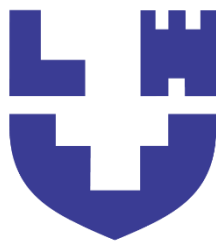


Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет



ІДЕНТИФІКАЦІЯ І МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ БЕЗПЛОТНИХ АПАРАТІВ

Конспект лекцій

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами»
галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації
(G Інженерія, виробництво та будівництво)
спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та
робототехніка
(G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка)
денної та заочної форм навчання

Луцьк 2025

УДК 519.85; 517.8
I-59

Рекомендовано до видання вченою радою факультету КІТ ЛНТУ, протокол № __ від «__» _____ 2025 року

Голова вченої ради факультету КІТ _____ Інна КОНДІУС

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки _____ Наталія ПОЛІЩУК

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ, протокол № _ від «__» _____ 2025 року.

Завідувач кафедри АКІТ _____	Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ
Укладач: _____	Лариса ГУМЕНЮК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ
Рецензент: _____	Людмила САМЧУК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки та мехатроніки ЛНТУ
Відповідальний за випуск: _____	Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ

Ідентифікація і моделювання об'єктів та систем безпілотних апаратів: конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) I-59 рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 53 с.

Конспект лекцій охоплює основні поняття про модель, процес ідентифікації, постановку задач побудови моделі, наведені класифіковані за базовими ознаками основні типи моделей об'єктів.

Конспект лекцій укладено в результаті опрацювання опублікованих джерел.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Лекція 1. Основні поняття теорії ідентифікації	5
Лекція 2. Моделі та їх види	12
Лекція 3. Моделювання систем керування.....	19
Лекція 4. Структура об'єкта моделювання	28
Лекція 5. Моделювання статичного режиму роботи об'єкта	35
Лекція 6. Моделювання динамічного режиму роботи об'єкта	43
Перелік посилань	53

ВСТУП [1]

Дисципліна «Ідентифікація і моделювання об'єктів та систем безпілотних апаратів» охоплює питання побудови математичних моделей систем безпілотних апаратів як об'єктів керування, питання пов'язані з проведенням експериментів при побудові експериментальної моделі, питань перевірки адекватності моделі і питання ідентифікації.

Дане коло задач вирішується при побудові систем керування безпілотними апаратами і тісно пов'язаний із задачами моделювання. Використання сучасних засобів моделювання динамічних систем дозволяє полегшити роботу при проектуванні і розглядати достатньо складні задачі.

При побудові моделі об'єкта вирішуються такі задачі:

1. Визначення виду моделі;
2. Побудова теоретичної моделі;
3. Проведення досліджень із метою побудови експериментальної моделі;
4. Розробка алгоритму ідентифікації;
5. Моделювання об'єкта.

Мета викладання дисципліни – набуття студентами вмінь і навиків, необхідних для побудови експериментальних моделей, перевірки адекватності отриманих моделей і вирішення питання ідентифікації.

Задача дисципліни - вивчення і засвоєння студентами методів отримання математичних моделей об'єктів і використання їх при моделюванні на ЕОМ.

В результаті вивчення дисципліни **студенти повинні вміти**:

1. будувати математичні моделі об'єктів;
2. провадити ідентифікаційний експеримент;
3. вибирати алгоритм ідентифікації

В результаті вивчення дисципліни **студенти повинні знати**:

1. види моделювання,
2. методи побудови теоретичної моделі,
3. постановку задачі оптимального керування,
4. математичні моделі типових об'єктів,
5. методику проведення ідентифікаційного експерименту,
6. основні алгоритми ідентифікації.

Лекція 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ [1, 2]

Будь-яка система керування з погляду функціонування включає три основних етапи:

1. Збір і передачу інформації про керований об'єкт;
2. Переробку інформації;
3. Видачу керуючих впливів на об'єкт управління.

Ідентифікація – це процес побудови математичних моделей об'єктів на основі результатів спостережень за поведінкою цих об'єктів і дослідження їх властивостей.

Під ідентифікацією у вузькому значенні розуміють оцінювання параметрів математичної моделі при заданій структурі моделі за результатами вимірів вхідних і вихідних сигналів.

Під ідентифікацією в широкому значенні розуміють як побудову самої моделі об'єкта, так і визначення її параметрів. Це більш складна задача.

У широкому сенсі під моделлю розуміється опис суттєвих сторін реальної системи, який в зручній формі представляє інформацію про систему. Моделі можуть мати найрізноманітніші форми, відображати різні властивості об'єктів, характеризуватися різним ступенем формалізації і деталізації, при цьому їх призначенням є побудова на основі окремих спостережень деякої загальної картини процесів, що відбуваються.

У загальному випадку, моделі можуть бути концептуальні (феноменологічні), фізичні (емпіричні) і математичні (аналітичні), залежно від того, яка частина явища найбільш істотна. Модель являє собою спрощене відображення дійсності, при цьому складність моделі знаходиться в певному співвідношенні зі складністю описуваного об'єкта.

Залежно від типу об'єкта і мети побудови моделі формальні описи можуть бути різними. В якості моделей об'єктів можуть бути використані структурні схеми, операторні рівняння, алгебраїчні, диференціальні, інтегральні, інтегродиференціальні рівняння; передавальні функції, частотні характеристики, вагові функції, графи і т.д. Всі ці моделі функціонально пов'язують вхідні і вихідні сигнали об'єктів.

У вузькому сенсі під математичною моделлю об'єкта розуміють опис функціональної залежності між сигналами, що спостерігаються - оператор зв'язку між функціями вхідних і вихідних сигналів процесу.

Побудова математичних моделей, в основному, здійснюється двома способами: аналітичним і на основі експериментальних даних, а також шляхом їх комбінацій.

Аналітичний метод ґрунтується на «розщепленні» системи на більш прості підсистеми, властивості яких відомі з раніше накопиченого досвіду, спостережень за поведінкою об'єкта з позиції законів фізики, хімії, механіки і т.д. Математичне об'єднання описів цих підсистем визначає модель системи, в цілому. Такий підхід називається аналітичним моделюванням (в його рамках проведення натурних експериментів необов'язково). Цей підхід можна

застосувати, коли даний об'єкт має досить просту структуру або всебічно вивчений.

Якщо через відсутність достатніх даних аналітичний опис об'єкта виконати неможливо, застосовують **експериментальні** методи, коли для побудови моделі безпосередньо використовуються експериментальні дані. В цьому випадку ведеться вимір вхідних і вихідних сигналів системи, і модель формується в результаті обробки відповідних даних.

При **експериментально-аналітичному** методі модель, отримана аналітичним шляхом, уточнюється в наступних експериментах.

Отже, **метою** ідентифікації є: на підставі спостережень за вхідним $u(t)$ і вихідним $y(t)$ сигналами на якомусь інтервалі часу Δt визначити вид оператора, що зв'язує вхідний і теоретичний вихідний сигнал.

При експериментальному визначенні параметрів моделі необхідно забезпечити:

- підбір адекватної структури моделі;
- вибір такого вхідного сигналу, щоб за результатами експерименту можна було знайти оцінки всіх параметрів моделі.

Звичайно ідентифікація - багатоетапна процедура. Основні її етапи наступні:

Структурна ідентифікація – полягає у визначенні структури математичної моделі на підставі теоретичних міркувань.

Параметрична ідентифікація – містить у собі проведення ідентифікуючого експерименту й визначення оцінок параметрів моделі за експериментальним даними.

Перевірка адекватності – перевірка якості моделі в значенні обраного критерію близькості виходів моделі й об'єкта.

Постановка задачі ідентифікації

Задача ідентифікації зводиться, в загальному випадку, до визначення оператора моделі, що перетворює вхідні впливи об'єкта у вихідні величини. Оператор об'єкта є його математичною формалізацією, тобто математичною моделлю об'єкта, і може бути визначений у відповідних просторах функцій.

Оператори можуть характеризуватися різними структурою і характеристиками, і відповідно, задача ідентифікації об'єкта може мати різні постановки.

Уявімо модель об'єкта у вигляді такої структурної схеми

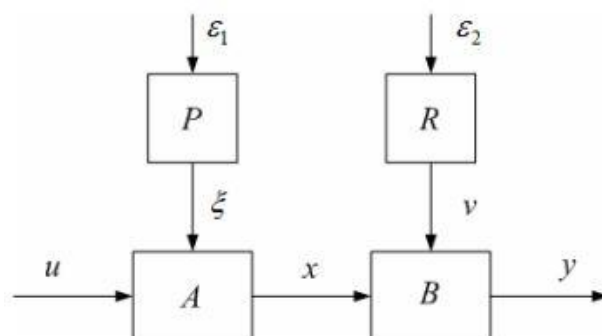


Рис. 1.1. Структурна схема моделі об'єкта.

На схемі прийняті наступні позначення:

u і y - спостережувані вхідні і вихідні сигнали. Вони можуть бути детермінованими або випадковими, можуть бути сумішшю детермінованої та випадкової складових. Вхідні сигнали можуть спеціально подаватися в систему для ідентифікації (активний експеримент), а можуть існувати в системі як керуючі або збуджуючі впливи (пасивний експеримент);

x - неспостережуваний сигнал, який оцінюється побічно по сигналу y , отриманому в результаті перетворення в об'єкті оператором B ;

ε_1 і ε_2 - неспостережувані перешкоди, які є, як правило, випадковими процесами типу білого шуму;

ζ і ν - частіше неспостережувані, зазвичай корельовані в часі випадкові сигнали, в деяких випадках містять детерміновані складові;

A , B , P , R -оператори, в деяких випадках їх вид невідомий, в інших відомий, але невідомі параметри.

Згідно з наведеною структурною схемою моделі об'єкта (рис 1.1), основними **задачами ідентифікації** є наступні:

1. Задача знаходження характеристик (параметрів) об'єкта. За відомими спостережуваними змінним u і y потрібно визначити оператори (або параметри операторів) A і B . Часто одночасно з визначенням параметрів A і B потрібно визначити параметри операторів P і R , що перетворюють неспостережувані білі шуми ε_1 і ε_2 в неспостережувані сигнали ζ і ν .

2. Задача оцінювання змінних стану. Стан об'єкта характеризується багатовимірною змінною стану, вектором, що однозначно визначає всі його характеристики. За відомими спостережуваними випадковими сигналами u і y при відомих операторах A , B , P , R з відомими параметрами потрібно визначити (оцінити) неспостережуваний випадковий сигнал x . При цьому можливі наступні постановки задачі: а) Оцінювання x в поточній момент часу - задача фільтрації, або, власне, оцінювання; б) Оцінювання x в майбутній момент часу, зміщений на Δt щодо поточного моменту - задача прогнозування або екстраполяції; в) Оцінювання x в минулий момент часу - задача згладжування або інтерполяції.

3. Задача генерації випадкових сигналів із заданими характеристиками або визначення характеристик випадкових сигналів. За спостережуваними змінними ζ або ν потрібно визначити оператор (або параметри оператора) P (або R).

У більшості робіт, присвячених ідентифікації, виділяються наступні основні складові, які потрібно виконати на етапі ідентифікації:

- Сформулювати вимоги до даних спостережень: як виконати збір експериментальних даних, як використовувати ці дані, зібрані в реальних умовах проведення експерименту;

- Визначити клас об'єктів - сукупність моделей кандидатів, з якої згодом буде відібрана найкраща модель;

- Сформулювати так звану функцію втрат або ризику, що характеризує адекватність об'єкта та створюваної моделі, і на її основі сформулювати критерій якості ідентифікації;

- Вибрати спосіб оцінки ступеню відповідності досліджуваної моделі експериментальним даним;
- Визначити процедуру верифікації моделі: провести перевірку і підтвердження адекватності моделі, тобто з'ясувати, якою мірою модель дійсно «пояснює» поведінку досліджуваної системи.

У більшості реальних ситуацій взаємодія об'єкта з навколишнім середовищем відповідає наступній стандартній схемі (рисунок 1.2).

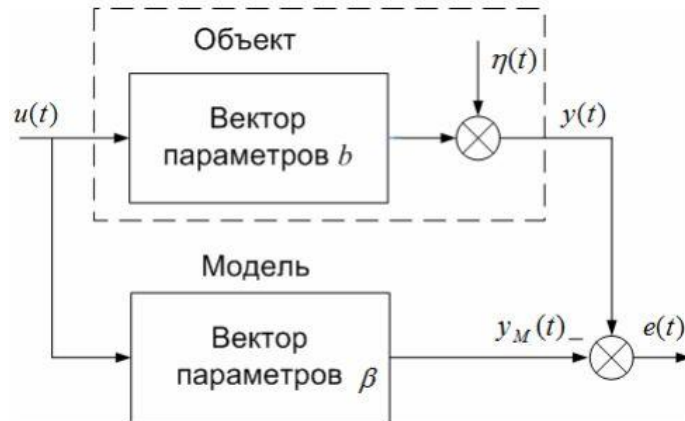


Рис. 1.2. Типова схема спостереження при ідентифікації об'єкта.

На рисунку 1.2 прийняті наступні позначення:

$u(t)$ - вхідний вплив;

$\eta(t)$ - неконтрольований випадковий вплив;

$y(t)$ - вихідний вплив об'єкта;

$y_M(t)$ - вихідний вплив моделі;

$e(t)$ - різниця (неув'язка) між виходами об'єкта і моделі;

b - вектор параметрів об'єкта;

β - вектор параметрів моделі.

Ідентифікаційний експеримент відповідно до структурної схеми спостереження (рисунок 1.2) полягає в наступному.

На входи об'єкта і моделі подається зовнішній вплив $u(t)$. В реальних умовах взаємодії об'єкта з середовищем сигнали спостереження за об'єктом спотворені випадковими збуреннями, які визначаються специфікою функціонування самого об'єкта, похибками методів і засобів вимірювань і неконтрольованими впливами зовнішнього середовища. При використанні такої схеми спостережень вважається, що результати вимірювань вхідного сигналу є дійсним вхідним сигналом, а всі внутрішні і зовнішні збурення, відхилення вимірних значень від дійсних впливів характеризуються узагальненим впливом $\eta(t)$. Зазвичай, в результаті експерименту отримують спостереження входу і виходу, тобто реалізації випадкових функцій $u(t)$ і $y(t)$. Оскільки об'єкт пов'язує вхід $u(t)$ з виходом $y(t)$, то цей зв'язок вихідної величини із вхідною формально можна представити деяким оператором f_0 :

$$y(t) = f_0(u(t), \eta(t), b) \quad (1.1)$$

Відповідно до (1.1) вихідна величина об'єкта залежить від зовнішнього впливу $u(t)$, перешкоди $\eta(t)$ і від невідомого вектора параметрів $b = [b_0, \dots, b_m]$, значення яких безпосередньому спостереженню недоступні.

На підставі відомостей про об'єкт формується модель, під якою мається на увазі деякий оператор f , що перетворює спостережуваний вхідний вплив $u(t)$ в його реакцію $y_m(t)$:

$$y_m(t) = f(u(t), \theta, \beta). \quad (1.2)$$

Модель (1.2) описується рівняннями, що містять інформацію про вимірювані вхідні і вихідні величини. Коефіцієнти цих рівнянь є параметрами моделі.

Критерій якості ідентифікації, що характеризує адекватність моделі реальному об'єкту, представляє собою середні втрати. Чим менші середні втрати, тим вища якість ідентифікації.

Класифікація методів ідентифікації

Методи ідентифікації можна класифікувати за різними ознаками.

Будемо розрізняти методи ідентифікації за трьома основними класифікаційними ознаками і характеризувати будь-який вибраний метод значеннями цих ознак:

$$C = \langle \xi, \eta, \zeta \rangle$$

де: ξ, η, ζ – структурні ознаки, які можуть приймати два значення.

Зазначимо, що структура методу повністю не характеризується цими трьома ознаками. Вказані ознаки призначені, швидше, для визначення методу, а ніж для його опису. Розглянемо і охарактеризуємо ці ознаки.

За способом тестування розрізняють активні і пасивні методи ідентифікації.

1. Ознака активності ξ .

Метод ідентифікації будемо називати *активним* ($\xi=1$), якщо при його реалізації можна задавати і змінювати стан входів об'єкта, тобто опосередковано змінювати стан середовища. У цьому випадку відбувається так зване керування об'єктом для досягнення мети ідентифікації. Якщо умови середовища, в якому міститься об'єкт, не дозволяють керувати станом його входу, тоді метод його ідентифікації будемо називати *пасивним* ($\xi=0$). Тоді, стан входів об'єкта можна охарактеризувати інформацією, що ґрунтується на результатах дослідження, отриманих у процесі нормальної експлуатації об'єкта. Блок-схема реалізації активного методу показана на рис. 1.1. У даному випадку вхід об'єкта керується у процесі ідентифікації таким чином, щоб підвищити її ефективність.



