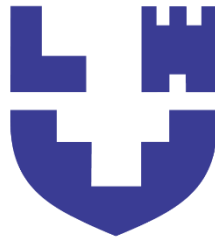


**Міністерство освіти і науки України**  
**Луцький національний технічний університет**



# **ІДЕНТИФІКАЦІЯ І МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ БЕЗПЛОТНИХ АПАРАТІВ**

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи  
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами»  
галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації  
(G Інженерія, виробництво та будівництво)  
спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та  
робототехніка  
(G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка)  
денної та заочної форм навчання

Луцьк 2025

**УДК 519.85; 517.8**  
**I-59**

Рекомендовано до видання вченою радою факультету КІТ ЛНТУ, протокол № \_\_ від «\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 року

Голова вченої ради факультету КІТ \_\_\_\_\_ Інна КОНДІУС

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ  
Директор бібліотеки \_\_\_\_\_ Наталія ПОЛІЩУК

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ, протокол № \_ від «\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 року.

Завідувач кафедри АКІТ _____	Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ
Укладач: _____	Лариса ГУМЕНЮК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ
Рецензент: _____	Людмила САМЧУК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки та мехатроніки ЛНТУ
Відповідальний за випуск: _____	Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ

**Ідентифікація і моделювання об'єктів та систем безпілотних апаратів:** методичні вказівки до виконання самостійної роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 52 с.

У методичних вказівках розглянуто основні типи задач лінійного програмування, дані рекомендації з побудови їх математичних моделей і пошуку оптимальних рішень засобами табличного редактора Microsoft Excel.

Методичні вказівки укладено в результаті опрацювання опублікованих джерел.

## ЗМІСТ

Вступ .....	4
Список використаних позначень .....	4
Завдання № 1. Рішення задач лінійного програмування з використанням Microsoft Excel .....	4
Завдання № 2 (частина I). Одноіндексні задачі лінійного програмування ....	22
Завдання № 3 (частина II). Одноіндексні задачі лінійного програмування. ..	30
Завдання № 4. Двоіндексні задачі лінійного програмування. Стандартна транспортна задача .....	38
Завдання № 5. Двоіндексні задачі лінійного програмування. Задача про призначення .....	44
Завдання № 6. Двоіндексні задачі лінійного програмування. Організація оптимальної системи забезпечення .....	48
Перелік посилань .....	52

## ВСТУП

З метою більш ефективного засвоєння навчального матеріалу методичні вказівки побудовано за принципом завдань, розбитих за типами задач лінійного програмування.

В рамках завдання №1 представлені:

- докладні методики і конкретні приклади вирішення одноіндексних і двоіндексних задач лінійного програмування з різними видами обмежень;
- можливі помилки при введенні умов задач лінійного програмування в MS Excel.

Завдання № 2-6 містять:

- теоретичний опис математичних моделей задач лінійного програмування певного типу і методики їх побудови;
- приклади вирішення конкретних задач описаного типу або рекомендації до їх вирішення.

Кожне завдання включає в себе 12 варіантів навчальних задач певного типу, а також список приблизних питань для захисту роботи, що охоплюють як теоретичні положення, так і конкретні варіанти задач.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- 1) ЛП - лінійне програмування.
- 2) ЦФ - цільова функція.
- 3) РЗ - розподільча задача.
- 4) ТЗ - транспортна задача.
- 5) \* - питання підвищеної складності.

### Завдання № 1

#### Рішення задач лінійного програмування з використанням Microsoft Excel

##### *1. Інструкція з використання Microsoft Excel для вирішення задач ЛП*

Для того щоб вирішити задачу ЛП в табличному редакторі Microsoft Excel, необхідно виконати наступні дії.

1. Ввести умову задачі:

а) створити екранну форму для введення умови задачі:

- змінних,
- цільової функції (ЦФ),
- обмежень,
- граничних умов;

б) ввести вихідні дані в екранну форму:

- коефіцієнти ЦФ,
- коефіцієнти при змінних в обмеженнях,
- праві частини обмежень;

с) ввести залежності з математичної моделі в екранну форму:

- формулу для розрахунку ЦФ,
  - формули для розрахунку значень лівих частин обмежень;
- d) задати ЦФ (у вікні "Пошук рішення"):
- цільову комірку,
  - напрямок оптимізації цільової функції;
- e) ввести обмеження і граничні умови (у вікні "Пошук рішення"):
- комірки зі значеннями змінних,
  - граничні умови для припустимих значень змінних,
  - співвідношення між правими і лівими частинами обмежень.
2. Вирішити задачу:
- a) встановити параметри рішення задачі (у вікні "Пошук рішення");
  - b) запустити задачу на рішення (у вікні "Пошук рішення");
  - c) вибрати формат виведення рішення (у вікні "Результати пошуку рішення").

### *Одноіндексні задачі ЛП*

Розглянемо приклад знаходження рішення для наступної одноіндексної задачі ЛП

$$L(X) = 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,4}. \end{cases} \quad (1.1)$$

### *Введення вихідних даних*

#### *Створення екранної форми і введення в неї умови задачі*

Екранна форма для введення умов задачі (1.1) разом з введеними в неї вихідними даними представлена на рис.1.1

Microsoft Excel - Пример_1.xls							
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?							
F6 =							
A	B	C	D	E	F	G	H
1			<b>ПЕРЕМЕННЫЕ</b>				
2	Имя	X1	X2	X3	X4		
3	Значение						
4	Нижн. гр.	0	0	0	0	<b>ЦФ</b>	
5						Значение	Направл.
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max
7							
8			<b>ОГРАНИЧЕНИЯ</b>				
9	Вид					Лев. часть	Знак Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	<=	89
13							

Рис.1.1. Экранна форма задачі (1.1) (курсор в комірці F6)

В екранній формі на рис.1.1 кожній змінній і кожному коефіцієнту задачі поставлено у відповідність конкретна комірка в Excel. Ім'я комірки

складається з букви, що позначає стовпець, і цифри, що позначає рядок, на перетині яких знаходиться об'єкт задачі ЛП. Так, наприклад, змінним задачі (1.1) відповідають комірки B3(x<sub>1</sub>), C3(x<sub>2</sub>), D3(x<sub>3</sub>), E3(x<sub>4</sub>), коефіцієнтами ЦФ відповідають комірки B6 (c<sub>1</sub>=130,5), C6 (c<sub>2</sub>=20), D6 (c<sub>3</sub>=56), E6 (c<sub>4</sub>=87,8), правим частинам обмежень відповідають комірки H10 (b<sub>1</sub>=756), H11 (b<sub>2</sub>=450), H12 (b<sub>3</sub>=89) і т.д.

*Введення залежностей з математичної моделі в екранну форму*  
Залежність для ЦФ

У комірку F6, в якій буде відображатися значення ЦФ, необхідно ввести формулу, по якій це значення буде розраховано. Згідно (1.1) значення ЦФ визначається виразом

$$130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \quad (1.2)$$

Використовуючи позначення відповідних комірок в Excel (див. рис.1.1), формулу для розрахунку ЦФ (1.2) можна записати як суму добутків кожної з комірок, відведених для значень змінних задачі (B3, C3, D3, E3), на відповідному полі, відведена для коефіцієнтів ЦФ (B6, C6, D6, E6), тобто

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3 \quad (1.3)$$

Щоб задати формулу (1.3) необхідно в комірку F6 ввести такий вираз і натиснути клавішу "Enter"

$$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B6:E6), \quad (1.4)$$

де символ \$ перед номером рядка 3 означає, що при копіюванні цієї формули в інші місця листа Excel номер рядка 3 не зміниться; символ : означає, що у формулі будуть використані всі комірки, розташовані між комірками, зазначеними зліва і праворуч від двокрапки (наприклад, запис B6: E6 вказує на комірки B6, C6, D6 і E6). Після цього в цільовій комірці з'явиться 0 (нульове значення) (рис.1.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	0	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	0	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	0	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89
13								

Рис.1.2. Экранна форма задачі (1.1) після введення всіх необхідних формул (курсор в комірці F6).

**Примітка 1.1.** Існує інший спосіб задання функцій в Excel за допомогою режиму "Вставка функцій", який можна викликати з меню "Вставка" або при натисканні кнопки " $f_x$ " на стандартній панелі інструментів. Так, наприклад, формулу (1.4) можна задати наступним чином:

- курсор в поле F6;
- натиснувши кнопку " $f_x$ ", викличте вікно "Майстер функцій - крок 1 з 2";
- виберіть у вікні "Категорія" категорію "Математичні";
- у вікні "Функція" виберіть функцію СУММПРОИЗВ;
- у вікні "СУММПРОИЗВ" в рядок "Масив 1" введіть вираз B\$3:E\$3, а в рядок "Масив 2" - вираз B6:E6 (рис.1.3);
- після введення комірок в рядки "Масив 1" і "Масив 2" у вікні "СУММПРОИЗВ" з'являться числові значення введених масивів (див. Рис.1.3), а в екранній формі в комірці F6 з'явиться поточне значення, обчислене по введеній формулі, тобто 0 (так як в момент введення формули значення змінних задачі нульові).

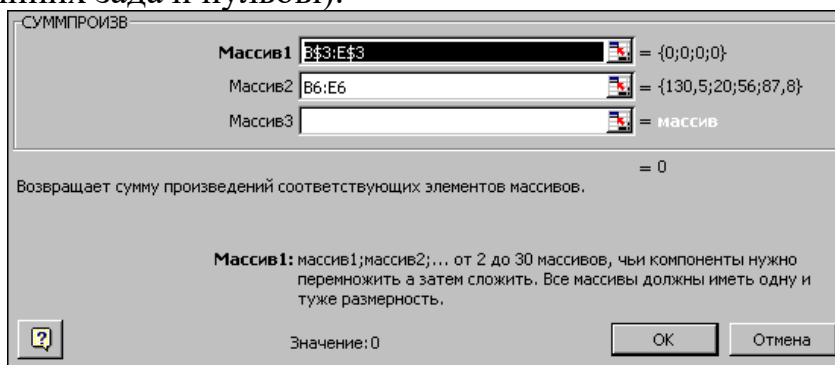


Рис.1.3. Введення формули для розрахунку ЦФ у вікно "Майстер функцій"

### Залежності для лівих частин обмежень

Ліві частини обмежень задачі (1.1) являють собою суму добутків кожної з комірок, відведених для значень змінних задачі (B3, C3, D3, E3), на відповідному полі, відведена для коефіцієнтів конкретного обмеження (B10, C10, D10, E10 - 1-е обмеження; B11, C11, D11, E11 - 2-е обмеження і B12, C12, D12, E12 - 3-е обмеження). Формули, відповідні лівим частинам обмежень, представлені в табл.1.1.

Таблиця 1.1 - Формули, що описують обмеження моделі (1.1)

Ліва частина обмеження	Формула Excel
$-1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ або $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B10:E10)
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ або $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B11:E11)
$4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4$ або $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B12:E12)

Як видно з табл.1.1, формули, що задають ліві частини обмежень задачі (1.1), відрізняються одна від одної і від формули (1.4) в цільовій комірці F6

тільки номером рядка в другому масиві. Цей номер визначається тим рядком, в який обмеження записано в екранній формі. Тому для задання залежностей для лівих частин обмежень достатньо скопіювати формулу з цільової комірки в комірки лівих частин обмежень. Для цього необхідно:

- помістити курсор в поле цільової комірки F6 і скопіювати в буфер вміст комірки F6 (клавішами "Ctrl-Insert");
- поміщати курсор по черзі в поля лівої частини кожного з обмежень, тобто в F10, F11 і F12, і вставляти в ці поля вміст буфера (клавішами "Shift-Insert") (при цьому номер комірок у другому масиві формули буде змінюватися на номер того рядка, в який була проведена вставка з буфера);
- на екрані в полях F10, F11 і F12 з'явиться 0 (нульове значення) (див. Рис.1.2).

### Перевірка правильності введення формул

Для перевірки правильності введених формул робите по черзі подвійне натискання лівої клавіші миші на комірку з формулами. При цьому на екрані рамкою будуть виділятися комірки, які використовуються у формулі (рис.1.4 і 1.5).

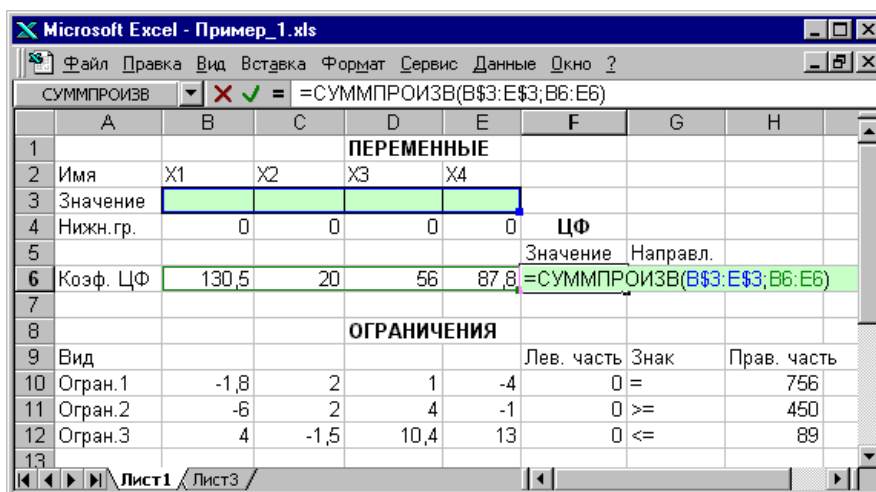


Рис.1.4. Перевірка правильності введення формули в цільову комірку F6

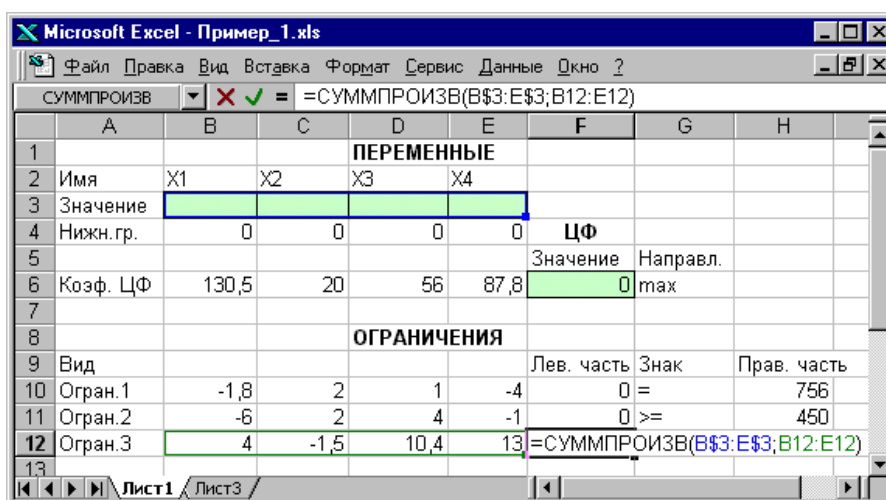


Рис.1.5. Перевірка правильності введення формули в комірку F12 для лівої частини обмеження 3

### Задання ЦФ

Подальші дії проводяться у вікні "Пошук рішення", яке викликається з меню "Сервіс" (рис.1.6):

- поставте курсор в поле "Установити цільову комірку";
- введіть адресу цільової комірки  $\$F\$6$  або зробіть одне натискання лівої клавiші миші на цільову комірку в екранній формі - це буде рівносильно введенню адреси з клавіатури;
- введіть напрямок оптимізації цільової функції, клацнувши один раз лівою клавiшею миші по селекторного кнопці "максимального значення".

