МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Основи будівельної механіки

Конспект лекцій
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
освітньої програми “Архітектура та містобудування”
галузі знань 19 Архітектура та будівництво
спеціальності 191 Архітектура та містобудування
денної форми навчання

Луцьк 2025

УДК 624.012
Б 89
Голова вченої ради факультету архітектури, будівництва та дизайну _______________О. АНДРІЙЧУК
Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки _________ Н. ПОЛІЩУК

Рекомендовано до видання вченою радою факультету архітектури, будівництва та дизайну ЛНТУ,
протокол №____ від «____ » _______________ 2025 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри БЦІ ЛНТУ,
протокол № _____ від «_____» _______________ 2025 року.

Завідувач кафедри БЦІ _________О. УЖЕГОВА

Укладач: _________ Р. Пасічник, к.т.н., доцент кафедри БЦІ ЛНТУ.

Рецензент: _________ Д.Кислюк, к.т.н., доцент кафедри БЦІ ЛНТУ.

Відповідальний за випуск: _________О. УЖЕГОВА

завідувач кафедри будівництва та цивільної інженерії ЛНТУ.

Основи будівельної механіки: [Текст]: Конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми “Архітектура та містобудування” галузі знань 19 Архітектура та будівництво спец. 191 Архітектура та містобудування денної форми навчання/ уклад. Р.В. Пасічник. – Луцьк : ЛНТУ, 2025. – 64 с.

Видання складено згідно з робочою програмою навчальної дисципліни, містить опис тематики курсу, рекомендовану літературу.
Призначене для студентів спеціальності 191 «Архітектура та містобудування»

Зміст

Тема 1: Загальні поняття теоретичної механіки та статики.	5
Тема 2: Системи збіжних сил.	9
Тема 3: Рівновага пар сил.	16
Тема 4: Основна теорема статики.	18
Тема 5: Центр ваги твердого тіла. Тертя.	19
Тема 6. Предмет та задачі опору матеріалів	20
Тема 7. Основні положення, принципи та гіпотези опору матеріалів	21
Тема 8.Розтяг і стиск	22
Тема 9. Теорія напруженого і деформованого стану	24
Тема 10. Геометричні характеристики плоских перерізів	26
Тема 11. Зсув. Кручення	27
Тема 12. Плоский згин	29
Тема 13. Вступ. Короткі історичні відомості. Розрахункова схема, та в'язі. Кінематичний аналіз системи	33
Тема 14. Види навантажень, та методи визначення зусиль.	42
Тема 15. Визначення реакцій, та побудова епюр внутрішніх зусиль в багатопролітних статично визначуваних балках	45
Тема 16: Визначення зусиль в балках за допомогою ліній впливу	46
Тема 17. Прості плоскі ферми	47
Тема 18. Розрахунок трьохшарнірних систем	51
Тема 19. Розрахунок плоских рам	56
Тема 20. Розрахунок плоских рам в ПК «ЛІРА»	58
Література	63

Вступ

Мета вивчення дисципліни «Основи будівельної механіки» полягає у вивченні інженерних методів розрахунків на міцність, жорсткість елементів конструкцій та споруд, їх взаємодія між собою та іншими конструкціями та спорудами.

Завданням вивчення дисципліни «Основи будівельної механіки» є засвоєння методів визначення зусиль та переміщень в елементах статично-визначених та статично-невизначених споруд від статичних дій; методи розрахунку напружень в перерізах елементів, класичні теорії міцності та набуття умінь розраховувати плоскі стержневі системи (балки, арки, ферми, рами) при дії статичного навантаження.

Вивчення дисципліни «Основи будівельної механіки» забезпечує формування наступних компетентностей:

1. **Інтегральна компетентність**

- Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми у сфері містобудування та архітектури, що характеризуються комплексністю та невизначеністю умов, на основі застосування сучасних архітектурних теорій та методів, засобів суміжних наук

2. **Загальні компетентності**

- Вміння виявляти, ставити та вирішувати проблеми
- Здатність до адаптації та дії в новій ситуації
- Здатність приймати обґрунтовані рішення

3. **Спеціальні (фахові) компетентності:**

- Здатність застосовувати теорії, методи і принципи фізико-математичних, природничих наук, комп'ютерних, технологій для розв'язання складних спеціалізованих задач архітектури та містобудування
- Здатність розробляти архітектурно-художні, функціональні, об'ємно-планувальні та конструктивні рішення, а також виконувати креслення, готувати документацію архітектурно-містобудівних проєктів.
- Здатність до участі в підготовці архітектурно-планувальних завдань на проєктування, в організації розробки архітектурно-містобудівних, архітектурно-середовищних і ландшафтних проєктів.
- Усвідомлення особливостей використання різних типів конструктивних та інженерних систем і мереж, їх розрахунків в архітектурно-містобудівному проєктуванні.
- Здатність до розробки архітектурно-містобудівних рішень з урахуванням безпекових і санітарно-гігієнічних, інженерно-технічних і енергозберігаючих, техніко-економічних вимог і розрахунків, вимог щодо екологічності, енергоефективності, інклюзивності.
- Усвідомлення особливостей застосування сучасних будівельних матеріалів, виробів і конструкцій, а також технологій при створенні об'єктів містобудування, архітектури та будівництва

Тема 1: Загальні поняття теоретичної механіки.

Теоретична механіка – це природнича наука, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху і рівноваги матеріальних об'єктів (тіл і механічних систем). Під механічним рухом матеріальних тіл розуміють зміну положень матеріальних тіл у просторі протягом часу. Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико–математичного циклу і є фактично науковою базою всіх галузей сучасної, зокрема, сільськогосподарської техніки. Традиційно теоретична механіка ділиться на три основні розділи: статика, кінематика та динаміка.

Статика вивчає властивості сил, умови їх перетворення і спільної дії на тіло або на систему тіл, рівновагу тіл під дією сил.

Кінематика вивчає геометричні властивості руху матеріальних тіл без врахування маси і діючих сил.

Динаміка вивчає закони руху матеріальних тіл під дією сил, які цей рух обумовлюють. Згадаємо основні поняття теоретичної механіки, які добре відомі з курсу фізики.

Матеріальна точка – це тіло певної маси, розмірами та формою якого можна в умовах даної задачі нехтувати.

Система матеріальних точок – це сукупність точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємообумовлені.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, в якому відстані між двома довільними точками не змінюються з часом, простіше, що це тіло, яке не деформується під дією сил. Цілком зрозуміло, що в природі та техніці не існує реальних тіл, які повністю відповідають цим поняттям. Матеріальна точка, система матеріальних точок та тверде тіло є ідеальними поняттями, розрахунковими моделями при вивченні механіки.

СТАТИКА

В основі цього розділу механіки покладені аксіоми статики, які нижче будуть розглянуті. Розглянемо основні поняття статики.

Сила – це кількісна міра механічної взаємодії двох тіл, яка визначає характер, величину та напрямок взаємодії. З цього класичного визначення сили випливає, що вона є величиною векторною, а тому є три визначальних параметри: величина сили (або модуль), напрямок дії та точка прикладання. На розрахунково – силових схемах силу зображують у вигляді вектора довільної довжини (крім випадків графічної статики, коли силу креслять у масштабі). Покажемо, наприклад, (рис. 1.1) довільну силу $\overline{P}$, яка зображена у вигляді вектора $\overline{AB}$, прикладена у точці A і діє вздовж лінії MN.

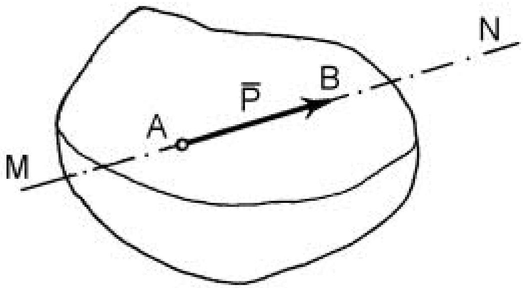


Рис. 1.1

Одиницею вимірювання сили є 1 Ньютон – [Н] або 1 кілоньютон [кН]. 1 [кН]=1000 [Н] ..

На тіло можуть одночасно діяти декілька сил, утворюючи систему.

Система сил – це сукупність декількох сил, які діють на тіло. Введемо ще деякі поняття, що пов'язані з силою.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які на одне і теж тіло діють однаково. Система сил може бути, в деяких випадках, еквівалентна нулю.

Рівнодійна сила системи сил – це така сила, дія якої еквівалентна дії всієї системи сил.

Зрівноважуюча сила – це сила, яка за величиною дорівнює рівнодійній силі, лежить з нею на одній прямій, але протилежна за напрямом.

Аксіоми статики

В основу статики покладені аксіоми, тобто положення, які приймаються без доведення, тому що підтверджуються багатовіковою практикою.

І аксіома. Абсолютно тверде тіло під дією двох сил тільки тоді буде перебувати в рівновазі, коли їх вектори дорівнюють за модулем, протилежні за напрямком і лінії їх дії співпадають. На рис. 1.2 показане довільне тіло, яке перебуває у стані рівноваги під дією двох сил $\overline{P}_1$ і $\overline{P}_2$, які мають однакові модулі $|\overline{P_1}|$,= $|\overline{P_2}|$, розташовані на одній прямій MN і мають протилежні напрямки. Точки прикладання сил можуть співпадати. Таким чином, $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$.

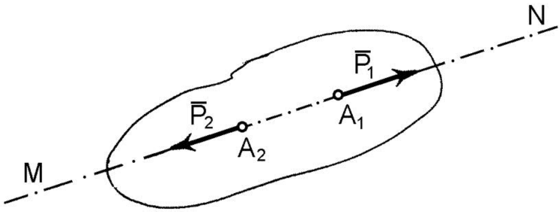


Рис. 1.2

II аксіома. Стан рівноваги тіла не порушиться, якщо до тіла приєднати або відкинути зрівноважену систему сил. Наприклад, систему сил($\overline{P}_1$ і $\overline{P}_2$) на рис. 1.2. Ця аксіома носить назву аксіоми виключення сил.

Наслідок з перших двох аксіом. Точку прикладання сили можна пересувати в межах даного тіла вздовж лінії дії сили (сила є ковзним вектором).

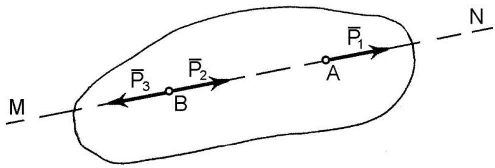


Рис. 1.3

Припустимо, що на тіло (рис. 1.3) діє вектор сили $\overline{P}_1$, який прикладений в точці A і має лінію дії MN . Прикладемо в довільній точці B на лінії дії MN дві сили $\overline{P}_2$ і $\overline{P}_3$, такі, що $\overline{P}_2$,= $\overline{P}_1$ а $\overline{P}_3$ =- $\overline{P}_1$. Згідно першої аксіоми ці сили зрівноважені, а згідно другої аксіоми їх можна приєднати, не змінюючи кінематичного стану тіла. Але цю систему трьох сил можна розглядати по іншому: як силу $\overline{P}_2$, яка дорівнює силі $\overline{P}_1$ і перенесена з точки A в точку B , і зрівноважену систему двох сил ($\overline{P}_1$ і $\overline{P}_3$, яку можна відкинути.

III аксіома. Рівнодійна двох сил, які прикладені до тіла в одній точці, зображується діагоналлю паралелограма, який побудований на цих силах, як сторонах, і прикладена в точці їх перетину. Ця аксіома носить назву закону паралелограма сил.

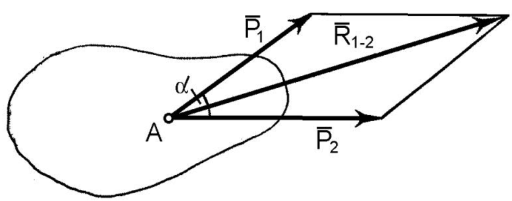


Рис. 1.4

Припустимо, що до тіла (рис. 1.4) в точці А прикладені дві сили $\overline{P}_1$ та $\overline{P}_2$, які розташовані під кутом α. Побудуємо на цих силах, як на сторонах, паралелограм і проведемо крізь точку А діагональ, яка і буде рівнодійною $\overline{R}_{1,2}$цих сил.

Таким чином, III аксіома статики дає можливість геометрично додати дві сили, що прикладені в одній точці

$$\overline{R}_{1,2} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2. \tag{1.1}$$

З курсу геометрії відомо, що діагональ паралелограма, тобто модуль рівнодійної, дорівнює

$$R_{1,2} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha} \tag{1.2}$$

Пропонується самостійно визначити рівнодійну, якщо сили прикладені в одній точці і розташовані під прямим кутом, а також коли вони співпадають за напрямком або спрямовані у протилежні сторони.

IV аксіома. Два взаємодіючих тіла діють одне на одного з рівними за модулем, але протилежними за напрямком силами. Ця аксіома носить назву закону дії та протидії.

Слід зауважити, що сили взаємодії ніколи не зрівноважуються, тому що вони прикладені до різних тіл.

V аксіома. Якщо гнучке (не тверде) тіло перебуває у стані рівноваги під дією системи сил, то цей стан не зміниться, якщо тіло затвердіє. Ця аксіома має назву принципу затвердіння.

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке механічний рух? Що вивчає статика?
2. Що вивчає теоретична механіка? Задачі статики.
3. В чому полягає суть понять матеріальна точка та абсолютно тверде тіло?
4. Що таке сила? Які три характеристики має сила?
5. Що таке система сил?
6. Яка сила є рівнодійною системи сил?
7. Як формулюються аксіоми статики?
8. В якому випадку матеріальне тіло буде вільним?

Тема 2**: Система збіжних сил**

Основні типи в'язей та їх реакції

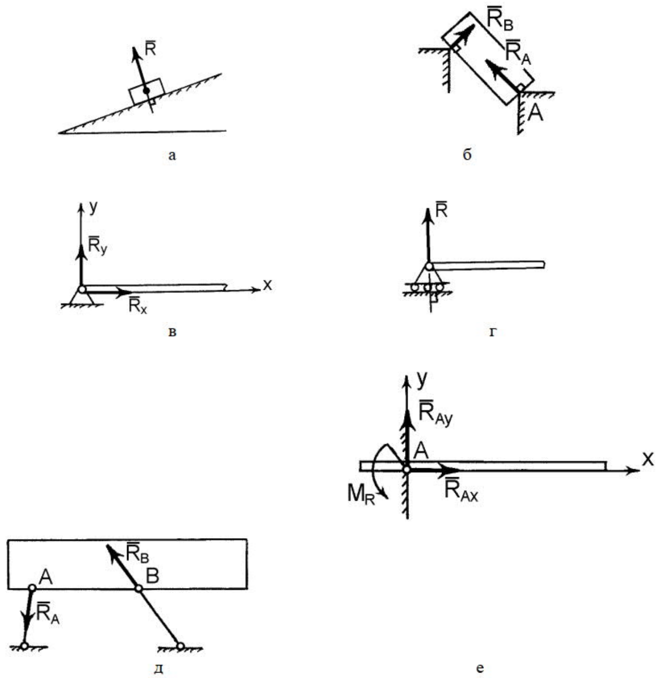
У теоретичній механіці тіла діляться на вільні та невільні. Тіло вважається вільним, якщо воно має можливість необмежено рухатись у просторі в будь-якому напрямку.

Тіло, рух якого у просторі чимось обмежується, вважається невільним. Тіла, або перешкоди які, обмежують рух даного тіла, називаються в'язями. Механічна дія в'язі на дане тіло має назву сили реакції в'язі (в подальшому "реакція").

Розглянемо основні типи в'язей як розрахункові моделі. Кожна з цих в'язей має свою назву, графічне зображення і свої реакції.

1. Ідеально гладенька площина або опора (рис. 1.5, а). Реакція цієї в'язі R напрямлена перпендикулярно до площини, або розташована вздовж нормалі. Гладенька площина накладає одну в'язь – неможливість рухатись по нормалі до поверхні, тому буде одна реакція, яка напрямлена проти напрямку втраченого переміщення за рахунок накладення в'язі.

Якщо поверхня буде сферичною (рис. 1.5, а), то реакція R_A проходить крізь центри сфер O і O_1 по нормалі *n* (перпендикулярно до дотичної τ).



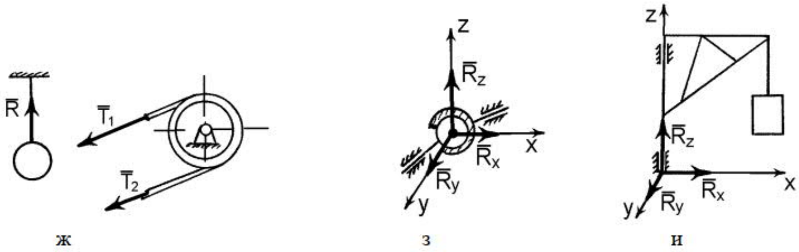


Рис. 1.5

2. Точкова опора (рис. 1.5, *б*). Якщо гладенька площина вироджується у лінію або точку, то реакція в'язей R_A і R_B буде спрямована по перпендикуляру до лінії (поверхні) тіла, яке утримується в даній точці.