Рис. 1.1. Блок-схема активного методу ідентифікації.

За ознакою часових витрат методи діляться на адаптивні і неадаптивні (оперативні і ретроспективні).

2. Ознака адаптивності η .

Якщо інформація про поведінку об'єкта використовується у процесі ідентифікації не зразу ж, а у процесі її поступлення чи циклічно і при цьому значення параметрів, що ідентифікуються, корегуються на кожному етапі (дискретно) чи неперервно, тоді такий метод будемо називати *адаптивним* - $\eta = 1$ (модель при цьому ніби адаптується до об'єкта таким чином, щоб її реакція (на виходах) на вплив факторів зовнішнього середовища мінімально відрізнялась від реакції самого об'єкта). У протилежному випадку метод називається *неадаптивним* ($\eta = 0$).

Якщо адаптивний метод параметричної ідентифікації застосовувати у реальному масштабі часу, використовуючи безпосередньо вимірювання входу і виходу об'єкта, тоді його називають *методом самонастроюваної моделі*. Суть цього методу полягає у наступному (рис. 1.2).

У кожен момент часу зіставляють виходи об'єкта і моделі, при цьому квадрат різниці виходів мінімізується шляхом відповідного вибору параметрів (С) оператора моделі. Для підвищення ефективності процесу мінімізації використовують інформацію про стан середовища (X). Як видно з рис. 1.2, модель таким чином постійно підлаштовується до об'єкта, щоб їх реакції на один і той же вхід у кожен момент часу відрізнялись мінімально.

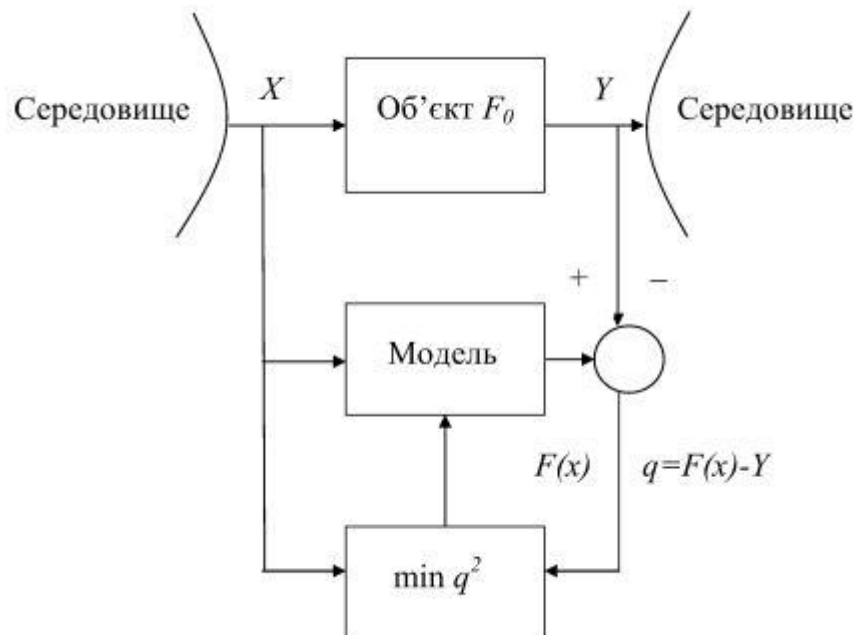


Рис. 1.2. Блок-схема реалізації методу самоналаштування моделі.

Використання адаптивного методу майже ніколи не забезпечить розв'язок задачі ідентифікації абсолютно точно, принаймні у пасивному варіанті ($\xi=0$). Зате вказаний метод дозволяє постійно поліпшувати значення ідентифікуючих параметрів. Тому адаптивний метод доцільно застосовувати для ідентифікації "дрейфуючих" об'єктів, параметри яких повільно змінюються. У цьому випадку адаптивний метод дозволить простежити

повільні зміни над виходами об'єктів.

За характером використовуваних сигналів розрізняють дискретні і неперервні методи.

3. Ознака кроку ζ .

Якщо ідентифікуючі параметри у процесі адаптивної ідентифікації ($\eta=0$) змінюються дискретно, тоді такий метод будемо називати *кроковим* ($\zeta=1$). У протилежному випадку метод є *неперервним* ($\zeta=0$).

З наведеного вище можна зробити висновок, що за трьома ознаками метод ідентифікації описати просто неможливо, однак, описані ознаки характеризують структурні особливості методу, які визначаються специфікою поведінки об'єкта.

Критерії ідентифікації.

Критерій ідентифікації — це показник (чи сукупність показників), по якому оцінюється якість ідентифікації, і який повинен прийняти екстремальне значення в процесі ідентифікації, що полягає в змінюванні за певним алгоритмом структури математичної моделі та параметрів цієї структури.

Критерій ідентифікації обчислюється в процесі ідентифікації на основі використання функції відхилення або апостеріорної інформації, тобто експериментально визначених значень вхідних та вихідних змінних на протязі певного інтервалу часу ідентифікації.

Конкретний вигляд критерію ідентифікації залежить від задачі моделювання, від використання конкретної моделі, від вимог до точності і т.п.

Частіше всього в практичному використанні застосовують інтегральний середньоквадратичний критерій:

Інколи використовують комплекс критеріїв ідентифікації, які оцінюють отриману математичну модель з різних сторін, наприклад: точність, швидкість отримання оцінки параметрів моделі тощо.

Критерій ідентифікації може доповнюватись введенням додаткових коефіцієнтів, які враховують, наприклад: цінність інформації, оцінку старіння інформації тощо.

Лекція 2

МОДЕЛІ ТА ЇХ ВИДИ [3, 4, 5]

Модель представляє об'єкт або систему у деякій формі, відмінній від форми їхнього реального існування. Вона служить засобом, що допомагає в поясненні, розумінні або удосконаленні системи. Модель об'єкта може бути точною копією цього об'єкта (хоча і виконаною з іншого матеріалу й в іншому масштабі), чи відображати деякі характерні властивості об'єкта в абстрактній формі.

Для одного і того ж об'єкта можна створити різні види його моделей залежно від способу їх подальшого використання. Це можуть бути макети, схеми (структурні або функціональні), математичні вирази, пілотні установки тощо.

Для прогнозування поведінки об'єктів зазвичай розробляють математичні моделі. На математичних моделях також виконують контрольовані експерименти в тих випадках, коли експериментування на реальних об'єктах практично неможливе через відсутність останніх, або виникаючої під час експериментів небезпеки (мережі енергопостачання, хімічні виробництва).

Головне при побудові моделі – мета. Будь-який об'єкт, процес є складним, і для кожного з них можна скласти різні моделі (або моделі одного типу, але різної складності) залежно від розв'язуваної задачі, від того, для чого будується модель. Модель є лише наближеним поданням реального об'єкта, оскільки врахувати всю сукупність факторів, що впливають на нього неможливо.

Модель називається **ізоморфною** (однаковою за формою), якщо між нею і реальною системою спостерігається повна поелементна відповідність. Така відповідність є, наприклад, між негативом і отриманим з нього зображенням, кресленням і виготовленою по ньому деталлю, між процесами в реальній системі і рівнянням, що описує поведінку цієї системи. Однак, у багатьох випадках ізоморфні моделі виявляються складними і незручними для практичного використання, тому більш зручні моделі, що дозволяють судити тільки про істотні аспекти поведінки реальних систем без їхньої деталізації. Приклад такої моделі — географічна карта по відношенню до зображеної на ній ділянки земної поверхні.

Моделі, окремі елементи яких відповідають лише великим частинам реальної системи, а повне поелементне співвідношення між моделлю і системою відсутнє, називаються **гомоморфними**.

Побудова моделі об'єкта може здійснюватися по-різному:

- 1) шляхом теоретичного аналізу;
- 2) на основі фізичних, хімічних та інших закономірностей, притаманних даному об'єкту;
- 3) в результаті узагальнення попереднього досвіду;
- 4) на базі логічного аналізу;
- 5) в результаті експерименту та інакше.

Формування математичного опису об'єкта полягає у встановленні зв'язків між параметрами процесу у цьому об'єкті, граничних та початкових умов, а також формалізації процесу у вигляді системи математичних співвідношень, що характеризують об'єкт.

Класифікація моделей

Моделі розподіляють на дві основні групи: матеріальні (фізичні) та символічні (абстрактні). Загальна їх класифікація наведена на рис 2.1.

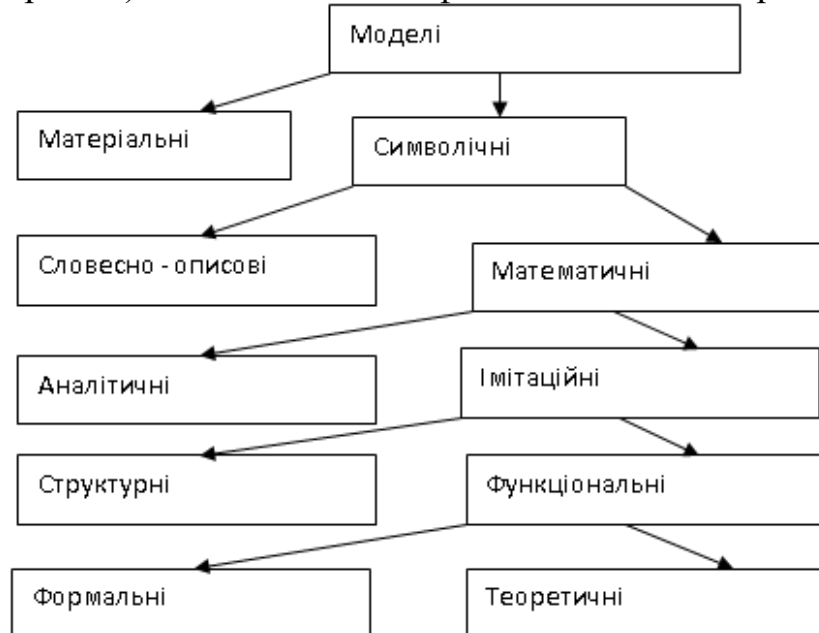


Рис.2.1. Загальна класифікація моделей

Матеріальні (фізичні) моделі часто називають просто «моделі». Фізичні моделі – це сукупності матеріальних об'єктів. Це також і пілотні установки, полігони з відповідними макетами для випробування машин, гідродинамічні труби, моделі установок, виготовлені в масштабі.

Розрізняють натуральні, масштабовані, моделі аналогів.

Натуральні моделі – це реальні досліджувані системи або їхні частини. Застосовуються для дослідження систем, натуральні моделювання яких обходиться дешевше, ніж створення й дослідження моделей, для яких потрібно уточнення характеристик або одержання підтвердження. Натуральні моделі відрізняє повна адекватність реальної системи й обумовлена цим висока точність і вірогідність результатів моделювання. Тому процес проектування кінчається етапом натурних випробувань системи.

Масштабовані моделі – використовуються при дослідженні складних систем, для яких неможливо або складно дати досить точний математичний опис функціонування, а натурних зразків ще не існує, або експерименти не припустимі (дослідження граничних режимів роботи при дії великих збурювань, аварійних режимів і т.д.). У цьому випадку використовується модель тої ж фізичної природи, що й досліджувана система, що відрізняється від натурального образу масштабами. Теоретичною основою масштабного моделювання є теорія подібності, що передбачає дотримання геометричної подібності оригіналу й моделі відповідних масштабів для параметрів. Для

цього натуральні значення параметрів вираховуються на масштабованих моделях.

Аналогові моделі – відрізняються від натуральних і масштабованих моделей тим, що процеси вихідної системи вивчаються на процесі – аналогу іншої фізичної природи. Обов'язковою умовою є виконання фізичної подібності - однозначна відповідність між параметрами об'єкта, що вивчається і математичних описів його моделі, що виражається в тотожності, процесів, що відбуваються у них. Подібні величини, що характеризують процеси, які відрізняють тільки масштабами і характеристиками, отриманими на моделі, можна однозначно визначити з характеристик оригіналу.

У **символічних** моделях фіксація, побудова, опис об'єкта або явища даються на тій чи іншій мові. При цьому не має значення, на якій конкретній мові описаний той чи інший об'єкт, тому що перехід з однієї мови опису об'єкта на іншій не представляє принципових труднощів.

Прикладами символічних моделей є, наприклад, диференціальні рівняння другого порядку, що описують коливання в електричному контурі або маятника, креслення виробу, схема технологічної обробки, географічні карти, описи, дані розмовною мовою і т.д.

Символічні моделі поділяються на моделі словесно-описові і математичні.

Словесно-описові моделі розрізняють: гносеологічні, інформаційні (кібернетичні); сенсуальні (чутливі); концептуальні.

Гносеологічні моделі, спрямовані на вивчення об'єктивних законів природи (моделі сонячної системи, біосфери, світового океану, катастрофічні явища природи).

Інформаційні моделі описують поведінку об'єкта оригіналу, але не копіюють його.

Сенсуальні моделі – моделі будь-яких почуттів, емоцій, що роблять вплив на людину: музика, живопис, поезія.

Концептуальні моделі – це абстрактні моделі, що виявляють причинно – наслідкові зв'язки, властиві досліджуваному об'єкту й істотні в рамках певного дослідження. Один і той же об'єкт може бути представлений різними концептуальними моделями, які будуються залежно від мети дослідження (одна відображає тимчасові об'єкти функціонування, інша - виявлення відмов на працездатність системи).

До словесно - описових моделей відносяться технічні завдання, пояснювальні записки до проектів і звітів, постановки задач у словесно-описовій формі. Такі моделі дозволяють досить повно описати об'єкт або ситуацію, однак їх неможливо використовувати безпосередньо для аналізу процесів формалізованим шляхом за допомогою комп'ютера. Тому словесно-описові моделі звичайно перетворюють у математичні для зручності подальшого оперування з ними.

Математичними моделями називаються комплекси математичних залежностей і знакових логічних виразів, що відображають істотні характеристики досліджуваного явища. У багатьох випадках математичні

моделі найбільш повно відображають об'єкт. Прикладом є системи алгебраїчних і диференціальних рівнянь. Теоретичні методи дослідження, які застосовують математичні моделі, дозволяють повно і глибоко дослідити будь-яку задачу до того, як інженери-практики із нею зустрінуться.

Математичні моделі можуть бути аналітичними або імітаційними.

При використанні **аналітичних моделей** процеси функціонування елементів складної системи записуються у виді деяких функціональних співвідношень (алгебраїчних, інтегро - диференціальних, кінцево-різницевих і т.п.) чи логічних умов. Аналітична модель може досліджуватися одним з наступних способів:

аналітично,— коли одержують у загальному виді явні залежності для шуканих величин;

чисельно,— коли, не маючи рішення рівнянь у загальному виді застосовують засоби обчислювальної техніки, щоб одержати числові результати при конкретних початкових даних;

якісно,— коли, не маючи рішення в явному виді, можна-знайти деякі властивості рішення, наприклад, оцінити його стійкість.

При використанні імітаційних моделей, на відміну від аналітичних, в комп'ютері відтворюється поточне функціонування технічної системи в деякому масштабі часу.

Імітаційне моделювання нагадує фізичний експеримент. Звідси перша перевага імітаційних моделей — наочність результатів моделювання (як остаточних, так і проміжних). Якщо при аналітичному моделюванні забезпечується подібність характеристик об'єкта і моделі, то при імітаційному подібність є в самих процесах, що відбуваються у моделі і реальному об'єкті.

Одна з основних переваг імітаційних моделей — можливість моделювання навіть у тих випадках, коли аналітичні моделі або відсутні, або (через складність системи) не дають практично зручних результатів.

З точки зору збору статистичних даних імітаційна модель дає можливість проводити активний експеримент за допомогою цілеспрямованих змін параметрів моделі на деякій множині реалізації. Останнє дозволяє досліджувати оптимізуючі функції якості (функціонали) системи за допомогою комп'ютера.

При рішенні ряду задач можуть застосовуватися імітаційні математичні моделі, що відображають тільки **структурні** (зокрема, геометричні) властивості об'єкта. Такі структурні моделі можуть мати форму матриць, графів, списків векторів і виражати можливе розташування елементів у просторі, безпосередні зв'язки між елементами у виді каналів, проводів, трубопроводів і т.п.

Для аналізу **функціональних** залежностей за допомогою отриманого в результаті моделювання ряду числових результатів можуть бути використані методи пошуку: регулярні методи, методи випадкового пошуку і методи теорії статистичних рішень. Таким чином, на відміну від рішення окремих задач імітаційне моделювання на комп'ютері є якісно більш високою ступінню вивчення складних систем.