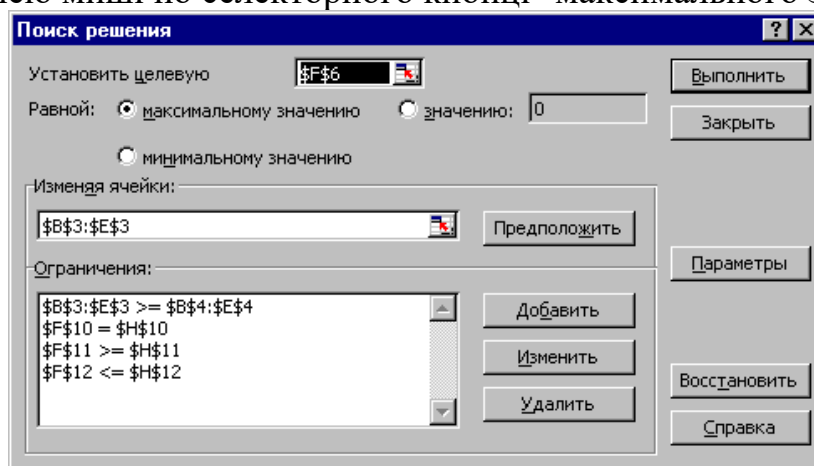


Рис.1.6. Вікно "Пошук рішення" задачі (1.1)

### Введення обмежень і граничних умов

#### Завдання комірок змінних

У вікно "Пошук рішення" в поле "Змінюючи комірки" впишіть адреси  $\$B\$3:\$E\$3$ . Необхідні адреси можна вносити в поле "Змінюючи комірки" і автоматично шляхом виділення мишею відповідних комірок змінних безпосередньо в екранній формі.

#### Задання граничних умов для допустимих значень змінних

У нашому випадку на значення змінних накладається тільки гранична умова невід'ємності, тобто їх нижня межа повинна бути рівна нулю (див. рис.1.1).

- Натисніть кнопку "Додати", після чого з'явиться вікно "Додавання обмеження" (рис.1.7).

- У полі "Посилання на комірку" введіть адреси комірок змінних  $\$B\$3:\$E\$3$ . Це можна зробити як з клавіатури, так і шляхом виділення мишею всіх комірок змінних безпосередньо в екранній формі.

- У полі знаку відкрийте список пропонованих знаків і виберіть  $\geq$

- У полі "Обмеження" введіть адреси комірок нижньої межі значень змінних, тобто  $\$B\$4:\$E\$4$ . Їх також можна ввести шляхом виділення мишею безпосередньо в екранній формі.

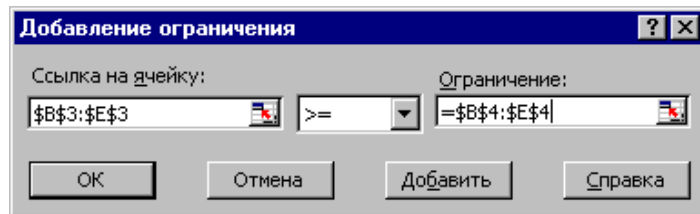


Рис.1.7. Додавання умови невід'ємності змінних задачі (1.1)

*Задання знаків обмежень  $\leq, \geq, =$*

- Натисніть кнопку "Додати" у вікні "Додавання обмеження".
- У полі "Посилання на комірку" введіть адресу комірки лівої частини конкретного обмеження, наприклад  $\$F\$10$ . Це можна зробити як з клавіатури, так і шляхом виділення мишею потрібної комірки безпосередньо в екранній формі.
- У відповідності до умови задачі (1.1) вибрати в полі знаку необхідний знак, наприклад  $=$ .
- У полі "Обмеження" введіть адресу комірки правої частини розглянутого обмеження, наприклад  $\$H\$10$ .
- Аналогічно введіть обмеження:  $\$F\$11 > = \$H\$11$ ,  $\$F\$12 < = \$H\$12$ .
- Підтвердіть введення всіх перерахованих вище умов натисканням кнопки ОК.

Вікно "Пошук рішення" після введення всіх необхідних даних задачі (1.1) представлено на рис.1.6.

Якщо при введенні умови задачі виникає необхідність в зміні або видаленні внесених обмежень або граничних умов, то це роблять, натиснувши кнопки "Змінити" або "Видалити" (див. рис.1.6).

### ***Рішення задачі***

#### *Установка параметрів рішення задачі*

Задача запускається на рішення у вікні "Пошук рішення". Але попередньо для встановлення конкретних параметрів рішення задач оптимізації певного класу необхідно натиснути кнопку "Параметри" і заповнити деякі поля вікна "Параметри пошуку рішення" (рис.1.8).

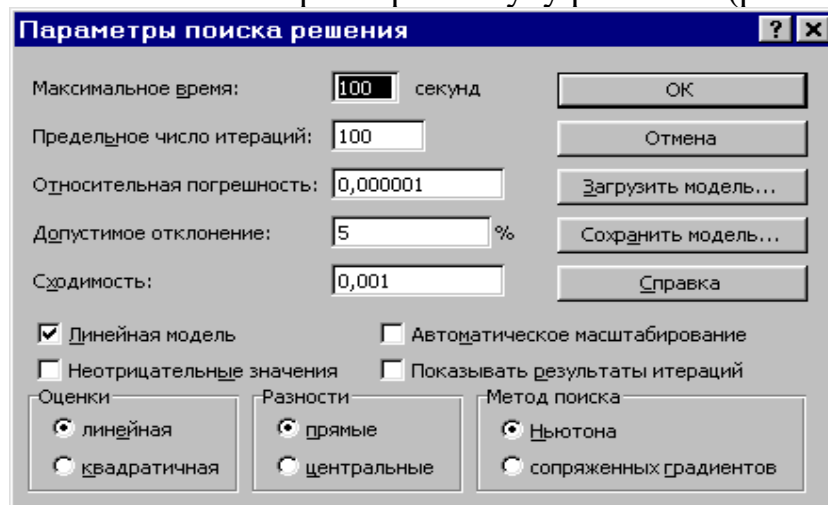


Рис.1.8. Параметры пошуку рішення, які підходять для більшості задач ЛП.

Параметр "Максимальний час" служить для призначення часу (в секундах), що виділяється на вирішення задачі. В поле можна ввести час, що не перевищує 32 767 секунд (більше 9 годин).

Параметр "Граничне число ітерацій" служить для управління часом рішення задачі шляхом обмеження числа проміжних обчислень. В поле можна ввести кількість ітерацій, що не перевищує 32 767.

Параметр "Відносна похибка" служить для задання точності, з якою визначається відповідність комірки цільового значення або наближення до вказаних границь. Поле має містити число з інтервалу від 0 до 1. Чим менша кількість десяткових знаків у введеному числі, тим нижча точність. Висока точність збільшить час, який потрібен для того, щоб зійшовся процес оптимізації.

Параметр "Допустиме відхилення" служить для задання допуску на відхилення від оптимального рішення в цілочисельних задачах. При вказівці більшого допуску пошук рішення закінчується швидше.

Параметр "Збіжність" застосовується тільки при вирішенні нелінійних задач.

Установка прапорця "Лінійна модель" забезпечує прискорення пошуку рішення лінійної задачі за рахунок застосування симплекс-методу.

Підтвердіть встановлені параметри натисканням кнопки "ОК".

#### *Запуск задачі на рішення*

Запуск задачі на рішення проводиться з вікна "Пошук рішення" шляхом натискання кнопки "Виконати".

Після запуску на рішення задачі ЛП на екрані з'являється вікно "Результати пошуку рішення" з одним з повідомлень, поданих на рис.1.9, 1.10 і 1.11.

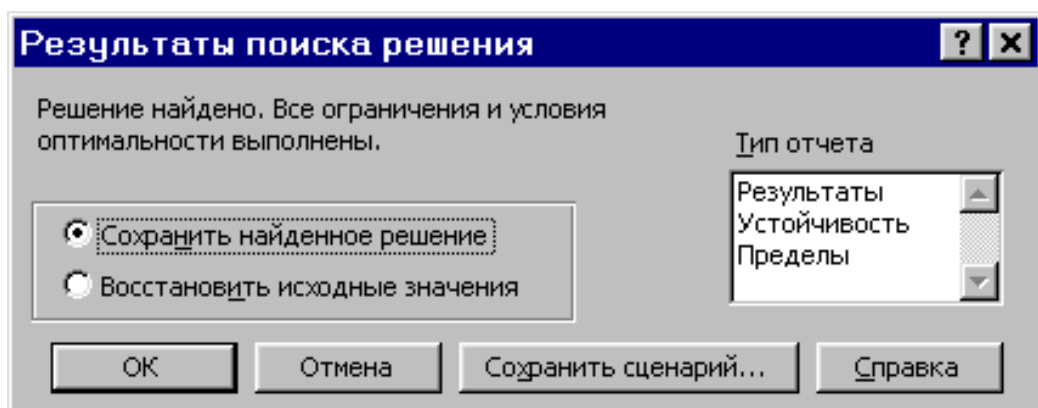


Рис.1.9. Повідомлення про успішне рішення задачі

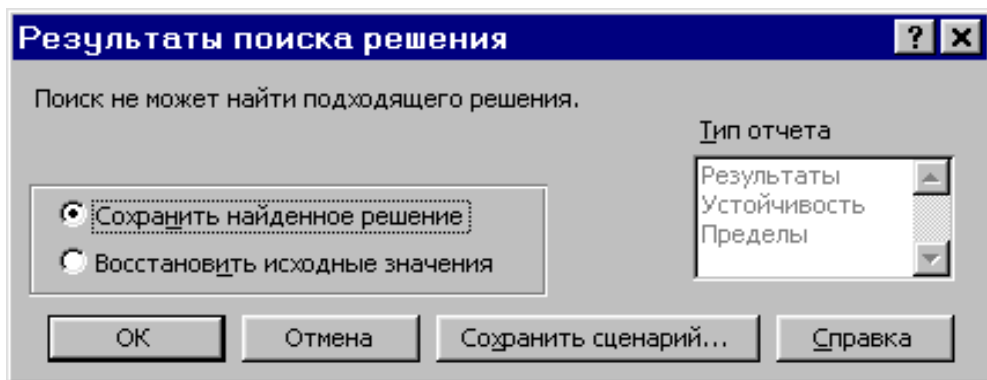


Рис.1.10. Повідомлення при несумісну систему обмежень задачі.

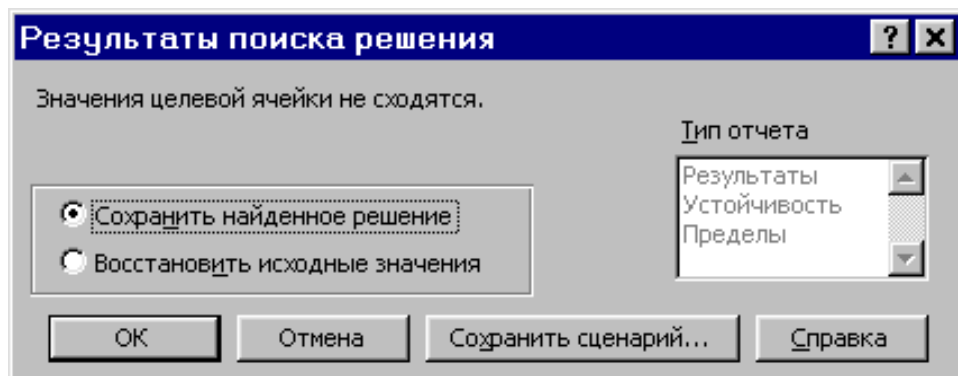


Рис.1.11. Повідомлення при необмеженість цільової функції в необхідному напрямку.

Іноді повідомлення, представлені на рис.1.10 і 1.11, свідчать не про характер оптимального рішення задачі, а про те, що при введенні умов задачі в Excel були допущені помилки, які не дозволяють Excel знайти оптимальне рішення, яке в дійсності існує.

Якщо при заповненні полів вікна "Пошук рішення" були допущені помилки, які не дозволяють Excel застосувати симплекс-метод для вирішення задачі або довести її рішення до кінця, то після запуску задачі на рішення на екран буде видано відповідне повідомлення із зазначенням причини, по якій рішення не знайдено. Іноді занадто мале значення параметра "Відносна похибка" не дозволяє знайти оптимальне рішення. Для виправлення цієї ситуації збільшуйте похибку порозрядно, наприклад від 0,000001 до 0,00001 і т.д.

У вікні "Результати пошуку рішення" представлені назви трьох типів звітів: "Результати", "Стійкість", "Границі". Вони необхідні при аналізі отриманого рішення на чутливість. Для отримання ж відповіді (значень змінних, ЦФ і лівих частин обмежень) прямо в екранній формі просто натисніть кнопку "ОК". Після цього в екранній формі з'являється оптимальне рішення задачі (рис.1.12).

Microsoft Excel - Пример_1.xls									
Ф6 = =СУММПРОИЗВ(В\$3:Е\$3;В6:Е6)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1				ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	X1	X2	X3	X4				
3	Значение	100,661	546,444	0	38,925				
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ			
5						Значение	Направл.		
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27482,714	max		
7									
8				ОГРАНИЧЕНИЯ					
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756	
11	Огран.2	-6	2	4	-1	450	>=	450	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	89	<=	89	
13									

Рис.1.12. Екранна форма задачі (1.1) після отримання рішення

### Цілочисельне програмування

Припустимо, що до умови задачі (1.1) додалося вимога цілочисельності значень всіх змінних. В цьому випадку описаний вище процес введення умови задачі необхідно доповнити наступними кроками.

- В екранній формі вкажіть, на які змінні накладається вимога цілочисельності (цей крок робиться для наочності сприйняття умови задачі) (рис.1.13).

Microsoft Excel - Пример_1(целочисл).xls									
Ф6 = =СУММПРОИЗВ(В\$3:Е\$3;В6:Е6)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1				ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	X1	X2	X3	X4				
3	Значение	100	546	0	39				
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ			
5	Целочисл.	целое	целое	целое	целое	Значение	Направл.		
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27394,2	max		
7									
8				ОГРАНИЧЕНИЯ					
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756	
11	Огран.2	-6	2	4	-1	453	>=	450	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	88	<=	89	
13									

Рис.1.13. Рішення задачі (1.1) за умови цілочисельності її змінних

- У вікні "Пошук рішення" (меню "Сервіс" → "Пошук рішення"), натисніть кнопку "Додати" і у вікні "Додавання обмежень" введіть обмеження наступним чином (рис.1.14):

- в поле "Посилання на комірку" введіть адреси комірок змінних задачі, тобто \$B\$3:\$E\$3;
- в поле введення знаку обмеження встановіть "ціле";
- натисніть клавішу обмеження натисканням кнопки "ОК".

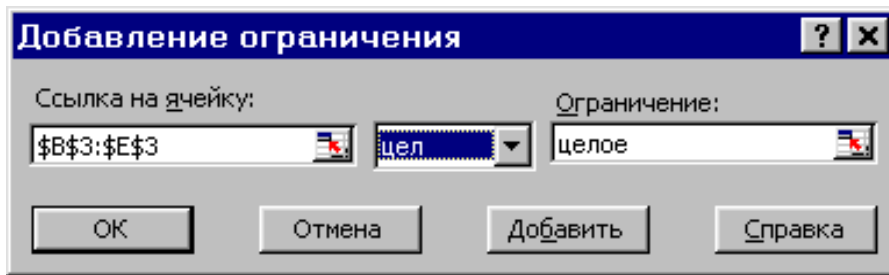


Рис.1.14. Введення умови цілочисельності змінних задачі (1.1)

На рис.1.13 представлено рішення задачі (1.1), до обмежень якої додано умова цілочисельності значень її змінних.

### Двоїндексні задачі ЛП

Двоїндексні задачі ЛП вводяться і вирішуються в Excel аналогічно одноіндексним задачам. Специфіка введення умови двоіндексної задачі ЛП полягає лише в зручності матричного задання змінних задачі і коефіцієнтів ЦФ.

Розглянемо рішення двоіндексної задачі, суть якої полягає в оптимальній організації транспортних перевезень штучного товару зі складів до магазинів (табл.1.2).

Таблиця 1.2 - Вихідні дані транспортної задачі

Тарифи, грн./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запаси, шт.
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потреби, шт.	45	90	50	

Цільова функція і обмеження даної задачі мають вигляд

$$\begin{aligned}
 L(X) = & 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\
 & + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \rightarrow \min; \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50, \\
 \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} - \text{целые} (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}).
 \end{array} \right. & (1.5)
 \end{aligned}$$

Екранні форми, задання змінних, цільової функції, обмежень і граничних умов двоіндексної задачі (1.5) і її рішення представлені на рис.1.15, 1.16, 1.17 і в табл.1.3.