3. Шарнірно – нерухома опора або нерухомий шарнір (рис. 1.5, *в*). Реакція шарнірно – нерухомої опори прикладена у центрі шарніра і невідома за напрямком. При аналітичному розрахунку вектор реакції розкладається на дві складових вздовж осей координат R_x і R_y. З другого боку, ця опора накладає дві в'язі – неможливість вертикального і горизонтального рухів, тому і буде дві відповідні складові реакції у площині, яка перпендикулярна осі шарніра.

4. Шарнірно – рухома опора або каток (рис. 1.5, *г*). Реакція цієї в'язі *R* спрямована перпендикулярно до площини, по якій рухається каток.

5. Жорстке закріплення (рис. 1.5, *д*). Реакція цієї в'язі повинна бути представлена двома складовими у вигляді сил R_{Ax}, і R_{Ay} та реактивного моменту M_R. Це відповідає кількості в'язей, які накладає ця опора: неможливість вертикального і горизонтального рухів і повороту у площині.

6. Ідеальний стержень, тобто невагомий тонкий стержень, на кінцях якого встановлені циліндричні шарніри і який працює тільки на розтяг або на стиск (рис. 1.5, *е*). Реакція цієї в'язі *R* спрямована вздовж стержня і прикладена у центрі шарніра.

7. Гнучка нитка або в'язь, яка здійснюється ідеальними гнучкими тілами, тобто невагомими, нерозтяжними нитками: канатами, пасами, ланцюгами (рис. 5.1, *ж*). Реакція цієї в'язі *R* напрямлена вздовж нитки і прикладена у точці закріплення *A*. У пасовій передачі натяги в її гілках T_1 і T_2 також вважаються реакціями гнучких в'язей.

8. Сферичний шарнір або його частковий випадок – підп'ятник (рис. 1.5, *з*, *и*). Реакція цієї в'язі повинна бути зображеною трьома складовими у вигляді реакцій R_x,R_y,R_z, напрямлених вздовж осей просторової декартової системи координат *xyz*, з початком у центрі сферичного шарніра або підп'ятника.

У зв'язку з введенням поняття в'язей вводиться VI та VII аксіоми статики, які носять назви аксіоми про звільнення від в'язей та аксіоми про накладання нових в'язей.

VI аксіома. Рівновага невільного матеріального тіла не зміниться, якщо відкинути в'язі, що накладені на нього, а замість них прикласти сили, які дорівнюють їх реакціям.

VII аксіома. Рівновага невільного матеріального тіла не зміниться, якщо на нього накласти нові в'язі.

Класифікація систем сил

По характеру розташування всі системи сил можна поділити на плоскі і просторові

системи. Крім того, кожна з цих систем може бути поділена на систему збіжних сил, систему паралельних сил і систему довільних сил.

– система збіжних сил характеризується тим, що напрямки векторів усіх сил перетинаються в одній точці.

– у системі паралельних сил вектори сил паралельні.

– у системах довільних сил вектори розташовані як завгодно на площині або у просторі. Таким чином, можна констатувати, що маємо шість різних систем сил, під дією яких тіло може перебувати в стані рівноваги, або рухатись за певним законом.

Плоска система збіжних сил

Якщо всі сили, які прикладені до тіла, розташовані в одній площині та лінії їх дії перетинаються в одній точці, то така система сил носить назву плоскої системи збіжних сил.

Покажемо на рис. 1.6 довільне тіло, до якого прикладена плоска системи збіжних сил $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. При цьому лінії дії всіх сил перетинаються в точці A.

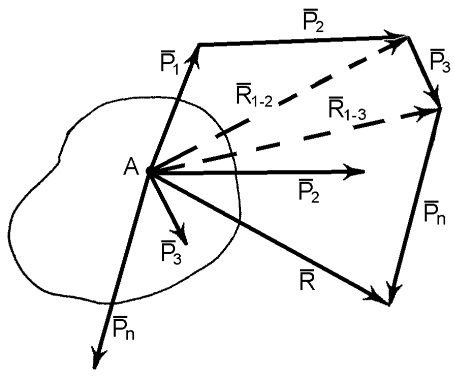


Рис. 1.6

Геометричний спосіб додавання збіжних сил

Додати систему сил, це означає визначити їх рівнодійну. Спробуємо знайти рівнодійну для плоскої системи збіжних сил, яка зображена на рис. 1.6. Візьмемо (умовно) дві перші сили $P1$ і $P2$ і на підставі III аксіоми статики знайдемо їх рівнодійну $R1,2$, для чого на силах $P1$ і $P2$, як на сторонах, побудуємо паралелограм [1], діагональ якого, яка прикладена у точці A, і є їх рівнодійною $R_{1,2}$. Далі геометрично додамо дві наступні сили $R_{1,2}$ і P_3, і вже на цих силах як на сторонах побудуємо свій паралелограм, діагональ якого буде рівнодійною $R_{1,3}$. І так далі до

останньої сили P_n. Коли побудовано останній паралелограм і проведена остання діагональ, то вона і буде рівнодійною R збіжної системи сил, яка показана на рис. 1.6.

Якщо уважно придивитися до геометричної побудови паралелограмів, то можна побачити, що до кінця вектора сили P_1 було приєднано вектор сили P_2 (тобто в кінець вектора $P1$ перенесено паралельно вектор $P2$) і так далі до останньої сили Pn.

Таким чином, геометричний спосіб додавання збіжних сил зводиться до побудови силового многокутника. Він будується шляхом паралельного перенесення сил, коли початок наступної сили співпадає з кінцем попередньої сили. Тоді рівнодійна з'єднує початок першої сили з кінцем останньої сили. Це можна записати так:

$$\overline{R}_{1,n} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \ldots + \overline{P}_n. \qquad (1.3)$$

Величина рівнодійної сили не зміниться, якщо буде змінено порядок приєднання (додавання) сил до многокутника, але конфігурація силового многокутника буде іншою.

Умова рівноваги плоскої системи збіжних сил у геометричній формі

Якщо до вільного матеріального тіла прикладена одна сила (або момент), то про рівновагу цього тіла мови не може бути . Таким чином, якщо розглядати плоску систему збіжних сил, яка зведена до рівнодійної, то тіло не може бути у рівновазі.

Для рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна всіх сил дорівнювала нулю.

Рівнодійна такої системи сил буде дорівнювати нулю, коли силовий многокутник буде замкненим, тобто коли початок вектора першої сили буде співпадати з кінцем вектора останньої сили.

Теорема про рівновагу тіла, яке перебуває під дією трьох непаралельних сил

Сформулюємо вказану теорему.

Якщо тіло під дією трьох плоских непаралельних сил перебуває в рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Уявимо тіло (рис. 1.7), до якого в точках A,B,C прикладені сили P_1,P_2,P_3, вектори яких розташовані в одній площині. Розглянемо спочатку дві сили P_1 та P_2. На підставі наслідку з І і ІІ аксіом статики вказані сили завжди можна перенести по лінії їх дії в одну точку, наприклад, у точку O. Далі, якщо маємо в точці O дві прикладені сили, то на підставі ІІІ аксіоми статики їх можна замінити однією силою, тобто рівнодійною $R_{1,2}$. Побудуємо на рис. 1.7 на вказаних силах P_1 та P_2 паралелограм і покажемо рівнодійну $R_{1,2}$. Тепер тіло буде під дією тільки двох сил P_3 та $R_{1,2}$ і воно буде в рівновазі лише тоді, коли вектори цих сил розташовані на одній прямій, тобто на прямій CO. Тоді і вектор сили P_3 перетинає точку O. Теорема доведена.

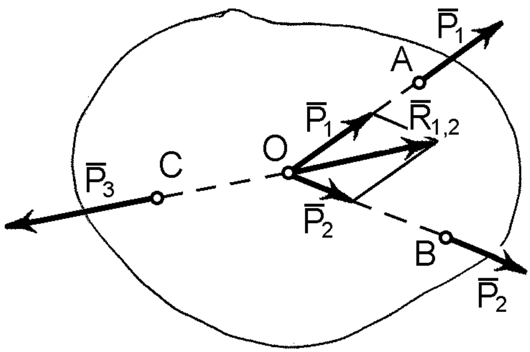


Рис. 1.7

Проекція сили на вісь та на площину

Уявимо силу Р, вектор якої довільно розташований у площині креслення (рис. 1.8). Виберемо у цій площині вісь, наприклад, вісь х. Необхідно спроектувати вказану силу Р на дану вісь х.

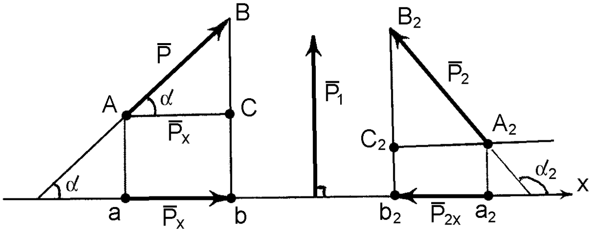


Рис. 1.8

Позначимо спочатку кінці вектора сили Р літерами А і В і опустимо з них на вісь х

перпендикуляри. Точки перетину перпендикулярів з віссю х (позначимо їх відповідними малими буквами а і в) утворили на осі х напрямлений відрізок, який і буде проекцією сили Р на вісь х. За величиною цей відрізок дорівнює добутку модуля сили P на косинус кута, під яким вектор сили перетинає вісь. А саме:

$$P_x = P \cdot cos\alpha \ . \qquad (1.4)$$

За знаком проекція сили на вісь тоді буде додатня, коли кут □ (кут перетину вектора сили або лінії дії сили з віссю) гострий. Цілком зрозуміло, якщо цей кут дорівнює 90^o, то проекція сили P_1 на вісь x дорівнюватиме нулю. Якщо кут α буде тупий, то проекція сили P_2 на вісь x буде мати від'ємний знак.

Таким чином, *проекція сили на вісь – це напрямлений відрізок на осі, утворений між перпендикулярами, які опущені з кінців вектора сили на вісь, і який за величиною дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом вектора сили та віссю.*

Спроектуємо тепер вектор сили на площину і осі координат.

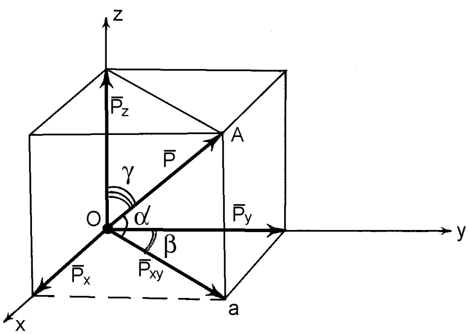


Рис. 1.9

Візьмемо силу P , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.9). Виберемо у просторі прямокутну декартову систему координат xyz , початок відліку якої (точку O) суміщений з точкою прикладання вектора сили P . Спроектуємо вектор сили P на площину xOy . Опустимо з точки A (кінець вектора сили) на вказану площину перпендикуляр, який перетинає її в точці a На площині xOy утворено вектор Oa , який і є проекцією P_{xy} сили на площину. За модулем ця проекція дорівнюватиме

$$P_{xy} = P\cos\alpha \, , \qquad (1.5)$$

де α - кут між вектором сили P та площиною xOy .

Якщо в площині xOy позначити кут β , то є можливість спроектувати силу P на осі x та y , опускаючи з точки a на осі перпендикуляри і за відомим вже правилом отримати проекції вектора P_{xy} на вказані осі:

$$P_x = P_{xy} \cdot sin\,\beta = P \cdot cos\,\alpha \cdot sin\,\beta, \qquad (1.6)$$

$$P_y = P_{xy} \cdot cos\,\beta = P \cdot cos\,\alpha \cdot cos\,\beta. \qquad (1.7)$$

У даному випадку крізь вісь z та вектор сили P можна провести площину, тому є можливість спроектувати силу на цю вісь за відомим правилом. Ця проекція буде дорівнювати

$$P_z = P \cdot cos\,\gamma, \qquad (1.8)$$

де γ - кут між вектором сили P та віссю z .

Визначення сили за її проекціями

Припустимо, що маємо в площині рисунка прямокутну декартову систему координат

xOy , задані дві проекції сили – P_x та P_y (рис. 1.10). Треба за даними проекціями обчислити модуль вектора самої сили P , а також його напрямок.

На заданих проекціях, як на сторонах, будуємо прямокутник, діагональ якого, що проходить крізь точку перетину проекцій, і є шуканим вектором сили P . Модуль сили P можна визначити з наступного виразу:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}. \qquad (1.9)$$

Кути між вектором сили P та осями x та y можна визначити за допомогою напрямних косинусів

$$\cos\alpha = \cos\left(x,\hat{\ }\overline{P}\right) = \frac{P_x}{P}, \qquad \cos\beta = \cos\left(y,\hat{\ }\overline{P}\right) = \frac{P_y}{P}. \qquad (1.10)$$

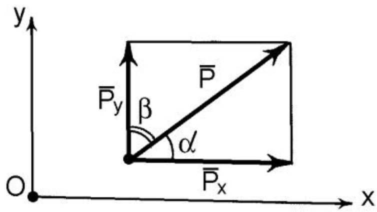


Рис. 1.10

Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь

Проекція вектора рівнодійної сили на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів складових сил на ту ж саму вісь.

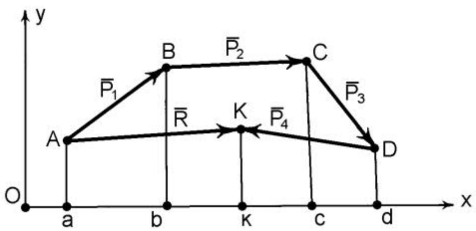


Рис. 1.11

Доведення. Маємо систему сил P_1, P_2 , P_3 , P_4 , яка зведена до рівнодійної R за допомогою силового многокутника (рис. 1.11). Введемо на площині прямокутну декартову систему координат xOy і спроектуємо на вісь x всі сили. Для цього позначимо кінці векторів всіх сил літерами – A, B, C, D, K і проведемо перпендикуляри з кожної точки на вісь x . Точки перетину перпендикулярів з віссю, які позначені відповідними малими літерами – a, в, c, d, k , утворили на осі напрямлені відрізки, які і є проекціями всіх сил на вісь. Кожна проекція, відповідно, дорівнює

$$|ab| = P_{1x}, \quad |bc| = P_{2x}, \quad |cd| = P_{3x}, \quad |-dk| = P_{4x}. \tag{1.11}$$

Додамо алгебраїчно всі проекції і підрахуємо, чому ця сума дорівнює:

$$ab + bc + cd - dk = ak. \tag{1.12}$$

Але відрізок ak і є проекцією рівнодійної сили R на вісь x . Поширюючи цю суму на n сил, можна записати:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}. \tag{1.13}$$

Тема 3: Рівновага пар сил

Пара сил – це сукупність двох рівних за величиною, паралельних і протилежно напрямлених сил, розташованих в одній площині.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.16), до якого в точках A і B прикладені сили P_1 і P_2 .

Причому $P_1 = P_2$ і $P_1 \,//\, P_2$, тобто до тіла прикладена пара сил. Площина, в якій розташовані сили пари, має назву площини дії пари. Пара сил не має

рівнодійної сили і характеризується моментом, що викликає обертання тіла під дією сил пари у площині дії пари.

Моментом пари називається взятий з відповідним знаком добуток однієї з сил пари на плече пари. Плече пари – це відстань по перпендикуляру між лініями дії сил, які складають пару.

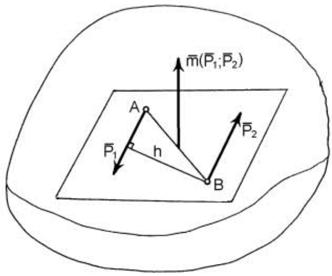


Рис. 1.16

Момент пари вважається додатним, якщо він намагається обертати тіло проти годинникової стрілки і, навпаки, – від'ємним, якщо намагається обертати тіло за годинниковою стрілкою.

Момент пари за модулем позначається $m(P_1, P_2)$. Визначимо момент пари сил, яка зображена на рис. 1.16.

$$m(P_1, P_2) = P1h. \quad (1.33)$$

Момент пари сил можна уявити вектором. Цей вектор перпендикулярний до площини дії

пари і напрямлений у той бік, з якого бачимо обертання тіла під дією пари проти годинникової стрілки. Момент m(P1, P2) як вектор показаний на рис. 1.16. Проте момент пари сил як вектор не має фіксованої точки прикладення, оскільки він є вільним вектором..

Властивості пари сил

До тіла можуть бути прикладені декілька пар сил. Дві пари сил будуть еквівалентними, якщо при інших рівних умовах їх дії на тіло однакові. Оскільки пара сил характеризується моментом пари, то пари сил, що лежать в одній площині будуть еквівалентні, якщо вони мають однакові моменти (однакові за величиною та напрямком).