За способами одержання функціональні математичні моделі поділяють на теоретичні і формальні.

Теоретичні моделі одержують на основі вивчення фізичних закономірностей; структура рівнянь і параметри моделей мають при цьому певне фізичне тлумачення. Теоретичний підхід у більшості випадків дозволяє одержувати математичні моделі більш універсальні, справедливі для широких діапазонів зміни зовнішніх параметрів.

Формальні моделі одержують на основі прояву властивостей об'єкта, що моделюється, у зовнішньому середовищі. Формальні моделі порівняно з теоретичними точніші в околах тієї точки простору параметрів, поблизу якої вони визначалися, але менш точні далі від цієї точки.

При моделюванні складної системи звичайно використовується сукупність декількох моделей з числа всіх різновидів. Будь-яка система або підсистема може бути представлена різними способами, що значно відрізняються одна від одної за складністю і деталізацією. У більшості випадків у результаті досліджень з'являється кілька різних моделей однієї і тієї ж системи. При цьому, залежно від глибини аналізу, прості моделі послідовно замінюються усе більш складними.

Для зручності оцінки і порівняння схем моделювання між собою сформульовано три головні **вимоги до математичних моделей**.

Точність математичної моделі — її властивість, що відображає ступінь збігу прогнозованих з її допомогою значень параметрів об'єкта з дійсними значеннями цих параметрів. Дійсні значення параметрів об'єкта звичайно ототожнюють з експериментально отриманими.

Економічність математичної моделі визначається насамперед витратами часу. Показником економічності математичної моделі може служити також кількість внутрішніх параметрів, що використовуються у ній. Чим більше таких параметрів, тим більше витрат часу потрібно для одержання відомостей про їх чисельні значення.

Ступінь універсальності математичної моделі визначається її застосовністю до аналізу в одному чи багатьох режимах функціонування.

В процесі моделювання в загальному випадку можна виділити такі **основні етапи**:

1. вивчення процесів, явищ, які необхідно моделювати;
2. складання (визначення) моделі;
3. перевірка адекватності моделі оригіналу;
4. дослідження моделі з переносом результату дослідження на оригінал;
5. практичне використання результатів моделювання.

Переваги моделювання:

1. зменшення витрат на експеримент;
2. можливість створення критичних ситуацій, включаючи і аварійні, які можливі на об'єкті дослідження;
3. можливість дослідження складних об'єктів без безпосереднього вивчення їх (кібернетичні моделі).

Недоліки моделювання: разом з тим моделювання як метод пізнання є обмеженим, тому що модель відображає лише певні сторони об'єкта, а не відображає всього спектру властивостей станів об'єкту в цілому. Крім того при отриманні моделі приймається система припущень, яка спрощує чи ідеалізує загальну картину характеристик об'єкта.

Основні принципи моделювання

Модель і система знаходяться у деяких співвідношеннях, від яких залежить ступінь відповідності між ними. При цьому модель і система можуть бути ізоморфними, коли існує відповідність між ними. Саме на основі такої відповідності, яка ґрунтується на основі спільних факторів входу моделі і системи, а також критеріїв їх оцінювання, реалізують процес моделювання.

Водночас під час реального моделювання, у більшості випадків, проводять спрощення системи, тобто на початковому етапі ідентифікації об'єкта скорочують спектр його властивостей і можливостей поведінки в умовах впливу зовнішніх факторів. Це приводить до зменшення кількості вхідних факторів, а, відповідно, і виходів. Отже, аналогія, абстракція і спрощення є основними етапами, які використовують при побудові моделей систем.

При аналізі і синтезі систем управління застосовують два принципи моделювання:

1. класичний (індуктивний);
2. системний.

Перший принцип в основному використовують при моделюванні простих об'єктів. При моделюванні складних об'єктів управління використовують системний принцип.

Класичний принцип (рис. 2.2) передбачає моделювання системи при переході від частинного до загального і синтезує (створює) модель шляхом злиття, додавання окремих компонентів моделювання в загальний.

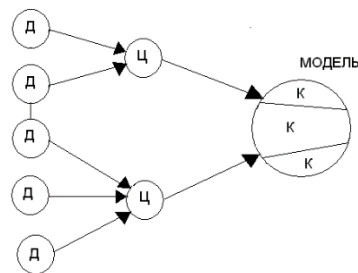


Рис 2.2.Схема класичного принципу.

За класичним принципом процес (об'єкт), який моделюється, розділяється на окремі підсистеми, тобто здійснюється вибір за певними даними (Д) та формуються задачі і цілі, окремі для кожної підсистеми. Цілі відображають окремі сторони функціонування об'єкта. Ці сторони відображаються окремими компонентами (К) моделі об'єкта. Модель являє собою суму окремих її компонентів, які ізольовані одна від одної. Отже, розроблення моделі на основі класичного підходу означає підсумовування окремих компонент у єдину модель, причому кожна з компонент вирішує свої

власні задачі і вона є ізольованою від інших частин моделі. Така модель не дає змоги визначити системний ефект, який проявляється тільки при взаємодії окремих складових К.

Системний принцип (рис.2.3), на відміну від класичного, передбачає послідовний перехід від загального до часткового, в основі моделювання лежить мета дослідження. Виходячи із мети дослідження здійснюється виділення мети об'єкта в цілому та окремих його елементів.

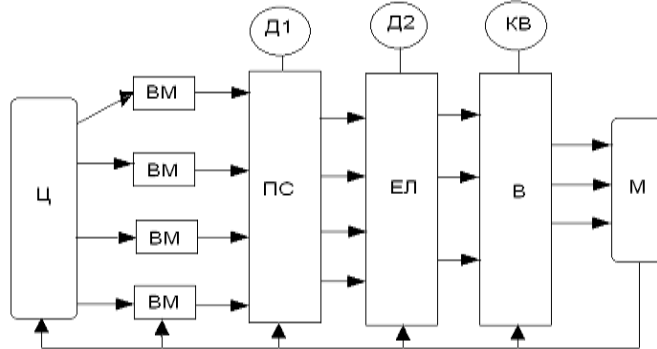


Рис 2.3.Схема моделювання з використанням системного підходу.

Важливим для системного підходу є визначення структури системи, як сукупності зв'язків між її елементами, що відображають взаємодію компонентів. Структуру системи можуть вивчати ззовні, з погляду складу окремих підсистем і відносин між ними, а також з середини. У цьому випадку аналізують окремі властивості, що дозволяють системі досягати заданої мети, тобто коли вивчають функції системи.

Відповідно до цього запропоновано кілька підходів до дослідження структури системи з її властивостями, до яких слід, перш за все, віднести *структурний і функціональний*.

При структурному підході виявляють склад елементів системи і зв'язки між ними. Аналіз сукупності елементів і зв'язків між ними дозволяє зробити висновок про структуру системи. Вона залежить від мети дослідження і може бути описана на різних рівнях моделі. Найбільш загальним описом структури є топологічний опис, що дозволяє визначити у загальних поняттях складові частини системи.

При функціональному підході розглядаються окремі функції, тобто алгоритми поведінки системи. На наступному етапі оцінюють функції, які виконує система, причому під функцією розуміють властивість, що забезпечує досягнення мети. Оскільки функція відображає властивість, а властивість, у свою чергу, відображає взаємодію системи S із зовнішнім середовищем E , тому властивості можуть бути відображені у вигляді деяких характеристик елементів S_{iv} підсистем S_i або системи S в цілому.

За наявності деякого еталону порівняння можна ввести кількісні і якісні характеристики систем. Для кількісної характеристики вводять показники, що відображають співвідношення між даною характеристикою і еталоном. Якісні характеристики системи знаходять, наприклад, за допомогою методу експертних оцінок.

Лекція 3

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ [2, 3, 4, 5]

Будь-який процес – це рух до певного кінцевого результату. Він ніколи не протікає в умовах ідеальної рівноваги. Неперервно виникають збурення. Тому необхідно неперервно керувати процесом, компенсуючи ці збурення шляхом ручного чи автоматичного керування.

Одномірними називають об'єкти, що мають один вхід и один вихід, *багатомірні* (багатозв'язні) об'єкти мають кілька входів и кілька виходів.

Об'єкт називається *динамічним*, якщо його вихідний вплив залежить не тільки від вхідного впливу у поточний момент часу, але і від попередніх значень входу. Це означає, що об'єкт має інерційність (пам'ять). Математичні моделі динамічних об'єктів задають його поведінку в часі.

Об'єкт називається *статичним*, якщо його реакція на вхідний вплив не залежить від передісторії, від поведінки системи в минулому, а також від попередніх значень входу. Статичні системи мають миттєву реакцію на вхідний вплив. Статичні моделі описують процеси, які не змінюються в часі, тобто поведінку об'єкта в установлених режимах.

Об'єкт називається *детермінованим*, якщо його вихідний вплив однозначно визначається структурою об'єкту і вхідними впливами і не залежить від неконтрольованих випадкових факторів. В реальних умовах спостережувані вихідні сигнали змінюються не тільки під впливом спостережуваних входів, а і через численні неспостережувані випадкові перешкоди. Якщо ці перешкоди малі або відсутні, то систему можна вважати детермінованою.

Система, в якій випадкові перешкоди істотно впливають на вихідні змінні, називається *стохастичною*. Стохастична (ймовірнісна) модель відображає вплив випадкових факторів, тому між вхідними та вихідними змінними існує не однозначна функціональна залежність, а ймовірнісна. Зазвичай змінні стану стохастичного об'єкта оцінюються в термінах математичного очікування, а вхідні впливу - ймовірнісними законами розподілу.

Об'єкт називається *лінійним*, якщо для нього справедливий принцип суперпозиції, тобто реакція об'єкта на лінійну комбінацію (суперпозицію) двох вхідних впливів дорівнює тій же самій комбінації реакцій даного об'єкта на кожен з впливів:

$$F(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) = \alpha f(u_1(t)) + \beta f(u_2(t)), \quad (3.1)$$

де $u_1(t)$ і $u_2(t)$ - вхідні впливу; α і β - довільні коефіцієнти. В іншому випадку об'єкт вважається *нелінійним*.

Об'єкт називається *неперервним*, якщо стани його вхідних і вихідних впливів змінюються або вимірюються неперервно протягом певного проміжку часу.

Об'єкт називається *дискретним*, якщо стан його виходів і входів визначений лише в дискретні моменти часу.

Об'єкт називається *стаціонарним*, якщо його реакція на однакові вхідні

впливи не залежить від часу застосування цих впливів, тобто параметри такого об'єкта не залежать від часу. В іншому випадку говорять, що об'єкт *нестационарний*.

Об'єкт називається об'єктом з *зосередженими параметрами*, якщо його вхідні і вихідні величини залежать тільки від часу (тільки від одної змінної). Моделі об'єктів з зосередженими параметрами містять одну або кілька похідних за часом від змінних стану і являють собою звичайні диференціальні рівняння. Математична модель перехідних процесів в об'єкті поряд з диференціальним рівнянням містить також додаткові умови однозначності - початкові умови.

Об'єкт називається об'єктом з *розподіленими параметрами*, якщо вихідна величина залежить від декількох змінних - від часу і від просторових координат. Така ситуація зазвичай має місце, коли досліджувана характеристика об'єкта, наприклад, температура, концентрація речовини і т.п., розподілена в деякому об'ємі. У цьому випадку математична модель об'єкта містить часткові похідні і описує як динаміку процесу в часі, так і розподіл характеристики в просторі. Математична модель процесів в розподіленому об'єкті включає диференціальне рівняння в часткових похідних, початкові умови і граничні умови.

Характеристиками типу «*вхід - вихід*» є певні оператори, що пов'язують поведінку вихідної величини об'єкта з вхідною, наприклад, передаточна, перехідна, вагова функції.

Для ідентифікації використовується інформація, яку можна розділити на два види:

- апіорна А (до дослідів);
- апостеріорна В (після дослідів).

Апіорна інформація

Апіорну інформацію необхідно мати ще до спостереження за входами і виходами об'єкта. Наприклад, апіорна інформація може характеризувати структуру математичної моделі за такими ознаками:

$$A = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle. \quad (3.2)$$

Ці ознаки кодують об'єкт за чотирма характеристиками. Водночас необхідно зазначити, що структура об'єкта повністю не вичерпується цими чотирма ознаками [5].

Розглянемо вказані ознаки типу об'єкта детальніше і уточнимо їх зміст.

1. Ознака динамічності α .

Будемо об'єкт називати *динамічним* ($\alpha=1$), якщо поведінка його виходу залежить не тільки від значень входу у даний момент часу, але й від попередніх значень входу. Це означає, що об'єкт має пам'ять (або інерційність), яка і визначає залежність виходу від попередніх значень входу.

У протилежному випадку об'єкт будемо називати *статичним* ($\alpha=0$).

2. Ознака стохастичності β .

Будемо об'єкт називати *стохастичним* ($\beta=1$), якщо поведінка його виходу залежить від входів об'єкта, що не контролюються або (що те саме) сам об'єкт має неконтрольоване джерело випадкових факторів збурень. У

іншому випадку будемо об'єкт називати *детермінованим* ($\beta=0$).

Зазначимо, що детермінованих об'єктів не існує у природі, позаяк будь-яке вимірювання вносить свою похибку у результат спостереження. Тому правильніше стверджувати про “малу” і “велику” стохастичність об'єкта, розуміючи, що “малу” стохастичність можна не враховувати і називати такий об'єкт детермінованим.

3. Ознака нелінійності γ .

Об'єкт будемо називати *нелінійним* ($\gamma=1$), якщо його реакція на два різних збурення входу не є еквівалентною сумі реакцій на кожне з цих збурень незалежно. Для випадку системи без завад нелінійність визначається умовою:

$$F_0(X_1+X_2) \neq F_0(X_1)+F_0(X_2). \quad (3.3)$$

При невиконанні цієї умови, тобто при рівності у цьому випадку, об'єкт будемо називати *лінійним* ($\gamma=0$).

4. Ознака дискретності δ .

Будемо об'єкт називати *дискретним* ($\delta=1$), якщо стан його входів і виходів змінюється чи вимірюється лише у дискретні моменти часу $t=(1,2,\dots,n)$. Якщо ж значення входу і виходу змінюються чи вимірюються неперервно, тоді об'єкт називатимемо *неперервним* ($\delta=0$). Отже, спосіб вимірювання може змінити цю ознаку об'єкта.

Як видно, апріорна інформація (A) у деякій мірі може спрогнозувати вид моделі, а для її повного проектування і кінцевої реалізації необхідно мати відомості про характер динамічності об'єкта (при $\alpha=1$), вид його нелінійності (при $\beta=1$) і ймовірні властивості стохастичності (при $\gamma=1$).

Отже, апріорна інформація в загальному випадку дозволяє визначити структуру моделі. Цю процедуру називають ідентифікацією в широкому розумінні або *структурною ідентифікацією*.

Однак структура математичної моделі — це не модель, для її визначення в повному обсязі необхідно мати вимірювання вхідних та вихідних змінних в процесі експериментальних досліджень об'єкта чи управління цим об'єктом.

Вид моделі, який визначається апріорною інформацією, може змінитися після аналізу апостеріорної інформації, тобто після спостереження за поведінкою входу і виходу об'єкта при різному наборі керованих факторів або при різних діапазонах їх зміни.

Результати вимірювань дають можливість визначити параметри математичної моделі при визначенні структури, тобто здійснити ідентифікацію в вузькому розумінні (*параметричну ідентифікацію*) чи уточнити, вибрати для конкретної моделі поточну структуру — ідентифікація з подальшим визначенням параметрів вибраного типу структури.

Апостеріорна інформація

Якщо апріорна інформація (A) має якісний характер, то апостеріорна — кількісний, що є результатом спостереження входу і виходу об'єкта. Цей протокол має вигляд:

$$B = \langle X, Y \rangle, \quad (3.4)$$

де X — результати усіх вимірів входів об'єкта;

Y — результати вимірів його виходів за той же період спостереження.

Для неперервних об'єктів ($A = \alpha\beta\gamma\delta$) маємо значення неперервних даних:
 $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ у інтервалі часу $0 \leq t \leq T$

Таким чином, отримуємо:

$$B_0 = (\langle X(t), Y(t) \rangle (0 \leq t \leq T)). \quad (3.5)$$

Це означає, що поведінку об'єкта зареєстровано у вигляді $(n+m)$ різних кривих: $(x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, y_m(t))$ у цьому інтервалі.

Зазначимо, що величини X і Y у даному випадку не є тотожними, позаяк X охоплює всю залежність $X(t)$ у заданому інтервалі, а $Y(t)$ може мати тільки конкретне значення цієї залежності у момент часу t . Аналогічною є тотожність Y і $Y(t)$.