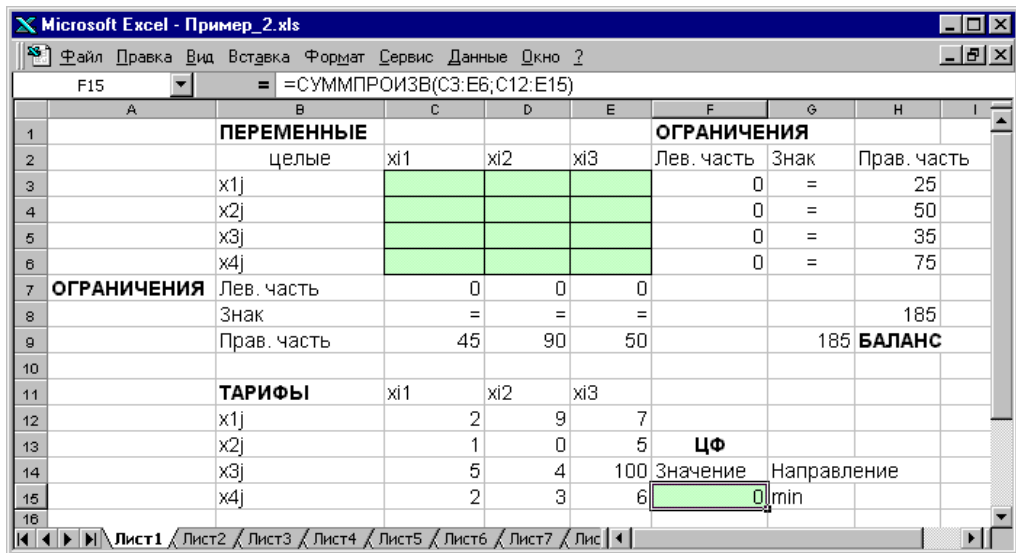


Рис.1.15. Экранна форма двоіндексної задачі (1.5) - курсор в цільовій комірці F15.

Таблиця 1.3 - Формули екранної форми задачі (1.5)

Об'єкт математичної моделі	Вираз в Excel
Змінні задачі	C3:E6
Формула в цільовій комірці F15	=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)
Обмеження по рядках в комірках F3, F4, F5, F6	=СУММ(C3:E3) =СУММ(C4:E4) =СУММ(C5:E5) =СУММ(C6:E6)
Обмеження по стовпцях в комірках C7, D7, E7	=СУММ(C3:C6) =СУММ(D3:D6) =СУММ(E3:E6)
Сумарні запаси і потреби в комірках H8, G9	=СУММ(H3:H6) =СУММ(C9:E9)

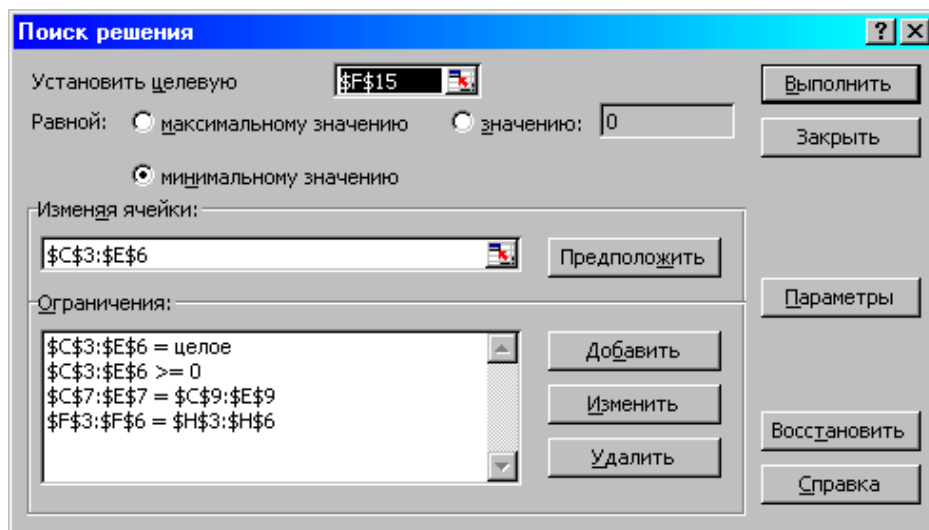


Рис.1.16. Обмеження і граничні умови задачі (1.5)

	А	В	С	Д	Е	Г	Н	И
1		<b>ПЕРЕМЕННЫЕ</b>						
2		целые	x1	x2	x3	Лев. часть	Знак	Прав. часть
3		x1j	25	0	0	25	=	25
4		x2j	0	50	0	50	=	50
5		x3j	0	35	0	35	=	35
6		x4j	20	5	50	75	=	75
7	<b>ОГРАНИЧЕНИЯ</b>	Лев. часть	45	90	50			
8		Знак	=	=	=			185
9		Прав. часть	45	90	50			185 <b>БАЛАНС</b>
10								
11		<b>ТАРИФЫ</b>	x1	x2	x3			
12		x1j	2	9	7			
13		x2j	1	0	5	<b>ЦФ</b>		
14		x3j	5	4	100	Значение	Направление	
15		x4j	2	3	6	545	min	

Рис.1.17. Экранна форма після отримання рішення задачі (1.5) - курсор в цільовій комірці F15.

### Задачі з булевими змінними

Окремим випадком задач з цілочисельними змінними є задачі, в результаті рішення яких шукані змінні можуть приймати тільки одне з двох значень: 0 або 1. Такі змінні називають булевими в честь англійського математика Джорджа Буля, який запропонував їх використання. На рис.1.18 показано екранну форму з рішенням деякої двоіндексної задачі з булевими змінними.

	А	В	С	Д	Е	Г	Н	И
1		<b>ПЕРЕМЕННЫЕ</b>						
2		Целые, булевы	x1	x2	x3	Лев. часть	Знак	Прав. часть
3		x1j	1	0	0	1	=	1
4		x2j	0	0	1	1	=	1
5		x3j	0	1	0	1	=	1
6	<b>ОГРАНИЧЕНИЯ</b>	Лев. часть	1	1	1			
7		Знак	=	=	=			3
8		Прав. часть	1	1	1			3 <b>БАЛАНС</b>
9								
10		<b>ТАРИФЫ</b>	x1	x2	x3			
11		x1j	2	9	7	<b>ЦФ</b>		
12		x2j	1	0	5	Значение	Направление	
13		x3j	5	4	100	11	min	

Рис.1.18. Рішення двоіндексної задачі з булевими змінними

Крім задання вимоги цілочисельності при введенні умови задач з булевими змінними необхідно:

- для наочності сприйняття ввести в екранну форму слово "булеві" в якості характеристики змінних (див. рис.1.18);
- у вікні "Пошук рішення" додати граничні умови, які мають сенс обмеження значень змінних по їх одиничній верхній межі (рис.1.19).

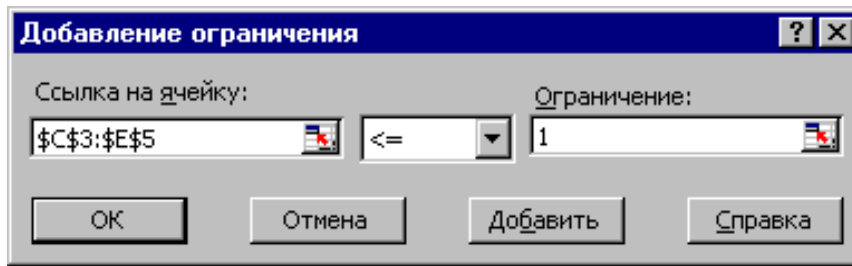


Рис.1.19. Додавання умови одиничної верхньої межі значень змінних двоіндексної задачі з булевими змінними

Вид вікна "Пошук рішення" для задачі з булевими змінними, представленої на рис.1.18, наведено на рис.1.20.

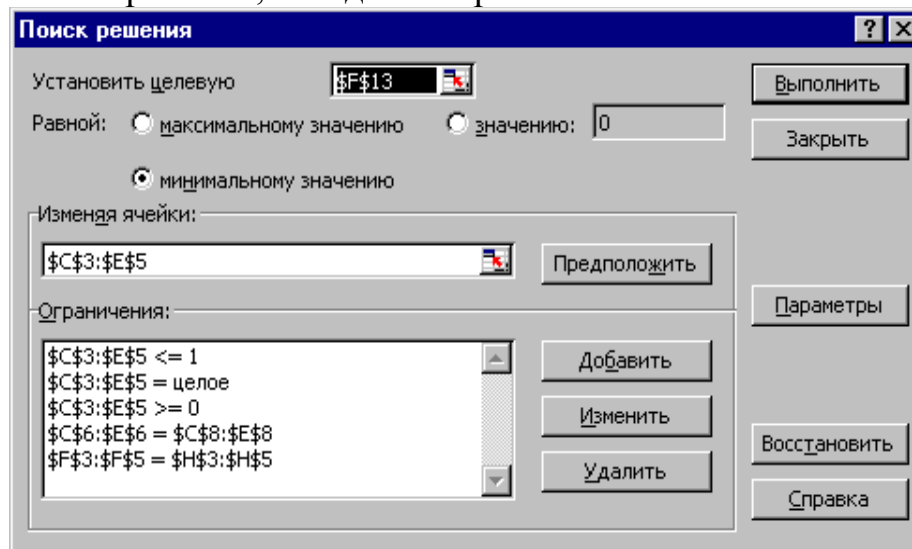


Рис.1.20. Вікно "Пошук рішення" для задачі з булевими змінними, представленої на рис.1.18.

## 2. Можливі помилки при введенні умов задач ЛП

Якщо при вирішенні задачі ЛП видається повідомлення про неможливість знаходження рішення, то можливо, що причина полягає в помилках введення умов задачі в Excel. Тому, перш ніж робити висновок про принципову неможливість знаходження оптимального рішення задачі, дайте відповідь на питання з табл.1.4.

Таблиця 1.4 - Перелік запитань, що дозволяють виявити помилки введення умов задачі в Excel

№	Запитання	Місцезнаходження в Excel
1	Чи правильно Ви ввели чисельні значення і знаки (+, -) коефіцієнтів цільової функції і обмежень, правих частин обмежень?	Екранна форма
2	Чи збалансована двоіндексна задача?	Екранна форма
3	Чи правильні формули в цільовій комірці і в комірках лівих частин обмежень? Для наочності перевірки поставте курсор на комірку з формулою і зробіть подвійне	Екранна форма

	кляцання лівою клавішею миші. Рамкою в екранній формі будуть виділені комірки, які беруть участь в даній формулі (див. рис.1.4, 1.5).	
4	Чи правильно вказано адресу цільової комірки?	Вікно "Пошук рішення"
5	Чи правильно вказано напрямок оптимізації цільової функції?	Вікно "Пошук рішення"
6	Чи правильно вказані адреси комірок змінних?	Вікно "Пошук рішення" Поле "Змінюючи комірки"
7	Чи правильно введені знаки обмежень ( $\leq$ , $\geq$ , $=$ )?	Екранна форма, Вікно "Пошук рішення" Поле "Обмеження"
8	Чи правильно вказані адреси комірок лівих і правих частин обмежень?	Вікно "Пошук рішення" Поле "Обмеження"
9	Чи не забули Ви задати вимогу невід'ємності змінних?	Вікно "Пошук рішення" Поле "Обмеження"
10	Чи не забули Ви задати вимоги по одиничному значенню верхньої границі змінних (для задач з булевими змінними)	Вікно "Пошук рішення" Поле "Обмеження"
11	Чи не забули Ви задати умову цілочисельності змінних (згідно з умовою задачі)?	Вікно "Пошук рішення" Поле "Обмеження"
12	Перевірте правильність установки параметрів	Вікно "Параметри пошуку рішення"

### **3. Приблизні запитання при захисті роботи**

1. Які основні етапи вирішення задач ЛП в MS Excel?
2. Який вид і способи задання формул для цільової комірки і комірок лівих частин обмежень?
3. У чому сенс використання символу \$ у формулах MS Excel?
4. У чому відмінність використання в формулах MS Excel символів ; та :?
5. Чому при введенні формул в комірки ЦФ і лівих частин обмежень в них відображаються нульові значення?
6. Яким чином в MS Excel задається напрямок оптимізації цільової функції?
7. Які комірки екранної форми виконують ілюстративну функцію, а які необхідні для вирішення задачі?
8. Як наочно відобразити в екранній формі комірки, які використовуються в конкретній формулі, з метою перевірки її правильності?
9. Поясніть загальний порядок роботи з вікном "Пошук рішення".

10. Яким чином можна змінювати, додавати, видаляти обмеження у вікні "Пошук рішення"?

11. Які повідомлення видаються в MS Excel у випадках: успішного вирішення задачі ЛП; несумісності системи обмежень задачі; необмеженість ЦФ?

12. Поясніть сенс параметрів, що задаються у вікні "Параметри пошуку рішення".

13. Які особливості рішення в MS Excel цілочисельних задач ЛП?

14. Які особливості рішення в MS Excel двоіндексних задач ЛП?

15. Які особливості рішення в MS Excel задач ЛП з булевими змінними?

#### 4. Варіанти

Використовуючи MS Excel, знайти рішення для моделі ЛП, що відповідає заданому варіанту (табл.1.5).

Таблиця 1.5 - Варіанти задач до завдання №1

№ варіанту	Математична модель
1	$L(X) = 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 0,7x_1 + 0,9x_2 + 1,5x_3 + 2,3x_4 + 1,8x_5 \leq 50000, \\ 0,4x_1 + 1,1x_2 - 0,5x_3 + 1,3x_4 - 2,8x_5 \geq 32000, \\ 0,5x_1 + 1,8x_3 + 0,7x_4 + 2x_5 \leq 40000, \\ 2,2x_1 - 1,4x_2 - 0,8x_3 + 0,9x_4 = 15000, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
2	$L(X) = x_1 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 250, \\ 0,4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 \leq 460, \\ 0,5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 190, \\ 11x_2 - 8,5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 210, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
3	$L(X) = -45x_1 + 65x_2 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 + 34x_4 - 22x_5 = 56, \\ 2x_1 + 7x_3 - 4x_4 + 3x_5 \geq 91, \\ 0,2x_1 + 0,8x_2 + 1,5x_3 + 0,9x_4 + 4x_5 \leq 26, \\ 1,8x_1 - 42x_2 + 6,4x_3 + 3x_5 = 15, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

4	$L(X) = 14x_1 - 9x_2 - x_4 + 6,4x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 0,9x_1 + 10x_2 - 28x_4 + 5x_5 \leq 245, \\ 0,8x_1 + 1,7x_2 - 0,2x_3 - 0,5x_4 = 9, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 54, \\ 8x_1 + 6,2x_2 - 4,8x_4 + 2,9x_5 \geq 17, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
5	$L(X) = 46x_1 + 2,3x_2 + 9,4x_3 - 4x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 7,8x_3 + 12x_4 + 9x_5 \geq 49, \\ 2,3x_2 + 5x_3 + 5,6x_4 - x_5 \leq 86, \\ 16x_1 - 40x_4 + 29x_5 = 50, \\ 190x_1 - 98x_2 - 4x_4 + 150x_5 \geq 300, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
6	$L(X) = 0,5x_1 + 1,8x_3 - 9,2x_4 + 14x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 9,6x_2 + 15,7x_3 + 24x_4 - 8x_5 \leq 74, \\ 0,8x_1 + 11,1x_2 - 4,5x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 22, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 46, \\ 220x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 95x_5 \geq 150, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
7	$L(X) = 12x_2 + 89x_3 - 5x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9,6x_2 + 15,7x_3 + 22x_4 - 8x_5 \leq 73, \\ 0,9x_1 + 11,1x_2 - 4,3x_3 + 1,5x_4 + 6,4x_5 = 19, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 49, \\ 220x_1 - 150x_2 + 3x_3 + 95x_5 = 133, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
8	$L(X) = 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 49x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 21x_1 + 9x_2 - 2x_4 - 12x_5 \geq 58, \\ 110x_2 - 60x_3 + 80x_4 - 45x_5 = 290, \\ 5x_2 + 27x_3 - 14x_4 + x_5 \leq 72, \\ 87x_1 - 6,4x_2 + 130x_4 = 140, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

9	$L(X) = -38x_1 + 60x_2 + x_3 + 4x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_5 \leq 86, \\ 2x_2 + 19x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 130, \\ 0,4x_1 + 3x_2 - 4,2x_3 + 2x_4 - 5x_5 \leq 34, \\ 2,1x_1 + 13x_2 - 20x_3 + 6x_4 = 18, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
10	$L(X) = 10x_1 + 40x_3 + 13x_4 + 56x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 7x_1 + 16x_3 + 5x_4 + 25x_5 \leq 600, \\ 8x_1 + 1,7x_2 - 0,5x_4 + 4,7x_5 = 890, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 270, \\ 84x_1 + 62x_2 + 80x_3 + 14x_5 \geq 2300, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
11	$L(X) = 84x_1 + 5,7x_2 + 10x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + 8,5x_2 + 16x_3 + 10x_5 \geq 50, \\ 10,4x_1 + 6x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 120, \\ 19x_1 + 18x_2 - 20x_4 + 30x_5 = 600, \\ 200x_1 + 45x_2 - 8x_3 + 3,4x_4 \geq 210, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
12	$L(X) = 0,84x_2 - 4x_3 + 3,8x_4 + 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 15x_1 + 9,6x_2 + 34x_4 - 8x_5 \leq 180, \\ 0,6x_1 + 11,1x_2 - 2,6x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 68, \\ 14x_1 + 64x_3 - 38x_4 + 12x_5 \leq 81, \\ 190x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 84x_5 \geq 230, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$



У даному завданні розглядається одноіндексна задача ЛП, що представляє собою загальну розподільчу задачу, яка характеризується різними одиницями виміру робіт і ресурсів.