З цих положень випливають основні властивості пар сил:

– не змінюючи дії пари сил на тіло, пару сил можна обертати та переносити, як завгодно, в площині її дії;

– дія пари на тіло не змінюється, якщо складові сили і плече пари змінювати, але так, щоб момент пари і площина дії залишалися незмінними;

– коли на тіло діє система пар сил, то пари і моменти пар можна додавати. Якщо всі пари даної системи пар розташовані в одній площині, то момент результуючої пари дорівнює алгебраїчної сумі моментів складових пар

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k . \quad (1.34)$$

Тема 4: Основна теорема статики

Теорема про паралельне перенесення сили

Якщо лінії дії сил, прикладених до тіла довільно розташовані в одній площині, то така система сил зветься "плоскою системою довільних сил".

Розглянемо теорему про паралельне перенесення сили, що прикладена до тіла, яку можна вважати лемою. Візьмемо довільне тіло, до якого в точці A прикладена сила P1 з лінією дії MN (рис. 1.17, а). Виберемо на тілі другу точку B і проведемо крізь неї пряму, паралельну прямій MN . Прикладемо на цій прямій у точці B зрівноважену систему сил $P_2 = -P_3$, модулі усіх трьох сил виберемо однаковими, тобто

$$P_1 = P_2 = P_3 . \qquad (1.36)$$

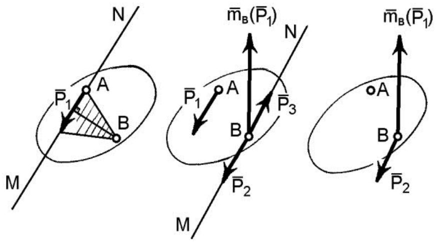


Рис. 1.17

Тепер, як бачимо з рис. 1.17, б, сили P_1 і P_3 можна об'єднати у пару сил ($P_1 = P_3$, $P_1 // P_3$) і її можна замінити моментом $m(P_1, P_3)$ пари. Модуль моменту цієї пари буде дорівнювати моменту даної сили P1 відносно точки переносу B:

$$m(P_1, P_3) = P_1 \cdot h = mB\,(P_1) . \qquad (1.37)$$

Отже, остаточно маємо силу P1 , яка перенесена паралельно в точку B (сила P_2, $P_2 = P_1$) і, так звану, "приєднану" пару (P_1,P_3), момент якої дорівнює моменту сили, що переноситься, відносно точки переносу (рис. 1.17, в).

Таким чином, теорему можна сформулювати так: при паралельному переносі сили в іншу точку рівновага тіла не зміниться, якщо додати "приєднану", або компенсуючу пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно точки переносу.

Теорема Варіньона про момент рівнодійної сили

Момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того ж центра.

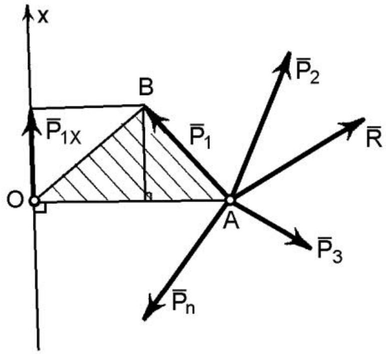


Рис. 1.19

Тема 5: Центр ваги твердого тіла.

Центр паралельних сил

Припустимо, що до тіла у точках A1, A2, A3,...,An прикладена система паралельних і однаково спрямованих сил P1, P2, P3,...,Pn (рис. 1.56). Додамо геометрично сили P1 і P2 , тобто визначимо їх рівнодійну R1,2 . Вона буде дорівнювати

$$\overline{R}_{1,2} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 . \qquad (1.139)$$

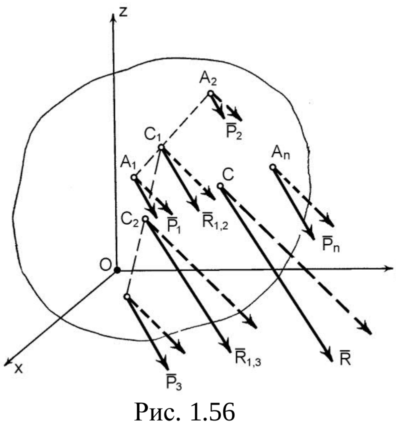


Рис. 1.56

Точка C1 прикладання цієї рівнодійній R1,2 визначається за відомим правилом додавання двох паралельних сил, які мають однаковий напрямок. Оскільки сили P1 і P2

прикладені у точках A1 і A2 , то, з'єднавши ці точки прямою, можна відшукати положення точки C1 на цій прямій за відомим рівнянням

$$P_1 \cdot A_1C_1 = P_2 \cdot A_2C_1 . \qquad .140)$$

Далі аналогічно додамо сили R1,2 і P3 , отримуючи їх рівнодійну R1,3 , яка є фактично рівнодійною трьох сил і буде дорівнювати

$$R_{1,3} = R_{1,2} + P_3 = P_1 + P_2 + P_3 . \qquad (1.141)$$

Точка C_2 прикладання цієї рівнодійної R1,3 також визначається за вказаним вище правилом на прямій C_1A_3 .

Таким же чином поводимося з рештою сил, послідовно їх додаючи, і остаточно отримаємо рівнодійну R системи паралельних сил. Вона буде прикладеною в точці C , спрямована у той же бік, що і задані паралельні сили, величина її буде дорівнювати

$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \ldots + \overline{P}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{P}_k . \qquad (1.142)$$

Повернемо всі задані сили навколо їх точок прикладання в один бік на один і той же кут і тепер знайдемо їх рівнодійну. Також починаємо з додавання сил P_1 і P_2 . Але, як бачимо з рис. 1.56, а також з рівнянь (1.139) і (1.140), ні модуль рівнодійної R1,2 , ні положення точки її прикладання C1 на прямій A_1A_2 , не змінюються. Змінюється лише напрямок, який буде паралельним новому напрямку сил.

Якщо провести до кінця додавання паралельних сил, які вже мають новий напрямок, то будемо бачити, що і рівнодійна R у даному випадку не змінює ні свого модулю, ні положення точки прикладання C . Змінюється лише напрямок її лінії дії.

Таким чином, точка прикладання рівнодійної R системи паралельних сил завжди співпадає з точкою C , положення якої по відношенню до положення точок A_1, A_2, A_3,...,An , або, взагалі, до тіла завжди буде незмінним. Ця точка має назву центра паралельних сил.

Центр паралельних сил – це точка прикладання їх рівнодійної, яка не змінює свого положення при повороті усіх сил на один і той же кут, в один і той же бік.

Тема 6. Предмет та задачі опору матеріалів

Наука «Опір матеріалів» сформувалася у XVII столітті та пов'язана з іменем видатного італійського вченого Г. Галілея, який одним із перших запропонував виконувати розрахунки елементів конструкцій на міцність. Подальший розвиток цієї науки був зумовлений практичними потребами проєктування та експлуатації будівельних і інженерних споруд.

У межах навчальної дисципліни «Основи будівельної механіки» опір матеріалів розглядається як її важлива складова, що забезпечує розуміння роботи окремих елементів конструкцій під дією навантажень. Для майбутніх архітекторів знання опору матеріалів є необхідними не лише для виконання розрахунків, а й для усвідомленого формування архітектурно-конструктивних рішень, вибору раціональних форм, перерізів та матеріалів несучих елементів.

Розвиток опору матеріалів тісно пов'язаний із працями таких учених, як Г. Галілей, Р. Гук, Л. Ейлер, Я. Бернуллі, Т. Юнг, К. Мор, Ф. Нав'є, О. Коши, А. Гріффітс, П. Лагранж, А. Вьолер та інших, які заклали основи сучасних методів розрахунку та сформували базові поняття будівельної механіки.

Опір матеріалів вивчає інженерні методи оцінювання міцності, жорсткості, стійкості та витривалості елементів машин і споруд. У курсі «Основи будівельної механіки» ці питання розглядаються з урахуванням специфіки будівельних конструкцій, що дозволяє забезпечити надійність, довговічність та економічну доцільність проєктованих об'єктів архітектури.

Наука «Опір матеріалів» базується на поєднанні теоретичних положень і експериментальних досліджень та має тісний зв'язок із фізикою, математикою, матеріалознавством і теоретичною механікою. Саме в системі цих дисциплін вона формує основу для подальшого вивчення будівельної механіки та конструктивних дисциплін у підготовці архітекторів.

Тема 7. Основні положення, принципи та гіпотези опору матеріалів

Основні положення опору матеріалів

Опір матеріалів ґрунтується на таких положеннях: реальні конструкції замінюються **розрахунковими схемами** (стержні, балки, пластини, оболонки); навантаження вважаються **заданими та відомими**; деформації конструкцій не порушують їх функціонального призначення; розрахунок ведеться в межах **припустимих напружень або граничних станів**; внутрішні сили і напруження визначаються методами теоретичної механіки.

Основні принципи опору матеріалів

Принцип пружності - Матеріал після зняття навантаження повністю відновлює початкові форму і розміри, якщо напруження не перевищують межі пружності.

Принцип лінійної залежності - У межах пружної роботи матеріалу деформації прямо пропорційні напруженням(закон Гука).

Принцип незалежності дії сил - Дія кількох навантажень на елемент конструкції еквівалентна сумі дій кожного навантаження окремо. Цей принцип відомий як принцип суперпозиції.

Принцип суцільності матеріалу - Матеріал вважається суцільним середовищем, тобто його структура не враховується на мікрорівні.

Основні гіпотези опору матеріалів

Гіпотеза малих деформацій - Деформації настільки малі, що геометрія елемента практично не змінюється і може використовуватися початкова форма конструкції.

Гіпотеза плоских перерізів - Плоскі перерізи стержня до деформації залишаються плоскими і після деформації. Ця гіпотеза є основою теорії згину балок.
Гіпотеза однорідності та ізотропності - Матеріал має однакові механічні властивості в усіх точках та в усіх напрямках.
Гіпотеза лінійної пружності - Між напруженнями та деформаціями існує лінійний зв'язок, який не залежить від швидкості навантаження та історії деформування.

Обмеження застосування гіпотез

Слід пам'ятати, що наведені принципи і гіпотези:
справедливі лише для певного діапазону навантажень;
не враховують тріщиноутворення, повзучість, пластичні деформації;
застосовуються переважно на першому етапі інженерних розрахунків.

Внутрішні силові фактори. Метод перерізів для їх визначення при простих деформаціях

Зовнішні навантаження викликають сили протидії в матеріалі деталі,
зумовлені міжмолекулярними зв'язками часток матеріалу.

Сили протидії є внутрішніми силами, які входять до складу основних формул при розрахунках на міцність і жорсткість.

Коли деталь навантажена тільки однією силою F чи моментом M, то внутрішній силовий фактор (ВСФ) за величиною дорівнює цій силі чи моменту на основі III закону Ньютона. В інших випадках треба застосувати метод перерізів, основою якого є умова рівноваги бруса до перерізу і його частин після перерізу.

Відокремлена частина врівноважується тими ВСФ, прикладеними в центрі ваги бруса, які здатні зрівноважити дію зовнішніх навантажень: сили зовнішні – внутрішніми силами пружності, моменти зовнішні – внутрішніми моментами.

Всього існує шість ВСФ – три сили і три моменти у відповідності з шістьма рівняннями рівноваги для довільної просторової системи сил:

$\sum Fix = 0$ $\sum Fiy = 0$ $\sum Fiz = 0$

$\sum Mix = 0$ $\sum Miy = 0$ $\sum Miz = 0$

Тема 8.Розтяг і стиск

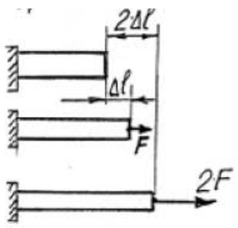
В 1660 р.англійський вчений Роберт Гук відкрив залежність між навантаженням – зовнішньою силою F та деформацією $\Delta\lambda$. Ця залежність прямо пропорційна: $F \sim \Delta l$.

Поділимо силу F на площу перерізу A , а Δl поділимо на початкову довжину λ стержня:

$F/A = \sigma$ - нормальна напруга;

$\Delta l/l = \varepsilon$- відносне видовження,

деΔl, мм – абсолютне видовження (або скорочення)



Пропорційна залежність між силою F і деформацією Δl

Сучасна математична форма запису закону Гука має вид:

$$\sigma = E*\varepsilon$$

(нормальна напруга σ пропорційна відносному видовженню ε. Закон Гука є основним законом в опорі матеріалів і носить назву “закон пружності”, тому що справджується при всіх деформаціях. Закон Гука має обмеження – до досягнення напруги – границі пропорційності $\sigma_{пц}$ (рис. 5)

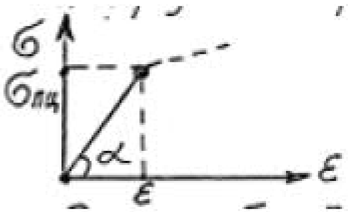


Рис. 8.1. Графічне зображення закону Гука

Величина Е – дуже важлива механічна характеристика матеріалу, називається модулем повздовжньої пружності матеріалу, або модулем пружності I роду, або модулем Юнга (значення модуля Е для технічних розрахунків встановив у 1800р. англійський вчений Томас Юнг.)

ε – величина безрозмірна, одиниці напруг σ - МПа із закону Гука виходить, що одиниці Е – теж МПа . У випадку, коли ε =1, тобто $\Delta l = l$ - видовження 100%, Е =σ , це значить, що модуль Е дорівнює напрузі σ в деталі, якщо вона видовжиться в два рази.

Основний фізичний зміст модуля пружності Е: він характеризує здатність матеріалу протидіяти пружним деформаціям при розтягу і стиску, інакше характеризує жорсткість матеріалу. Числові значення модулів E для різних технічних матеріалів визначені і знаходяться в довідниках для інженерів і конструкторів. Модуль E треба знати при розрахунках деталей та елементів конструкцій на жорсткість при розтягу, стиску і згині.

Тема 9. Теорія напруженого і деформованого стану

Напружений стан в точці. Тензор напружень

Напружений стан у точці твердого деформівного тіла визначається сукупністю внутрішніх сил, що виникають у цій точці під дією зовнішніх навантажень та реакцій зв'язків. Для його аналізу розглядають уявну елементарну площадку, що проходить через задану точку, і визначають напруження, які діють на цій площадці.

Напруженням називають відношення внутрішньої сили до площі елементарної площадки. Залежно від напрямку дії відносно нормалі до площадки напруження поділяють на нормальні та дотичні. Сукупність напружень у точці повністю описується тензором напружень другого рангу.

Тензор напружень має вигляд матриці:

σx τxy τxz

τyx σy τyz

τzx τzy σz

де σx, σy, σz - нормальні напруження, а τxy, τxz, τyz - дотичні напруження. Внаслідок умов рівноваги елементарного об'єму справджується рівність парних дотичних напружень, тобто $\tau xy = \tau yx$, $\tau xz = \tau zx$, $\tau yz = \tau zy$. Тому тензор напружень є симетричним і містить шість незалежних компонент.

Окремі випадки плоского напруженого стану

Плоским напруженим станом називають такий випадок, коли напруження діють лише в одній площині, а напруження, перпендикулярні до неї, дорівнюють нулю. У цьому разі $\sigma z = 0$, $\tau xz = 0$, $\tau yz = 0$, і тензор напружень спрощується до двовимірного.

Плоский напружений стан характерний для тонких пластин і оболонок, товщина яких значно менша за інші геометричні розміри. У практиці будівельної механіки цей випадок широко застосовується при розрахунку плит, стін, діафрагм жорсткості, елементів покриттів.

Для плоского напруженого стану зручно визначати головні напруження, які діють на взаємно перпендикулярних площадках і не мають дотичних складових. Вони використовуються при перевірці міцності матеріалів за різними гіпотезами.

Об'ємний напружений стан

Об'ємним напруженим станом називають загальний випадок, коли в точці діють усі шість незалежних компонент тензора напружень. Такий стан виникає в масивних елементах конструкцій, зокрема у фундаментах, опорах, вузлах просторових каркасів.

Для об'ємного напруженого стану визначають три головні напруження $\sigma 1$, $\sigma 2$, $\sigma 3$, які є власними значеннями тензора напружень. Вони дозволяють зручно аналізувати напружено-деформований стан і застосовувати теорії міцності незалежно від орієнтації координатної системи.

Узагальнений закон Гука встановлює зв'язок між напруженнями та деформаціями в пружному ізотропному матеріалі при складному напруженому стані. Для просторового випадку він описується системою рівнянь:

$\varepsilon x = (1/E)(\sigma x - \nu(\sigma y + \sigma z))$

$\varepsilon y = (1/E)(\sigma y - \nu(\sigma x + \sigma z))$

$\varepsilon z = (1/E)(\sigma z - \nu(\sigma x + \sigma y))$

$\gamma xy = \tau xy/G$

$\gamma xz = \tau xz/G$

$\gamma yz = \tau yz/G$

де E — модуль пружності, ν — коефіцієнт Пуассона, G — модуль зсуву.