Отже, параметри X , Y достатньо повно у комплексі характеризують апостеріорну інформацію (B), що, у свою чергу, дозволяє на наступному етапі дослідження детальніше оцінити об'єкт для встановлення мети його ідентифікації.

Для розробки схем автоматичного керування технологічними процесами у першу чергу треба знати особливості цих процесів. Оскільки системи автоматичного керування чи регулювання активно працюють саме в динамічних режимах, викликаних певним збуренням, а в статичних режимах знаходяться у стані очікування, необхідно знати особливості технологічних процесів саме в динамічних режимах.

Збурення, що порушують рівновагу процесу, можуть викликати в об'єкті зміни, що з часом зникають і ніколи більше не з'являються. Деякі збурення обумовлені силами, що періодично змінюються у часі. У цьому випадку і реакція процесу на них матиме періодичний характер. Більшість збурень є випадковими в їх зміні у часі. Їх появу можна передбачити методом теорії імовірностей.

Технологічні процеси промисловості дуже різноманітні, що ускладнює їх вивчення. Але їх можна розподілити на три групи:

- 1) процеси перемішування матеріалів (кінематика), рух рідин, зміна форми та протягування матеріалів;
- 2) процеси тепло- і масопередачі;
- 3) ядерні процеси.

Розглянемо кожну з цих груп детальніше.

1-а група. Кінематика перемішування матеріалів. Тверді тіла, рідини, гази у процесі виробництва змінюють своє просторове розташування, заповнюють та спорожнюють ємності, перемішуються. При вивченні процесу перемішування для спрощення розглядають один із двох випадків: повне (ідеальне) перемішування та повна відсутність перемішування.

Рух рідин. Факторами, що впливають на рух рідин є:

- інерція рухомої рідини;
- опір потоку, викликаний шорсткістю труб та силами в'язкого тертя всередині рідини;
- здатність до стискання рідини та пружність ємностей, що її містять.

При математичному описі руху рідин постають задачі двох типів. Задачі

I-го типу належать до витікання нестисненої рідини з баків, проходження її трубопроводами, через клапани та інші пристрої. Задачі II-го типу виникають за умови стисливості рідин та посудин чи трубопроводів, що їх містять. У даному випадку можливі вібрація, утворення звукових хвиль та їх розповсюдження в рідинах чи трубопроводах.

Зміна форми та протягування матеріалів. При витіканні розплавів через отвори вони можуть ставати твердими внаслідок контакту з оточуючим середовищем або внаслідок створення спеціальних для цього умов. Знову виникають задачі двох типів. Задачі I-го типу належать до процесів лиття, витягування та прокатування. Вони пов'язані з деформацією та зміною форми матеріалу. При розв'язуванні задач першого типу розглядають перехідний процес або зміну у часі характеру пластичного матеріалу. Задачі II-го типу виникають при пересуванні матеріалів спрямовувальними пристроями. У другому випадку досліджують динамічні властивості механічної системи, що характеризується зосередженими чи розподіленими параметрами (маса, пружність, затухання) та має велику кількість ступенів свободи.

2-а група. *Динаміка теплових процесів.* Це процеси нагрівання та охолодження рідин, газів та твердих тіл. Охолодження чи нагрівання можуть здійснюватись за допомогою одного зі способів теплопередачі: конвекції, теплопровідності, випромінювання, або їх комбінації.

Дослідження динамічної поведінки теплових систем починають із складання диференціальних рівнянь у часткових похідних. Ці рівняння характеризують тепловий потік у просторі і часі.

Динаміка масопередачі. Масопередачею є процес переходу одного чи декількох компонентів з однієї фази до іншої. Загальний підхід до дослідження масопередачі полягає у пошуку певних співвідношень. До них належать швидкості масопередачі, що характеризують середню кількість компонента, що переноситься за одиницю часу з однієї фази до іншої. Рушійною силою масопередачі є градієнт концентрації.

Стадії розробки моделей

На основі системного підходу запропоновано послідовність розробки моделей, у якій виділяють дві основні стадії проектування: макропроектування і мікропроектування.

На стадії *макропроектування*, виходячи з результатів аналізу апріорної інформації про реальну систему S і зовнішнє середовище E визначено такі стадії проектування:

- будують модель зовнішнього середовища;
- виявляють ресурси і обмеження для побудови моделі системи;
- вибирають модель системи;
- вибирають критерії, що дозволяють оцінити адекватність моделі M реальної системи S .

Побудувавши модель системи і модель зовнішнього середовища, на основі критерію ефективності функціонування системи у процесі моделювання вибирають оптимальну стратегію керування, що дозволяє реалізувати можливості моделі для відтворення окремих напрямків

функціонування реальної системи.

Стадія *мікропроекування* суттєво залежить від конкретного виду вибраної моделі. У разі вибору імітаційної моделі необхідно забезпечити створення інформаційного, математичного, технічного і програмного забезпечення системи моделювання. На цій стадії можна встановити основні характеристики створеної моделі, оцінити час роботи з нею і витрати ресурсів для отримання моделі процесу функціонування системи із заданою адекватністю.

Незалежно від виду запропонованої моделі при її побудові необхідно керуватися комплексом принципів системного підходу:

- пропорційно-послідовне і поетапне розроблення усіх напрямків функціонування моделі;
- узгодження інформаційних, ресурсних, економічних та інших характеристик;
- врахування співвідношення окремих рівнів ієрархії у системі моделювання;
- врахування цілісності моделі системи на кожному незалежному етапі її планування, дослідження і побудови.

Модель повинна відповідати заданій меті її створення, тому окремі частини повинні компонуватися взаємно, виходячи з єдиного системного завдання.

З розвитком системних досліджень та з розширенням експериментальних методів вивчення реальних явищ все більше значення мають абстрактні методи, з'являються нові наукові підходи моделювання та ідентифікації об'єктів, автоматизуються елементи розумової праці. Важливе значення при створенні реальних систем мають математичні методи аналізу і синтезу, оскільки значна кількість відкриттів ґрунтується на теоретичних дослідженнях. Проте було б неправильно забувати про те, що основним критерієм будь-якої теорії є практика, і навіть суто математичні твердження перевіряють експериментальними дослідженнями.

Мета моделювання систем керування

Щоб керувати об'єктом, потрібно знати, чим керувати, тобто мати модель об'єкта, на якій можна проаналізувати наслідки передбачуваного керування і вибрати найкращий. Тому у процесі ідентифікації такого виду необхідно створити модель, яка, перш за все, повинна задовольнити потреби керування. Зазначимо, що така модель синтезована спеціально для потреб керування. Тому вона може і не відображати внутрішніх механізмів явища, які дуже необхідні для пізнавальної моделі. Такій моделі достатньо тільки констатувати наявність певного формального зв'язку між входом і виходом об'єкта. Характер і особливості цієї моделі складають основу моделі, яку отримують у процесі ідентифікації об'єкта керування. При цьому необхідність ідентифікації і її специфіка визначаються метою керування.

Під *керуванням* будемо розуміти процес такої ціленаправленої дії на об'єкт, в результаті якої об'єкт на кожному наступному етапі ідентифікації переходить у стан, який ближчий до мети, ніж попередній стан.

На рис. 3.1 показана загальна схема керування об'єктом.

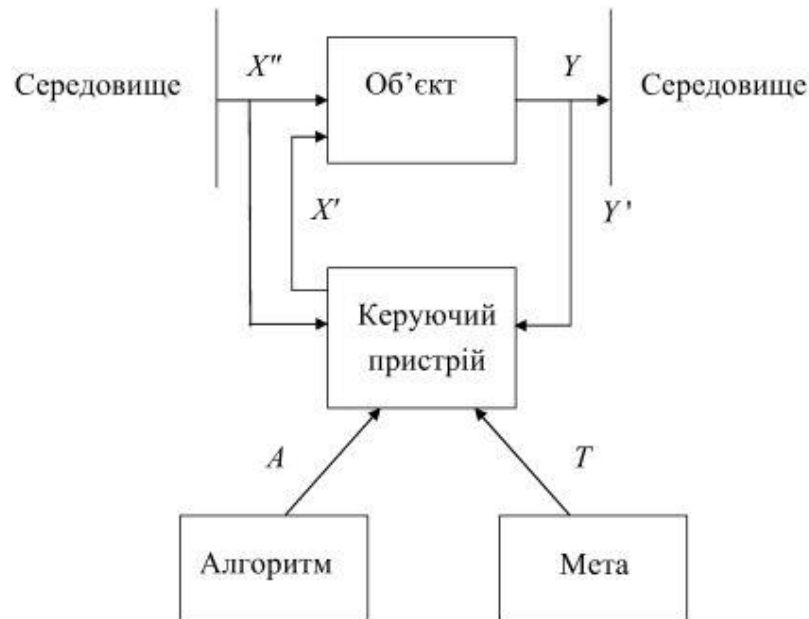


Рис. 3.1. Загальна схема керування.

На рис. 3.1. прийнято такі умовні позначення:

X' – керована складова дії середовища (керування об'єктом сприймається так само, як і дія середовища);

X'' – некерована, але контрольована складова;

Y' – інформація про стан об'єкта, яка є доступною керуючому пристрою. Ця інформація складає тільки частину інформації, яка є на виході об'єкта (Y), тобто $Y' \in Y$.

Крім того, для синтезу процесу керування необхідно визначити мету (T), яку повинен “визначати” керуючий пристрій своїм впливом на об'єкт.

Водночас для досягнення мети необхідно мати алгоритм керування (A), який показує, яким чином можна досягнути цієї мети.

Мета (T) визначає вимоги, виконання яких забезпечується організацією керованого впливу X' з допомогою алгоритму (A) і збором інформації у каналі Y' .

Не знаючи, як X' і X'' впливають на стан Y' не можна визначити критерії процесу керування (X'), з допомогою якого можна досягнути мети (T).

Для спрощення моделі мету ділять на кілька етапів, внаслідок чого створюють ефективніші види моделей залежно від отриманих етапів моделювання.

Якщо мета моделювання відома, тоді на наступному етапі вирішують проблему побудови моделі. Побудова моделі є можливою при наявності інформації або за умови, коли експериментатори висувають гіпотези щодо структури, алгоритмів і параметрів досліджуваного об'єкта. На підставі цього здійснюють ідентифікацію об'єкта. На сьогодні широко застосовують різні способи оцінювання параметрів системи: метод найменших квадратів, метод стохастичної апроксимації, метод максимальної правдоподібності, марковське оцінювання та ін.

Якщо модель побудована, тоді на наступному етапі ідентифікації об'єктів вирішують проблему реалізації моделі. Основним завданням реалізації моделі є мінімізація часу отримання кінцевих результатів і забезпечення їх достовірності.

Для правильно побудованої моделі характерним є те, що вона виявляє лише ті закономірності, які необхідні дослідникові. Причому у розробленій моделі не розглядають властивості системи, які є не суттєвими для даного дослідження. Оригінал і модель повинні бути одночасно схожими за значущими ознаками, що дозволяє виділити найважливіші властивості, які вивчаються. У цьому сенсі модель виступає уособленням оригіналу, що забезпечує конкретизацію і вивчення лише деяких властивостей реального об'єкта.

Таким чином, при моделюванні складних об'єктів у одних випадках складнішим етапом є вирішення проблеми ідентифікації, у інших – складнішим є етап вирішення проблеми побудови формальної структури об'єкта. Можливі труднощі і при реалізації моделі, особливо у випадках імітаційного моделювання складних систем. При цьому значною є роль дослідника у процесі моделювання. Постановка задачі, побудова змістовної моделі реального об'єкта є творчим процесом. У цьому сенсі немає формальних шляхів вибору оптимального виду моделі. Часто відсутні формальні методи, що дозволяють достатньо точно описати реальний процес. Тому вибір тієї або іншої аналогії, вибір того або іншого математичного апарату моделювання повністю ґрунтується на досвіді дослідника і його помилка може призвести до неадекватних результатів моделювання складної системи.

Якщо у процесі моделювання суттєве місце займає реальний фізичний експеримент, тоді важливою є надійність інструментальних засобів, які використовують для аналізу інформації. У цьому плані збої і відмови програмно-технічних засобів можуть призвести до отримання спотворених значень вихідних даних, що відображають перебіг процесу.

Тому при проведенні фізичних експериментів необхідно мати спеціальне устаткування, розроблене математичне і інформаційне забезпечення, що дозволяє реалізовувати діагностику засобів моделювання на кожному етапі ідентифікації. Це дозволить нівелювати ті помилки у вихідній інформації, які викликані несправностями устаткування.

Побудова математичних моделей експериментальним шляхом.

Експериментальні методи дослідження об'єктів управління набули широкого вжитку, особливо для складних об'єктів управління.

Розділяють два види експериментальних досліджень: пасивний та активний експеримент.

Пасивний експеримент передбачає вимірювання змінних об'єкта без втручання в його роботу, тобто в режимі нормального функціонування об'єкта.

Активний експеримент полягає в тому, що поряд із вимірюванням змінних об'єкта на нього наносять сплановані дії.

В процесі експерименту дослідження об'єкту управління можна виділити три основні етапи:

1. підготовка та планування експерименту;
2. проведення експерименту;
3. обробка результатів експерименту.

Переваги експериментальних досліджень:

а) найменші витрати на вивчення фізико – хімічної природи процесів, що відбуваються в об'єкті;

б) відносно незначні витрати часу на визначення параметрів математичної моделі.

в) задовільна точність апроксимації.

Недоліки експериментальних досліджень:

а) не можна проаналізувати фізико – хімічні явища, що відбуваються в об'єкті, тому що при експериментальних дослідженнях об'єкт представляється у вигляді чорного або сірого ящика;

б) при експериментальному дослідженні математична модель об'єкта відтворює особливості тільки того об'єкта, на якому проводився експеримент;

в) немає можливості встановити зв'язок параметрів математичної моделі з конструктивними параметрами об'єкта, а в деяких випадках з режимами його функціонування.

Особливості експериментальних досліджень активним методом.

Активний експеримент проводять за такими методами:

1. класичний (або послідовний активний експеримент);
2. метод планування експерименту;
3. нанесення певних дій — тестів на об'єкт управління в процесі управління об'єктом.

Останній метод застосовується в системах управління, в складі яких є ідентифікатори, тобто в складі систем з пошуковою ідентифікацією.

Класичний метод полягає в тому, що вхідні змінні об'єкта (фактори) в процесі експерименту підтримуються на певних стабільних значеннях рівня. Кількість рівнів залежить від задачі досліджень, виду математичних моделей тощо. Основною особливістю класичного методу є те, що експеримент полягає у послідовному змінюванні від одного рівня до іншого, одного фактору до іншого при стабілізації інших факторів. Такий метод дозволяє отримати математичні моделі з достатньою точністю, але характеризуються значними витратами на експеримент.

Наприклад, кількість експериментів, у яких n змінних, k різних факторів та m повторюваностей (кількість паралельних дослідів):

$$N=m*k^n.$$

(для повного дослідження об'єкта з 4-а змінними на 10-ти рівнях в 2-ох повторюваностях потрібно провести 20 тис. експериментів . А при проведенні повного факторного експерименту для лінійної моделі потрібно провести 32 експерименти ($2*2^2$)).

Лекція 4

СТРУКТУРА ОБ'ЄКТА МОДЕЛЮВАННЯ [1, 5]

Обладнання, в якому виникає необхідність забезпечення певного технологічного процесу та керування ним шляхом організації керуючих дій, називають технологічним об'єктом керування або просто об'єктом керування (ОК). Він охоплює частину технологічної схеми виробництва, обмежену входом і виходом.

Визначальним при виборі меж об'єкта керування є фізичний зміст керованого параметра та місця можливого встановлення датчиків і органів керування.

Кожний технологічний процес характеризується певними технологічними параметрами, а саме: температурою, тиском, концентрацією, рівнем і т.і. Керування технологічним процесом, а отже об'єктом керування, полягає у здійсненні впливу на ці технологічні параметри через вплив на матеріальні або енергетичні потоки. В результаті цього впливу значення керованого або керованих технологічних параметрів підтримується на заданому рівні або здійснюється їх цілеспрямована зміна згідно з певним критерієм керування.

Технологічні параметри, що визначають якість технологічного процесу в досліджуваному об'єкті і якими з технологічних міркувань треба керувати називають вихідними параметрами або вихідними керованими величинами, або виходами ОК. Вихідний параметр об'єкта керування і матеріальний вихід технологічного об'єкта не одне і теж. Вихідним параметром ОК, наприклад теплообмінника, може бути температура на його виході матеріального потоку (нагрітого мастила), яке відкачується, в свою чергу через вихідний патрубок, який і є матеріальним виходом.

Вихідна величина (параметр) - параметр об'єкта, що змінюється під впливом процесів, викликаних в об'єкті зміною його вхідної величини.