Розглянемо наступну задачу (варіант 0 з табл.2.1)..

## 2. Постановка задачі

Меблевий комбінат випускає книжкові полиці А з натурального дерева зі склом, полиці В<sub>1</sub> з полірованої ДСП без скла і полиці В<sub>2</sub> з полірованої ДСП зі склом. Габарити полиць А, В<sub>1</sub> і В<sub>2</sub> наступні: довжина 1100 (d) мм, ширина 250 (w) мм, висота 300 (h) мм (рис.2.2). Розмір листа ДСП 2×3 м.

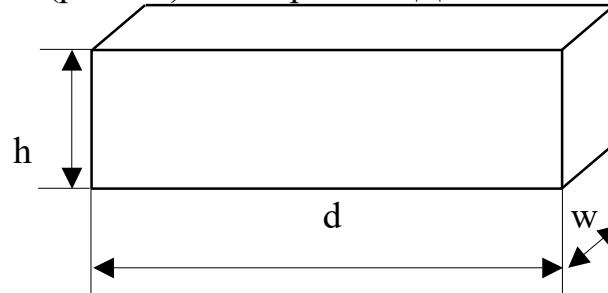


Рис.2.2. Габарити полиць, що випускаються меблевим комбінатом

При виготовленні полиць А виконуються наступні роботи: столярні, покриття лаком, сушка, різання скла, упаковка. Всі операції, що виконуються в ході столярних робіт і упаковки, виконуються вручну. Полиці В<sub>1</sub> і В<sub>2</sub> поставляються в торговельну мережу в розібраному вигляді. За винятком операції упаковки, всі інші операції (виробництво комплектуючих полиць, різання скла) при виготовленні полиць В<sub>1</sub> і В<sub>2</sub>, виконуються на спеціалізованих автоматах.

Трудомісткість столярних робіт з випуску однієї полиці А становить 4 (Тр<sub>1</sub>) год. Продуктивність автомата, що покриває полиці А лаком - 10 (Пр<sub>1</sub>) полиць на годину, автомата, ріжучого скло - 100 (Пр<sub>2</sub>) скелець на годину. Змінний фонд часу автомата для покриття лаком - 7 (Фч<sub>1</sub>) год, автомата для різання скла - 7,5 (Фч<sub>2</sub>) год. Сушка полиць, покритих лаком, відбувається протягом доби в спеціальних сушарках, що вміщують 50 (V<sub>1</sub>) полиць. На упаковку полиць А потрібно 4 (Тр<sub>2</sub>) хвилини. У виробництві полиць зайняті 40 (Р<sub>1</sub>) столярів та 14 (Р<sub>2</sub>) пакувальників.

Продуктивність автомата, що виробляє комплектуючі полиць В<sub>1</sub> і В<sub>2</sub>, дорівнює 3 (Пр<sub>3</sub>) полиці на годину, а його змінний фонд часу дорівнює 7,4 (Фч<sub>3</sub>) год, трудомісткість пакувальних робіт становить 8 (Тр<sub>3</sub>) хв для полиць В<sub>1</sub> і 10 (Тр<sub>4</sub>) хв для полиці В<sub>2</sub>.

Від постачальників комбінат отримує в місяць 400 (Z<sub>1</sub>) листів полірованої ДСП, 230 (Z<sub>2</sub>) листів ДВП, а також 260 (Z<sub>3</sub>) листів скла. З кожного аркуша ДВП можна викроїти 14 (К<sub>1</sub>) задніх стінок полиць В<sub>1</sub> і В<sub>2</sub>, а з кожного листа скла - 10 (К<sub>2</sub>) скелець для полиць А та В<sub>2</sub>.

Склад готової продукції може розмістити не більше 350 (V<sub>2</sub>) полиць та комплектів полиць, причому щодня в торговельну мережу вивозиться в середньому 40 (N) полиць та комплектів. На початок поточного місяця на

складі залишилося 100 (Зал) полиць, вироблених раніше. Собівартість полиці А дорівнює 205 ( $C_1$ ) грн., полиці В без скла - 142 ( $C_2$ ) грн., зі склом - 160 ( $C_3$ ) грн.

Маркетингові дослідження показали, що частка продажів полиць обох видів зі склом становить не менше 60% (Д) в загальному обсязі продажів, а місткість ринку полиць виробленого типу становить близько 5300 ( $V_3$ ) штук в місяць. Меблевий комбінат уклав договір на поставку замовнику 50 (З) полиць типу  $B_2$  в поточному місяці.

Скласти план виробництва полиць на поточний місяць. Відомі ціни реалізації полиць: полиць А - 295 ( $ц_1$ ) грн., полиць В без скла - 182 ( $ц_2$ ) грн., полиць В зі склом - 220 ( $ц_3$ ) грн.

### 3. Побудова моделі

*I етап* побудови моделі полягає у визначенні (описі, завданні, ідентифікації) змінних. У цьому завданні шуканими невідомими величинами є кількість полиць кожного виду, які будуть виготовлені в поточному місяці. Таким чином,  $x_A$  - кількість полиць А (шт./міс.);  $x_{B_1}$  - кількість полиць  $B_1$  (шт./міс.);  $x_{B_2}$  - кількість полиць  $B_2$  (шт./міс.).

*II етап* побудови моделі полягає в побудові цільової функції, що представляє мету рішення задачі. В даному випадку мета - це максимізація прибутку, одержуваного від продажу полиць всіх видів протягом місяця. Оскільки в цій задачі прибуток може бути визначено як різницю між ціною ( $ц_1, ц_2, ц_3$ ) і собівартістю ( $с_1, с_2, с_3$ ), то ЦФ має вигляд

$$L(X) = (295 - 205)x_A + (182 - 142)x_{B_1} + (220 - 160)x_{B_2} \rightarrow \max$$

*III етап* побудови моделі полягає в заданні обмежень, що моделюють умови задачі. Всі обмеження розглянутої задачі можна розділити на кілька типів.

#### Обмеження по фонду часу (з використанням трудомісткості робіт)

Ліва частина обмежень по фонду часу являє собою час, що витрачається на виробництво полиць протягом місяця в кількості  $x_A, x_{B_1}, x_{B_2}$  штук. Права частина обмеження - це фонд робочого часу виконавця роботи (робочого або автомата) за зміну. Нерівність (2.2) описує обмеження по фонду часу на виконання столярних робіт. Коефіцієнт 4 год./шт. ( $Tr_1$ ) - це час, що витрачається на столярні роботи при виробництві однієї полиці типу А (трудомісткість); 40 чол. ( $P_1$ ) - це кількість столярів, що беруть участь у виробництві; 8 - кількість годин роботи однієї людини протягом зміни; 1 зм./дн. - кількість змін в одному робочому дні; 22 дн./міс. - кількість робочих днів у місяці (2.1):

$$4x_A \leq 40 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22 \quad (2.2)$$

Аналогічно записується обмеження (2.3) по фонду часу на пакувальні роботи, в якому 14 чол. ( $P_2$ ) - це кількість пакувальників:

$$\frac{4}{60}x_A + \frac{8}{60}x_{B_1} + \frac{10}{60}x_{B_2} \leq 14 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22 \quad (2.3)$$

*Обмеження по фонду часу (з використанням продуктивності робіт)*

Нерівність (2.4) описує обмеження по фонду часу на покриття лаком полиць типу А. Відмінність обмежень, що враховують дані про продуктивності робіт, від обмежень, що враховують дані про трудомісткості робіт, полягає в тому, що продуктивність необхідно перетворити в трудомісткість. Трудомісткість є величиною, оберненою продуктивності. Коефіцієнт  $\frac{1}{10}$  ( $\frac{1}{Pr_1}$ ) при  $x_A$  в (2.4) - це кількість годин, що

припадають на покриття лаком однієї полиці типу А. При записі правої частини обмеження враховуємо, що автомат, що виконує покриття лаком, працює не повну зміну (8 год), а протягом змінного фонду часу 7 год ( $\Phi_{ч1}$ ). Це пов'язано з необхідністю підготовки автомата до роботи і обслуговуванням його після закінчення роботи.

$$\frac{1}{10} x_A \leq 7 \cdot 1 \cdot 22 \quad (2.4)$$

Нерівність (2.5) описує обмеження по фонду часу на різання скла для полиць типу А і В<sub>2</sub>:

$$\frac{2}{100} x_A + \frac{2}{100} x_{B_2} \leq 7,5 \cdot 1 \cdot 22 \quad (2.5)$$

Нерівність (2.6) описує обмеження по фонду часу на виробництво комплектуючих полиць типу В<sub>1</sub> і В<sub>2</sub>:

$$\frac{1}{3} x_{B_1} + \frac{1}{3} x_{B_2} \leq 7,4 \cdot 1 \cdot 22 \quad (2.6)$$

*Обмеження по запасу матеріалів, що витрачаються у виробництві (за запасом використовуваних для виробництва полиць деталей)*

Нерівність (2.7) описує обмеження по запасу листів ДСП, що поставляються на комбінат щомісяця. При цьому слід врахувати, що з листа ДСП треба викроювати комплекти (верхню і нижню сторони полиць, 2 бічні сторони) для виробництва полиць. Тому при заданні обмеження має сенс орієнтуватися не на кількість листів ДСП, а на кількість комплектів для полиць [права частина (2.7)], які можна отримати з наявного запасу ДСП. Але оскільки листи ДСП можна розкроювати різними способами і отримувати при цьому різну кількість деталей і комплектів, то позначимо місячний запас комплектів в правій частині (2.7) як  $Y_{\text{компл}}$  і розглянемо спосіб його чисельного визначення пізніше. У лівій частині обмеження (2.7) задається кількість комплектів (по одному на полицю), необхідних на виробництво полиць протягом місяця в обсязі  $x_{B_1}$ ,  $x_{B_2}$ :

$$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \leq Y_{\text{компл}} \quad (2.7)$$

Аналогічно обмеженню по ДСП нерівність (2.8) - це обмеження по запасу задніх стінок з ДВП для полиць В<sub>1</sub> і В<sub>2</sub>, а нерівність (2.9) - обмеження по запасу скла для полиць А та В<sub>2</sub>. На відміну від ДСП, листи ДВП і листи скла кроються стандартним способом, і з кожного листа ДВП виходить 14 ( $K_1$ )

задніх стінок полиць, а з кожного листа скла виходить 10 ( $K_2$ ) скелець. Щомісячний запас листів ДВП і скла становить відповідно 230 ( $Z_2$ ) і 260 ( $Z_3$ ). При складанні лівих частин обмежень (2.8) і (2.9) слід врахувати, що на кожену полицю  $B_1$  і  $B_2$  припадає по одній задній стінці, а на кожену полицю  $A$  і  $B_2$  - по 2 скла:

$$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \leq 230 \cdot 14 \quad (2.8)$$

$$2x_A + 2x_{B_2} \leq 260 \cdot 10 \quad (2.9)$$

*Обмеження по ємності допоміжних приміщень і ринку*

Нерівність (2.10) є обмеженням за кількістю полиць  $A$ , які може вмістити сушарка. У правій частині (2.10) представлено кількість полиць, які можуть бути просушені протягом місяця (в день може бути просушено 50 ( $v_1$ ) полиць):

$$x_A \leq 50 \cdot 22 \quad (2.10)$$

Нерівність (2.11) описує обмеження за кількістю полиць всіх видів, які може вмістити склад готової продукції. При цьому права частина (2.11) враховує, що загальна ємність складу зменшена на 100 (Зал) полиць, які залишилися невивезені з минулого місяця. Крім того, протягом місяця щодня буде звільнятися по 40 ( $N$ ) місць для полиць:

$$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 350 - 100 + 40 \cdot 22 \quad (2.11)$$

Нерівність (2.12) описує обмеження по приблизній ємності ринку, що дорівнює 5300 ( $V_3$ ) полиць всіх видів:

$$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 5300 \quad (2.12)$$

*Обмеження щодо гарантованого замовлення*

Нерівність (2.13) показує, що необхідно зробити як мінімум 50 (3) замовлених полиць  $B_2$ , а можливо, і більшу кількість, але вже для вільного продажу:

$$x_{B_2} \geq 50 \quad (2.13)$$

*Обмеження по співвідношенню обсягів продажів різних товарів*

Нерівність (2.14) показує, що частка полиць  $A$  та  $B_2$  в загальному обсязі полиць, вироблених для вільного продажу, повинна становити не менше 60% (Д). До такого висновку приводять результати маркетингових досліджень. Оскільки з усіх полиць  $B_2$  у вільний продаж надійде лише  $(x_{B_2} - 50)$ , то це враховується при складанні обмеження (2.14), яке після алгебраїчних перетворень набуває вигляду (2.15).

$$x_A + (x_{B_2} - 50) \geq 0,6[x_A + x_{B_1} + (x_{B_2} - 50)] \quad (2.14)$$

$$0,4x_A - 0,6x_{B_1} + 0,4x_{B_2} \geq 20 \quad (2.15)$$

### Визначення кількості комплектів для полиць $B_1$ і $B_2$

Розглянемо детально питання визначення максимально можливої кількості комплектів для полиць  $B_1$  і  $B_2$ , яку можна зробити з щомісячного запасу ДСП. Залежно від розмірів листів ДСП ( $2000 \times 3000$  мм) і габаритів полиць ( $1100 \times 250 \times 300$  мм) деталі полиць  $B_1$  і  $B_2$  можна викроїти різними способами. Розглянемо три можливих варіанти такого розкрою, представлені на рис.2.3 (затемнені ділянки - це невикористана площа ДСП).

Згідно 1-го варіанту з одного аркуша ДСП для полиць  $B_1$  і  $B_2$  можна викроїти 19 деталей верхньої або нижньої стінок, а також 9 деталей бічних стінок. За 2-м варіантом розкрою отримуємо 12 деталей верхньої або нижньої стінок і 36 деталей бічних стінок. За 3-м варіантом розкрою отримуємо 16 деталей верхньої або нижньої стінок і 18 деталей бічних стінок.

Позначимо кількість листів ДСП, розкrojених протягом місяця: по 1-му варіанту через  $u_1$  (лист./міс.); по 2-му варіанту -  $u_2$  (лист./міс.); по 3-му варіанту -  $u_3$  (лист./міс.). При виробництві полиць нам вигідно прагнути до такого розкroю листів ДСП, при якому з отриманих деталей можна укомплектувати максимальну кількість полиць. Кількість комплектів, одержуваних з розкrojених деталей, ми раніше позначили через  $Y_{\text{компл}}$ . Таким чином, наша мета описується цільовою функцією

$$L(Y) = Y_{\text{компл}} \rightarrow \max \text{ компл./міс}$$

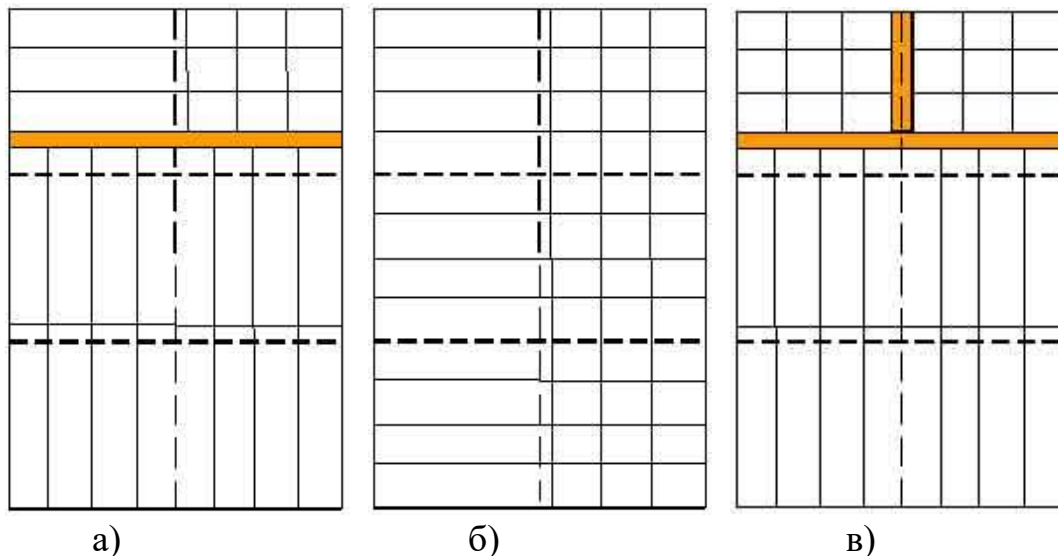


Рис.2.3. Можливі варіанти розкroю листів ДСП: а) 19 верхніх і нижніх стінок, 9 бокових стінок; б) 12 верхніх і нижніх стінок, 36 бокових стінок; в) 16 верхніх і нижніх стінок, 18 бокових стінок.