Ці співвідношення лежать в основі розрахунків деформацій і переміщень конструктивних елементів у межах пружної роботи матеріалу.

Потенціальна енергія деформації

Потенціальна енергія деформації - це енергія, накопичена в тілі внаслідок його пружного деформування. Вона визначається роботою внутрішніх сил і використовується в енергетичних методах розрахунку.

Для пружного матеріалу густина енергії деформації у точці залежить від компонент напружень і деформацій. Енергетичні принципи, зокрема принцип мінімуму потенціальної енергії, широко застосовуються при аналізі складних систем та чисельних методах, зокрема в методі скінченних елементів.

Експериментальні дослідження напружено-деформованого стану

Експериментальні методи дослідження напружено-деформованого стану дозволяють перевіряти теоретичні моделі та уточнювати розрахункові схеми. До основних методів належать тензометрія, фотоеластичність, електричні та оптичні методи вимірювання деформацій.

Тензометричні дослідження базуються на вимірюванні відносних деформацій за допомогою електричних тензодатчиків, які широко застосовуються у лабораторних і натурних випробуваннях будівельних конструкцій.

Гіпотези (теорії) міцності. Класичні та теорія Мора

Теорії міцності встановлюють умови переходу матеріалу з пружного стану в граничний або руйнівний. Класичними вважають теорію найбільших нормальних напружень, теорію найбільших дотичних напружень та енергетичну теорію.

Теорія Мора базується на аналізі напруженого стану за допомогою кругів Мора і дозволяє оцінювати граничні стани матеріалів з різною міцністю на розтяг і стиск. Вона особливо ефективна для крихких матеріалів.

Області використання теорій міцності

Різні теорії міцності застосовуються залежно від типу матеріалу та умов роботи конструкції. Для пластичних матеріалів зазвичай використовують енергетичні критерії, для крихких — теорії, засновані на нормальних напруженнях. У будівельній практиці вибір теорії міцності визначається нормативними вимогами та експериментальними даними.

Нові теорії міцності

Сучасні теорії міцності враховують нелінійні властивості матеріалів, анізотропію, накопичення пошкоджень та вплив часу. Вони застосовуються при розрахунку композитних матеріалів, залізобетону, високоміцних сталей та конструкцій, що працюють в умовах складного напружено-деформованого стану.

Тема 10. Геометричні характеристики плоских перерізів

До геометричних характеристик перерізів (скорочено ГХП) відносяться величини пов'язані з формою поперечного перерізу деталі і розмірами перерізу. Для кожної форми перерізу деталі (круглої, квадратної і інших) ці величини визначаються за різними формулами (табл.1), а для прокатних профілів, знаходяться в спеціальних таблицях. Приведемо позначення і назви ГХП, які найбільш часто зустрічаються в опорі матеріалів:

A – площа перерізу, мм^2 або см^2 ;

Wр - полярний момент опору перерізу, мм^3 або см^3 ;

Wx або Wy - осьові моменти опору перерізу, мм^3 або см^3 ;

J р - полярний момент інерції перерізу, мм^4 або см^4 ;

J х або J у - осьові моменти інерції перерізу, мм^4 або см^4 ;

Ці величини зустрічаються в основних формулах опору матеріалів – умовах міцності і умовах жорсткості. Приведемо приклади:

Умови міцності

− при розтягу і стиску $\sigma = N\zeta / A \leq [\sigma]$;

− при крученні $\tau\kappa = M\kappa / \Omega\pi \leq [\tau\kappa]$;

− при зрізі $\tau зр = \Theta / Aзр \leq [\tau зр]$;

− при згині $\sigma зг = Mx / Wx \leq [\sigma зг]$.

Умови жорсткості

− при розтягу і стиску $\Delta\lambda = Nz * l / E * A \leq [\Delta l]$;

− при крученні $\varphi = M_к * l / G * J\pi \leq [\varphi]$;
− при згині $f = F * l^3 / 48E * Jx \leq [f]$.

Тема 11. Зсув. Кручення

Зсув. Напруги та деформації

Зсувом називають такий вид деформації, при якому паралельні шари матеріалу зміщуються один відносно одного під дією дотичних сил. Зсув виникає в елементах конструкцій при дії поперечних сил, а також у з’єднаннях — болтових, заклепкових, шпонкових і зварних.

Основною характеристикою напруженого стану при зсуві є дотичні напруження τ, які визначаються як відношення поперечної сили до площі перерізу:

$\tau = Q/A$

де Q — поперечна сила, A — площа перерізу.

Деформація зсуву характеризується відносним кутом зсуву γ, який визначається як відношення взаємного переміщення шарів до відстані між ними.

Напружений стан при зсуві

При чистому зсуві в елементі діють лише дотичні напруження, нормальні напруження при цьому дорівнюють нулю. Напружений стан при зсуві є окремим випадком плоского напруженого стану.

Аналіз напруженого стану показує, що при чистому зсуві в матеріалі одночасно виникають нормальні напруження на площадках, нахилених під кутом 45 градусів до напрямку дії дотичних напружень. Цей факт має важливе значення для пояснення механізму руйнування матеріалів при зсуві.

Закон Гука при зсуві. Модуль пружності другого роду

У межах пружної роботи матеріалу між дотичними напруженнями та деформаціями зсуву існує лінійна залежність, яка описується законом Гука при зсуві:

$\tau = G*\gamma$

де G — модуль пружності другого роду (модуль зсуву).

Модуль зсуву характеризує здатність матеріалу чинити опір зсувним деформаціям. Для ізотропних матеріалів між модулями пружності існує співвідношення:

$G = E/(2*(1+\nu))$

де E — модуль пружності першого роду, ν — коефіцієнт Пуассона.

Умови міцності та жорсткості на зріз і зминання

Умова міцності на зріз формулюється як обмеження максимальних дотичних напружень допустимим значенням:

$$\tau \leq \tau_{dop}$$

Умова жорсткості полягає в обмеженні деформацій зсуву або переміщень до нормативно допустимих величин.

Зминанням називають місцеву деформацію матеріалу в зоні контакту елементів, наприклад, у болтових або шпонкових з'єднаннях. Напруження зминання визначаються за формулою:

σzm = Q/Am

де Am — площа контакту.

Умова міцності на зминання має вигляд:

σzm ≤ σdop

Види розрахунків на зріз та зминання. Допустимі напруги

Розрахунки на зріз і зминання можуть виконуватися:

- на перевірку міцності при заданих навантаженнях;
- на підбір розмірів елементів;
- на визначення допустимого навантаження.

Допустимі напруження визначаються з урахуванням межі міцності матеріалу та коефіцієнта запасу:

τdop = τlim/n

σdop = σlim/n

де τlim, σlim — граничні напруження, n — коефіцієнт запасу.

Кручення прямого стержня. Напруги та деформації

Крученням називають такий вид деформації, при якому поперечні перерізи стержня повертаються навколо його поздовжньої осі під дією крутного моменту. Кручення характерне для валів, осей, стержнів каркасів і просторових систем.

Основними внутрішніми силовими факторами при крученні є крутний момент Mk та дотичні напруження.

Дотичні напруження при крученні визначаються за формулою:

τ = Mk*r/Jp

де r — відстань від осі стержня, Jp — полярний момент інерції перерізу.

Максимальні напруження виникають на зовнішньому контурі перерізу.

Напружений стан при крученні

Напружений стан при крученні є складним і характеризується наявністю дотичних напружень, що змінюються лінійно по радіусу перерізу. У кожній точці виникає стан чистого зсуву.

Цей напружений стан є основою для застосування теорій міцності при перевірці елементів, що працюють на кручення.

Закон Гука при крученні

Закон Гука при крученні пов'язує крутний момент з кутом закручування стержня:

$\varphi = Mkl/(GJp)$

де φ - кут закручування, l - довжина стержня.

Це співвідношення використовується для розрахунку жорсткості елементів при крученні.

Епюри напруг і переміщень. Крутний момент

Для аналізу роботи стержня при крученні будують епюру крутного моменту Mk уздовж його довжини. Вона показує зміну внутрішніх зусиль і дозволяє визначити небезпечні перерізи.

Епюра дотичних напружень у поперечному перерізі має лінійний характер - від нуля в центрі до максимального значення на поверхні.

Епюра кутів закручування відображає зміну повороту перерізів уздовж стержня.

Умови міцності та жорсткості при крученні

Умова міцності при крученні формулюється як:

$\tau max \leq \tau dop$

Умова жорсткості полягає в обмеженні кута закручування:

$\varphi \leq \varphi dop$

Ці умови є обов'язковими при проєктуванні валів і стержнів, що працюють у складі конструкцій.

Обчислення допустимих напруг. Види розрахунків на кручення

Допустимі напруження при крученні визначаються з урахуванням матеріалу та коефіцієнта запасу:

$\tau_{dop} = \tau_{lim}/n$

Розрахунки на кручення виконують:

- на перевірку міцності;
- на підбір діаметра або перерізу;
- на визначення допустимого крутного моменту;
- на перевірку жорсткості.

Тема 12. Плоский згин

Згин. Види згину

Згином називають такий вид деформування стержневих елементів (балок), при якому під дією зовнішніх навантажень у перерізах виникають внутрішні зусилля, що прагнуть зігнути елемент у певній площині. У будівельних конструкціях згин є одним з найпоширеніших видів роботи елементів (балки перекриттів, прогони, ригелі рам, перемички, консольні елементи тощо).

Розрізняють основні випадки згину:

1. чистий згин - у перерізах діє лише згинальний момент M, поперечна сила Q дорівнює нулю;
2. поперечний (нечистий) згин — одночасно діють згинальний момент M і поперечна сила Q;
3. косий згин - згин відбувається у двох взаємно перпендикулярних площинах;
4. позацентровий згин - згин супроводжується осьовим стиском або розтягом.

У подальшому розглядають головним чином прямий згин, коли навантаження лежить в одній площині, а вісь балки є прямою.

Деформації, переміщення і напруження при чистому згині

При чистому згині поперечні перерізи балки залишаються плоскими і перпендикулярними до деформованої осі (гіпотеза плоских перерізів). Внаслідок згину волокна, розташовані по один бік від нейтральної осі, розтягуються, а по інший — стискаються. Існує шар, де поздовжні деформації дорівнюють нулю. Лінію перетину цього шару з перерізом називають нейтральною лінією (нейтральною віссю).

Поздовжня відносна деформація волокна на відстані y від нейтральної осі:

$\varepsilon x = y/\rho$

де ρ — радіус кривизни пружної лінії балки.

Нормальні напруження при чистому згині визначаються з використанням закону Гука (для пружної роботи) і мають лінійний розподіл по висоті перерізу:

$\sigma x = E\varepsilon x = E(y/\rho)$

Зв’язок між згинальним моментом і кривизною записують як:

$1/\rho = M/(E*I)$

де I — момент інерції перерізу відносно нейтральної осі.

Підставляючи, одержують основну формулу нормальних напружень при згині:

$\sigma x = M*y/I$

Максимальні напруження виникають у крайніх волокнах:

$\sigma max = M/W$

де $W = I/ymax$ — момент опору перерізу.

Епюра напруг при чистому згині

Епюра нормальних напружень σx у перерізі при чистому згині має три основні ознаки:

- напруження змінюються лінійно від нейтральної осі до крайніх волокон;
- на нейтральній осі $\sigma x = 0$;
- по один бік нейтральної осі напруження додатні (розтяг), по інший — від'ємні (стиск).

Для симетричних перерізів нейтральна вісь проходить через центр ваги перерізу.

Епюри поперечних сил і згинальних моментів

Для прямої балки внутрішні зусилля в довільному перерізі характеризуються поперечною силою Q та згинальним моментом M. Їх знаходять методом перерізів: балку уявно розсікають і розглядають рівновагу однієї з частин.

Основні диференціальні залежності між навантаженням q(x), поперечною силою та моментом:

$dQ/dx = -q(x)$

$dM/dx = Q(x)$

Звідси випливають правила побудови епюр:

- епюра Q змінюється під дією розподіленого навантаження q, а при зосередженій силі має стрибок;
- епюра M є інтегралом від Q, а при прикладеній парі сил (зосередженому моменті) має стрибок.

Епюри Q і M дозволяють визначити небезпечні перерізи для перевірки міцності та жорсткості.

Дотичні напруги при поперечному згині. Формула Журавського

При поперечному згині (коли Q не дорівнює нулю) у перерізі виникають дотичні напруження τ, пов'язані з дією поперечної сили. Їх визначають за формулою Журавського:

$\tau = QS/(Ib)$

де S - статичний момент частини перерізу відносно нейтральної осі, I - момент інерції всього перерізу, b - ширина перерізу на рівні, де визначають τ.

Характер розподілу τ залежить від форми перерізу. Для прямокутного перерізу дотичні напруження мають параболічний закон і максимальні значення на нейтральній осі.

Умови міцності і жорсткості при чистому згині

Умова міцності при згині формулюється як обмеження максимальних нормальних напружень:

$\sigma max \leq \sigma dop$

де σdop - допустиме напруження для матеріалу.

Оскільки σmax = Mmax/W, умову міцності записують у вигляді:

$Mmax \leq \sigma dop*W$

Умова жорсткості пов'язана з обмеженням прогинів і кутів повороту. Зазвичай нормативно задається граничний прогин f ≤ fdop залежно від прольоту та типу конструкції.

Розрахунки на міцність. Обчислення допустимих напруг

Розрахунки на згин виконують:

1. перевірочні - при заданому перерізі визначають напруження і порівнюють з допустимими;
2. проєктні - підбирають переріз за заданим Mmax та допустимим напруженням;
3. на визначення допустимого навантаження — за умови міцності знаходять граничне навантаження.

Допустимі напруження часто визначають за принципом запасу:

$\sigma_{dop} = \sigma_{lim}/n$

де σlim — граничне або розрахункове напруження матеріалу, n — коефіцієнт запасу.

Метод початкових параметрів

Метод початкових параметрів застосовують для визначення прогинів і кутів повороту балки, використовуючи початкові значення (параметри) в опорному перерізі. Як початкові параметри зазвичай беруть:

- початковий прогин y0,
- початковий кут повороту θ0,
- початковий момент M0,
- початкову поперечну силу Q0.

Подальші значення y(x), θ(x), M(x), Q(x) виражають через ці параметри з урахуванням навантаження та граничних умов. Метод зручний тим, що дозволяє отримати універсальні вирази і швидко розв'язувати задачі для балок з різними схемами навантаження.

Диференціальне рівняння пружної лінії прямої балки та інтегрування

Пружна лінія — це крива, яку описує вісь балки після деформації. Для малих прогинів кривизна пружної лінії пов'язана з другим похідним прогину:

1/ρ ≈ d2y/dx2

З урахуванням зв'язку 1/ρ = M/(E*I) отримують основне диференціальне рівняння пружної лінії:

d2y/dx2 = M(x)/(E*I)

Після інтегрування одержують:

- кут повороту (похил) перерізу:

dy/dx = θ(x) = ∫(M(x)/(E*I))dx + C1

- прогин:

y(x) = ∫(θ(x))dx = ∬(M(x)/(E*I))dx dx + C1*x + C2*

Постійні інтегрування C1 і C2 визначають із граничних умов (на опорах, у защемленні, при симетрії тощо). Для складних схем навантаження застосовують метод ділянок і записують M(x) окремо на кожній ділянці.

Змістовний модуль 3. Будівельна механіка

Тема 13.

Вступ. Короткі історичні відомості. Розрахункова схема, та в'язі. Кінематичний аналіз системи

1. Короткі історичні відомості.
2. Задачі будівельної механіки.
3. Основні принципи і методи будівельної механіки.
4. Поняття про розрахункову схему споруди.
5. Основні елементи споруд.
6. Статичний та кінематичний аналіз різних типів в'язів та опор
7. Незмінювані, змінювані та миттєво змінювані системи.
8. Число ступенів вільності та число "зайвих" в'язів системи.
9. Геометричний аналіз утворення систем.

1 Будівельна механіка на початку не була самостійною наукою, а зливалася з загальною механікою. У першій половині XIX ст. в зв'язку з посиленим будівництвом мостів, гребель, промислових споруд будівельна механіка стає самостійною.

Початок науки про міцність пов'язують з Галілео Галілеєм (1564-1642). Він займався конструюванням багатотоннажних кораблів.

М.В. Ломоносов (1711-1765) – один з перших хто займався питаннями міцності на теренах Російської імперії.

І.П. Кулібін (1733-1818) в 1776р. зробив проект арочного мосту через р.Неву прольотом 300м.

Д.І. Журавський (1821-1891) – розробив теорію розрахунку плоских ферм.

Х.С. Головін (1844-1904) в 1882р. запропонував розрахунок пружної арки методом теорії пружності.