Вхідна величина (параметр) - параметр об'єкта, що змінюється в результаті діяння сигналу, що надійшов ззовні.

Входами або вхідними параметрами об'єкта можуть бути параметри матеріального або енергетичного потоків та інші параметри, що впливають на вихідну величину. Вхідні параметри розподіляють на керуючі дії і збурюючі або збурення.

Одночасно з термінами вхід (вихід), вхідний (вихідний) параметр користуються терміном вхідний (вихідний) сигнал.

Під сигналом в автоматичі розуміють зміну або стан певної величини, призначеної відображати, згідно з прийнятою домовленістю, інформацію, що міститься в дії. Зазвичай сигнал подають певною математичною функцією, наприклад $x_{вх}(t)$, $x(t)$, $\lambda(t)$ - вхідні сигнали; $y_{вих}(t)$, $y(t)$, $\zeta(t)$, $u(t)$ - вихідні сигнали. Позначення сигналу обирається довільно з певних міркувань. З точки зору автоматичного керування в об'єктах моделювання цікавляться динамічною залежністю між вхідними та вихідними величинами. Тому замість

вхідних і вихідних величин, наприклад $x_{вх}$, x , λ , $u_{вих}$, u , ζ , u , варто звернути увагу на вхідні і вихідні сигнали $x_{вх}(t)$, $x(t)$, $\lambda(t)$ і т.і.

Вихідною величиною об'єкта завжди є керована величина. Важливішою вхідною величиною – є керуюча змінна, за допомогою якої система переводиться до заданого стану. Рештою вхідних величин можуть бути перешкоди (збурення), які призводять до небажаного відхилення керованої величини від заданого значення.

Керуюча дія є результатом дій керуючих пристроїв або регулятора і одночасно є входом об'єкта.

Збурюючі дії не залежать від роботи керуючих пристроїв даного об'єкта. Це є шкідливий для даного об'єкта вплив. Внутрішній зв'язок в об'єкті між входом і виходом називають каналом впливу або каналом.

Об'єкти керування можуть мати декілька вхідних параметрів Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) та значну вхідних X_j ($j = 1, 2, \dots, m$). На рис. 4.1 представлено схеми такого об'єкту.

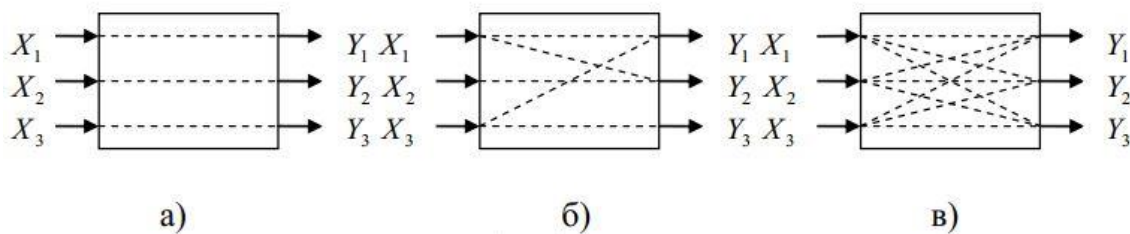


Рис.4.1. Схеми об'єктів з каналами впливу: а) - автономними (незалежними); б) - частково зв'язаними; в) - взаємозв'язаними

Максимальна кількість каналів впливу в об'єкті є $n \cdot m$. Однак не завжди існує внутрішній взаємозв'язок між всіма входами і всіма виходами. Деякі входи повністю або частково не впливають на частину виходів. Якщо такий вплив між параметрами зовсім відсутній, такі параметри називають **незв'язаними**. Те саме можна сказати і про канали впливу.

У системах керування об'єктами із взаємозв'язаними каналами впливу виникає необхідність створення додаткових зв'язків для пригнічення цього взаємозв'язку. Тобто об'єкти з автономними каналами впливу є «привабливішими», «зручнішими» у керуванні.

Із взаємозв'язаних каналів об'єкта одні можуть впливати на виходи більше, інші – менше. Для оцінювання міри впливу вхідних параметрів об'єкта на вихідні введено поняття *чутливості*, яка є властивістю цього об'єкта змінювати характеристики свого функціонування під впливом зміни своїх параметрів і зовнішніх збурюючих дій. Чутливість фактично визначає вибір керуючих дій на об'єкт та можливу реакцію об'єкта на ті чи інші збурення. Чим більшою є чутливість певного каналу керування, тим ефективнішим буде керування за цим каналом. Чим більшою є чутливість певного каналу збурення, тим більше неприємностей слід очікувати від відхилень даного входу.

Якщо система має одну керовану величину, її називають **одновимірною**, дві – **двовимірною** і т.д.

Якщо система в динамічному режимі описується лінійним диференціальним рівнянням або їх системою, вона є лінійною. Нелінійну систему описує нелінійне диференціальне рівняння (або система нелінійних рівнянь).

Для лінійної системи виконується **принцип суперпозиції**, згідно з яким результат дії декількох входів (прикладених в одному або різних місцях) є сумою результатів впливу кожного з цих входів окремо.

Реальна система може бути лінійною лише в певному обмеженому діапазоні її параметрів. Деякі нелінійні системи в достатньо вузькому діапазоні зміни окремих величин можна замінити лінійними. Часто таке наближення справедливе лише у нескінченно малому околі початкової точки (основного технологічного режиму). Тоді цю систему вважають такою, що може підлягати лінеаризації (лінеаризована система). Системою із суттєвою нелінійністю можна вважати таку, статична характеристика якої наведена на рис.4.2, де $V(t)$ - вхідний сигнал, $F(t)$ – вихідний.

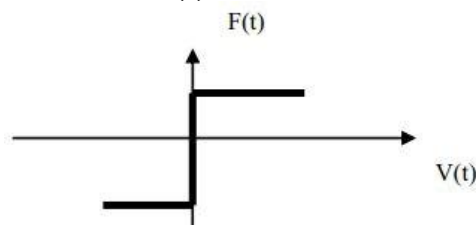


Рис.4.2. Статична характеристика нелінійного об'єкта

Функціонування технологічних ОК має допустиму область (нормальний технологічний режим), яка задається значеннями параметрів об'єкта. Вхідження параметрів у допустиму область можна задати так:

$$\begin{aligned} x_j &\in x_{j\text{дон}} (j = 1, 2, \dots, m); \\ y_i &\in y_{i\text{дон}} (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1)$$

Для технологічних ОК під допустимою областю зміни значень параметрів зазвичай розуміють область регламентних обмежень, тобто обмежень, визначених регламентом технологічного процесу. Регламентні обмеження визначають мінімальні та максимальні значення параметрів, у межах яких режим технологічного процесу вважається нормальним. У цьому випадку (1) набуває виду

$$\begin{aligned} x_{j\text{min}} &\leq x_j \leq x_{j\text{max}} (j = 1, 2, \dots, m); \\ y_{i\text{min}} &\leq y_i \leq y_{i\text{max}} (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2)$$

Визначальні технологічні параметри ОК, наприклад, концентрацію, рівень, тиск і т.і. можна подати відповідними координатами або координатними осями простору визначення процесу (простору станів). У такому, часто багатомірному просторі (гіперпросторі) за виразами (2) можна виокремити допустиму область нормального технологічного процесу як деякого многогранника (симплекса) регламентних обмежень. При такому

поданні технологічного процесу, керування ним можна трактувати як забезпечення розташування його параметрів (координат) у межах області нормального технологічного процесу або пошук оптимуму згідно з обраним критерієм у межах цієї області. При моделюванні технологічного ОК слід враховувати обмеження (1) або (2), що накладаються на вхідні параметри.

Задачею керування є забезпечення обмежень на вихідні параметри.

Класифікація об'єктів

В будь-якому технологічному процесі можна виокремити прості процеси. Впливаючи на них, можна керувати процесом будь-якої складності. До простих (одиничних) процесів належать, наприклад, процес змішування, нагрівання (охолодження), хімічна реакція, заповнення ємності тощо. Об'єкти з однією керованою величиною розподіляють на об'єкти з керованим рівнем, тиском, концентрацією, витратою.

Залежно від пристосовності до керування об'єкти бувають з позитивним, негативним самовирівнюванням і без самовирівнювання. З точки зору гідродинаміки об'єкти розподіляють на :

- 1) об'єкти ідеального змішування;
- 2) об'єкти ідеального витіснення;
- 3) об'єкти проміжного типу, а саме об'єкти комірчастого типу.

Усі гідродинамічні моделі потоків записуються у вигляді рівнянь, що відображають зміну концентрації речовини в потоці.

Умови фізичної реалізованості моделі *об'єкта ідеального змішування* виконуються, якщо в усьому потоці або на досліджуваній його ділянці відбувається повне (ідеальне) перемішування частин потоку. Речовина на вході потоку до зони ідеального змішування миттєво розподіляється в межах усього об'єму цієї зони. Рівняння, що описує зміну концентрації в зоні ідеального змішування,

$$V \frac{dC}{dt} = v_r (C_0 - C), \quad (3)$$

де V - об'єм зони ідеального змішування, м³;

v_r - об'ємна швидкість потоку, що надходить і виходить з зони ідеального змішування, м³/с;

C_0, C - концентрація речовини на вході та в зоні ідеального змішування, кг-моль/м³;

t - час, с.

Такою моделлю можна описати процес переміщення рідин в апаратах зі спеціальними перемішувальними пристроями, з відбивальними перегородками, ребрами тощо.

Умови фізичної реалізованості моделі *об'єкта ідеального витіснення* виконуються у поршневному потоці (рис.4.3), коли у напрямку руху z потоку перемішування повністю відсутнє, а у напрямку, перпендикулярному руху, відбувається ідеальне перемішування.

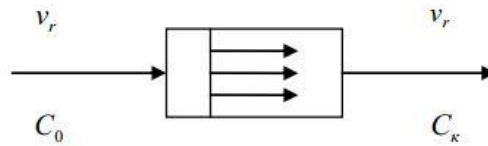


Рис.4.3. Схема руху рідини в об'єкті ідеального витіснення

Рівняння, що описує зміну концентрації в зоні ідеального витіснення,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{v_r}{F} \frac{\partial C}{\partial z}, \quad (4)$$

де F - площа перерізу зони ідеального витіснення, m^2 .

Серед об'єктів, що описуються цією моделлю, є трубчасті апарати з великим значенням відношення довжини L до діаметра. Рівняння (4) визначає функцію двох змінних: часу t та координати z довжини, тобто $C(z, t)$. Його розв'язок шукають за початкових умов

$$C(z, 0) = C_0, \quad 0 \leq z \leq L \quad (5)$$

та граничної умови

$$C(0, \tau) = C_0(\tau), \quad \tau \geq 0 \quad (6)$$

Фізична суть поняття *комірчастої моделі* полягає в тому, що потік розбивається на ряд послідовно з'єднаних комірок. Вважається, що в кожній з цих комірок відбувається повне перемішування потоку, а перемішування між комірками відсутнє. Кількість таких ідеальних комірок n є параметром, що характеризує модель реального потоку. Якщо $n=1$, маємо модель ідеального перемішування; якщо $n=\infty$ - ідеального витіснення.

Комірчаста модель за умови, що об'єми усіх комірок однакові, сума їх дорівнює об'єму апарату та об'ємна швидкість потоку стала, описується системою рівнянь виду

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{v_r}{V} (C_{i-1} - C_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

В апаратах речовина не лише переноситься з матеріальним потоком, але й у ній відбуваються різні зміни в процесі перенесення.

Рівняння (3), (4), (7) описують розподіл речовини в потоках різної гідродинамічної структури. Аналогічні рівняння можна записати, якщо замість концентрації розглядати іншу характеристику потоку, наприклад, температуру.

Для розробки схем автоматичного керування технологічними процесами у першу чергу треба знати особливості цих процесів. Оскільки системи автоматичного керування чи регулювання активно працюють саме в динамічних режимах, викликаних певним збуренням, а в статичних режимах знаходяться у стані очікування, необхідно знати особливості технологічних процесів саме в динамічних режимах.

Динамічні характеристики більшості процесів можна визначити кількісно. Змінювані в часі змінні, що характеризують процес, можуть бути

описані за допомогою диференціальних рівнянь, чи шляхом застосування інших математичних інструментів. Коли є математичний опис процесу, можна переходити до аналізу та проектування систем автоматичного керування.

Будь-який процес – це рух до певного кінцевого результату. Він ніколи не протікає в умовах ідеальної рівноваги. Безперервно виникають збурення. Тому необхідно неперервно керувати процесом, компенсуючи ці збурення шляхом ручного чи автоматичного керування.

Збурення, що порушують рівновагу процесу, можуть викликати в об'єкті зміни, що з часом зникають і ніколи більше не з'являються. Деякі збурення обумовлені силами, що періодично змінюються у часі. У цьому випадку і реакція процесу на них матиме періодичний характер. Більшість збурень є випадковими в їх зміні у часі. Їх появу можна передбачити методом теорії імовірностей.

Особливості математичних моделей САР

Всі системи діляться на системи з розімкнутим ланцюгом впливів, із замкнутим ланцюгом впливів і комбіновані.

Функціональна схема системи з розімкнутим ланцюгом впливів (рис. 4.4, а) включає пристрій попередньої обробки інформації 1, що формує сигнал, який порівнюється із задаючим сигналом з програмного пристрою 2. Сигнал неузгодженості після елемента порівняння проходить послідовно через пристрій формування команд управління 3, підсилювально-перетворювальний пристрій 4 і виконавчий пристрій 5. На виході останнього формується керуючий вплив на об'єкт регулювання 6. Значення регульованої величини ОР на виході оцінюється контролюючим пристроєм 7.

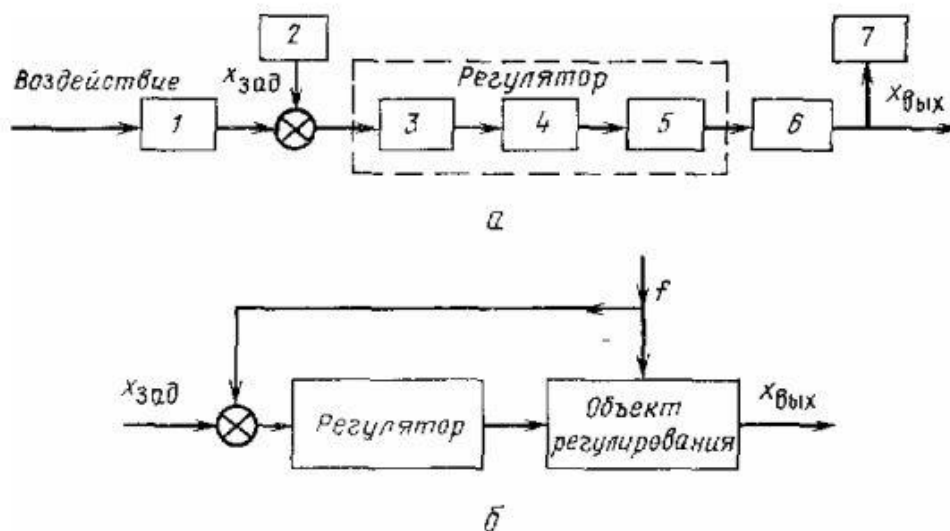


Рис. 4.4. Функціональні схеми автоматичних систем з розімкнутим ланцюгом впливів (а) і з регулюванням по збуренню (б)

Різновидом систем з розімкнутим ланцюгом впливів є система регулювання по збуренню (рис. 4.4, б). У зазначеній системі виміряється, перетворюється і формується керуючий вплив по збурюванню, що діє на ОР.

В автоматичних системах регулювання з розімкнутим ланцюгом впливів відсутній контроль за дійсним значенням регульованої величини, відхилення якої різні при різних збурюваннях.

Функціональна схема системи із замкнутим ланцюгом впливів показана на рис. 4.5. У ній можна виділити задаючий програмний пристрій 2, прямий ланцюг від елемента порівняння до виходу ОР (3-6) і ланцюг зворотного зв'язку від виходу ОР до елемента порівняння, у який входять вимірювальний пристрій 7 і пристрій попередньої обробки інформації 1. Оскільки керуючий вплив на ОР у таких системах АСР визначається відхиленням регульованої величини від заданого значення, то АСР називаються системами, побудованими на принципі відхилень. Залежно від технологічних задач АСР за принципом відхилень підрозділяються на системи стабілізації, системи програмного регулювання і стежачі системи.