Кількість всіх розкrojених листів ДСП не повинно перевищувати 400 ( $Z_1$ ), тобто щомісячний запас їх на складі:

$$u_1 + u_2 + u_3 \leq 400$$

При цьому, оскільки в кожен комплект входить одна верхня і одна нижня стінки, кількість нижніх і верхніх стінок, одержуваних при розкroї всіх листів ДСП [ліва частина (2.16)], має бути не менша ніж  $2Y_{\text{компл}}$ :

$$19y_1 + 12y_2 + 16y_3 \geq 2Y_{\text{КОМПЛ}} \quad (2.16)$$

Аналогічний сенс має обмеження (2.17), яке задає нижню межу кількості бічних стінок полиць:

$$9y_1 + 36y_2 + 18y_3 \geq 2Y_{\text{КОМПЛ}}. \quad (2.17)$$

Після перетворення описаних нерівностей отримаємо модель задачі (2.18), що дозволяє розкрити максимальну кількість комплектів:

$$\begin{cases} L(Y) = Y_{\text{КОМПЛ}} \rightarrow \max \\ \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \leq 400, \\ 19y_1 + 12y_2 + 16y_3 - 2Y_{\text{КОМПЛ}} \geq 0, \\ 9y_1 + 36y_2 + 18y_3 - 2Y_{\text{КОМПЛ}} \geq 0, \\ y_1, y_2, y_3, Y_{\text{КОМПЛ}} \geq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.18)$$

Таким чином, при вирішенні задачі (2.18) симплекс-методом (наприклад, в MS Excel) змінна  $Y_{\text{КОМПЛ}}$  безпосередньо визначає значення ЦФ, а змінні  $y_1$ ,  $y_2$  і  $y_3$  впливають на зміну значення ЦФ побічно, через обмеження. Вирішивши задачу (2.18) для варіанту 0, ми отримаємо значення правої частини обмеження (2.7)  $Y = 3387$  компл, після чого зможемо вирішити вихідну задачу, модель якої має вигляд:

$$\begin{cases} L(X) = 90x_A + 40x_{B_1} + 60x_{B_2} \rightarrow \max ; \\ \begin{cases} 4x_A \leq 7040 ; \\ 0,067x_A + 0,133x_{B_1} + 0,167x_{B_2} \leq 2464 ; \\ 0,1x_A \leq 154 ; \\ 0,02x_A + 0,02x_{B_2} \leq 165 ; \\ 0,333x_{B_1} + 0,333x_{B_2} \leq 162,8 ; \\ x_{B_1} + x_{B_2} \leq 3387 ; \\ x_{B_1} + x_{B_2} \leq 3220 ; \\ 2x_A + 2x_{B_2} \leq 2600 ; \\ x_A \leq 1100 ; \\ x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 1220 ; \\ x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 5300 ; \\ x_{B_2} \geq 50 ; \\ 0,4x_A - 0,6x_{B_1} + 0,4x_{B_2} \geq 20 ; \\ x_A, x_{B_1}, x_{B_2} \geq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.19)$$

Вирішивши задачу (2.19), отримуємо

$$x_A = 1100 \text{ шт./міс.}, x_{B_1} = 0 \text{ шт./міс.}, x_{B_2} = 120 \text{ шт./міс.}, \quad (2.20)$$

$$L(X) = 106\,200 \text{ грн./міс.},$$

тобто в поточному місяці необхідно зробити 1100 полиць А та 120 полиць В<sub>2</sub>, а виробництво полиць В<sub>1</sub> недоцільне. Після реалізації всіх вироблених полиць комбінат отримає прибуток у розмірі 106 200 гривень.

#### 4. Приблизні запитання при захисті роботи

1. Що таке розподільча задача, загальна розподільча задача?
2. Що таке математичне і лінійне програмування?
3. Яка загальна форма запису моделі ЛП?
4. Що таке допустиме і оптимальне рішення?
5. Які основні етапи побудови математичної моделі ЛП?
6. Який економічний сенс і математичний вид ЦФ задачі про виробництво полиць?
7. Як можна класифікувати обмеження задачі про полиці по їх економічному змісту?
8. Чим відрізняється побудова обмежень, які використовують дані про трудомісткість і продуктивність робіт?
9. Поясніть спосіб побудови кожного конкретного обмеження задачі про полиці.
10. Яким чином вирішується задача оптимального розкрою листів ДСП?
11. Яким чином одиниці вимірювання параметрів задачі використовуються для виявлення помилок побудови обмежень?

Таблиця 2.1 - Вихідні дані варіантів задач до завдання №2

№ вар	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	1100	1070	1140	1030	1180	990	1220	950	1260	910	1300	870	1340
w	250	240	260	230	270	240	260	230	270	240	260	230	270
h	300	290	280	270	260	250	240	310	320	330	340	350	360
Tr <sub>1</sub>	4	4,4	3,6	4,8	3,2	5,2	2,8	5,6	2,4	6	2	6,4	1,6
Tr <sub>2</sub>	4	10	5	9	6	8	7	5	8	6	9	7	10
Tr <sub>3</sub>	8	15	10	13	9	13	10	8	11	10	15	14	16
Tr <sub>4</sub>	10	16	12	14	10	14	11	9	14	13	18	16	20
P <sub>1</sub>	40	22	19	6	27	16	9	25	11	8	30	14	7
P <sub>2</sub>	14	16	12	11	7	5	13	3	6	8	10	2	9
Pr <sub>1</sub>	10	4	9	5	2	6	4	7	4	3	5	8	6
Pr <sub>2</sub>	100	150	170	250	180	130	190	120	200	110	210	140	220
Pr <sub>3</sub>	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Фч <sub>1</sub>	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2	7,0	7,3	7,4
Фч <sub>2</sub>	7,5	7,6	7,7	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2
Фч <sub>3</sub>	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6
Z <sub>1</sub>	400	390	365	380	415	370	405	350	395	410	385	420	375
Z <sub>2</sub>	230	240	235	220	215	200	195	180	205	160	175	140	155
Z <sub>3</sub>	260	200	250	190	240	180	230	290	220	230	210	270	200
K <sub>1</sub>	14	15	5	16	6	17	7	12	8	13	18	11	9

$K_2$	10	11	12	5	13	6	14	7	15	8	16	9	17
$V_1$	50	20	65	40	55	75	45	60	35	70	25	30	80
$V_2$	350	400	360	300	370	310	380	320	390	330	410	340	420
$V_3$	5300	2000	3700	3000	1100	4000	2500	1500	1400	2700	4300	3100	1900
$N$	40	45	67	50	72	55	44	60	38	65	30	70	35
ЗаП	100	110	90	170	80	160	70	150	60	140	50	120	40
Д	60 (A,B <sub>2</sub> )	15A	10B <sub>1</sub>	150 (B <sub>1</sub> ,B <sub>2</sub> )	43 (A,B <sub>1</sub> )	72A	12B <sub>2</sub>	16 (B <sub>1</sub> ,B <sub>2</sub> )	23 (A,B <sub>2</sub> )	46A	59B <sub>1</sub>	13 (B <sub>1</sub> ,B <sub>2</sub> )	9 (A,B <sub>1</sub> )
З	60B <sub>2</sub>	30A	15B <sub>1</sub>	10A, 18B <sub>1</sub>	5A, 12B <sub>2</sub>	40B <sub>1</sub> , 3B <sub>2</sub>	60B <sub>2</sub>	24A,	80B <sub>1</sub>	14A, 21B <sub>1</sub>	38A, 62B <sub>2</sub>	23B <sub>1</sub> , 20B <sub>2</sub>	84B <sub>2</sub>
$C_1$	205	210	145	200	150	215	170	220	165	225	180	230	185
$C_2$	142	150	125	164	120	187	125	176	129	195	143	207	126
$C_3$	160	170	133	178	134	205	148	197	142	210	162	214	146
$\Pi_1$	295	256	213	284	192	243	198	274	203	281	224	276	249
$\Pi_2$	182	202	149	190	154	230	175	246	194	263	214	287	186
$\Pi_3$	220	224	158	206	147	243	180	242	167	267	202	246	187

3 варіанти розкрою листів ДСП; 8 год в зміні; робота в 1 зміні; 22 робочих дні в місяці

### Завдання № 3 (частина II) Одноіндексні задачі лінійного програмування

#### *1. Задання аналізу оптимального рішення на чутливість*

На практиці багато параметрів (ціни на продукцію і сировину, запаси сировини, попит на ринку, заробітна плата і т.д.) з плином часу змінюють свої значення. Тому оптимальне рішення задачі ЛП, отримане для конкретної ситуації, після її зміни може виявитися непридатним або неоптимальним. У зв'язку з цим виникає завдання аналізу чутливості задачі ЛП, а саме того, як можливі зміни параметрів вихідної моделі вплинуть на отримане раніше оптимальне рішення.

Обмеження лінійної моделі класифікуються наступним чином (рис.3.1). Зв'язуючі обмеження проходять через оптимальну точку, наприклад (1) і (2). Незв'язуючі обмеження не проходять через оптимальну точку, наприклад (3), (4) і (5). Аналогічно ресурс, що представлений зв'язуючим обмеженням, називають дефіцитним, а ресурс, що представлений незв'язуючим обмеженням, - недефіцитним. Обмеження називають надлишковим в тому випадку, якщо його виключення не впливає на область допустимих рішень і, отже, на оптимальне рішення, наприклад, (5). Виділяють наступні три задачі аналізу на чутливість.

#### *1. Аналіз скорочення або збільшення ресурсів :*

1) на скільки можна збільшити (обмеження типу  $\leq$ ) або зменшити (обмеження типу  $\geq$ ) запас дефіцитного ресурсу для поліпшення оптимального значення ЦФ?

2) на скільки можна зменшити (обмеження типу  $\leq$ ) або збільшити (обмеження типу  $\geq$ ) запас недефіцитних ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення цільової функції?

2. Збільшення (зменшення) запасу якого з ресурсів найвигідніше ?

3. Аналіз зміни цільових коефіцієнтів: яким є діапазон зміни коефіцієнтів ЦФ, при якому не змінюється оптимальне рішення?

## 2. Графічний аналіз оптимального рішення на чутливість

Область допустимих рішень задачі на рис.3.1 - багатокутник OABCDE. Якщо зв'язуючі обмеження (дефіцитний ресурс) (2) пересувати до точки F, то це призведе до розширення області допустимих рішень до багатокутника OABCFE і до отримання нового оптимального рішення в точці F. При цьому обмеження (2) стане надмірним. Нове рішення (F) краще колишнього (C), оскільки для перетину з точкою F лінія ЦФ повинна пройти у напрямку вектора (виходить з початку координат і показує напрямок максимізації ЦФ) далі точки C (рис.3.2).

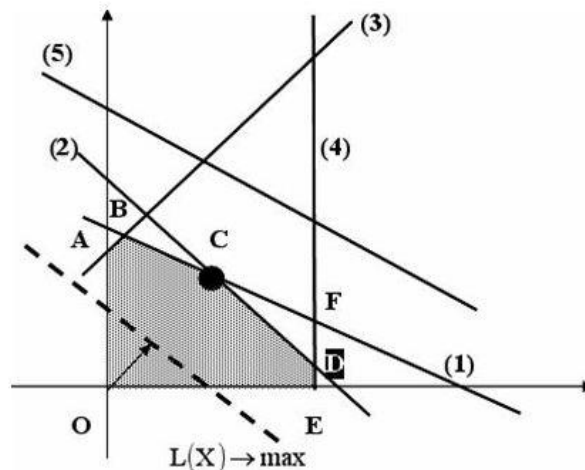


Рис.3.1. Вихідна задача ЛП для графічного аналізу чутливості

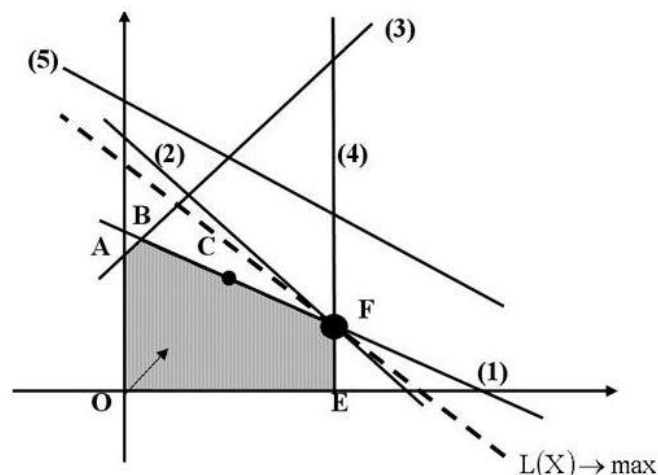


Рис.3.2. Аналіз максимального зміни запасу дефіцитного ресурсу (2) з метою поліпшення оптимального рішення  $C \rightarrow F$ .

Таким чином, щоб графічно визначити максимальну зміну запасу дефіцитного ресурсу, що покращує оптимальне рішення, необхідно

пересувати відповідну пряму в напрямку поліпшення ЦФ до тих пір, поки це обмеження не стане надмірним.

Графічний аналіз максимально можливої зміни запасу недефіцитного ресурсу показаний на рис.3.3. Пересуємо незв'язуюче обмеження (3) до перетину з оптимальним рішенням в точці С.

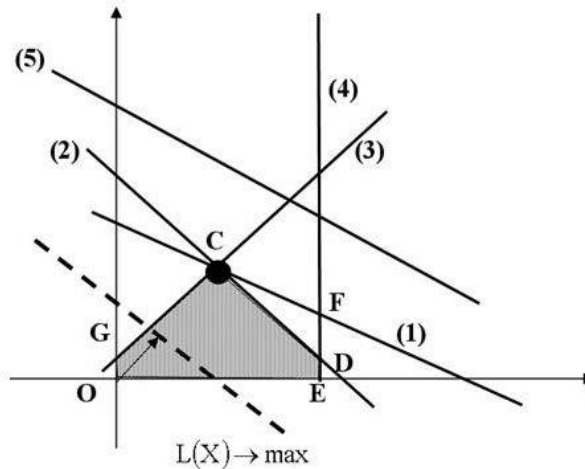


Рис.3.3. Аналіз максимальної зміни запасу недефіцитного ресурсу (3), яка не змінює оптимальне рішення Z

Це відповідає зменшенню запасу недефіцитного ресурсу (3), який в оптимальній точці С вихідної задачі (див. рис.3.1) витрачався в повному обсязі. Областю допустимих рішень стане багатокутник OGCDE. Оптимальне рішення залишиться колишнім (точка С).

Таким чином, щоб графічно визначити максимальну зміну запасу недефіцитних ресурсу, що не міняє оптимального рішення, необхідно пересувати відповідну пряму до перетину з оптимальною точкою.

Для того щоб з'ясувати, запас якого з дефіцитних ресурсів вигідніше збільшувати в першу чергу, необхідно визначити, яку користь (наприклад, прибуток) принесе збільшення запасів кожного з них на одиницю. Для цих цілей вводиться поняття *цінності додаткової одиниці i-го ресурсу* (тіньова ціна):

$$y_i = \frac{\text{тах приріст оптимального значення } L(x)}{\text{тах допустимий приріст об'єму } i\text{-го ресурсу}}$$

Тобто, спочатку нарощується запас ресурсу, що має максимальне значення  $y_i$ , потім - друге за величиною і т.д.