Н.А. Белелюбський (1845-1922) – запроектував велику кількість металевих мостів, в тому числі знаменитий Сизранський міст через Волгу, та двоярусний міст через Дніпро. Перший в країні використав залізобетон для будівництва мостів. В 1874-1875рр. видав перший підручник з кусу будівельної механіки.

Ф.С. Ясінський (1856-1899) – автор видатних досліджень з теорії розрахунку стержнів на стійкість.

В.Г. Шухов (1853-1939) – проектував стержневі системи. Його башти відомі далеко за межами країни.

2 Будівельна механіка для студентів будівельних спеціальностей – одна з основних базових дисциплін. Підготовка висококваліфікованих інженерів-будівельників можлива лише при достатньо детальному вивченні та глибокому засвоєнні студентами сучасної будівельної механіки стержневих систем і систем, що включають в себе пластини, оболонки та об’ємні тіла. Значна частина курсу присвячена стержневим системам, тому що на прикладах розрахунку цих систем простіше та наглядніше викладаються основні методи будівельної механіки, мається також на увазі, що особливості роботи тонкостінних систем і методи їх розрахунку вивчаються у спеціальних курсах будівельних конструкцій, основ та фундаментів і ін.

Будівельну механіку стержневих систем, яку скорочено називають просто будівельною механікою, майбутні інженери-будівельники вивчають з ціллю набуття знань, необхідних для розрахунку будівель і споруд промислового, цивільного, гідротехнічного, сільськогосподарського, міського та автодорожного будівництва.

Забезпечення міцності та надійності споруд в поєднанні з їх, високою економічністю можливе лише при високій кваліфікації інженера і засвоєнні ним сучасних методів будівельної механіки, які отримали великий розвиток за останні роки в зв’язку з упровадженням в практику проектування електронних обчислювальних машин.

3 До будівельної механіки відносяться наступні дисципліни: опір матеріалів, будівельна механіка стержневих систем, будівельна механіка пластин та оболонок, теорія пружності, теорія пластичності, теорія повзучості.

В курсі будівельної механіки розглядаються методи розрахунку споруд на міцність, жорсткість та стійкість в умовах дії на них постійного та тимчасового навантаження.

В будівельній механіці широко використовуються методи теоретичної механіки і опору матеріалів, математики та фізики. Будівельна механіка є наукою експериментально-теоретичною, оскільки базується на результатах випробувань споруд (в натурі і на моделях), досвіді їх експлуатації і теоретичних дослідженнях.

Розроблені в будівельній механіці нові теоретичні методи проходять дослідну перевірку; з другого боку, часто теорія розрахунку виникає як результат експериментального вивчення реальної конструкції в процесі її експлуатації.

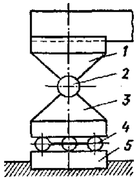
4 Вивчаючи поняття розрахункової схеми, необхідно усвідомити, що її вибір – важливий етап розрахунку споруди, тому що це впливає як на об'єм розрахунку, так і на його точність. Розрахункова схема тісно пов’язана з допущеннями та передумовами, що лежать в основі подальших розрахунків. Для однієї і тієї ж споруди нерідко можна запропонувати різні розрахункові схеми, вибір яких залежить від необхідної точності розрахунку.

При аналізі розрахункових схем споруд важливе значення мають поняття: диск, кінематична в’язь, ступінь вільності, ступінь статичної невизначеності, геометрична незмінність та ін. На даному етапі слід також усвідомити, що шарнір, який з’єднує не два, а n дисків (стержнів), еквівалентний n-1 простим шарнірам.

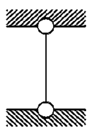
5 Основними елементами споруд є стійки та ригелі. У випадку з’єднання їх не жорстко – на розрахунковій схемі ставиться шарнір. Шарнірне з’єднання – з’єднання, в якому усунуто хоча б одну в’язь.

У курсі будівельної механіки розглядається розрахунок геометрично незмінних систем (споруд), тобто таких, переміщення окремих точок яких можливі тільки в результаті деформації систем. Нерухомість таких систем (їхня геометрична незмінюваність) щодо землі забезпечується опорними зв'язками (опорами). В опорах виникають реакції, що разом із заданими навантаженнями становлять урівноважену систему зовнішніх сил, що діють на споруду. Розглянемо різні типи опор плоских систем.

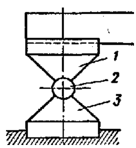
6 Перший тип опори представлений на рис. 2.1. Він складається з двох балансирів — верхнього *1* і нижнього *8,* між якими прокладений валик *2,* що грає роль циліндричного шарніра (Надалі при розрахунку плоских систем «циліндричний шарнір» будемо називати «шарніром»). Завдяки цьому валику верхній балансир може повертатися щодо нижнього. Крім того, він може (разом з нижнім балансиром, що спирається на катки *4)* переміщатися по опорній площині, яка називається опорною подушкою 5.



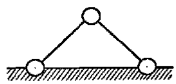
2.1



2.2



2.3



2.4

Розглянута опора має, отже, два ступені вільності . Тертям, що розвивається в опорі, прийнято при розрахунку нехтувати, а тому реакція такої опори являє собою силу, що проходить через центр шарніра і перпендикулярну до напрямку можливого переміщення катків, тобто верхньої площини опорної подушки. Ця сила визначається одним параметром — її величиною. Розглянута опора зветься циліндрично рухомою, або шарнірно рухомою. Схематично її зображують у вигляді *одного* стержня з двома ідеальними (без тертя) шарнірами на кінцях (Іноді шарнірно рухома опора зображується у вигляді колони з двома шарнірами на кінцях; тоді вона називається хитною опорою) (рис. 2.2).

Стержень, що схематично зображує шарнірно рухому опору, умовно приймається нескінченно довгим; верхня точка такого стержня може переміщуватися лише по прямій лінії (пряма є окружність нескінченно великого радіуса), перпендикулярної до його осі, що цілком відповідає тим умовам, у яких знаходиться дійсна шарнірно рухома опора. Власні деформації опори при розрахунках не враховуються, тобто опорний стержень умовно вважається, нескінченно твердим.

Другий тип опори (рис. 2.3) відрізняється від першого тим, що нижній балансир 3 закріплений і не може переміщуватися. Така опора володіє одним ступенем волі і називається циліндрично нерухомою, або шарнірно нерухомою. Реакція її являє собою силу, що проходить через центр шарніра. Ця сила може мати будь-який напрямок і визначається, отже, двома параметрами - величиною і напрямком (або, що те ж саме, величинами двох складових її сил, наприклад вертикальної і горизонтальної).

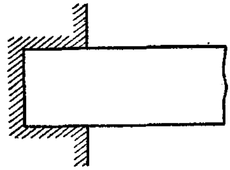


Рис. 2.5

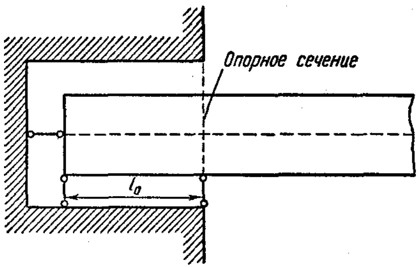


Рис. 2.6

Схематично опора другого типу зображується за допомогою *двох* стержнів з ідеальними шарнірами на кінцях; верхній шарнір є загальним для обох стержнів (рис. 2.4). Така схема визначає точку прикладання опорної реакції (центр верхнього шарніра), залишаючи її напрямок невідомим.

Напрямки стержнів на схемі шарнірно нерухомої опори можуть бути обрані цілком довільно, тому що силу (реакцію) можна розкласти на два будь-яких напрямки.

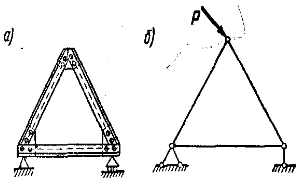
Третім типом опори є защимлення (рис. 2.5), ступінь свободи якої дорівнює нулю. Реакція такої опори визначається трьома параметрами, наприклад величиною й напрямком сили, що проходить через довільну точку, і моментом щодо цієї точки. Цю реакцію можна представити як поєднання реактивного моменту в защемленні (опорному перетині) із реакцією шарнірно нерухомої опори.

Схематично опора третього типу може бути представлена *трьома* стержнями (рис. 2.6); для того щоб защемлення можна було вважати абсолютно твердим, відстань l_0 повинна бути дуже малою або брус на ділянці довжиною l_0 треба розглядати як нескінченно твердий.

Відзначимо, що число стержнів у схематичному, зображенні будь-якої опори завжди дорівнює, числу параметрів, що визначають повну реакцію цієї опори.

7 Стержневими системами називаються системи, що складаються з окремих, звичайно прямолінійних, стержнів, з'єднаних між собою у вузлах за допомогою зварювання, заклепок, болтів або інших скріплень; одним з видів таких систем є плоскі ферми.

У більшості випадків з'єднання стержнів ферми у вузлах є жорсткими - не шарнірними.



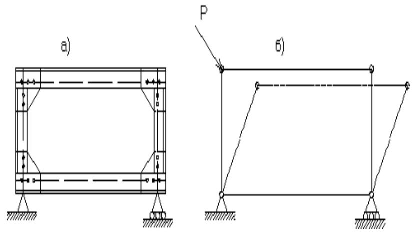


Рис. 3.1 Рис. 3.2

Точний розрахунок ферми з такими вузлами досить складний, тому що звичайно вона є багато разів статично невизначеною системою. Якщо жорсткі вузли ферми умовно замінити шарнірними, то розрахунок її значно спроститься і при відомих умовах може бути виконаний за допомогою одних лише рівнянь статики. Дослідні дані і теоретичні дослідження показують, що така заміна припустима, тому що при зосереджених навантаженнях, прикладених у вузлах, зусилля, що виникають у шарнірній фермі, мало відрізняються від зусиль у фермі з жорсткими вузлами. Тому надалі будемо користуватися умовною розрахунковою схемою ферми зі стержнями, шарнірно з'єднаними у вузлах.

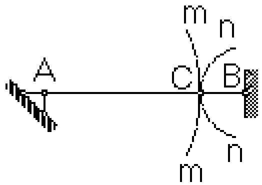
Якщо замінити жорсткі вузли системи, що складається з трьох стержнів (зображеної на рис. 3.1, а), шарнірами, то система залишиться геометрично незмінною (рис. 3.1, б), тобто такою, зміна форми якої можливо лише в зв'язку з деформаціями її елементів.

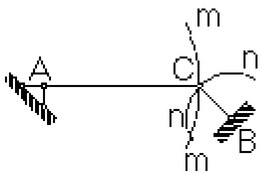
Якщо ж замінити жорсткі вузли шарнірами в системі, що складається з чотирьох стержнів (зображеної на рис. 3.2, а), то вийде система геометрично змінна (рис. 3.2, б), тобто така, форма якої може мінятися без деформації її елементів.

Найпростішою геометрично незмінною, складеною з окремих елементів, шарнірною системою (фермою) є система, з трьох стержнів, з'єднаних шарнірами в трикутник (див. рис. 3.1,6).

Установимо, як може бути утворена геометрично незмінна система, що складається більш ніж із трьох стержнів, з'єднаних шарнірами.

Попередньо розглянемо систему з двох стержнів (рис. 3.3), що лежать на одній прямій і з'єднують вузол С з двома нерухомими точками А и В.





3.3 3.4

Якщо роз'єднати стержні AC і BC у точці C, то кінець C стержня AC переміститься по колу m - m, а кінець C стержня BC - по колу n - n. Ці кола в точці C мають загальну дотичну. Отже, якщо точка C одного зі стержнів одержить досить мале переміщення по перпендикуляру до AB, то інший стержень не зможе перешкодити цьому переміщенню. Таким чином, розглянута система є геометрично змінною, тому що її форма може мінятися при незмінній довжині стержнів, тобто при відсутності деформацій її елементів.

Систему з двома стержнями, що лежать на одній прямій (див. рис. 3.3), надалі будемо називати ***миттєво змінною***, тому що вона в наступну мить після малого зсуву точки C по перпендикулярі до прямої AB перетворюється в незмінну систему.

Інша картина виходить, якщо стержні AC і BC не лежать на одній прямій (рис. 3.4); у цьому випадку кола m–m і n–n не мають загальної дотичної, а тому навіть досить мале переміщення вузла C неможливо без деформації стержнів. Таким чином, усякий новий вузол, що додається в процесі утворення геометрично незмінної системи, може бути приєднаний за допомогою двох стержнів, осі яких не повинні лежати на одній прямій.

Отже, ***системи, отримані із шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів, причому кожного двома стержнями, що не лежать на одній прямій, геометрично незмінні***, тобто геометрична структура їх незмінна. Такі системи (або ферми) називають найпростішими, на відміну від складних, які утворюються, зазвичай, в результаті видозміни найпростіших, зокрема за допомогою заміни одних стержнів іншими, або шляхом накладення однієї системи на іншу.

До найпростіших систем відносяться ферми, представлені на рис. 3.5. Кожна з них отримана послідовним приєднанням шарнірних вузлів зазначеним вище способом до основного шарнірного трикутника aЬc у порядку, позначеному на кресленні цифрами. Як основні трикутники aЬc при перевірці геометричної незмінюваності найпростіших ферм можуть бути прийняті будь-які шарнірні з'єднання трьох стержнів.

Ферма, що складається тільки з трикутників, геометрично незмінна. Любий шарнірний трикутник її може розглядатися як основний. Перевірку геометричної незмінності найпростіших ферм можна робити і зворотним шляхом, тобто послідовно відкидаючи кожний вузол і два стержні, що прикріплюють його до частини ферми, що залишається. Якщо в результаті цього вийде система у вигляді шарнірного трикутника, то розглянута ферма геометрично незмінна.

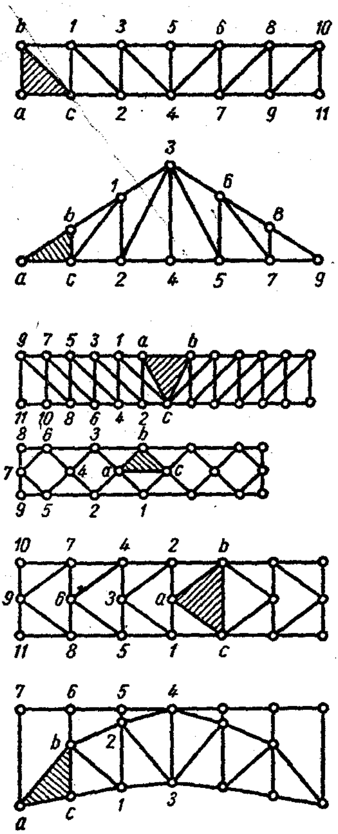


Рис. 3.5

8 Установимо залежність між числом вузлів і числом стержнів, необхідних для одержання найпростішої ферми. Така ферма, як уже відомо, утвориться з основного шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання нових вузлів, при цьому кожного за допомогою двох стержнів, що не лежать на одній прямій.

Позначимо: S - число стержнів такої ферми, K - число її "вузлів. Основний трикутник має три вузли і три стержні; кожний з інших вузлів, що приєднуються, у кількості (K-3) прикріплюється двома стержнями. Тому повне число стержнів у найпростішої геометрично незмінної ферми

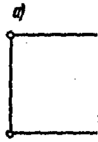
$$S=3+2(K-3)$$

або

$$S=2K-3 \qquad (3.1)$$

Якщо число стержнів $S<2K-3$, то це показує, що ферма у своєму складі не має мінімальної кількості стержнів, необхідного для утворення геометрично незмінної системи. Отже, у цьому випадку система геометрично змінна. Прикладом такої системи може служити чотирикутник (рис. 3.6,а), у якому S=4, K=4; отже,

$$S=4<2K-3=2\times4-3=5.$$



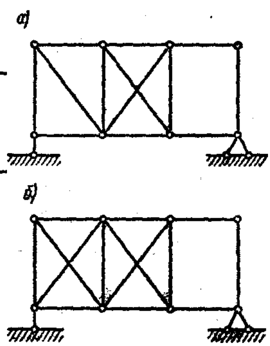


Рис. 3.7

Перетворення його в незмінну систему може бути досягнуто включенням п'ятого діагонального стержня (рис. 3.6,*б*). Якщо ми далі введемо другу діагональ - шостий стержень (рис. 3.6 в), то з точки зору геометричної незмінюваності цей стержень буде вже зайвим. З цього прикладу видно, що можуть зустрічатися геометрично незмінні системи, у яких

$$S>2K-3.$$

9 Зауважими, що співвідношення $S \geq 2K-3$ є необхідною, але ще недостатньою умовою незмінюваності ферми. Так, ферма, зображена на рис. 3.7,а, геометрично змінна, хоча має число стержнів S, рівне $2K-3$; на рис. 3.7,6 зображена змінювана ферма, для якої $S>2K-3$. Змінюваність цих ферм пояснюється тим, що праві їхні частини являють собою шарнірні чотирикутники.

Крім того, стержневі системи, що задовольняють умові $S=2K-3$, можуть бути миттєво змінними.

Перейдемо тепер до питання про приєднання геометрично незмінної системи до землі за допомогою опор.