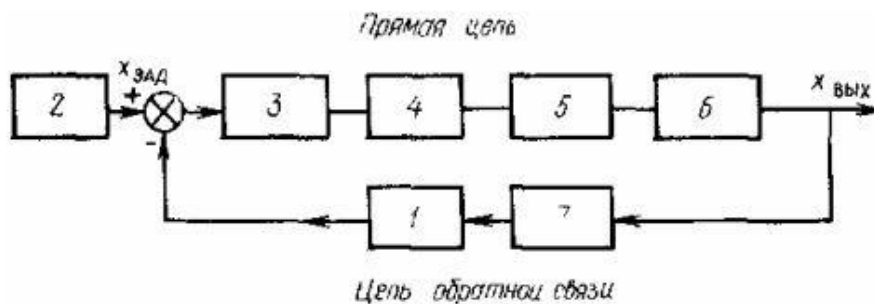


Рис. 4.5. Функціональна схема АСР із замкнутим ланцюгом впливів

Якщо задачею системи є підтримка регульованої величини на виході ОР на заданому рівні, то АСР відноситься до систем стабілізації.

Для розглянутих прикладів реалізації систем автоматичного регулювання виділяються два основних структурних елементи - об'єкт управління і власне система, що управляє рухом об'єкта (рис. 2б). Природно в основі проектування лежать знання властивостей - характеристик об'єкта управління. Для можливості прогнозувати поведінку об'єкта при різних впливах необхідно мати його точний опис, що дозволяє визначити або розрахувати поведінку об'єкта - модель.

Лекція 5

МОДЕЛЮВАННЯ СТАТИЧНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ОБ'ЄКТА [1, 5]

Якщо властивості перетворення вхідних сигналів не змінюються з часом, то систему і її модель називають стаціонарною; у протилежному випадку — нестаціонарною.

Реакція *стаціонарної* системи на будь-який заданий тип збурення залежить тільки від інтервалу часу між моментом початку дії вхідного збурення і даним моментом часу, тобто властивість стаціонарності означає, що процес перетворення вхідних сигналів інваріантний щодо зміщення вхідних сигналів у часі.

Реакція *нестаціонарної* системи залежить як від поточного часу, так і від моменту прикладення вхідного сигналу. У цьому випадку при зміщенні вхідного сигналу в часі (без зміни його форми) вихідні сигнали не тільки зміщуються в часі, але і змінюють свою форму.

До стаціонарних моделей можна звичайно віднести і моделі одномоментні, які використовуються у тих випадках, коли моделюється система, для якої необхідно одержати якесь рішення у визначений момент часу. Прикладом можуть бути системи керування запасами матеріалів, у яких одномоментні моделі застосовуються скрізь (визначення однократного обсягу замовлення на поповнення запасів або часу подачі замовлення).

Частковим випадком стаціонарних моделей є моделі статичні, котрі включають опис зв'язків між основними змінними процесу в установлених режимах (у рівноважному стані без зміни в часі). Наприклад, математичний опис статички технологічного процесу складається звичайно з трьох видів рівнянь: матеріального і теплового балансів, термодинамічної рівноваги системи (характеристика рушійної сили) і швидкостей протікання процесів (хімічних реакцій, тепло - і масопередачі і т.п.). Для розрахунку повільних процесів чи процесів, що протікають з невеликими відхиленнями від стабільних умов, приймається припущення, що дозволяє вважати процес установленим.

Статична модель. Статичні характеристики

При формуванні математичної моделі об'єкта треба попередньо виділити в ньому простіші елементи залежно від їх функціонального призначення. Іноді буває доцільно виділяти частини об'єкта за фізичними процесами. Наприклад, можна виділити елементи, в яких протікають гідромеханічні процеси, і окремо ті, в яких відбуваються електричні процеси.

При будь-якому підході застосовують величини двох видів. *До першого* належать залежні від часу змінні, які характеризують рух об'єкта. Ними можуть бути координати розташування деталі на транспортері, тиск та витрата рідини, сила та напруга електричного струму тощо.

До другого виду величин належать параметри, що характеризують фізичні властивості та умови роботи елементів об'єкта. Це, наприклад, геометричні розміри елементів, густина та в'язкість робочої рідини, коефіцієнти тертя, тиски, температури та витрати робочої рідини, якщо ці величини не

визначають миттєвого стану системи, а, відповідно, не належать до першого виду. Параметри можуть бути сталими або змінними у часі, але в останньому випадку вони мають входити до заздалегідь відомих функцій часу.

Із змінних першого виду утворюються вхідні величини, що описують зовнішні дії на об'єкт та дію елементів об'єкта один на одного. Решта змінних першого виду складатиметься з вихідних величин та внутрішніх змінних. Останні можуть вилучатися з моделі для подальшого її застосування.

Залежно від властивостей системи в сталому режимі розрізняють статичні та астатичні АСР. В основі такого ділення лежить точність підтримки сталості регульованої величини при наявності впливу.

До тих пір, поки величини, що визначають стан системи, не змінюються у часі, система знаходиться в рівновазі.

Статичним називається об'єкт, у якому регульована величина визначається залишковим (статичним) відхиленням і залежить від величини впливу.

Статичні характеристики визначають стан об'єкта в сталих (рівноважних) режимах роботи. Співвідношення, що пов'язують між собою вхідні та вихідні величини при різних станах рівноваги об'єкта, називають рівняннями статички.

Рівняння статички — рівняння яке описує залежність між вхідною й вихідною величиною елемента в сталому режимі $U_{вих} = F(X_{вх})$.

Статична характеристика лінійного елемента має вигляд:

$$F(x_j, y_i) = 0 \quad \begin{matrix} (j=1,2\dots m) \\ (i=1,2\dots n) \end{matrix} \quad (1)$$

Графік, побудований за рівнянням (1), є статичною характеристикою об'єкта, елемента об'єкта чи каналу об'єкта залежно від того, які величини розглядаються як вхідні та вихідні. Статичні характеристики можна отримати аналітичним та експериментальним шляхом. Статична характеристика є математичною моделлю одного каналу впливу об'єкта моделювання для його функціонування в сталих режимах. Існують нестійкі об'єкти, що не мають сталих режимів. Для них відсутня залежність між входами і виходами. Модель статичного режиму можна подати рівнянням(и) статички чи статичною(ими) характеристикою(ами).

Статичну модель, що відображає усі зв'язки в об'єкті моделювання, називають **повною статичною моделлю**. Якщо ж модель відображує лише окремі зв'язки в об'єкті, то таку модель називають **частинною**. Така модель може, наприклад, відображувати функціональний взаємозв'язок між одним вихідним параметром y_i і всіма вхідними:

$$y_i = f(x_1, x_2 \dots x_j \dots x_m) \quad \text{або} \quad F(y_i, x_1, x_2, \dots, x_j \dots x_m) = 0. \quad (2)$$

У більшості випадків як статичні моделі використовують саме частинні моделі.

Рівняння статички можуть бути алгебраїчними для об'єктів із зосередженими параметрами чи диференціальними для об'єктів із розподіленими параметрами. Модель статички може бути до того ж представлена імовірнісними залежностями чи графами.

Коли статична характеристика елемента чи системи близька до лінійної, вона може бути представлена рівнянням прямої виду

$$U_{вих} = a + k X_{вх}$$

де k - коефіцієнт передачі, значення і розмірність якого залежать від вибору одиниць виміру вхідних та вихідних величин. Якщо обидві величини мають однакову розмірність або є безрозмірними, то коефіцієнт k стає безрозмірною величиною і його називають коефіцієнтом підсилення.

Гладкі статичні нелінійні характеристики, що плавно змінюють форму, але є однозначними, при малих відхиленнях змінних щодо сталих значень замінюються лінеаризованими, коефіцієнт підсилення яких визначається відношенням малих приростів Δy_i та Δx_j вихідної та вхідної величини в околі початку координат або тієї точки на статичній характеристиці, що відповідає тому статичному режиму:

$$k = \Delta X_{вих} / \Delta X_{вх} = \operatorname{tga}.$$

Лінеаризація здійснюється по дотичній у даній точці $X_{вх0}$ (рис.5.1.). Провівши в різних точках нелінійної статичної характеристики дотичні, дістанемо апроксимовану, кусково-лінійну статичну характеристику, кожна ділянка якої характеризується своїм значенням k

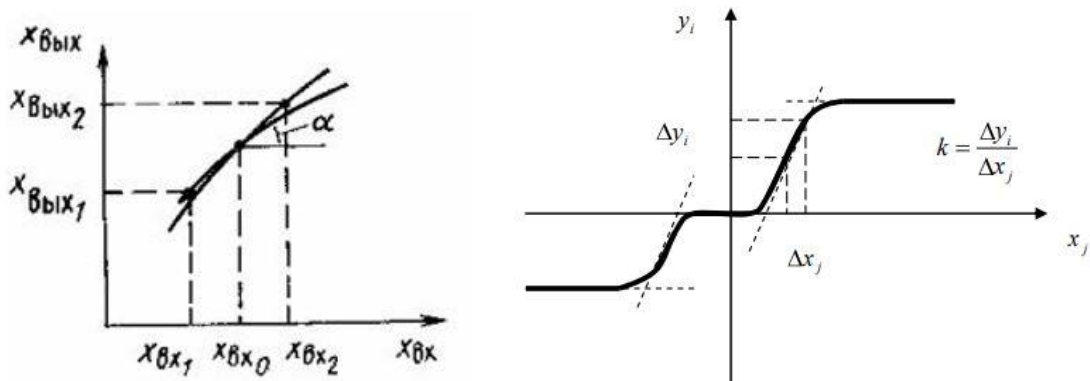


Рис.5.1. Лінеаризація гладких статичних характеристик по дотичній.

В обмежених діапазонах y_i та x_j статична характеристика іноді може бути апроксимована за допомогою січної, що проводиться так, щоб заштриховані на рис. 5.2 області по обидва боки січної мали приблизно однакові площі. Для даного способу апроксимації коефіцієнт k буде сталим в усьому діапазоні зміни y_i та x_j .

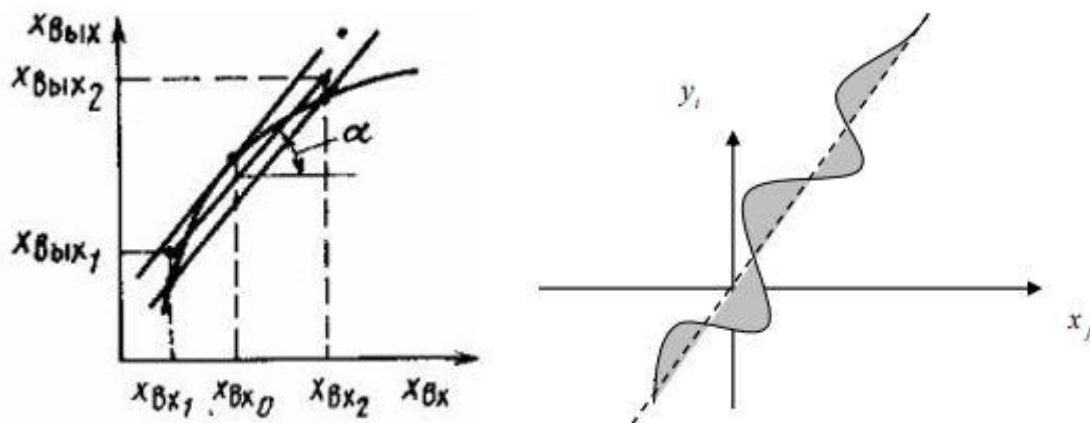


Рис.5.2. Лінеаризація характеристики за допомогою січної.

Вибір способу лінеаризації залежить від кожного конкретного випадку.

Елементи та системи можуть мати і неоднозначні статичні характеристики (рис.5.3), а також нелінійні характеристики складнішого вигляду порівняно з наведеними вище.

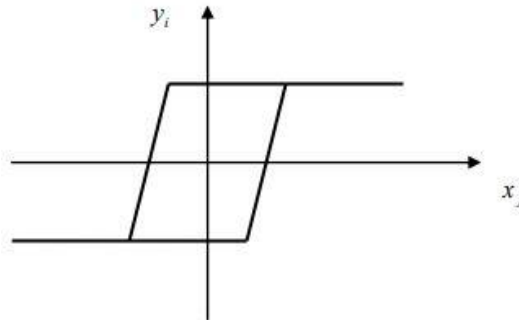


Рис.5.3. Неоднозначна статична характеристика.

Прикладом статичної АСР може бути система стабілізації рівня рідини, принципова схема якої наведена на рис. 5.4, а.

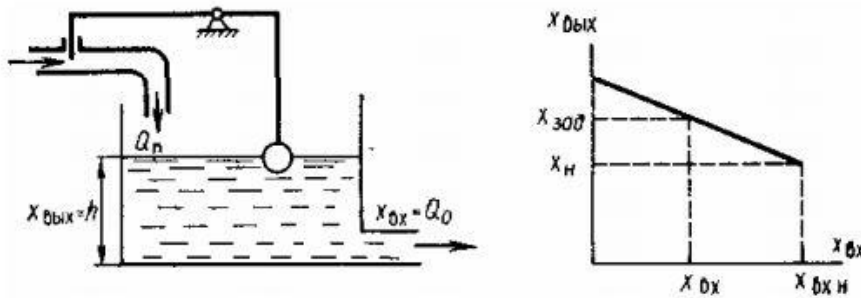


Рис. 5.4. Принципова схема статичної АСР (а) і її характеристика (б).

У сталому стані кількість рідини, що витікає, Q^0 дорівнює кількості рідини, що поступає Q^n . При зміні витрати рідини встановлюється новий рівноважний стан (рис. 5.4, б), що визначається статичним відхиленням

$$S = (x_{зад} - x_n) / x_{зад}$$

де $x_{зад}$ — задане значення регульованої величини;

x_n — значення регульованої величини при даному навантаженні.

Астатичним називається такий об'єкт, що у сталому режимі працює без залишкового відхилення. Регульована величина в цій системі не залежить від впливу. Прикладом астатичної АСР може бути система стабілізації рівня рідини. Рівновага системи має місце при єдиному значенні регульованої величини, рівній заданому.

Статична характеристика визначає початкові і кінцеві дані (дані початку і кінця) динамічних режимів об'єкта. Для задання динамічного режиму необхідно знати значення початкових даних, тобто точки статичної характеристики, від якої починається перехідний процес.

Статика процесів визначає спосіб керування, тип керуючого пристрою, способи виконання керуючих дій та їх значення. Застосування певного каналу впливу об'єкта як керуючого визначається крутизною його статичної

характеристики, тобто величиною його коефіцієнта підсилення k . Найбільший коефіцієнт підсилення відповідає найсильнішій дії на вході об'єкта.

Статичні моделі та характеристики широко застосовуються в техніці. Більшість фундаментальних залежностей є статичними характеристиками чи рівняннями статички. Це – закон збереження маси чи енергії, рівняння матеріальних чи енергетичних балансів, закони Ома, Кірхгофа та багато інших.

Якщо об'єкт має декілька вихідних параметрів, то його статичну модель зазвичай подають системою рівнянь статички, кожне з яких відображує функціональну залежність однієї вихідної величини від однієї чи декількох вхідних:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_{10}(x_1, x_2, \dots, x_m); \\ y_2 &= f_{20}(x_1, x_2, \dots, x_m); \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= f_{n0}(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (3)$$

Аналітичний метод отримання статичних характеристик

Аналітичний метод розробки статичних моделей базується на дослідженні внутрішніх залежностей в об'єкті моделювання. Для цього потрібно дослідити його конструкцію, знати технологічні параметри, вхідні та вихідні величини, тощо.

Модель статичного режиму об'єкта, яка має структуру досить близьку до структури самого об'єкта, дозволяє робити узагальнення для об'єктів, близьких за конструкцією та фізичними властивостями, але точність такої моделі, як правило, невисока.

Для більшості об'єктів керування можна скласти багато балансів сумарних, для окремих ємностей об'єкта, для окремих компонентів. З них залишають ті, що розкривають фізико-хімічну суть вихідної (керованої) величини.

Для об'єктів з керованим рівнем або тиском застосовуються сумарні (інтегральні) баланси, тобто баланси за сумою усіх компонентів.

Якщо виходом об'єкта є концентрація, застосовується баланс за речовиною, концентрація якої є визначальним параметром.

Для теплових об'єктів складаються теплові баланси.

При визначенні статичних характеристик багатоємнісних об'єктів баланси складаються для кожної ємності.

При формуванні статичної моделі баланси складаються в загальному вигляді, а не в числовому, оскільки числові значення параметрів балансу дадуть лише одну точку статичної характеристики.

В баланси підставляють ті числові значення параметрів, що відповідають основному статичному режиму.

У статичному (сталому) режимі внутрішні параметри об'єкта моделювання в часі не змінюються, тому рівняння балансів варто складати за одиницю часу, як правило, за одну годину.