Графічний аналіз зміни цільових коефіцієнтів (наприклад, цін на продукцію, яка виробляється), що не приводять до зміни оптимального рішення, проводиться шляхом обертання лінії ЦФ. При збільшенні коефіцієнта ЦФ  $c_1$  або зменшенні коефіцієнта  $c_2$  цільова пряма на графіку обертається навколо оптимальної точки за годинниковою стрілкою. Якщо зменшується  $c_1$  або ж збільшується  $c_2$ , то цільова пряма обертається навколо оптимальної точки проти годинникової стрілки (рис.3.4).

Зменшення ціни 1  $c_1$   
або зменшення ціни 2  $c_2$

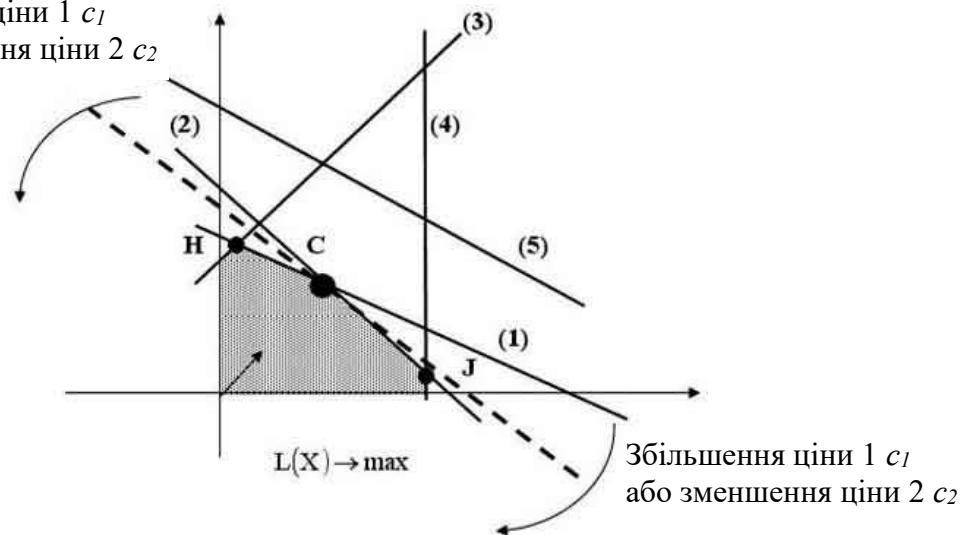


Рис.3.4. Аналіз зміни коефіцієнтів  $c_1$  і  $c_2$  ЦФ.

Зафіксуємо значення  $c_2$ . Оптимальне рішення в точці С не буде змінюватися при збільшенні  $c_1$  до тих пір, поки цільова пряма не співпаде з прямою (2). Аналогічно оптимальне рішення в точці С не буде змінюватися при зменшенні  $c_1$  до тих пір, поки цільова пряма не співпаде з прямою (1).

При таких поворотах точка С буде залишатися оптимальною доти, поки нахил цільової прямої не вийде за межі, які визначаються нахилом прямих обмежень (1) і (2). Якщо цільова пряма вийде за межі нахилу (1) або (2), то оптимальною стане відповідно точка Н або J.

Таким чином, нижня і верхня межа зміни ціни 1 визначаються значеннями коефіцієнта  $c_1$ , при яких нахил цільової прямої збігається відповідно з нахилами прямих обмежень (1) і (2).

### 3. Аналіз оптимального рішення на чутливість в Excel

Проведемо аналіз чутливості задачі про меблевий комбінат з завдання №2 (частина I). Для цього необхідно після запуску в Excel задачі на рішення у вікні "Результати пошуку рішення" виділити за допомогою миші два типи звітів: "Результати" і "Стійкість" (рис.3.5).

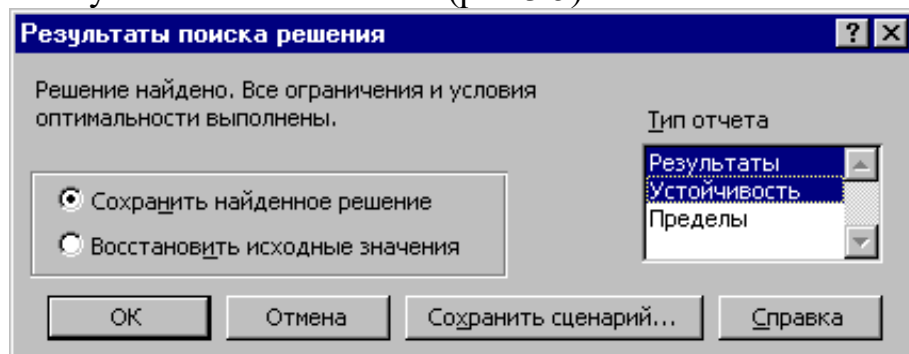


Рис.3.5. Виділення типів звітів необхідних для аналізу чутливості

*Звіт за результатами*

Звіт за результатами складається з трьох таблиць (рис.3.6):

- 1) таблиця 1 містить інформацію про ЦФ;
- 2) таблиця 2 містить інформацію про значення змінних, отриманих в результаті рішення задачі;
- 3) таблиця 3 показує результати оптимального рішення для обмежень і для граничних умов.

Целевая ячейка (Максимум)						
Ячейка	Имя	Исходно	Результат			
\$F\$6	Козф. ЦФ Значение	0	106200			
Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Исходно	Результат			
\$B\$3	Значение ХА	0	1100			
\$C\$3	Значение ХВ1	0	0			
\$D\$3	Значение ХВ2	0	120			
Ограничения						
Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница	
\$F\$21	Заказ на полки В2 Лев. часть	120	\$F\$21>=\$H\$21	не связан.	70	
\$F\$22	Доля продаж Лев. часть	488	\$F\$22>=\$H\$22	не связан.	468	
\$F\$10	ФВ по столярн.раб. Лев. часть	4400	\$F\$10<=\$H\$10	не связан.	2640	
\$F\$11	ФВ по упаковке Лев. часть	93,33333333	\$F\$11<=\$H\$11	не связан.	2370,666667	
\$F\$12	ФВ по покрыт. лаком Лев. часть	110	\$F\$12<=\$H\$12	не связан.	44	
\$F\$13	ФВ по раскрою стекла Лев. часть	12,2	\$F\$13<=\$H\$13	не связан.	152,8	
\$F\$14	ФВ по произв. компл.В Лев. часть	40	\$F\$14<=\$H\$14	не связан.	122,8	
\$F\$15	По компл. раскроя ДСП (У) Лев. часть	120	\$F\$15<=\$H\$15	не связан.	3267	
\$F\$16	Расход ДВП Лев. часть	120	\$F\$16<=\$H\$16	не связан.	3100	
\$F\$17	Расход стекла Лев. часть	2440	\$F\$17<=\$H\$17	не связан.	160	
\$F\$18	Емкость сушилки Лев. часть	1100	\$F\$18<=\$H\$18	связанное	0	
\$F\$19	Емкость склада Лев. часть	1220	\$F\$19<=\$H\$19	связанное	0	
\$F\$20	Емкость рынка Лев. часть	1220	\$F\$20<=\$H\$20	не связан.	4080	
\$B\$3	Значение ХА	1100	\$B\$3>=\$B\$4	не связан.	1100	
\$C\$3	Значение ХВ1	0	\$C\$3>=\$C\$4	связанное	0	
\$D\$3	Значение ХВ2	120	\$D\$3>=\$D\$4	не связан.	70	

Рис.3.6. Лист звіту за результатами

Якщо ресурс використовується повністю (тобто ресурс дефіцитний), то в графі "Статус" ("Стан") відповідне обмеження вказується як "зв'язане"; при неповному використанні ресурсу (тобто ресурс недефіцитний) в цій графі вказується "не зв'язаний". У графі "Значення" наведені величини використаного ресурсу.

Для граничних умов (рядки 24, 25, 26 на рис. 3.6) в графі "Різниця" показана різниця між значенням змінної в знайденому оптимальному рішенні і заданою для неї граничною умовою.

Таблиця 3 звіту за результатами дає інформацію для аналізу можливої зміни запасів *недефіцитних* ресурсів при збереженні отриманого оптимального значення цільової функції. Так, якщо на ресурс накладено обмеження типу  $\geq$ , то в графі "Різниця" дається кількість ресурсу, на яку була перевищена мінімально необхідна норма. Наприклад, аналіз рядка 26 (див. рис. 3.6) звіту за результатами для задачі про меблевий комбінат показує, що полиць випущено на 70 шт. більше, ніж було замовлено. Тобто з 120 полиць

тільки 70 шт. підуть у вільний продаж. Таким чином, можна дати таку відповідь на питання про зміну запасу недефіцитного ресурсу "Значення ХВ 2": *обов'язкове замовлення на виробництво полиць  $B_2$  можна збільшити на 70 шт., тобто замовляти до 120 шт., і при цьому оптимальне рішення (2.20) задачі не зміниться.*

Якщо на ресурс накладено обмеження типу  $\leq$ , то в графі "Різниця" дається кількість ресурсу, яке не використовується при реалізації оптимального рішення. Так, аналіз рядка 13 (див. рис. 3.6) звіту за результатами для задачі про меблевий комбінат показує, що час столярних робіт склав 4440 год. Невитрачених залишається 2640 год із загального фонду часу, відведеного на столярні роботи. З цього випливає, що *запас недефіцитного ресурсу "Фонд часу по столярних роботах" можна зменшити на 2640 год і це ніяк не вплине на оптимальне рішення (2.20).* Звідси випливає, що кількість столярів можна зменшити на 15 осіб

$$\frac{2640 \text{ год/міс.}}{8 \text{ год}/(\text{чол} \cdot \text{см}) \cdot 1 \text{ см/дн} \cdot 22 \text{ дн/міс.}} = 15 \text{ чол}$$

або перевести їх на випуск іншої продукції.

Аналіз рядка 23 показує, що загальна кількість випущених полиць становить 1220 шт., що менше передбачуваної вимоги ринку на 4080 шт. *Тобто запас недефіцитного ресурсу "вимога ринку" може бути зменшений до 1220 полиць і це ніяк не вплине на оптимальне рішення (2.20).* Іншими словами, зменшення попиту до 1220 полиць на місяць ніяк не позначиться на оптимальних обсягах випуску полиць.

На підставі проведеного аналізу можна зробити висновок про те, що існують причини (обмеження), що не дозволяють меблевому комбінату випускати більшу кількість полиць і отримувати більший прибуток. Проаналізувати ці причини дозволяє звіт по стійкості.

### *Звіт по стійкості*

Звіт по стійкості складається з двох таблиць (рис.3.7).

Таблиця 1 містить інформацію, що відноситься до змінних.

- 1). Результат рішення задачі .
- 2). Нормована вартість, яка показує, на скільки зміниться значення ЦФ в разі примусового включення одиниці цієї продукції в оптимальне рішення. Наприклад, в звіті по стійкості для даної задачі (див. рис.3.7) нормована вартість для полиць  $B_1$  дорівнює -20 грн./шт. (рядок 5). Це означає, що якщо ми, не дивлячись на оптимальне рішення (2.20), будемо вимагати включити в план випуску 1 полицю  $B_1$ , то новий план випуску ( $x_A = 1100$ ;  $x_{B_1} = 1$ ;  $x_{B_2} = 119$ ) принесе нам прибуток 106 180 грн./міс., що на 20 грн. менше, ніж в попередньому оптимальному рішенні.

3). Коефіцієнти ЦФ.

- 4). Граничні значення приросту цільових коефіцієнтів  $\Delta c_j$ , при яких зберігається початкове оптимальне рішення. Наприклад, *допустиме збільшення ціни на полиці  $B_1$  дорівнює 20 грн./шт., а допустиме зменшення -*

практично не обмежене (рядок 5 на рис.3.7). Це означає, що якщо ціна на полиці  $B_1$  зросте більш ніж на 20 грн./шт., наприклад стане дорівнювати 61 грн./шт., то оптимальне рішення зміниться: стане доцільним випуск  $B_1$  в кількості 70 шт. А якщо їх ціна буде знижуватися аж до нуля, то оптимальне рішення (2.20) залишиться тим самим.

**Примітка 3.1.** При виході за вказані у звіті по стійкості межі зміни цін оптимальне рішення може змінюватися як за номенклатурою продукції, що випускається, так і за обсягами випуску (без зміни номенклатури).

Изменяемые ячейки		Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
Ячейка	Имя					
\$B\$3	Значение XA	1100	0	90	1E+30	30
\$C\$3	Значение XB1	0	-20	40	20	1E+30
\$D\$3	Значение XB2	120	0	60	30	20
Ограничения		Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
Ячейка	Имя					
\$F\$21	Заказ на полки B2 Лев. часть	120	0	50	70	1E+30
\$F\$22	Доля продаж Лев. часть	488	0	20	468	1E+30
\$F\$10	ФВ по столярн.раб. Лев. часть	4400	0	7040	1E+30	2640
\$F\$11	ФВ по упаковке Лев. часть	93,33333333	0	2464	1E+30	2370,666667
\$F\$12	ФВ по покрыт. лаком Лев. часть	110	0	154	1E+30	44
\$F\$13	ФВ по раскрою стекла Лев. часть	12,2	0	165	1E+30	152,8
\$F\$14	ФВ по произв. компл.В Лев. часть	40	0	162,8	1E+30	122,8
\$F\$15	По компл. раскрою ДСП (Y) Лев. часть	120	0	3387	1E+30	3267
\$F\$16	Расход ДВП Лев. часть	120	0	3220	1E+30	3100
\$F\$17	Расход стекла Лев. часть	2440	0	2600	1E+30	160
\$F\$18	Емкость сушилки Лев. часть	1100	30	1100	70	368,4
\$F\$19	Емкость склада Лев. часть	1220	60	1220	80	70
\$F\$20	Емкость рынка Лев. часть	1220	0	5300	1E+30	4080

Рис.3.7. Звіт по стійкості для задачі про меблевий комбінат

Таблиця 2 (рис.3.7) містить інформацію, що відноситься до обмежень.

- 1). Величина використаних ресурсів в колонці "Результ. значення".
- 2). Граничні значення приросту ресурсів  $\Delta b_i$ . У графі "Допустиме Зменшення" показують, на скільки можна зменшити (усунути надлишок) або збільшити (підвищити мінімально необхідну вимогу) ресурс, зберігши при цьому оптимальне рішення. Розглянемо аналіз *дефіцитних* ресурсів, так як аналіз *недефіцитних* ресурсів було дано раніше. Аналізуючи звіт за результатами, ми встановили, що існують причини (обмеження), що не дозволяють меблевому комбінату випускати більшу, ніж в оптимальному рішенні, кількість полиць і отримувати більш високий прибуток. У розглянутій задачі (варіант 0) такими обмеженнями є *дефіцитні* ресурси "Ємність сушарки" і "Ємність складу готової продукції". Оскільки знак обмежень цих запасів має вигляд  $\leq$ , то виникає питання, на скільки максимально повинна зрости ємність цих приміщень, щоб забезпечити збільшення випуску продукції. Відповідь на це питання показана в графі "Допустиме Збільшення". Ємність сушарки має сенс збільшити щонайбільше на 70 полиць, а ємність складу готової продукції - на 80 полиць. Це призведе до нових оптимальних рішень, що збільшує прибуток в

порівнянні з (2.20). Подальше збільшення ємностей сушарки та складу понад зазначені межі не буде більше покращувати рішення, тому що вже інші ресурси стануть зв'язуючими.

3). Цінність додаткової одиниці  $i$ -го ресурсу (тіньова ціна) розраховується тільки для *дефіцитних* ресурсів. Після того як ми встановили, що збільшення ємностей сушарки та складу призведе до нових планів випуску, що забезпечує більш високий прибуток, виникає наступне питання. Що вигідніше в першу чергу розширювати: сушарку чи склад? Відповідь на це питання дає графа "Тіньова ціна". Для ємності сушарки вона дорівнює 30 грн./шт., а для складу - 60 грн./шт. (рис.3.7), тобто кожна полиця, яку додатково можна буде помістити в сушарку, збільшить прибуток на 30 грн., а кожна полиця, яку додатково можна буде помістити на склад, збільшить прибуток на 60 грн. Звідси висновок: *в першу чергу вигідно збільшувати ємність складу готової продукції.*

#### **4. Приблизні запитання при захисті роботи**

1. Що таке зв'язуючі, незв'язуючі, надлишкові обмеження; дефіцитні і недефіцитні ресурси?