Найчастіше споруда (диск) спирається на дві шарнірні опори, одна з яких нерухома, інша рухома (рис. 3.8, а). Такий зв'язок споруди з землею забезпечує йому геометричну незмінюваність. Не обов'язково, щоб два з трьох опорних стержнів поєднувалися одним загальним шарніром; стержні

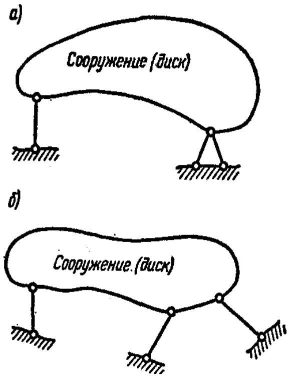


Рис. 3.8

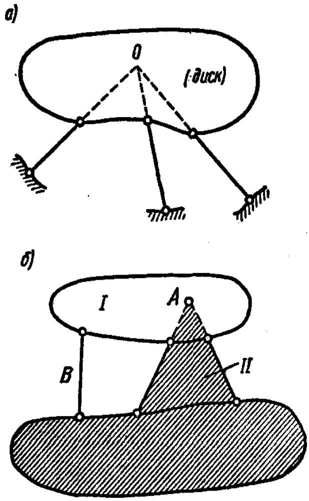


Рис. 3.9

геометрично незмінної системи можуть і не мати загальних шарнірів (рис. 3.8,6).

Якщо всі опорні стержні розташовані так, що їхні напрямки перетинаються в одній точці O (рис. 3.9, а), то ця точка є миттєвим центром, навколо якого система може робити нескінченно мале обертальне переміщення. Після такого переміщення всі опорні стержні вже не будуть перетинатися в одній точці і тому подальші переміщення будуть неможливі без деформації стержнів.

Система, прикріплена до землі подібним чином, має миттєву змінність; таке розташування стержнів неприпустимо. Таким чином, прикріплення системи до землі за допомогою трьох стержнів можливо лише в тому випадку, коли осі цих стержнів не перетинаються в одній точці і не паралельні один одному.

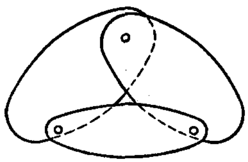
Поширюючи це положення на випадок взаємного з'єднання двох будь-яких геометрично незмінних систем (дисків), можна сформулювати наступне правило: ***два диски утворять геометрично незмінну систему, якщо вони зв'язані між собою за допомогою трьох стержнів, осі яких не перетинаються в одній точці і не паралельні один одному***.

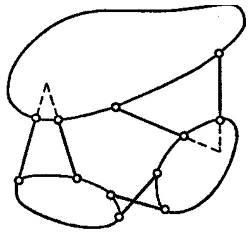
Якщо в точці перетинання напрямків будь-яких двох з цих трьох стержнів поставити шарнір і з'єднати його з диском, то система не стане геометрично змінною, але це дасть можливість розглядати її як систему, що складається з двох дисків I і II, зв'язаних один з одним одним загальним шарніром A і стержнем B (рис. 3.9,б). Отже, *до диска можна геометрично незмінно приєднати інший диск за допомогою загального для обох дисків шарніра і стержня, напрямок якого не повинно проходити через цей шарнір*.

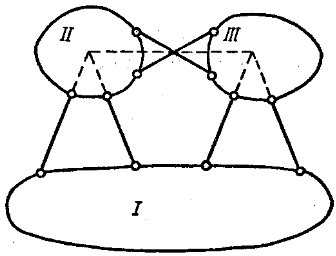
Зчленування трьох дисків в одну загальну геометрично незмінну систему можна здійснити, з'єднавши їх у трикутник за допомогою трьох шарнірів, не розташованих на одній прямій (рис. 3.10), або за допомогою шести стержнів, як це показано на рис. 3.11, тому що кожний шарнір може бути замінений двома стержнями, що перетинаються в його центрі.

Система, зображена на рис. 3.12, миттєво змінювана; тому що точки перетину осей стержнів, що зв'язують кожну пару дисків, лежать на одній прямій.

Отже, *три диски, з'єднані за допомогою шести стержнів так, що між кожною парою дисків установлено по два стержня, точки перетину яких не лежать на одній прямій, являють собою геометрично незмінну систему*.







Тема 14. Види навантажень, та методи визначення зусиль.

1. Методи визначення зусиль від нерухомого навантаження.
2. Види навантажень.
3. Методи січень та заміни в’язів.

1 У курсі будівельної механіки використовуються ці способи визначення внутрішніх зусиль, що виникають у поперечних перерізах однопролітних статично визначних балок, і побудови епюр цих зусиль від дії на балку нерухомого навантаження, що і в опорі матеріалів.

При визначенні значень внутрішніх зусиль у балках будемо користуватися сформульованими нижче правилами.

Поперечна сила Q *позитивна,* коли на лівому торці правої частини балки вона спрямована знизу вгору, а на правому торці лівої частини - зверху вниз.

Згинальний момент М позитивний, коли на лівому торці правої частини балки він спрямований по годинній стрілці, а на правому торці лівої частини — проти годинникової стрілки.

При навантаженнях, спрямованих не по нормалі до осі балки (а під іншим кутом), у поперечних перерізах її виникають, крім поперечних сил і згинальних моментів, також і поздовжні сили *N*.

Поздовжня сила N позитивна, коли вона викликає розтягання, і негативна, коли вона викликає стиск.

На рис. 4.1 показані позитивні напрямки поперечної сили, поздовжньої сили і згинаючого моменту в поперечному перерізі балки. З малюнка видно, що при позитивному згинальному моменті верхні волокна балки зазнають стиску (скорочення), а нижні — розтягання (подовження); позитивна поперечна сила обертає кожну частину балки щодо іншого її кінця за годинниковою стрілкою.

При побудові епюр поперечних і поздовжніх сил позитивні значення ординат відкладають угору від осі епюри, а негативні —униз; корисно вказувати на окремих ділянках епюр знаки внутрішніх зусиль. При побудові ж епюри згинальних моментів позитивні значення їх відкладають униз від осі епюри, негативні — вгору; у результаті цього епюри згинальних моментів виявляються розташованими з боку розтягнутих волокон балки (у курсах опору матеріалів епюри згинальних моментів будують звичайно з боку стиснутих волокон.).

Знак поперечної сили можна установити за допомогою епюри згинальних моментів, використовуючи наступне правило: *поперечна сила в даному перерізі позитивна, якщо для суміщення осі елемента з дотичною до епюри згинальних моментів доводиться вісь елемента обертати за*

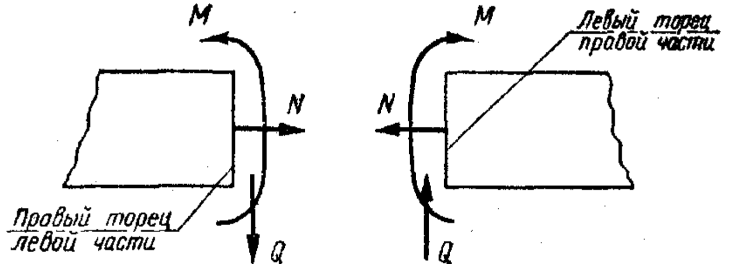
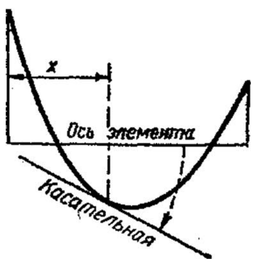


Рис. 4.1



годинниковою стрілкою. Обертання осі повинне відбуватися завжди так, щоб кут повороту не перевершував 90°.

2 Існують наступні види навантажень:

1. Зосереджена сила;
2. Рівномірно розподілене навантаження;
3. Нерівномірно розподілене навантаження
3. Зосереджений момент;
4. Розподілений момент

3. Побудова епюр внутрішніх зусиль виконується за допомогою методу січень та методу заміни в'язів. Згідно з цими методами:

Поперечна сила рівна (за величиною та знаком) сумі проекцій усіх зовнішніх сил, прикладених до лівої частини балки, на нормаль до її осі, проведену в розглянутому поперечному перерізі, або сумі проекцій (на ту ж нормаль), узятої зі зворотним знаком, усіх зовнішніх сил, прикладених до правої частини балки;

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{лев} \boldsymbol{Y} = -\sum_{прав} \boldsymbol{Y}\,; \tag{4.1}$$

при цьому проекції зовнішніх сил на нормаль до осі балки позитивні, коли вони спрямовані знизу нагору.

Згинальний момент М дорівнює (по величині і знаку) сумі моментів відносно осі Z (що проходить через центр ваги розглянутого поперечного переріза балки перпендикулярно до площини дії зовнішніх сил) усіх зовнішніх сил, прикладених до лівої частини балки, або сумі моментів, узятої зі зворотним знаком, усіх зовнішніх сил, прикладених до правої частини балки:

$$\boldsymbol{M} = \sum_{лев} \boldsymbol{M}_Z = \sum_{прав} \boldsymbol{M}_Z\,, \tag{4.2}$$

при цьому моменти зовнішніх сил позитивні, коли вони діють по годинниковій стрілці.

Поздовжня сила N дорівнює (по величині і знаку) сумі проекцій усіх зовнішніх сил, прикладених до лівої частини балки, на її вісь або сумі проекцій (на ту ж вісь), узятої зі зворотним знаком, усіх зовнішніх **сил,** прикладених до правої частини балки:

$$\boldsymbol{N} = \sum_{лев} \boldsymbol{X} = -\sum_{прав} \boldsymbol{X}\,, \tag{4.3}$$

при цьому проекції зовнішніх сил на вісь балки позитивні, коли вони діють справа наліво.

Тема 15. Визначення реакцій, та побудова епюр внутрішніх зусиль в багатопролітних статично визначуваних балках

1. Визначення опорних реакцій.

2. Визначення внутрішніх зусиль.

3. Побудова і контроль епюр.

1. Першим етапом розрахунку конструкції є визначення реакцій опор. Статично визначені конструкції приєднані до основи за допомогою 3-х стержнів. Можна записати систему 3-х рівнянь статики з яких і визначимо шукані реакції.

$$\sum X = 0$$
$$\sum Y = 0 \qquad (5.1)$$
$$\sum M_A = 0$$

2., 3. Між епюрами M і Q і навантаженням, що діє на балку, існують визначені залежності. Ці залежності дозволяють перевіряти правильність епюр і полегшують їхню побудову. Вони застосовні не тільки для балок, але і для рамних систем, а тому мають велике значення в будівельній механіці.

Основна залежність має вигляд:

$$Q=dM/dx \qquad (5.2)$$

тобто поперечна сила дорівнює першій похідній від згинального моменту по абсцисі розрізу балки (теорема Журавського).

Аналогічно між поперечною силою й інтенсивністю навантаження існує також диференціальна залежність:

$$Q=dQ/dx \qquad (5.3)$$

З огляду на ці залежності, можна сформулювати ряд положень:

1) ділянкам з висхідними (зліва направо) ординатами епюри М (тобто зі спадаючими значеннями М) відповідають ділянки з негативними значеннями Q, а ділянкам зі спадними ординатами епюри М — ділянки з позитивними значеннями Q;

2) чим крутіше дотична до епюрі М, тим більше абсолютне значення Q. Чисельне значення поперечної сили дорівнює «тангенсу» кута між цією дотичною і віссю балки;

3) у перерізах, де поперечна сила дорівнює нулю, згинальний момент максимальний або мінімальний;

4) між зосередженими силами (якщо між ними відсутнє розподілене навантаження) епюра М обмежена прямою (у загальному випадку похилою), а епюра Q - прямою горизонтальною лінією;

5) на ділянках балки з рівномірно розподіленим навантаженням епюра М обмежена параболою другого ступеня, а епюра Q - похилою прямою;

6) при розподіленому навантаженні епюра М звернена опуклістю в ту сторону, у яку спрямована це навантаження;

7) точкам прикладання зосереджених сил, перпендикулярних до осі балки, відповідають переломи в епюрі М і скачки в епюрі Q. Коли сила спрямована вниз, те і стрибок в епюрі Q при переміщенні зліва направо повинний бути вниз; коли сила спрямована нагору, то і стрибок повинен бути угору; величина стрибка дорівнює величині сили;

8) зміна величини згинаючого моменту на якій-небудь ділянці балки дорівнює площі епюри поперечних сил на цій ділянці (за умови, що на даній ділянці до балки не прикладені зовнішні моменти);

9) зміна величини поперечної сили на якій-небудь ділянці балки дорівнює площі епюри розподіленого навантаження q на цій ділянці.

Тема 17. Прості плоскі ферми

1. Поняття про ферму та особливості її роботи.
2. Класифікація ферм.
3. Розрахункові схеми ферм.
4. Визначення зусиль в стержнях ферм різними способами.

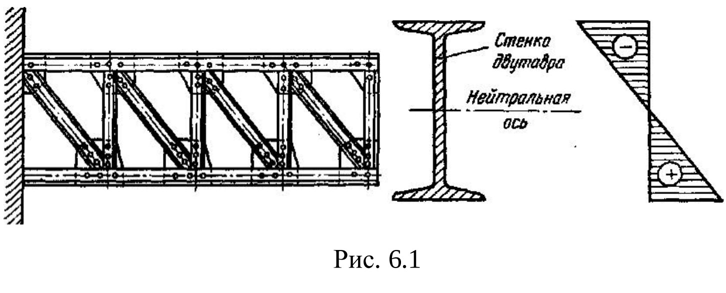


Рис. 6.1

1. Фермою: називається стержнева система, що залишається геометрично незмінною після умовної заміни її жорстких вузлів шарнірними. Ферми мають призначення, по суті, таке ж, як і балки суцільного перетину, але застосовуються для перекриття значних прольотів, коли проектування суцільних балок (наприклад, двотаврових) внаслідок неповного використовування матеріалу стінки, напруження в якій менше ніж в полицях,

і можливості її випучування (у зв'язку із значною висотоюстіни) стає економічно невигідним. В таких випадках суцільну балку замінюють стержньовою системою — фермою, елементи якої (стержні) при дії зосереджених навантажень, прикладених у вузлах, працюють головним чином на центральне стиснення або розтягування. Це дає можливість значно краще використовувати матеріал ферми, оскільки епюри нормальних напружень в поперечних перетинах кожного з її стержнів практично мають вигляд прямокутників. Тому ферма легше за балку з суцільною стіною, що має однакові з нею проліт і висоту.

Окрім плоских ферм, в яких осі всіх стержнів розташовані в одній площині, застосовуються просторові ферми, осі елементів яких не лежать в одній площині. Розрахунок просторової ферми у багатьох випадках вдається звести до розрахунку декількох плоских ферм.

Відстань між осями опор ферми називається прольотом; стержні, розташовані по зовнішньому контуру ферми, називаються поясними і утворюють пояси; стержні, що сполучають пояси, утворюють градку ферми і називаються: вертикальні — стійками, похилі — розкосами. Відстань між сусідніми вузлами будь-якого пояса ферми (що звичайно вимірюється по горизонталі) називається панеллю.

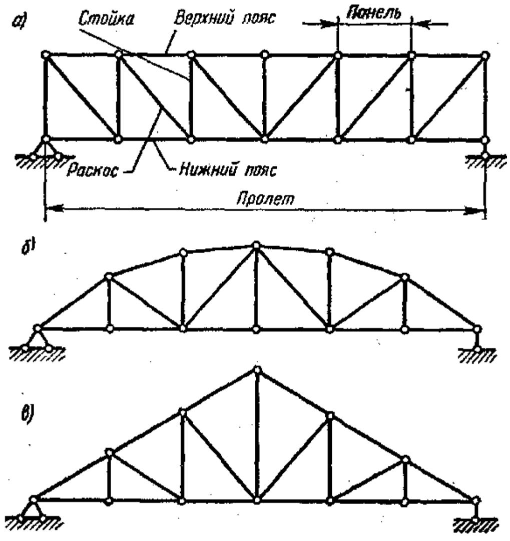


Рис. 6.2

2. Класифікацію ферм проведемо за наступними п'ятьма ознаками: 1) за характером окреслення зовнішнього контура; 2) за типом решітки; 3) за типом опирания ферми; 4) за призначенням ферми; 5) за рівнем їзди.

За характером контуру розрізняють ферми з паралельними поясами (рис. 7.2, а) і з ламаним або так званим полігональним розміщенням поясів.

За типом решітки ферми діляться на: ферми з трикутними решітками, ферми з розкісною решіткою, ферми з напіврозкісною решіткою , ферми з ромбічними решітками, дворешітчаті ферми, багаторешітчаті ферми.

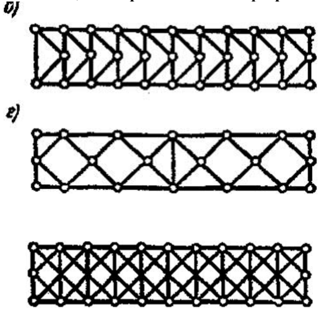


Рис.6.3

За типом опирання ферми можуть бути: закріпленими в обох кінців — балочними або арочними, консольними — закріпленими з одного кінця, балочно-консольними (рис.6.5).