З отриманих рівнянь статички, якщо необхідно, можна обчислити статичні характеристики, а саме, побудувати графіки залежності вихідного параметра від вхідного.

Визначення статичних характеристик складних об'єктів

Існують ситуації, в яких неможливо експериментальним шляхом визначити статичну характеристику складного об'єкта керування, який представлений, наприклад, групою апаратів. Але, якщо для кожного з цих апаратів відома статична характеристика, отримана в будь-який спосіб, то можна сформулювати загальну статичну характеристику складного об'єкта за характеристиками його складових аналітичним або графічним методами.

У складному об'єкті його елементи можуть бути з'єднані між собою паралельно (декілька ємностей сировини, матеріальні потоки яких надходять до одного апарату), послідовно (випарювальні апарати, через які послідовно проходить випарювана речовина) або паралельно-послідовно (рис.5.5).

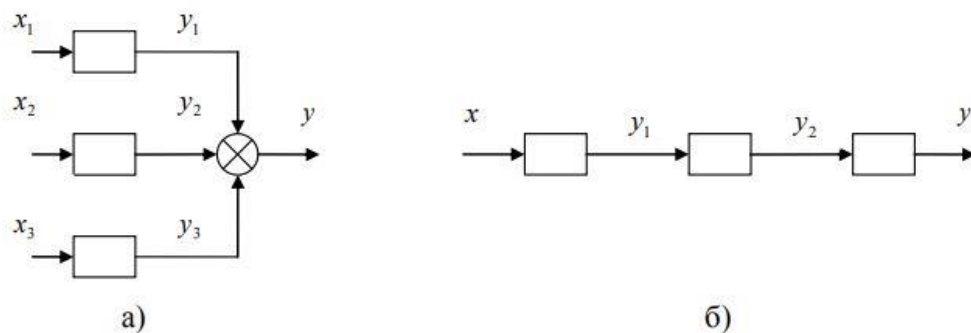


Рис. 5.5. Варіанти з'єднання елементів у складному об'єкті: а) - паралельне; б) - послідовне

Розглянемо паралельне з'єднання елементів (рис.4,а). Нехай статичні характеристики складових об'єкта відомі і мають вигляд:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1); \\ y_2 &= f_2(x_2); \\ y_3 &= f_3(x_3). \end{aligned} \quad (4)$$

Визначимо статичну характеристику $y=f(x)$ аналітично. Як впливає з рис.5.5а, вихідний сигнал у об'єкта є сумою його складових $y_i(1,2,3)$. і Тоді $y=y_1+y_2+y_3$ або $y=f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3)$.

Отже, статична характеристика об'єкта керування, що має паралельно з'єднані елементи, є сумою їх статичних характеристик.

Графічний метод для даного типу з'єднання полягає в побудові в єдиних координатних осях усіх залежностей (4) та побудова в тих же координатних

осях сукупності точок $y_i = f(x_i)$, що утворять статичну характеристику

об'єкта згідно з рівністю: $y_i = y_{1i} + y_{2i} + y_{3i}$

де i – номер точки статичної характеристики (рис.5.6).

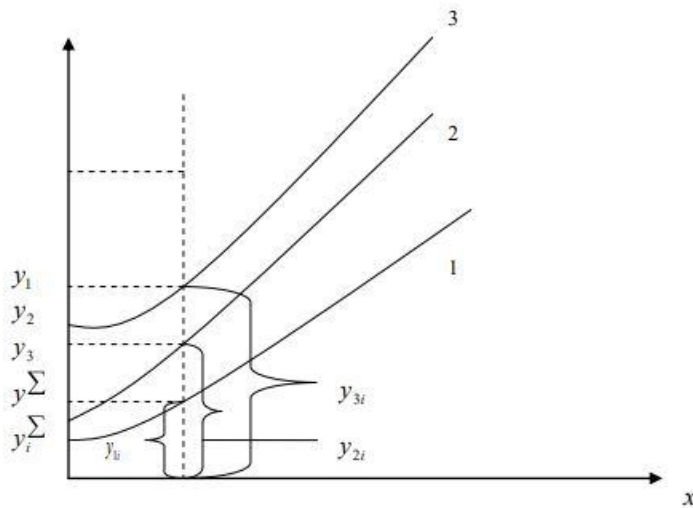


Рис.5.6. Побудова статичної характеристики складного об'єкта з паралельним з'єднанням елементів

Якщо елементи об'єкта однотипні з однаковими функціональними залежностями статичних характеристик і вони, до того ж, лінійні, то їх можна подати у приростах:

$$\Delta y_1 = k_1 \Delta x_1;$$

$$\Delta y_2 = k_2 \Delta x_2;$$

$$\Delta y_3 = k_3 \Delta x_3.$$

де - $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x$. Тоді результуюча характеристика матиме вигляд

$$\Delta y = \sum_{i=1}^3 k_i \Delta x. \quad y_i^{\Sigma}(x_i) = y_{1i} + y_{2i} + y_{3i}.$$

Розглянемо об'єкт з послідовним з'єднанням елементів (5.5б). Статичні характеристики його елементів мають вигляд

$$y_1 = f_1(x);$$

$$y_2 = f_2(y_1);$$

$$y = f_3(y_2).$$

або у випадку лінійних статичних характеристик

$$\Delta y_1 = k_1 \Delta x;$$

$$\Delta y_2 = k_2 \Delta y_1;$$

$$\Delta y = k_3 \Delta y_2.$$

$$\Delta y = \prod_{s=1}^3 k_s \cdot \Delta x,$$

звідки випливає: $\Delta y = k_3 * k_2 * k_1 * \Delta x$ або

де загальний коефіцієнт передачі об'єкта k дорівнює добутку коефіцієнтів

$$k = \prod_{s=1}^3 k_s.$$

передачі його складових

Згідно з графічним методом статичні характеристики складових об'єкта розташовують так, як показано на рис.5.7.

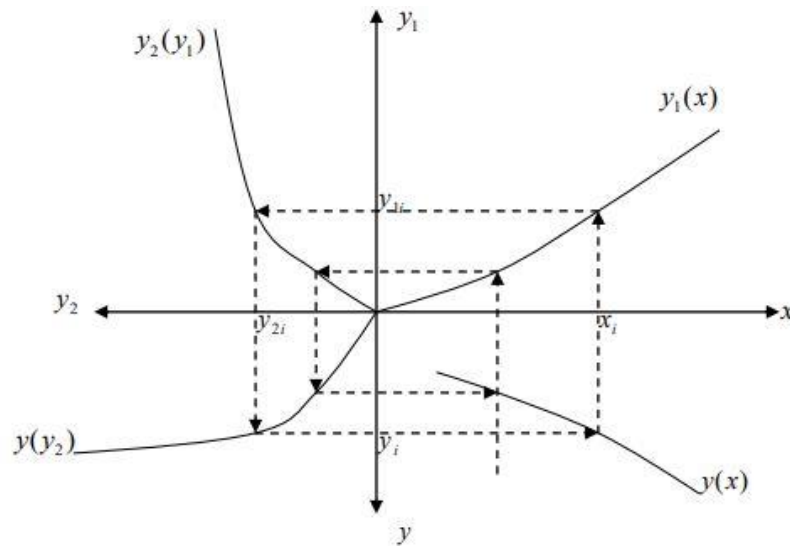


Рис.6. Побудова статичної характеристики складного об'єкта з послідовним з'єднанням елементів.

У перших трьох квадрантах послідовно будуються статичні характеристики елементів. Потім для кожного значення x_i шукається у вказаному стрілками напрямку відповідне значення y_i . Координати (x_i, y_i) утворюють у четвертому квадранті i -у точку статичної характеристики об'єкта.

Якщо елементів в об'єкті менше трьох, у порожньому (III) квадранті будують бісектрису, яка при побудові характеристики відповідатиме множенню на одиницю.

Якщо елементів в об'єкті більше трьох, спочатку визначається статична характеристика перших трьох елементів об'єкта, а потім аналогічно в інших координатних осях при визначенні загальної статичної характеристики враховується решта елементів об'єкта.

При змішаному (послідовно-паралельному) з'єднанні елементів результуюча статична характеристика утворюється за розглянутими вище алгоритмами.

Лекція 6

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ОБ'ЄКТА [1,5]

У промислових умовах автоматичні системи, а також їх окремі елементи, можуть перебувати в рівноважних (статичних) і нерівноважних (динамічних) станах. **Рівноважні** стани характеризуються сталістю в часі вхідних, проміжних і вихідних величин. При експлуатації об'єктів рівноважні стани систем порушуються в результаті дії різних збурень, при цьому вхідні, проміжні й вихідні величини систем змінюються в часі; такий їх стан називають **нерівноважним**. При вивченні автоматичних систем основну увагу приділяють їх поведінці в цьому режимі.

При побудові математичної моделі технологічного об'єкта необхідно враховувати вимоги, що задаються технологією. Тому що при нормальній роботі об'єкта необхідна підтримка стабільних параметрів технологічного процесу. X^* саме дана точка простору стану вибирається в якості вихідної – точки технологічного процесу. Дослідження систем у рівноважних і нерівноважних станах проводять за допомогою різних функціональних залежностей, що характеризують поведінку систем. При цьому під вхідними й вихідними величинами звичайно розуміють відносні прирости.

Поведінка системи в сталому стані визначається рівняннями статички, або статичними характеристиками $U_{вих} = F(X_{вх})$.

Звичайно рівняння статички є алгебраїчними.

Поведінка системи в нерівноважному стані або в перехідному процесі описується **рівняннями динаміки**.

Динамічні характеристики та їх різновиди

Динамічним режимом роботи об'єкта називають перехідний режим між статичними режимами, що відбувається після нанесення збурення на вході об'єкта. В динамічному режимі визначальні параметри об'єкта змінюються в часі. Динамічні властивості об'єкта керування виражаються динамічними характеристиками, які є формалізацією динамічної моделі ОК. Динамічні характеристики можуть бути задані у вигляді:

- диференціальних рівнянь;
- передатних функцій;
- частотних характеристик;
- кривих зміни вихідної величини, викликані зміною вхідної величини;
- логарифмічних частотних характеристик.

Будь-яка із зазначених динамічних характеристик може бути перетворена в іншу. Отже, всі вони є еквівалентними. Однак визначення тих чи інших динамічних властивостей об'єкта важко або навіть неможливо визначити з однієї динамічної характеристики, а з іншої дуже легко. Тому усі ці характеристики широко застосовуються на практиці.

Динамічна модель (модель динаміки) ОК визначає взаємозв'язки його параметрів і є математичним описом об'єкта в динамічному режимі.

Динамічна модель відображає залежність в часі вихідної величини від вхідних параметрів об'єкта:

$$y(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)), \quad /1/$$

З (1) можна виокремити динамічні характеристики окремих каналів впливу

$$y_i(t) = f_i(x_j(t)), \quad /2/$$

де n – кількість виходів ОК, m – кількість входів.

Найуніверсальніша динамічна характеристика – диференціальні рівняння для лінійних і нелінійних систем з розподіленими і зосередженими параметрами. Їх зручність у тому, що можна отримати їх розв'язок з будь-якими початковими умовами.

При наявності декількох вихідних величин поведінка системи в перехідному режимі описують системою рівнянь динаміки, число яких дорівнює числу вихідних величин.

Рішення рівняння динаміки являє собою залежність зміни вихідної величини системи в часі при відомому вхідному впливі. По отриманому рішенню визначають якість перехідного процесу.

Перетворення Лапласа, що переводить функцію $y(t)$ дійсної незалежної змінної t (часу) у функцію комплексної змінної $\bar{y}(s)$ дозволяє оперувати передатними функціями системи

$$W(s) = \frac{\bar{y}(s)}{x(s)}, \quad /3/$$

Перетворення Лапласа зводить розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами до розв'язання алгебраїчних рівнянь, а розв'язання лінійних рівнянь у частинних похідних – до розв'язання звичайних диференціальних.

Оскільки з (3) випливає, що

$$\bar{y}(s) = W(s) \cdot x(s),$$

то вихідний сигнал у часовій області задається згортокою функції ваги і вхідного сигналу

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) \cdot x(\tau) d(\tau), \quad /4/$$

Замість функції ваги $g(t)$ для описання динамічних характеристик систем використовують інтеграл від неї – перехідну функцію

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d(\tau), \quad /5/$$

Графічне зображення $h(t)$ називають перехідною характеристикою.

При складанні диференціальних рівнянь, що описують динамічні властивості розглядуваного об'єкта, приймають до уваги:

- закон збереження енергії;
- закон збереження речовини;
- закон збереження руху Ньютона.

Для нестационарного (перехідного) режиму їх формулювання таке.

Закон збереження речовини. Похідна за часом від маси речовини, що міститься в розглядуваному об'єкті, дорівнює різниці між потоком речовини, що надходить до цього об'єму, та потоком, що виходить з нього.

Закон збереження енергії. Похідна за часом від енергії, що накопичується в розглядуваному об'єкті, дорівнює різниці між потоком енергії, що надходить до цього об'єкту, та потоком, що виходить із нього.

Закон руху Ньютона. Похідна за часом від кількості руху розглянутої частини речовини дорівнює сумі усіх сил, що діють на цю частину речовини.

Основні динамічні властивості об'єктів керування

Динамічні властивості об'єкта моделювання визначають його поведінку в динамічному (перехідному) режимі, викликаному певним збуренням. До основних динамічних властивостей об'єкта належать:

- акумулююча здатність;
- самовирівнювання;
- швидкодія (інерційність та запізнювання).

Акумулююча здатність.

Однією з основних властивостей об'єктів є властивість накопичувати (акумулювати) певну кількість речовини або енергії. Акумулююча властивість об'єкта проявляється при невідповідності вхідних і вихідних параметрів або енергетичних його потоків.

Робочий процес у будь-якому об'єкті пов'язаний з притоком та втратою матерії чи енергії. Одночасно певна їх кількість постійно знаходиться в об'єкті. Кількість акумульованої в об'єкті матерії чи енергії може бути визначена одночасним перекриттям вхідних та вихідних потоків.

Акумуляція в об'єкті пов'язана із зміною його визначальних параметрів.

Акумуляція речовини – із зміною тиску, рівня, концентрації; акумуляція теплової енергії – із зміною температури; акумуляція механічної енергії – із зміною швидкості руху; акумуляція електричної енергії – із зміною електричного потенціалу.

Акумулююча здатність об'єкта залежить від його розмірів та інших параметрів. Вона проявляється лише в динамічному режимі і суттєво впливає на нього.

Розглянемо декілька прикладів.

1. *Проточна ємність* (рис. 6.1). Її робота характеризується вхідною Q_1 та вихідною Q_2 витратами, а також запасом V у ній рідини, що залежить від рівня рідини H та площі перерізу ємності F . При одночасному перекритті вхідного та вихідного потоків кількість акумульованої в об'єкті рідини дорівнює її запасу (об'єму) $V = F * H$.

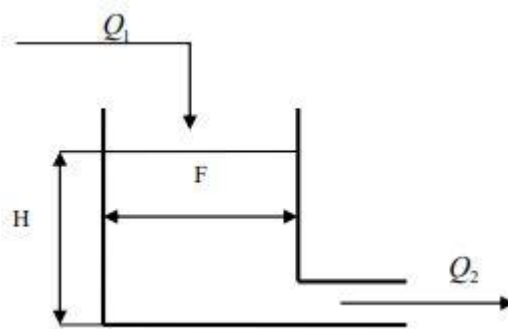


Рисунок 6.1 – Протічна ємність

Об'єм V акумульованої в ємності рідини залежить від рівня H . Щоб змінити об'єм V акумульованої рідини при $H = \text{const}$, необхідно змінити площу перерізу F . Отже, акумулююча здатність ємності визначається площею перерізу F .

Перехідні режими, отже, залежатимуть від площі перерізу F , тобто від акумулюючої здатності (властивості) об'єкта.

2. *Змішувач ідеального змішування.* Його робота визначається вхідними G_1 і G_2 витратами, концентраціями компонента речовини C_1 і C_2 , а також об'ємом V рідини у змішувачі, концентрацією C_3 компонента у рідині і густиною рідини ρ . Кількість акумульованого компонента $C_3 \cdot V \cdot \rho$ змінюється із зміною концентрації C_3 компонента у рідині. Акумулююча здатність змішувача за цим компонентом відповідає кількості рідини у змішувачі $V \cdot \rho$.

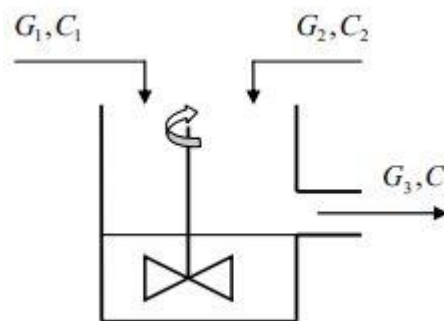


Рисунок 6.2 – Змішувач.