2. Які причини і основні задачі аналізу оптимального рішення на чутливість?

3. Як графічно проводиться аналіз зміни запасу дефіцитних ресурсів?

4\*. Яким чином, спираючись на результати графічного аналізу, можна чисельно розрахувати новий (покращений) запас дефіцитного ресурсу?

5. Як графічно проводиться аналіз зміни запасу недефіцитних ресурсів?

6\*. Яким чином, спираючись на результати графічного аналізу, можна чисельно розрахувати новий запас недефіцитних ресурсів?

7. Що таке цінність додаткової одиниці  $i$ -го ресурсу?

8. Як проводиться графічний аналіз зміни коефіцієнтів ЦФ?

9\*. Як чисельно визначити діапазон зміни коефіцієнтів ЦФ, що не змінює оптимального рішення?

10. Яку інформацію про чутливість оптимального рішення задачі ЛП можна отримати зі звіту за результатами та звіту по стійкості?

11. Проаналізуйте на чутливість задачу про виробництво полиць (відповідно до свого варіанту).

## Завдання № 4

### Двоїндексні задачі лінійного програмування. Стандартна транспортна задача

#### 1. Теоретична частина

Задача про розміщення (транспортна задача) - це задача, в якій роботи і ресурси вимірюються в одних і тих же одиницях. У таких задачах ресурси можуть бути розділені між видами робіт, і окремі роботи можуть бути виконані за допомогою різних комбінацій ресурсів. Прикладом типової транспортної задачі є розподіл (транспортування) продукції, що знаходиться на складах, до підприємств-споживачів.

Стандартна ТЗ визначається як задача розробки найбільш економічного плану перевезення продукції *одного виду* з декількох пунктів відправлення в пункти призначення. При цьому величина транспортних витрат прямо пропорційна обсягу перевезеної продукції і задається за допомогою тарифів на перевезення *одиниці продукції*.

#### Вихідні параметри моделі ТЗ.

а)  $n$  – кількість пунктів відправлення,  $m$  – кількість пунктів призначення.

б)  $a_i$  – запас продукції в пункті відправлення  $A_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) [од. тов.].

с)  $b_j$  – попит на продукцію в пункті призначення  $B_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) [од. тов.].

д)  $c_{ij}$  – тариф (вартість) перевезення одиниці продукції з пункту відправлення  $A_i$  в пункт призначення  $B_j$  [грн./од. тов.].

#### Шукані параметри моделі ТЗ

1.  $x_{ij}$  – кількість продукції, що перевозиться з пункту відправлення  $A_i$  в пункт призначення  $B_j$  [од. тов.]

2.  $L(X)$  – транспортні витрати на перевезення всієї продукції [грн.].

#### Етапи побудови моделі

I. Визначення змінних.

II. Перевірка збалансованості задачі.

III. Побудова збалансованої транспортної матриці.

IV. Задання ЦФ.

V. Задання обмежень.

#### Транспортна модель

$$L(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, j = \overline{1, m}, \\ \forall x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}). \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Цільова функція являє собою транспортні витрати на здійснення всіх перевезень в цілому. Перша група обмежень вказує, що запас продукції в будь-якому пункті відправлення має дорівнювати сумарному обсягу перевезень продукції з цього пункту. Друга група обмежень вказує, що сумарні перевезення продукції в певний пункт споживання повинні повністю задовольнити попит на продукцію в цьому пункті. Наочною формою представлення моделі ТЗ є транспортна матриця (табл.4.1).

Таблиця 4.1 - Загальний вигляд транспортної матриці

Пункти відправлення, $A_i$	Пункти споживання, $B_j$				Запаси, [од. прод.]
	$B_1$	$B_2$	...	$B_m$	
$A_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1m}$	$a_1$
$A_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2m}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...
$A_n$	$c_{n1}$	$c_{n2}$	...	$c_{nm}$	$a_n$
Потреба [од. прод.]	$b_1$	$b_2$	...	$b_m$	$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$

З моделі (4.1) випливає, що сума запасів продукції в усіх пунктах відправлення повинна дорівнювати сумарній потреби у всіх пунктах споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j \quad (4.2)$$

Якщо (4.2) виконується, то ТЗ називається *збалансованою*, в іншому випадку - *незбалансованою*. Оскільки обмеження моделі (4.1) можуть бути виконані тільки при збалансованій ТЗ, то при побудові транспортної моделі необхідно перевіряти умова балансу (4.2). У разі, коли *сумарні запаси перевищують сумарні потреби*, необхідний додатковий *фіктивний* пункт споживання, який буде формально споживати існуючий надлишок запасів, тобто

$$b_{\phi} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \quad (4.3)$$

Якщо сумарні потреби перевищують сумарні запаси, то необхідний додатковий *фіктивний* пункт відправлення, формально який заповнює існуючий недолік продукції в пунктах відправлення:

$$a_{\phi} = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n a_i \quad (4.4)$$

Введення фіктивного споживача або відправника спричинить необхідність формального задання *фіктивних* тарифів  $c_{ij}^{\phi}$  (реально не існуючих) для фіктивних перевезень. Оскільки нас цікавить визначення найбільш вигідних *реальних* перевезень, то необхідно передбачити, щоб при вирішенні задачі (при знаходженні опорних планів) *фіктивні* перевезення не розглядалися до тих пір, поки не будуть визначені всі реальні перевезення. Для цього треба фіктивні перевезення зробити не вигідними, тобто дорогими, щоб при пошуку рішення задачі їх розглядали в найостаннішу чергу. Таким чином, величина фіктивних тарифів повинна перевищувати максимальний з реальних тарифів, використовуваних в моделі, тобто

$$c_{ij}^{\phi} > \max c_{ij} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$$

На практиці можливі ситуації, коли в певних напрямках перевезення продукції неможливі, наприклад, через ремонт транспортних магістралей. Такі ситуації моделюються за допомогою введення так званих *заборонних* тарифів  $c_{ij}^3$ . Заборонні тарифи повинні зробити неможливими, тобто абсолютно не вигідними, перевезення у відповідних напрямках. Для цього величина заборонних тарифів повинна перевищувати максимальний з реальних тарифів, використовуваних в моделі:

$$c_{ij}^3 > \max c_{ij} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$$

## 2. Приклад побудови моделі ТЗ

Нехай необхідно організувати оптимальні за транспортними витратами перевезення борошна з двох складів в три хлібопекарні. Щомісячні запаси борошна на складах рівні 79,515 і 101,925 т, а щомісячні потреби хлібопекарень складають 68,5; 29,5 і 117,4 т відповідно. Борошно на складах зберігається і транспортується в мішках по 45 кг. Транспортні витрати (грн./т) з доставки борошна представлені в табл.4.2. Між першим складом і другою хлібопекарнею укладено договір про гарантовану поставку 4,5 т борошна щомісяця. У зв'язку з ремонтними роботами тимчасово неможливе перевезення з другого складу в третю хлібопекарню.

Таблиця 4.2 - Транспортні витрати з доставки борошна (грн./т)

Склади	Хлібопекарні		
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
C <sub>1</sub>	350	190	420
C <sub>2</sub>	400	100	530

ТЗ являє собою задачу ЛП, яку можна вирішувати симплекс-методом, що і відбувається при вирішенні таких задач в Excel . У той же час існує більш ефективний обчислювальний метод - *метод потенціалів* , в разі застосування якого використовується специфічна структура умов ТЗ (4.1) і, по суті, відтворюються кроки симплекс-алгоритму. Виходячи з цього, необхідно побудувати модель задачі виду (4.1), придатну для її вирішення методом потенціалів.

#### *Визначення змінних*

Позначимо через  $x_{ij}$  [міш.] кількість мішків з борошном, які будуть перевезені з  $i$ -го складу в  $j$ -у хлібопекарню.

#### *Перевірка збалансованості задачі*

Перш ніж перевіряти збалансованість задачі, треба виключити обсяг гарантованої поставки з подальшого розгляду. Для цього віднімемо 4,5 т з наступних величин:

Із запасу першого складу:  $a_1 = 79.515 - 4.5 = 75,015$  т/міс

- 
- З потреб у борошні другої хлібопекарні

$b_2 = 29.5 - 4.5 = 25$  т/міс

Згідно з умовою задачі борошно зберігається і перевозиться в мішках по 45 кг, тобто одиницями вимірювання змінних є мішки борошна. Але запаси борошна на складах і потреби в ній магазинів задані в тонах. Тому для перевірки балансу та подальшого вирішення задачі приведемо ці величини до однієї одиниці виміру - мішків. Наприклад, запас борошна на першому складі дорівнює 75,015 т/міс., або  $\frac{75,015 \text{ т/міс}}{0,045 \text{ т/міс}} = 1667$  міш/міс, а потреба першої хлібопекарні становить 68 т/міс., або  $\frac{78,000 \text{ т/міс}}{0,045 \text{ т/міс}} = 1511,1 \approx 1512$  міш/міс.

Округлення при розрахунку потреб треба проводити в більшу сторону, інакше потреба в борошні не буде задоволена повністю.

Для даної ТЗ має місце співвідношення:

$$\underbrace{1667 + 2265}_{3932 \text{ міш/міс}} < \underbrace{1512 + 556 + 2609}_{4677 \text{ міш/міс}}$$

Щомісячний сумарний запас борошна на складах менше сумарної потреби хлібопекарень на  $4677 - 3932 = 745$  мішків борошна, звідки випливає висновок: ТЗ не збалансована.

#### *Побудова збалансованої транспортної матриці*

Збалансована транспортна матриця представлена в таблиці 4.3. Вартість перевезення борошна повинна бути віднесена до одиниці продукції, тобто до 1 мішка борошна. Так, наприклад, тариф перевезення з першого складу в третій магазин дорівнює  $420 \cdot 420 \text{ грн/т} \cdot 0,045 \text{ т/міш} = 18,9 \text{ грн/міш}$

Для встановлення балансу необхідний додатковий *фіктивний* склад, тобто додатковий рядок в транспортній таблиці задачі. Фіктивні тарифи перевезення задамо таким чином, щоб вони були дорожчі від реальних тарифів, наприклад,  $c_{3j}^{\Phi} = 50,00 \text{ грн./міш.}$

Неможливість доставки вантажів з другого складу в третю хлібопекарню задається в моделі за допомогою *забороняючого* тарифу, який повинен перевищувати величину *фіктивного* тарифу, наприклад,  $c_{23}^3 = 100,00$  грн./міш.

Таблиця 4.3 - Транспортна матриця задачі

Склади	Хлібопекарні			Запас, мішки
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	
C <sub>1</sub>	15,75	8,55	18,90	1667
C <sub>2</sub>	18,00	4,50	<b>100,00</b>	2265
C <sub>ф</sub>	<b>50,00</b>	<b>50,00</b>	<b>50,00</b>	745
Потреба, мішки	1512	556	2609	$\Sigma = 4677$

### Задання ЦФ

Формальна ЦФ, тобто сумарні витрати на всі можливі перевезення борошна, що враховуються в моделі, задається наступним виразом:

$$L(X) = 15.75x_{11} + 8.55x_{12} + 18.9x_{13} + \\ + 18.00x_{21} + 4.50x_{22} + 100.00x_{23} + \\ + 50.00x_{31} + 50.00x_{32} + 50.00x_{33} \rightarrow \min(\text{грн./міс.}) \quad (4.5)$$

При цьому слід враховувати, що внаслідок використання фіктивних тарифів *реальна* ЦФ (тобто кошти, які в дійсності доведеться заплатити за транспортування борошна) буде менше формальної ЦФ (4.5) на вартість знайдених в процесі вирішення фіктивних перевезень.

### Задання обмежень

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1667, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2265, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 745, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1512, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 556, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2609, \\ x_{ij} \geq 0 (\forall i = \overline{1,3}; \forall j = \overline{1,3}). \end{cases} \quad (4.6)$$

### 3. Варіанти

На складах зберігається борошно, яке необхідно завезти в хлібопекарні. Номери складів і номери хлібопекарень вибираються відповідно до варіантів табл.4.4. Поточні тарифи перевезення борошна [грн./т], щомісячні запаси борошна [т/міс.] на складах і потреби хлібопекарень в борошні [т/міс.] вказані в табл.4.5.

При цьому необхідно враховувати, що через ремонтні роботи тимчасово немає можливості перевозити борошно з деяких складів до деяких хлібопекарень. У табл.4.4 це показано в графі "Заборона перевезення" в форматі № складу  $x$  № хлібопекарні. Наприклад, «2x3» означає, що не можна перевозити борошно зі складу №2 в хлібопекарню №3.

Крім того, необхідно врахувати, що деякі хлібопекарні мають договори на гарантовану поставку борошна з певних складів. У табл.4.4 це показано в графі "Гарантована поставка" в форматі № складу  $\times$  № хлібопекарні = обсяг поставки. Наприклад, « $1 \times 4 = 40$ » означає, що між складом №1 і магазином №4 укладено договір на обов'язкову поставку 40 т борошна.

Необхідно організувати поставки найкращим чином, враховуючи, що борошно зберігається і транспортується в мішках вагою по 50 кг.

Таблиця 4.4 - Номери складів, хлібопекарень, заборонені і гарантовані поставки

№ варіанту	№ складу	№ хлібопекарні	Заборона перевезення	Гарантована поставка, т/міс.
1	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	2x2, 3x4	3x3=50
2	2, 3, 4, 5	1, 2, 5	2x2, 3x5	3x2=40
3	1, 2, 4	1, 2, 3, 5	1x5, 2x3	4x3=45
4	1, 2, 3, 4	3, 4, 5	3x3, 4x5	3x5=40
5	1, 2, 5	2, 3, 4, 5	1x4, 5x3	1x5=60
6	1, 2, 3, 5	2, 3, 5	5x5, 2x2	3x5=30
7	2, 3, 4	2, 3, 4, 5	3x3, 2x5	4x3=45
8	1, 2, 3, 5	1, 2, 4	1x2, 5x4	3x2=20
9	2, 3, 5	1, 2, 3, 5	5x1, 3x5	5x2=30
10	2, 3, 4, 5	2, 3, 4	5x4, 3x2	4x3=35
11	3, 4, 5	1, 2, 3, 4	3x4, 5x1	4x1=40
12	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	3x2, 4x1	2x2=50

Таблиця 4.5 - Запаси, потреби і тарифи перевезень

Склади	Хлібопекарні					Запас, т/міс.
	1	2	3	4	5	
1	400	600	800	200	200	80
2	300	100	500	600	500	70
3	500	200	100	600	300	60
4	300	700	200	400	900	55
5	200	500	800	200	400	65
Потреба, т/міс.	77,86	56,78	58,88	62,44	73,92	

#### 4. Приблизні запитання при захисті роботи

1. Що таке задача про розміщення?
2. Яка постановка стандартної ТЗ?
3. Запишіть математичну модель ТЗ.
4. Перерахуйте вихідні і шукані параметри моделі ТЗ.
5. Яка суть кожного з етапів побудови моделі ТЗ?
6. Розкрийте поняття збалансованості ТЗ.
7. Що таке фіктивні і забороняючі тарифи?

8. У якому співвідношенні повинні знаходитися величини фіктивних і забороняючих тарифів при необхідності їх одночасного використання в транспортній моделі?

### Завдання № 5

#### Двоіндексні задачі лінійного програмування. Задача про призначення

##### 1. Теоретична частина

**Задача про призначення** - це задача, в якій для виконання кожної роботи потрібно один і тільки один ресурс (одна людина, одна автомашина і т.д.), а кожен ресурс може бути використаний на одній і тільки одній роботі. Тобто ресурси не діляться між роботами, а роботи не діляться між ресурсами. Таким чином, задача про призначення є окремим випадком ТЗ. Задача про призначення має місце при призначенні людей на посади або роботи, автомашин на маршрути, водіїв на машини, при розподілі груп по аудиторіях, наукових тем по науково-дослідних лабораторіях і т.п.

*Вихідні параметри моделі задачі про призначення*

е)  $n$  – кількість ресурсів,  $m$  – кількість робіт.