Залежно від призначення розрізняють ферми крокв'яні, крани, баштові, мостові і ін. (рис. 6.6)

Мостові ферми залежно від рівня їзди діляться на ферми з їздою низом ферми з їздою зверху і ферми з їздою посередині (рис. 6.6)

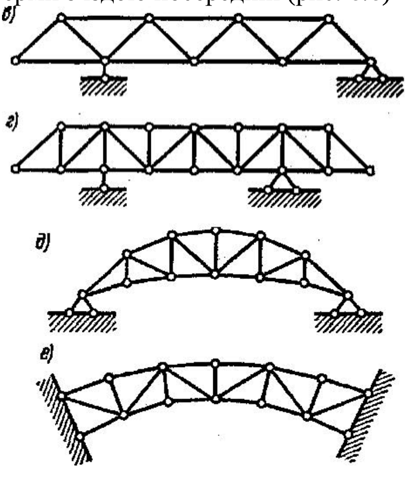


Рис.6.5

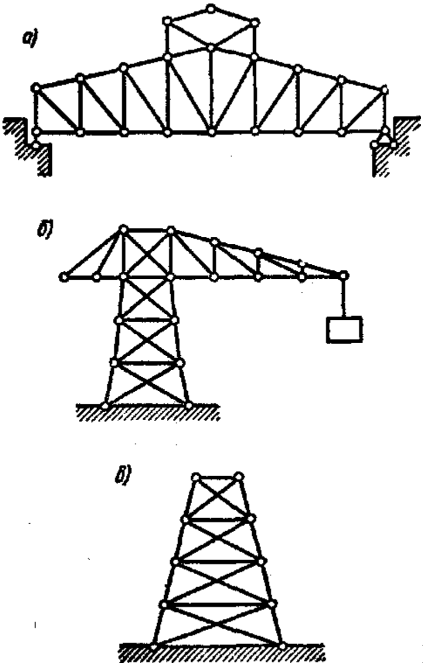


Рис.6.6

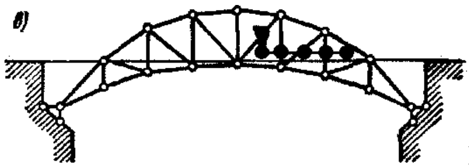


Рис. 7.7

3. Розрахункова схема ферми є шарнірно-стержневою. Незважаючи на те, що в реальній фермі усі елементи з’єднані за допомогою жорстких з’єднань (зварювання, болтові з’єднання, з’єднання за допомогою клепок), зусилля в елементах реальної ферми, як показали досліди, майже не відрізняються від зусиль, знайдених в шарнірно-стержневій системі. Це дозволяє значно скоротити час при розрахунку , отримавши достатньо точний результат.

4. Ферми, утворені з шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів (причому кожного за допомогою двох стержнів, що не лежать на одній прямій), називаються найпростішими. Такі ферми геометрично незмінні і статично визначені.

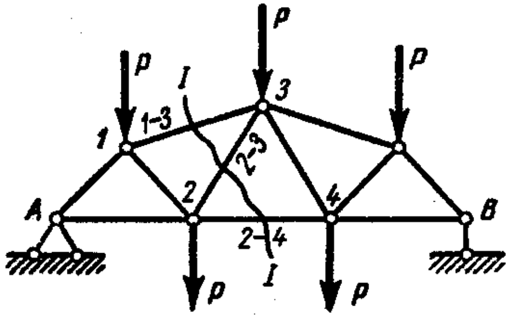


Рис 6.8

Для визначення внутрішніх зусиль слід виділяти перетинами вузли або окремі частини ферми і розглядати умови їх рівноваги під дією зовнішніх навантажень і зусиль в розрізаних стержнях. Всього можна скласти 2К-3 таких умов (тобто незалежних один від одного рівнянь).

Виділення вузлів або частин ферми необхідно виконувати так, щоб зусилля в елементах ферми визначалися найбільш просто, по можливості без сумісного розв'язання системи рівнянь з багатьма невідомими. Це дозволяє не тільки значно спростити розрахунок, але і отримати більш точні результати.

Нижче викладаються способи розрахунку, що дозволяють визначити внутрішнє зусилля в кожному з елементів ферми, як правило, за допомогою одного рівняння з одним невідомим.

Спосіб моментной точки застосовується головним чином в тих випадках, коли вдається розітнути ферму на дві частини так, щоб при цьому перерізаними виявилося три її стержні, напрями осей яких не перетинаються в одній точці (див., наприклад, перетин 1—1 на рис. 7.8, зліва). Напрями осей трьох таких перерізаних стержнів перетинаються попарно в трьох точках, що не лежать на одній прямій (рис. 7.8, справа).

Складаючи послідовно рівняння моментів всіх сил (зовнішніх і внутрішніх), діючих на відсічену частину ферми, щодо цих трьох крапок, будемо кожного разу одержувати рівняння з одним невідомим, що є зусиллям в розітнутому стержні, що не проходить через дану точку перетину стержнів.

Таким чином, для визначення зусилля в якому-небудь стержні необхідно розрізати ферму так, щоб в розріз, окрім даного стержня, потрапили ще два інших (осі яких не сходяться з ним в загальній точці), після чого з рівняння моментів щодо точки перетину осей цих двох стержнів можна легко визначити зусилля в даному стержні.

1. **Способом моментної точки** зручно користуватися при розрахунку ферм, коли можна провести розріз, що перетинає, окрім даного стержня (зусилля в якому визначається), будь-яке число стержнів, що сходяться в одній загальній точці, яка не лежить на напрямі осі даного стержня.

2. Спосіб моментної точки зручний також і у випадках, коли розріз перетинає більше трьох стержнів, що не сходяться в одній точці, якщо зусилля у всіх стержнях, окрім трьох, вже відомі.

3. Спосіб моментної точки застосовний і для розрахунку таких ферм, в яких можливо провести розрізи, що перетинають будь-яке число стержнів зверх трьох, якщо при цьому кожний додатковий стержень перетинається двічі.

Спосіб проекцій. Спосіб проекцій застосовується головним чином в наступних двох варіантах:

1) розглядається рівновага частини ферми (як і при способі моментної точки), коли два з трьох розітнутих стержнів паралелі один одному;

2) розглядається рівновага вузлів, що виділяються з ферми (спосіб вирізування вузлів)

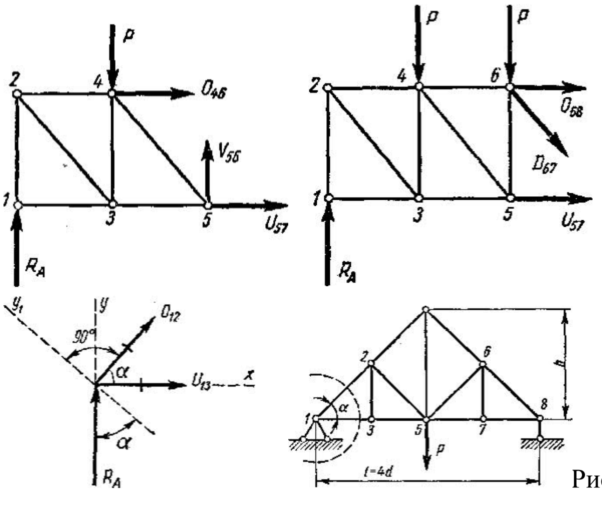


Рис. 6.9

Тема 18. Розрахунок трьохшарнірних систем

1. Види трьохшарнірних арок.

2. Визначення опорних реакцій трьохшарнірних арок.

3. Визначення внутрішніх зусиль.

4. Раціональна форма осі трьохшарнірної арки.

Трьохшарнірна система складається з двох дисків (/ і //), сполучених за допомогою одного шарніра один з одним (шарнір 3 на рис. 8.1) і двома шарнірами із землею (шарніри *A* і *B).* Земля може розглядатися як третій диск і, отже, трьохшарнірна система є з'єднанням трьох дисків за допомогою трьох шарнірів, не розташованих на одній прямій. Таке з'єднання, як відомо, явилося геометрично незмінним .

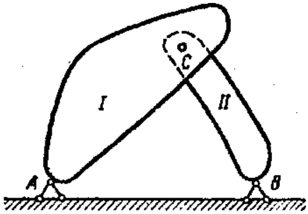


Рис 7.1

Якщо диски / і // (рис. 7.2) є стержнями з криволінійною віссю (а), то трьохшарнірна система називається трьохшарнірною аркою; якщо дисками / і // є прямолінійні (б) або ламані (в) стержні, то система називається трьохшарнірною рамою; у разі, коли диски / і // виявилися наскрізними конструкціями (фермами), система називається трьохшарнірною арочною фермою(г).

Відстань *І* між центрами опорних шарнірів трьохшарнірної арки називається прольотом, а відстань у від середнього шарніра до прямої, що сполучає опорні шарніри, — стрілою підйому арки

Трьохшарнірна система може бути симетричною і несиметричною щодо вертикальної осі. В симетричній системі середній шарнір С розташований на осі симетрії, а опорні шарніри А і В — на однаковому

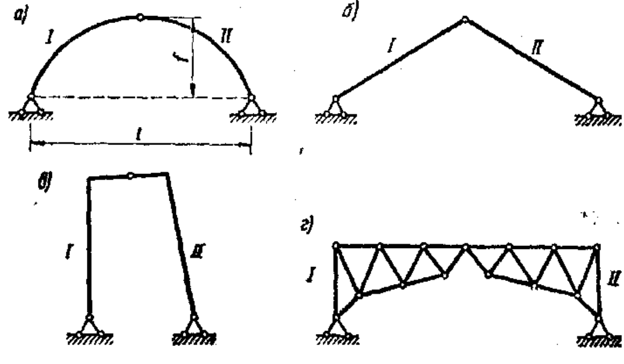


Рис 7.2

рівні. Опори *А* і *В* несиметричній системи можуть бути розташовані на різних рівнях (рис. 7.3).

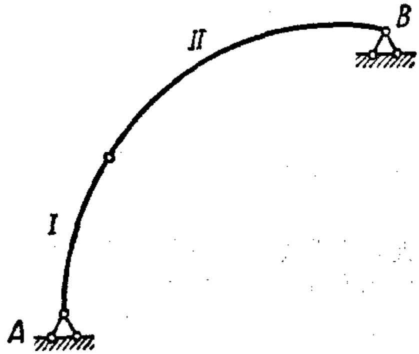


Рис 7.3

2 Реакції R_a і R_b опор трьохшарнірної системи характеризуються кожна двома параметрами — величиною і напрямом (або, наприклад, величинами горизонтальної і вертикальної складових *H* і *V);* отже, опорні реакції трьохшарнірної системи характеризуються чотирма параметрами, наприклад, величинами сил H_A, H_B, V_A, V_B . Вони можуть бути визначені з трьох рівнянь рівноваги всіх сил, діючих на систему (включаючи і опорні реакції), і четвертого рівняння,

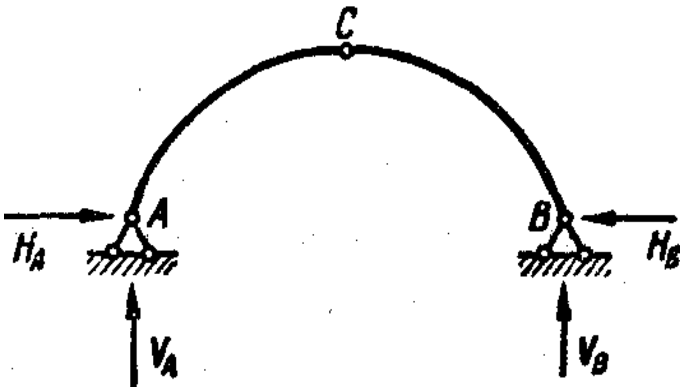


Рис 7.4

що виражає рівність нулю моменту всіх сил, діючих на ліву або праву частину системи, щодо шарніра *C*. Отже, трьохшарнірна система явилася *статично визначною*.

При дії на трьохшарнірну систему вертикального навантаження горизонтальні складові H_A і H_B реакцій опор *A* і *B*, звані розпором, не рівні нулю; у зв'язку з цим трьохшарнірні системи відносять до розпірних.

З Внутрішніми зусиллями, що виникають в поперечних перетинах арки, є згинаючі моменти *M,* поперечні сили *Q* і подовжні сили N. Їх визначають по навантаженнях, діючих на арку ліворуч або праворуч даного перетину.

При визначенні внутрішніх зусиль і побудові епюр цих зусиль використовують правила знаків (за винятком знака поздовжньої сили, яка в арках вважається позитивною при стисненні) наведені для балок.

Проте при розрахунку арок у виразах доцільно позначити вісь, співпадаючу з дотичної до осі арки в даному перетині, *u* (замість *x* в балок), перпендикулярну до неї *v* (замість *y),* а проекції сил на ці осі відповідно *U* і *V*.

З урахуванням висловленого виразу для арок рівняння рівноваги приймають вигляд:

$$\boldsymbol{Q = \sum_{лів} V = -\sum_{прав} V;}$$

$$\boldsymbol{M = \sum_{лів} M = -\sum_{прав} M;}$$

$$\boldsymbol{N = \sum_{лів} N = -\sum_{прав} N.}$$

В цих виразах, що входять під знаки сум моменти зовнішніх сил позитивні при обертанні за годинниковою стрілкою, проекції *V* — коли направлені знизу вгору, а проекції *U* — коли направлені зліва направо.

Визначимо за допомогою виразів внутрішні зусилля в поперечному перетині К арки, зображеної на рис. 7.5

де *x* і *y* — координати точки k осі арки; φ — кут між дотичної до осі арки в точці k і горизонталлю; Py та *Px* — відповідно вертикальна і горизонтальна проекції сили *P; Xp* і *Yp* — координати точки додатку сили P.

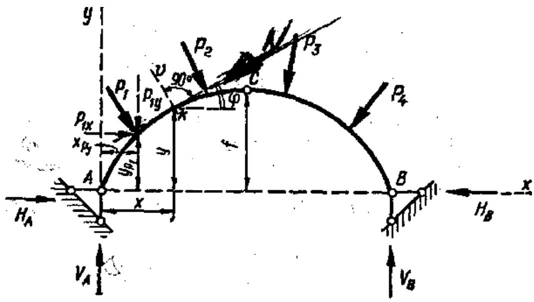


Рис 7.5

В отримані вирази Q, *M* і *N* під знаки сум входять проекції Py і Px всіх сил P, прикладених до арки ліво перетини А. Для перетину К, показаного на рис. 7.5, під знак кожної суми входить лише одна проекція Py, або Px. Аналогічним шляхом зусилля Q, *M* і *N* можуть бути виражені і як проекція правих сил

У разі дії на арку тільки вертикального навантаження (рис.7.6,а) горизонтальні проекції Px; рівні нулю, проекції Py рівні P, а розпір $H_A = H_B = H$; тому вирази приймають спрощений вигляд.

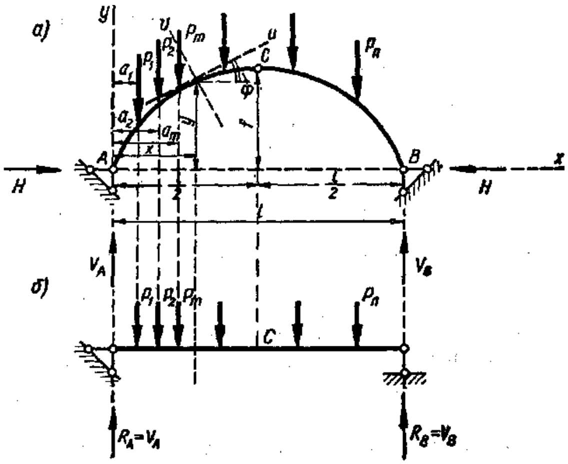


Рис.7.6

4 Раціональним контуром осі арки називається такий, при якому крива тиску від заданого нерухомого навантаження співпадає з віссю арки; отже, при цьому навантаженні у всіх перетинах арки згинаючий момент рівний нулю. Якщо ординати y і η осі арки і кривої тиску визначаються відповідно рівняннями

$$y=f(x) \quad \text{та} \quad \eta=\varphi(x),$$

то умовою того, що вісь арки має раціональний контур, є тотожність: $y=\eta$

Випадок дії на арку тільки вертикального навантаження.

