**

Розроблені методики та числові результати моделювання поширення та дифракції пружних хвиль на системі жорстких включень у ізотропних середовищах впроваджені для удосконалення викладання тем «Зсув. Розрахунок з'єднань елементів конструкцій», «Розрахунок за динамічних навантажень».

Комісія в складі:

голови: к.т.н., доц. ТКАЧУКА Анатолія Анатолійовича, в.о. декана факультету
робототехніки та штучного інтелекту

членів комісії: к.т.н., доц. ДЕНИСЮКА Віктора Юрійовича, заступника декана з
досліджень

к.т.н., доц. БОНДАРСЬКОГО Олександра Георгійовича, доцента
кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання
підтвердила впровадження вище зазначених результатів в навчальний процес
при викладанні окремих тем дисципліни «Опір матеріалів».

«20» 05 2026 року

Голова комісії:

Члени комісії:

к.т.н., доц. Анатолій ТКАЧУКк.т.н., доц. Віктор ДЕНИСЮКк.т.н., доц. Олександр БОНДАРСЬКИЙ