ф)  $a_i = 1$  – одинична кількість ресурсу  $A_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), наприклад: один працівник; один транспортний засіб; одна наукова тема і т.д.

г)  $b_j$  – одинична кількість роботи  $B_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ), наприклад: одна посада; один маршрут; одна лабораторія.

h)  $c_{ij}$  – характеристика якості виконання роботи  $B_j$  за допомогою ресурсу  $A_i$ . Наприклад, компетентність  $i$ -го працівника при роботі на  $j$ -й посаді; час, за який  $i$ -й транспортний засіб перевезе вантаж по  $j$ -му маршруту; ступінь кваліфікації  $i$ -ї лабораторії при роботі над  $j$ -й науковою темою і т.п.

*Шукані параметри моделі ТЗ*

1.  $x_{ij}$  – факт призначення або не призначення ресурсу  $A_i$  на роботу  $B_j$ :

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i - \text{й ресурс не призначено на } j - \text{у роботу,} \\ 1, & \text{якщо } i - \text{й ресурс призначено на } j - \text{у роботу,} \end{cases}$$

2.  $L(X)$  – загальна (сумарна) характеристика якості розподілу ресурсів по роботах.

Таблиця 5.1 - Загальний вигляд транспортної матриці задачі про призначення

Ресурси, $A_i$	Роботи, $B_j$				Кількість ресурсів
	$B_1$	$B_2$	...	$B_m$	
$A_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1m}$	1
$A_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2m}$	1
...	...	...	...	...	...
$A_n$	$c_{n1}$	$c_{n2}$	...	$c_{nm}$	1
Кількість робіт	1	1	...	1	$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$

Модель задачі про призначення

$$L(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}), \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, m}), \\ x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (5.1)$$

Специфічна структура задачі про призначення дозволила розробити так званий "Угорський метод" її рішення. Тому, хоча в Excel такі завдання вирішуються звичайним симплекс-методом, в даній роботі потрібно побудувати модель задачі про призначення виду (5.1). У деяких випадках, наприклад, коли  $c_{ij}$  - це компетентність, досвід роботи, або кваліфікація працівників, умова задачі може вимагати максимізації ЦФ, на відміну від (5.1). В цьому випадку ЦФ  $L(X)$  замінюють на  $L_1(X) = -L(X)$  і вирішують задачу з ЦФ  $L_1(X) \rightarrow \min$ , що рівносильно вирішення завдання з ЦФ  $L(X) \rightarrow \max$ .

## 2. Постановка задачі про призначення

Відділ кадрів підприємства влаштував конкурсний набір спеціалістів на дві вакантні посади. На ці нові місця (НМ) претендують 3 колишніх співробітника (КС), які вже працюють в інших відділах, і 4 нових співробітника (НС). Номери нових співробітників, нових і колишніх місць вибираються за варіантами з табл.5.2. Номери колишніх місць є номерами колишніх співробітників.

Відділ кадрів оцінив за десятибальною шкалою компетентність нових співробітників (табл.5.3) і колишніх співробітників (табл.5.4) для роботи і на

нових місцях, і на колишніх місцях (КМ), тобто займаних колишніми співробітниками. Необхідно врахувати, що керівництво підприємства, по-перше, вважає за краще, щоб колишні співробітники не претендували на місце один одного, і, по-друге, не має наміру звільняти колишніх співробітників.

Необхідно розподілити працівників за посадами найкращим чином.

### 3. Рекомендації до вирішення задачі про призначення

1. Процес приведення задачі про призначення до збалансованого виду має свої особливості, порівняно з ТЗ. Якщо умова збалансованості задачі (4.2) не виконується через брак робіт або виконавців в кількості  $k_{ab}$ , то для створення балансу треба ввести таку ж кількість  $k_{ab}$  фіктивних рядків або стовпців.

2. Особливістю вирішення даної задачі є моделювання системи пріоритетів, що склалася у керівництва підприємства по описаному в умові задачі кадровому питанню.

3. У задачі про призначення звільнення колишнього співробітника або неприйняття на роботу нового співробітника моделюється попаданням одиниці в фіктивний стовпець матриці рішень задачі, тому для заборони або дозволу таких ситуації необхідно використовувати відповідні "тарифи".

4. Значення "тарифів"  $c_{ij}^3$  вибираються залежно від напрямку оптимізації ЦФ задачі про призначення ( $L(X) \rightarrow \max$  чи  $L(X) \rightarrow \min$ ). При цьому керуються принципом "невигідності" заборонених призначень. Так, якщо  $L(X)$  - це загальна компетентність працівників, то в якості забороняючих треба вибирати нульові компетентності  $c_{ij}^3$ . А якщо  $L(X)$  - це загальний час проходження машинами транспортних маршрутів, то в якості забороняючих треба вибирати значення  $c_{ij}^3$ , що перевершують по величині максимальні реальні значення  $c_{ij}$ .

5. При вирішенні задач про призначення в Excel необхідно враховувати, що змінні  $x_{ij}$  є булевими.

### 4. Варіанти

Таблиця 5.2 - Номери співробітників і місць їх роботи для конкретного варіанту

№ варіанту	Нові співробітники (НС)	Місця колишніх співробітників (КМ)	Нові місця (НМ)
1	3, 4, 7, 8	1, 2, 3	1, 2
2	1, 2, 5, 6	2, 5, 6	2, 3
3	5, 6, 7, 8	1, 2, 5	3, 4
4	3, 4, 5, 6	4, 5, 6	1, 4
5	1, 2, 3, 4	2, 3, 4	2, 4
6	2, 4, 6, 8	3, 4, 6	1, 3
7	1, 3, 5, 7	2, 3, 6	1, 4

8	2, 3, 6, 7	3, 4, 5	2, 3
9	1, 4, 5, 8	2, 3, 5	3, 4
10	2, 3, 4, 5	1, 2, 6	1, 2
11	4, 5, 6, 7	1, 3, 5	2, 4
12	1, 2, 7, 8	2, 4, 6	1, 3

Таблиця 5.3 - Компетентність нових співробітників

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	КМ1	КМ2	КМ3	КМ4	КМ5	КМ6
НС1	6	5	7	6	5	6	7	6	7	5
НС2	5	5	8	8	7	6	4	5	8	8
НС3	6	7	5	6	4	5	4	5	6	6
НС4	7	8	7	6	5	7	6	8	5	5
НС5	7	6	6	5	5	4	5	5	4	6
НС6	8	8	9	7	6	7	8	7	9	8
НС7	9	8	9	9	8	7	8	9	8	7
НС8	7	7	8	9	7	8	9	6	7	8

Таблиця 5.4 - Компетентність колишніх співробітників

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	Займане місце
КС1	7	6	6	7	7
КС2	8	9	7	7	8
КС3	6	5	6	6	6
КС4	7	9	6	8	8
КС5	8	7	8	8	7
КС6	4	5	6	4	5

### **5. Приблизні запитання при захисті роботи**

1. Яка постановка задачі про призначення?
2. У чому відмінність моделі задачі про призначення від моделі ТЗ?
3. Які вихідні і шукані параметри задачі про призначення?
4. Запишіть математичну модель задачі про призначення.
5. Як записати модель задачі про призначення, що припускає максимізацію цільової функції, у вигляді (5.1)?
6. Яким чином в моделі задачі про призначення можна заборонити конкретне призначення?
7. У чому особливості процесу приведення задачі про призначення до збалансованого виду?
8. Поясніть модель задачі про призначення, побудовану по заданому варіанту.

## Завдання № 6

### Двоїндексні задачі лінійного програмування. Організація оптимальної системи забезпечення

#### 1. Постановка задачі

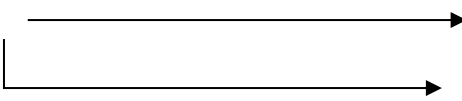
На замовлення п'яти споживачів А, Б, В, Г, Д на чотирьох підприємствах-виробниках виробляється продукція. В процесі доставки до споживачів продукція може зберігатися на трьох оптових базах. Існують наступні три способи організації постачання споживачів продукції:

1) ВИРОБНИК → ОПТОВА БАЗА → СПОЖИВАЧ,

тобто вся продукція, вироблена виробниками, спочатку складується на оптових базах і тільки потім розвозиться споживачам;

2) ВИРОБНИК → СПОЖИВАЧ,

тобто вся продукція, вироблена виробниками, безпосередньо доставляється споживачам, минаючи оптові бази;

3) ВИРОБНИК  ОПТОВА БАЗА,  
СПОЖИВАЧ,

тобто продукція, вироблена виробником, доставляється до споживачів частково безпосередньо, а частково транзитом через оптові бази.

Необхідно вибрати оптимальний спосіб організації постачання споживачів продукцією підприємств-виробників.

#### 2. Рекомендації до вирішення задачі

1. Загальний підхід до вирішення цієї задачі полягає в побудові транспортної моделі кожного із способів організації постачання, аналізі витрат на доставку продукції і виборі мінімальної за витратами системи постачання.

2. При моделюванні різних систем постачання необхідно враховувати наступне. У транспортній таблиці системи 1 і в транспортній таблиці системи 3 *пунктами відправлення* є як виробники, так і оптові бази; *пунктами споживання* є як споживачі, так і оптові бази. Транспортні таблиці систем 1 і 3 відрізняються розстановкою *реальних і забороняючих* тарифів (див. п.1 завдання № 4).

#### 3. Варіанти

Щомісячний попит на продукцію [шт.], ємність оптових баз [шт.] і тарифи [грн./шт.] за доставку продукції з оптових баз до споживачів наведені в табл.6.1. Щомісячні обсяги виробництва [шт.], ємність оптових баз [шт.] і сумарні витрати [грн./шт.] на виробництво і доставку продукції від виробників до оптових баз наведені в табл.6.2. Щомісячні обсяги виробництва [шт.], попит на продукцію [шт.] і сумарні витрати [грн./шт.] на виробництво і доставку продукції від виробників до споживачів наведені в табл.6.3. Номер варіанта складається з двох цифр. Перша цифра (0 або 1) вибирається в табл.6.1 і 6.3 по вертикалі, а в табл.6.2 - по горизонталі. Друга цифра (0, 1, 2,

3, 4, 5, 6) вибирається в табл.6.1 і 6.3 по горизонталі, а в табл.6.2 - по вертикалі. Таким чином, номери варіантів мають вигляд 01, 02, ..., 06, 11, 12, ..., 16.

Таблиця 6.1 - Параметри перевезень з оптових баз до споживачів

			спожив. А		спожив. Б		спожив. В		спожив. Г		спожив. Д		Запас
			Варіант		Варіант		Варіант		Варіант		Варіант		
			0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
Оптова база 1	Варіант	1	15	18	12	12	11	14	10	16	20	14	300
		2	12	20	32	28	14	25	22	19	36	40	540
		3	20	12	15	10	28	20	30	22	17	11	720
		4	20	35	32	25	36	18	20	34	25	15	620
		5	14	20	25	14	18	22	15	30	21	14	560
		6	22	14	20	10	25	32	30	35	24	18	780
Оптова база 2	Варіант	1	20	10	14	16	25	30	24	32	15	24	420
		2	16	15	20	11	31	18	20	40	17	30	380
		3	21	28	12	20	24	35	15	21	24	45	460
		4	16	16	27	14	20	20	21	25	28	38	350
		5	15	31	34	20	14	15	18	30	20	22	410
		6	14	30	10	26	18	16	24	36	34	25	450
Оптова база 3	Варіант	1	12	20	36	18	20	27	16	18	36	35	730
		2	16	12	26	10	32	42	34	14	10	16	690
		3	20	15	20	16	36	28	30	20	18	10	620
		4	18	28	15	26	28	31	18	40	20	27	580
		5	15	24	35	35	40	34	10	35	35	40	740
		6	22	32	28	14	25	20	35	24	20	35	610
Попит на товар			600	480	550	750	420	360	780	200	400	180	

Таблиця 6.2 - Параметри перевезень від виробників до оптових баз.

Виробники	Варіант	Оптова база 1						Оптова база 2						Оптова база 3						Виробництво
		ВАРІАНТ						ВАРІАНТ						ВАРІАНТ						
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
Виробник 1	0	27	18	12	20	24	10	10	14	9	8	12	16	31	27	20	25	17	22	510
	1	14	25	29	30	12	11	7	20	12	17	19	8	28	30	24	18	10	12	480
Виробник 2	0	15	19	24	28	17	30	21	14	20	15	17	7	25	36	21	17	31	12	620
	1	20	27	14	10	29	21	14	10	9	16	20	6	24	18	30	26	18	31	570
Виробник 3	0	11	7	26	20	9	6	22	18	10	19	24	14	27	30	15	10	19	21	660
	1	15	7	22	18	10	13	17	12	19	21	15	10	27	18	10	21	30	14	280
Виробник 4	0	26	10	28	15	7	19	20	15	11	18	12	27	20	15	19	25	11	20	420
	1	20	25	14	9	11	18	16	27	19	10	14	20	21	32	36	25	18	12	390
Запас		300	540	720	620	560	780	420	380	460	350	410	450	730	690	620	580	740	610	450

Таблиця 6.3 - Параметри перевезень від виробників до споживачів.

			спожив. А		спожив. Б		спожив. В		спожив. Г		спожив. Д		Виробни цтво
			Варіант		Варіант		Варіант		Варіант		Варіант		
			0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
Виробник 1	Варіант	1	10	2	2	12	1	14	10	6	20	14	510
		2	26	37	12	45	10	24	39	14	35	42	200
		3	11	28	6	10	18	20	22	34	16	14	550
		4	25	8	12	17	5	40	25	32	38	30	720
		5	24	14	27	40	48	35	21	30	12	40	200
		6	16	24	14	30	42	50	35	22	30	52	420
Виробник 2	Варіант	1	24	8	18	30	20	35	14	40	26	30	400
		2	10	12	50	58	8	58	20	58	48	26	800
		3	32	16	45	34	10	16	32	8	25	16	250
		4	26	35	42	52	35	30	30	22	38	20	480
		5	16	20	30	38	26	48	50	50	48	52	900
		6	20	12	48	44	30	22	25	18	15	20	420
Виробник 3	Варіант	1	32	28	54	40	16	28	28	24	10	20	460
		2	10	30	60	30	20	35	38	50	44	28	650
		3	8	24	25	21	52	42	50	48	48	22	800
		4	15	40	38	28	25	10	20	15	12	10	160
		5	18	37	16	32	40	35	9	10	25	16	360
		6	26	34	20	46	45	30	14	26	24	10	480
Виробник 4	Варіант	1	16	41	30	17	55	45	45	50	46	30	790
		2	24	30	24	35	23	28	38	30	30	25	510
		3	30	25	37	20	30	32	35	28	25	9	560
		4	16	20	18	33	48	50	48	52	50	20	800
		5	22	36	10	42	36	48	40	48	45	24	700
		6	28	40	40	25	18	20	28	16	18	15	400
Попит на товар			600	480	550	750	420	360	780	200	400	180	

#### 4. Захист роботи

Захист роботи полягає в поясненні:

- транспортних таблиць кожного способу організації перевезень;
- результатів рішення задачі.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Вирішення задач оптимізації в Excel. URL: <https://informatik.pp.ua/zavdannia/elektronni-tablytsi/rozviazannia-optimizatsiinykh-zadach-v-excel/> (дата звернення: 20.09.2025).
2. Артемов В., Мовчан Т., Бахчеван Е. Методика розв'язання оптимізаційних задач методом мінімальної вартості засобами VBA Microsoft Excel. *Bulletin of Sumy National Agrarian University*. 2022, №2 (92). 52-59. DOI:<https://doi.org/10.32782/bsnau.2022.2.7>.
3. Методичні рекомендації до практичних занять із навчальної дисципліни «Сучасні методи аналізу та оптимізації електротехнічних систем». Частина третя «Вирішення оптимізаційних задач засобами Microsoft Excel» (для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / уклад.: В. М. Охріменко, О. О. Воронков. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. 50 с.

**Ідентифікація і моделювання об'єктів та систем безпілотних апаратів:** методичні вказівки до виконання самостійної роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 52 с.

Комп'ютерний набір

Л.О. Гуменюк

Редактор

Л.О. Гуменюк

Підп. до друку «\_\_» \_\_\_\_2025 р. Папір офс.  
Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк. 1.  
Тираж 30 прим.

Відділ іміджу та промоції  
Луцького національного технічного університету  
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75  
Друк – ВІП ЛНТУ