3. *Стінка теплообмінника.* Акумуляція в ній теплової енергії виражається через температуру стінки. Акумулююча здатність виражається її теплоємністю.

4. *Акумуляція механічної енергії* маховиком виражається через зміну швидкості його обертання, а акумулююча здатність характеризується його масою.

5. *Акумуляція електричної енергії* конденсатором виражається через зміну його потенціалу, а акумулююча здатність характеризується його ємністю.

Поняття акумулюючої здатності об'єктів пов'язане з поняттям ємності.

У даному контексті поняття *ємності об'єкта* – це частина простору, що у всіх своїх точках має однакове значення визначального параметра.

Наприклад, ресивер є ємністю, якщо знехтувати зміною в ньому тиску по вертикалі, і вважати, що у всіх його точках всередині тиск однаковий.

Якщо теплопровідність матеріалу стінки ідеальна, він є тепловою ємністю, а ідеальний змішувач – ємністю при розрахунках концентрації.

Акумулюючих ємностей в об'єкті може бути декілька, і кожна з них характеризується певним значенням визначального параметра чи параметра стану.

Математичний опис об'єкта моделювання в динамічному режимі полягає в математичному описанні його акумулюючих ємностей.

У динамічних режимах змінюється кількість акумульованої в ємності речовини або енергії. Тому в балансовому рівнянні кількість речовини чи енергії на вході в ємності не дорівнюватиме відповідній кількості на її виході:

$$\sum_{j=1}^m Q_{j \text{ вх}}(t) \neq \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ вих}}(t)$$

де m – кількість потоків на вході в ємність, n – кількість потоків на виході з неї.

Різниця між ними дорівнюватиме кількості акумульованої в ємності речовини або енергії за одиницю часу.

Розглянемо, наприклад, об'єкт (рис. 6.3) з визначальним вихідним параметром (параметром стану) $y(t)$, вхідним $Q_{\text{вх}}(t)$ і вихідним $Q_{\text{вих}}(t)$ потоками та кількістю $Q_a(t)$ акумульованої в ньому речовини чи енергії. Рівняння балансу для нього матиме такий вигляд (у динамічному режимі):

$$Q_{\text{вх}}(t) - Q_{\text{вих}}(t) = Q_a(t) \quad /6/$$

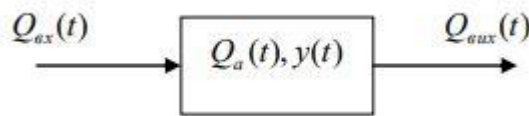


Рисунок 6.3 – Розрахункова схема об'єкта моделювання.

Величину $Q_a(t)$ можна виразити через визначальний параметр $y(t)$. За нескінченно малий час dt різницю між $Q_{\text{вх}}(t)$ і $Q_{\text{вих}}(t)$ можна виразити так:

$$(Q_{\text{вх}}(t) - Q_{\text{вих}}(t))dt = dQ_a(t) = k dy(t)$$

або привести до вигляду:

$$Q_{\text{вх}}(t) - Q_{\text{вих}}(t) = k \frac{dy(t)}{dt} \quad /7/$$

Коефіцієнт k у (7) визначає величину акумулюючої здатності ємності. Наприклад, для проточної заповненої рідиною ємності визначальним параметром є рівень рідини H в ній, а акумулююча здатність ємності характеризується площею перерізу ємності F . Для цього прикладу рівняння (7) набуде вигляду:

$$Q_{\text{вх}}(t) - Q_{\text{вих}}(t) = F \frac{dH(t)}{dt}.$$

Рівняння (7) називають **рівнянням динаміки акумулюючої ємності** або одноємнісного об'єкта.

Рівняння динаміки однієї ємності є диференціальним рівнянням першого порядку, n ємностей – диференціальним рівнянням порядку n .

У багатьох реальних об'єктах немає чітко розмежованих ємностей. Їх можна виокремити за певних спрощуючих припущень, як наприклад, про рівність тиску у ресивері вздовж вертикальної просторової координати.

Але не завжди для отримання моделі можна знехтувати таким розподіленням параметрів об'єкта в просторі. Це, наприклад, теплові процеси. В них у деяких випадках можна знехтувати розподілом температури вздовж товщини стінки апарату, але не можна знехтувати розподілом температури вздовж осі труби або теплообмінника.

Об'єкти моделювання, що мають чітко визначені акумулюючі ємності, називають *об'єктами із зосередженими параметрами*.

Для *об'єктів із розподіленими параметрами* характерний істотний просторовий розподіл визначальних параметрів. В таких об'єктах можна виділити лише нескінченно малі акумулюючі ємності, до того ж, за певних припущень.

Визначальний параметр в статичній моделі залежить від просторових координат x, y, z , а в динамічній ще й від часу t , тобто $y = f(x, y, z, t)$.

Отже, оскільки визначальний параметр для об'єкта з розподіленими параметрами залежить щонайменше від двох незалежних змінних x і t , то рівняннями динаміки будуть диференціальні рівняння в частинних похідних.

Самовирівнювання.

Це здатність об'єкта керування самостійно змінювати швидкість відхилення визначального параметра після нанесення збурення на його вхід. Швидкість V зміни в часі вихідної величини (визначального параметра) $y(t)$ можна визначити тангенсом кута нахилу α дотичної до графіка перехідної характеристики (див.рис. 6.4)

$$V(t) = \frac{dy(t)}{dt} = tg(\alpha(t))$$

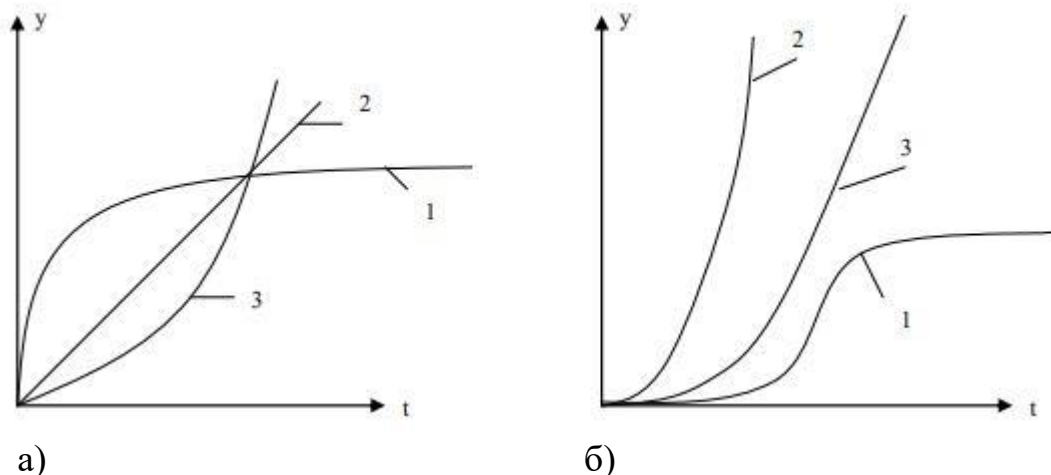


Рисунок 6.4 – Перехідні характеристики об'єктів моделювання першого (а) та вищих порядків (б): 1 – з позитивним самовирівнюванням; 2 – без самовирівнювання; 3 – з негативним самовирівнюванням.

Залежно від зміни швидкості V , а отже від зміни $tg(\alpha)$, розрізняють

- об'єкти з позитивним самовирівнюванням (крива 1, рис. 6.4), коли $tg(\alpha)$ зменшується настільки, що $V(t)|_{t \rightarrow \infty} = 0$;
- об'єкти без самовирівнювання (крива 2, рис. 6.4), в яких швидкість V одразу чи через певний час стабілізується, $V(t)|_{t \rightarrow \infty} = const$;
- об'єкти з негативним самовирівнюванням (крива 3, рис. 6.4), для яких швидкість зміни вихідної величини з часом зростає: $V(t)|_{t \rightarrow \infty} = \infty$, а кут нахилу $\alpha(t)|_{t \rightarrow \infty} = 90^\circ$.

Очевидно, що найпростіше керувати об'єктами з позитивним самовирівнюванням.

Розглянемо, наприклад, хімічний реактор з керованою температурою Q . В реакторі відбувається екзотермічна хімічна реакція, швидкість якої значно змінюється з температурою. Якщо при зростанні температури швидкість відведення теплоти $Q_{\text{відв}}$ більша швидкості приходу тепла $Q_{\text{пр}}$, тобто

$$\frac{dQ_{\text{відв}}}{dt} > \frac{dQ_{\text{пр}}}{dt}$$

то такий реактор має позитивне самовирівнювання. Якщо

$$\frac{dQ_{\text{відв}}}{dt} < \frac{dQ_{\text{пр}}}{dt}$$

реактор матиме негативне самовирівнювання. Тоді збільшення температури реакційної маси щонайменше матиме наслідком подальше підвищення температури реакційної маси, а отже і швидкості реакції.

Швидкодія: інерційність і запізнювання.

Існують три основних властивості технологічного процесу (апарата), які полегшують синтез системи керування і дозволяють досягти кращої якості керування. Це стабільність технологічного процесу, інерційність і керованість.

Стабільністю технологічного процесу називають його властивість протидіяти зовнішнім збурюючим впливам (збуренням).

Інерційністю називають властивість процесу протидіяти збуренням, спрямованим на різку зміни його параметрів.

Керованістю називають властивість об'єкта (процесу), що полегшує задачі автоматичного керування і сприяє покращенню його якості.

Критерій інерційності процесу вводиться по аналогії з поняттям сталої часу звичайної інерційної ланки першого порядку, для якої крива перехідної характеристики має експоненціальний вигляд.

Сталою часу об'єкта T_0 називають час, за який його вихідна величина досягла б нового сталою значення після нанесення збурення, якби швидкість її зміни залишалась би рівною початковій.

Тобто, якщо б крива перехідної характеристики збігалась би з дотичною до початкової ділянки перехідної характеристики на інтервалі від початку спостереження перехідного процесу до моменту перетину дотичної з горизонталлю нового усталеного режиму, то тривалість цього перехідного процесу дорівнювала б сталій часу.

Для одноємкісного об'єкта, що має позитивне самовирівнювання, стала часу легко визначається з його рівняння динаміки виду

$$T_0 \cdot y'(t) + y(t) = k \cdot x(t)$$

$$a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = k \cdot x(t)$$

$$a_1 = T \text{ при } a_0 = 1$$

На відміну від одноємкісного об'єкта, для багатоемкісного величину сталої часу, як характеристику інерційності обирають чисельно рівною площі S , обмеженій кривою перехідної характеристики і прямою, що відповідає новому усталеному режиму (див. рис. 6.5).

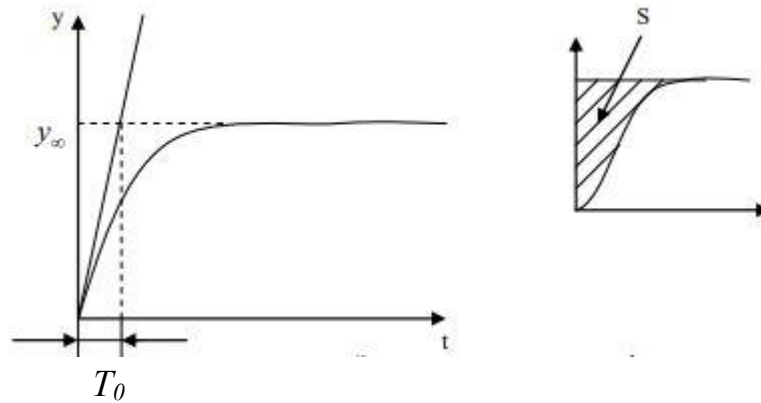


Рисунок 6.5 – Визначення сталої часу T_0 об'єкта за його перехідною характеристикою

Критерієм інерційності об'єктів без самовирівнювання є швидкість зміни вихідної величини $V(t) = y'(t)$. Для одноємкісних об'єктів $V(t)$ протягом всього часу спостереження залишається сталою величиною.

Оскільки швидкодія об'єкта керування визначається як швидкість виникнення реакції об'єкта на збурення, то інерційність деякою мірою характеризує швидкодію.

Інерційність багатоємкісного об'єкта без самовирівнювання визначається швидкістю зміни вихідного сигналу $V(t)$ після того, як вона перестане змінюватись, тобто на певній відстані в часі від початку перехідного процесу.

Об'єкти в яких вихідна величина миттєво (чи майже миттєво для реальних об'єктів) реагує на зміну вхідної величини, називають **безінерційними**.

На величину швидкодії об'єкта крім інерційності впливає також транспортне (чисте) запізнювання τ , тобто час, по закінченні якого вихідна величин почне реагувати на зміну вхідної. Воно обумовлено часом транспортування матеріалу.

Транспортні запізнювання між ємкостями можна додавати, оскільки в цілому вони впливають на об'єкт однаково.

Методи отримання динамічних характеристик

Модель динамічного режиму об'єкта, як і статичного, можна отримати аналітичним або експериментальним методом.

Під аналітичними методами складання математичного опису розуміють способи виведення рівнянь динаміки і статички на основі аналізу хімічних і фізичних процесів, що відбуваються в досліджуваному об'єкті, з урахуванням конструкції апарата і характеристик речовин, що перероблюються. При виведенні рівнянь застосовують фундаментальні закони збереження речовини та енергії, а також кінетичні закономірності процесів перетворень, перенесення теплоти та маси.

Математичний опис процесу складається з рівнянь матеріального, теплового балансів, рівняння руху в'язкої рідини.

Рух однофазного потоку описується системою, що складається з рівняння матеріального балансу в об'ємі (рівняння нерозривності потоку) і рівнянь руху

(рівнянь Нав'є-Стокса) разом з початковими і граничними умовами. При невеликих перепадах тиску у шарі контакту рівняння руху можна не враховувати (вважаючи тиск незмінним).

При виведенні рівнянь балансу енергії зазвичай нехтують потенціальною енергією компонент, оскільки вона найчастіше незначна, а враховують потік кінетичної енергії, потік внутрішньої енергії, роботи, що виконують сили тиску і опору, теплоту, що підводиться зовні.

На рівні з аналітичними методами математичного опису технологічних об'єктів застосовуються експериментально – статистичні методи, що базуються на обробці експериментального матеріалу, зібраного безпосередньо на діючому об'єкті.

Перевагою експериментальних методів порівняно з аналітичними є їх простота, невелика трудомісткість при достатньо точному описі властивостей об'єкта у вузькому діапазоні зміни координат.

Існують два способи накопичення статистичного матеріалу: пасивний та активний експерименти. Пасивний експеримент полягає у реєстрації контрольованих параметрів процесу в режимі нормальної роботи об'єкта без внесення будь-яких додаткових збурень. Активний експеримент полягає у застосуванні штучних збурень, що діють на об'єкт згідно з наперед спланованою програмою.

Введення штучних збурень дозволяє цілеспрямовано і швидко визначати залежності між параметрами, шукати область оптимального режиму. Однак для того, щоб досліджуваний ефект "не потонув" у природному шумі, величина збурень має бути значною. Для більшості промислових об'єктів це неможливо, оскільки такий експеримент може мати наслідком зрив режиму та отримання недоброякісної продукції.

Істотною вадою аналітичного методу є відносно невисока точність отримуваних результатів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів. / уклад. В. Левицький, А. Микитишин. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет ІМ. Івана Пулюя, 2022. 38 с.
2. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування: навчальний посібник. URL: <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/download/197/357/389-1?inline=1> (дата звернення 20.09.2025).
3. Коваль А. В. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів: навч. Посібник. URL: https://learn.ztu.edu.ua/pluginfile.php/50180/mod_resource/content/1/%D0%86%D1%82%D0%B0%D0%9C%D0%A2%D0%9E_%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87_%D0%BF%D0%BE%D1%81.pdf (дата звернення 20.09.2025)
4. Кишенько В. Д. Ідентифікація та моделювання об'єктів автоматизації. Конспект лекцій. URL: <https://k.twirpx.link/file/251291/> (дата звернення 20.09.2025).
4. Букетов А. В. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем: навчальний посібник. URL: <https://elartu.tntu.edu.ua/handle/123456789/894> (дата звернення 20.09.2025).

Ідентифікація і моделювання об'єктів та систем безпілотних апаратів: конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 53 с.

Комп'ютерний набір Л.О. Гуменюк

Редактор Л.О. Гуменюк

Підп. до друку «__» ____2025 р. Папір офс.
Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк. 1.
Тираж 30 прим.

Відділ іміджу та промоції
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – ВІП ЛНТУ