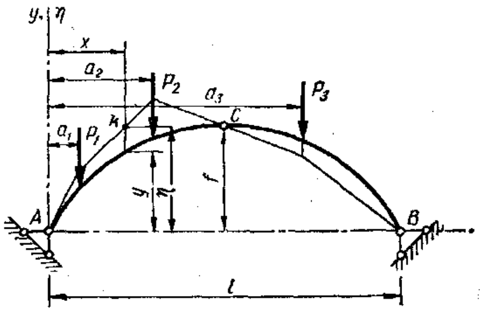


Рис 7.7

Чисельник останньої формули рівний згинаючому моменту в простій балці в перетині з абсцисою *x*, тобто $\boldsymbol{M_x^0}$, а тому

$$\boldsymbol{\eta = M_x^0 / H}$$

Використовуючи співвідношення $y=\eta$, одержуємо наступне рівняння раціональної осі арки:

$$\boldsymbol{y = M_x^0 / H}$$

Отже, *при вертикальному навантаженні вісь арки буде раціональною, якщо її контур міняється за законом зміни балочного моменту*.

Тема 19. Розрахунок плоских рам

1. Види трьохшарнірних рам.

2. Визначення опорних реакцій трьохшарнірних рам.

3. Визначення внутрішніх зусиль.

1 Трьохшарнірна система складається з двох дисків (/ і //), сполучених за допомогою одного шарніра один з одним (шарнір С на рис. 8.1) і двома шарнірами із землею (шарніри *А* і *В*). Земля може розглядатися як третій диск і, отже, трьохшарнірна система є з'єднанням трьох дисків за допомогою трьох шарнірів, не розташованих на одній прямій. Таке з'єднання, як відомо, виявилося геометрично незмінним .

Якщо диски / і // прямолінійні (б) або ламані (в) стержні, то система називається трьохшарнірною рамою;

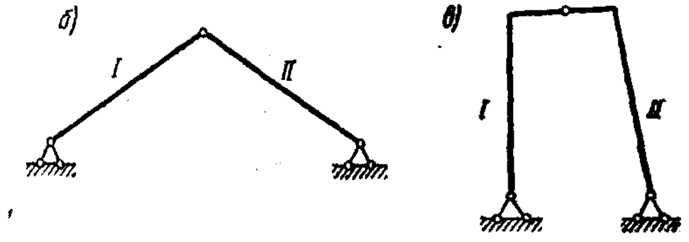


Рис. 8.1

Відстань l між центрами опорних шарнірів трьохшарнірної арки називається прольотом, а відстань у від середнього шарніра до прямої, що сполучає опорні шарніри — стрілою підйому арки.

Трьохшарнірна система може бути симетричною і несиметричною щодо вертикальної осі. В симетричній системі середній шарнір С розташований на осі симетрії, а опорні шарніри А і В — на однаковому рівні. Опори *А* і *В* несиметричній системи можуть бути розташовані на різних рівнях

2 Реакції R_a і R_b опор трьохшарнірної системи характеризуються кожна двома параметрами — величиною і напрямом (або, наприклад, величинами горизонтальної і вертикальної складових *Н* і *V);* отже, опорні реакції трьохшарнірної системи характеризуються чотирма параметрами, наприклад, величинами сил H_A, H_B, V_A, V_B . Вони можуть бути визначені з трьох рівнянь рівноваги всіх сил, діючих на систему (включаючи і опорні реакції), і четвертого рівняння що виражає рівність нулю моменту всіх сил, діючих на ліву або праву частину системи, щодо шарніра *С.* Отже, трьохшарнірна система явилася *статично визначною.*

При дії на трьохшарнірну систему вертикального навантаження горизонтальні складові H_A і H_B реакцій опор *А* і *В,* звані розпором, не рівні нулю; у зв'язку з цим трьохшарнірні системи відносять до розпірних.

3 Внутрішніми зусиллями, що виникають в поперечних перетинах арки, є згинаючі моменти *М,* поперечні сили *Q* і подовжні силы N. Їх визначають по навантаженнях, діючих на арку ліворуч або праворуч даного перетину.

При визначенні внутрішніх зусиль і побудові епюр цих зусиль використовують правила знаків (за винятком знака подовжньої сили, яка в арках вважається позитивною при стисненні) приведені для балок.

Проте при розрахунку арок у виразах доцільно позначити вісь, співпадаючу з дотичної до осі арки в даному перетині, *u* (замість *x* в балок), перпендикулярну до неї *v* (замість *у),* а проекції сил на ці осі відповідно *U* і *V.*

З урахуванням висловленого виразу для арок рівняння рівноваги набирають вигляд:

$$Q = \sum_{лів} V = -\sum_{прав} V\,;$$

$$M = \sum_{лів} M = -\sum_{прав} M\,;$$

$$N = \sum_{лів} N = -\sum_{прав} N\,.$$

В цих виразах, що входять під знаки сум моменти зовнішніх сил позитивні при обертанні за годинниковою стрілкою, проекції *V* — коли направлені знизу вгору, а проекції *U* — коли направлені зліва направо.

Визначимо за допомогою виразів внутрішні зусилля в поперечному перетині К арки, зображеної на рис. 8.5

де *x* і *y* — координати точки k осі арки; φ — кут між дотичної до осі арки в точці k і горизонталлю; Py та *Px* — відповідно вертикальна і горизонтальна проекції сили *P; Xp* і *Yp* — координати точки додатку сили P

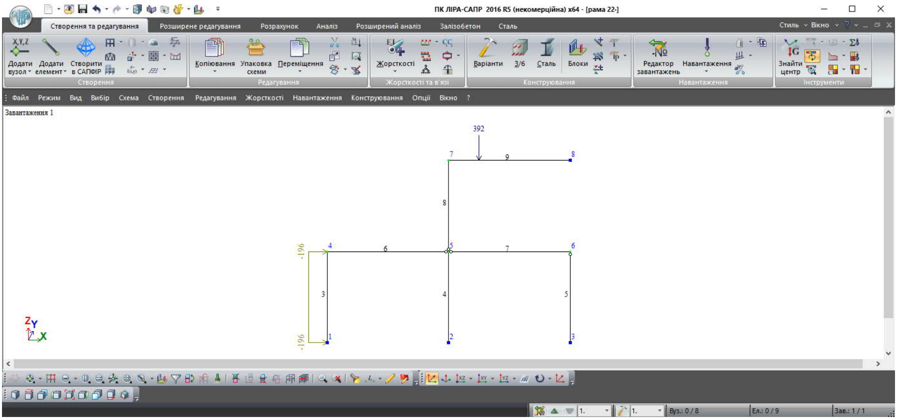
В отримані вирази Q, *M* і *N* під знаки сум входять проекції Py і Px всіх сил P, прикладених до арки ліворуч перетину А. Для перетину K, показаного на рис. 13.3, під знак кожної суми входить лише одна проекція Py, або PX. Аналогічним шляхом зусилля Q, *M* і *N* можуть бути виражені і як проекція правих сил

У разі дії на арку тільки вертикального навантаження (рис. 14.3,а) горизонтальні проекції Px; рівні нулю, проекції Py рівні P, а розпір $H_A = H_B = H$;

Тема 20. Розрахунок плоских рам в ПК «ЛІРА»

1. *Графічний інтерфейс ПК «ЛІРА».*
2. *Способи створення та редагування розрахункової схеми в ПК «ЛІРА».*
3. *Розрахунок задачі.*
4. *Аналіз результатів розрахунку.*
5. *Створення звіту за результатами розрахунку*

Програмний комплекс ЛІРА-САПР (ПК ЛІРА-САПР) – це багатофункціональний програмний комплекс для розрахунків, моделювання роботи, дослідження та проектування будівельних конструкцій різного призначення. Застосовується в розрахунках об'єктів будівництва, машинобудування, мостобудування та у багатьох інших сферах, де актуальні методи будівельної механіки.



У ПК ЛІРА-САПР включено багато типів скінченних елементів: стрижні, чотирикутні та трикутні оболонки, балкистінки, просторові елементи та ін. Розрахунки виконуються на статичні, динамічні та температурні навантаження. Статичні навантаження моделюють силові впливи від зосереджених або розподілених сил або моментів, температурного нагрівання та переміщень. Динамічні навантаження моделюють впливи від землетрусу, пульсації вітру, вібрацій або удару від технологічного обладнання тощо. ПК ЛІРА-САПР автоматизує ряд процесів проектування: визначення розрахункових комбінацій навантажень і зусиль, підбір і перевірка перерізів сталевих і залізобетонних конструкцій, формування ескізів робочих креслень конструктивних елементів. ПК ЛІРА-САПР дозволяє досліджувати загальну стійкість моделі, перевіряти міцність перерізів елементів, надає можливість здійснювати розрахунки об'єктів з урахуванням фізичної та геометричної нелінійності, моделювати процес зведення споруд з урахуванням монтажу та демонтажу елементів.

Інтерфейс ПК ЛІРА-САПР

Інтерфейс ПК ЛІРА-САПР стандартний для Windows-програм. У самому верху вікна розташовується головне меню у вигляді текстових панелей інструментів. Під ними – панелі інструментів з ярликами для швидкого використання необхідної функції.

Надамо пояснення до найбільш часто використовуваних з них.

Меню «Файл»

 (Файл → Новий) – створення нового завдання, для якого потрібно ввести ім'я та ознаку схеми.

 (Файл → Зберегти) – збереження поточного завдання під вихідним іменем, а також проміжне збереження даних.

 (Файл → Відкрити) – завантаження створеного раніше

файлу з вихідними даними.

Меню «Режим»

ПК ЛІРА-САПР може перебувати в режимі формування розрахункової схеми або режимі візуалізації результатів розрахунків.

 (Режим → Виконати розрахунки) – виконати розрахунки завдання.

 (Режим → Результати розрахунку) – перемкнути на режим візуалізації результатів розрахунків.

 (Режим → Розрахункова схема) – перемкнути на режим формування розрахункової схеми конструкції (цей режим увімкнено за замовчуванням).

Меню «Вид»

У ПК ЛІРА-САПР на рівні завдання, обробки та аналізу прийнято три системи координат: глобальна, місцева і локальна. Глобальна система координат XYZ (права декартова) служить для опису координат вузлів усієї схеми, для визначення напрямку ступенів свободи, ідентифікації переміщень вузлів, призначення навантажень.

Послідовність виконання розрахунку плоскої рами в ПК ЛІРА

Постановка розрахункової задачі

На початковому етапі визначають розрахункову схему плоскої рами: геометричні розміри, кількість прольотів і поверхів, типи елементів (ригель, колона), характер закріплення опор. Уточнюють, що рама працює в одній площині та розраховується як плоска стержнева система.

Одночасно визначають:

– тип розрахунку (лінійний статичний);
– матеріал елементів;
– види навантажень і комбінації.

Створення нового проєкту та задання параметрів моделі

У програмі створюють новий проєкт і задають:

– тип задачі — плоска;
– систему одиниць (зазвичай кН, м);
– кількість ступенів вільності у вузлах (2 переміщення та 1 поворот).

Цей етап є критичним, оскільки помилки в одиницях або типі задачі призводять до некоректних результатів.

Побудова геометрії розрахункової схеми

Геометрію рами задають шляхом введення координат вузлів у декартовій системі координат. Далі вузли з'єднують стержневими елементами, які моделюють колони та ригелі.

На цьому етапі:

– перевіряють правильність координат;
– контролюють, щоб усі елементи лежали в одній площині;

– забезпечують коректне з’єднання елементів у вузлах.

Задання матеріалів і жорсткісних характеристик

Для кожного типу елементів призначають матеріал з відповідними фізико-механічними характеристиками:

– модуль пружності E;
– коефіцієнт Пуассона ν;
– розрахункову густину (за потреби).
– Після цього задають геометричні характеристики перерізів:
– площу A;
– момент інерції I;
– для рам — перерізи колон і ригелів можуть бути різними.

Задання граничних умов

Граничні умови визначають закріплення вузлів у просторі. Для плоскої рами зазвичай використовують:

– жорстке защемлення;
– шарнірне закріплення;
– ковзні опори.

На цьому етапі задають заборони на переміщення та/або повороти у відповідних напрямках. Коректне задання граничних умов є обов’язковою умовою статичної визначеності або коректної роботи статично невизначеної системи.

Формування навантажень

Навантаження вводять у вигляді окремих навантажувальних випадків:

– постійні;
– тимчасові;
– зосереджені сили;
– розподілені навантаження;
– моменти.

Навантаження прикладають до вузлів або елементів з урахуванням їх напрямку та знаку. Кожен тип навантаження задають у власному навантажувальному випадку.

Формування комбінацій навантажень

Після введення всіх навантажувальних випадків створюють розрахункові комбінації. Комбінації формують відповідно до нормативних вимог з урахуванням коефіцієнтів надійності та поєднання навантажень.

Цей етап особливо важливий для подальшої перевірки міцності та жорсткості елементів.

Перевірка розрахункової схеми

Перед запуском розрахунку виконують візуальний і логічний контроль моделі:

– перевіряють наявність опор;
– відсутність «висячих» вузлів;

– правильність задання перерізів і матеріалів;
– коректність навантажень.

Тільки після цього дозволяється запуск розрахунку.

Виконання розрахунку

Запускають розрахунок методом скінченних елементів. У процесі розрахунку програма формує систему рівнянь рівноваги та визначає:

– вузлові переміщення;
– внутрішні зусилля;
– напруження в елементах.

Після завершення перевіряють, чи розрахунок виконано без помилок.

Аналіз результатів

Аналіз результатів включає:

– перегляд переміщень і прогинів;
– побудову епюр згинальних моментів M;
– побудову епюр поперечних сил Q;
– аналіз нормальних і дотичних напружень.

Особливу увагу приділяють максимальним значенням у небезпечних перерізах.

Перевірка умов міцності та жорсткості

За результатами розрахунку виконують:

– перевірку міцності елементів за напруженнями;
– перевірку жорсткості за прогинами та кутами повороту;
– аналіз відповідності результатів нормативним вимогам.

У разі необхідності коригують перерізи або схему.

Оформлення результатів розрахунку

На завершальному етапі виконують:

– збереження графічних результатів (епюри, деформована схема);
– експорт числових даних;
– оформлення пояснювальної записки з описом розрахункової моделі та результатів.

Література

1. Р. ПАСІЧНИК – Основи будівельної механіки. Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми “Архітектура та містобудування” денної форми навчання галузі знань 19 Архітектура та будівництво спец. 191 Архітектура та містобудування денної форми навчання/ уклад. Р.В. Пасічник. – Луцьк : ЛНТУ, 2024. – 44 с.
2. Р. ПАСІЧНИК – Основи будівельної механіки. Методичні вказівки до самостійної роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми “Архітектура та містобудування” денної форми навчання галузі знань 19 Архітектура та будівництво спец. 191 Архітектура та містобудування денної форми навчання/ уклад. Р.В. Пасічник. – Луцьк : ЛНТУ, 2024. – 36 с.
3. Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології/ Підручник. — К.: Каравела, 2009. — 696 с.
4. Дорошук Г. П., Трач В. М. Будівельна механіка. Приклади, задачі та комп'ютерні розрахунки/ Навч. посібник. — Рівне НУВГП, 2008. — 472 с.
5. В.А.Баженов, А.В.Перельмутер, О.В.Шишов. Будівельна механіка. Комп’ютерні технології і моделювання - К.: ВІПОЛ, 2013.
6. В.А.Баженов, Г.М.Іванченко, О.В.Шишов, С.О.Піскунов. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп’ютерне тестування. Навчальний посібник. -К.: Каравела, 2010.
7. Ruslan Pasichnyk , Oksana Pasichnyk , Olga Uzhegova , Olexandr Andriichuk , Olexandr Bondarskii Calculation optimization of complex shape shells by numerical method. Advances in Design, Simulation and Manufacturing. Proceedings of the International Conference on Design, Simulation, Manufacturing: The Innovation Exchange, pp 643-652 DSMIE-2020 DOI:10.1007/978-3-030-22365-6_64.
8. Krantovska O., Ksonshkevych L., Synii S., Pasichnyk R., Maskalkova Yu. Modeling of the stress-strain state of a continuous reinforced concrete beam in ANSYS mechanical // 9th International Scientific Conference “Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings” (TransBud 2021), 17-19 November 2021, Kharkiv, Ukraine. AIP Conference Proceedings, AIP Publishing, 2023. Volume 2684, Issue 1, 030021 https://doi.org/10.1063/5.0142710 0,75 обл.вид.арк.
9. Пасічник Р.В., Ротко С.В., Лучинець С.А., Пасічник О.С. Автоматизований розрахунок плити на пружній основі на додаткове навантаження. Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві. Луцьк: ЛНТУ, 2023. Вип. 19. С. 135-140. https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2023-9(19)-16 0,38 обл.вид.арк.

Б 89 Будівельна механіка [текст]: Конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми “Архітектура та містобудування” галузі знань 19 Архітектура та будівництво спец. 191 Архітектура та містобудування денної форми навчання/ уклад. Р.В. Пасічник. – Луцьк : ЛНТУ, 2025. – 64 с.

Комп’ютерний набір та верстка Р. Пасічник
Редактор Р. Пасічник

Підп. до друку 2025р.
Формат 60×84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.
Ум. друк. арк. _0,12. Обл. – вид. арк. 4,5
Тираж ___ прим. Зам.

Луцький національний технічний університет
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75