МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Диференціальні рівняння та ДРЧП

Конспект лекцій
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
освітньої програми «Штучний інтелект та аналіз масивів даних»
галузь знань F Інформаційні технології
спеціальності F1 Прикладна математика
денної форми навчання

Луцьк 2026

УДК 519.87
Д 12

До друку
Голова вченої ради факультету архітектури, будівництва та дизайну
__________________ О. АНДРІЙЧУК

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки _________________ Н. ПОЛІЩУК

Рекомендовано до видання вченою радою факультету архітектури, будівництва та дизайну ЛНТУ,
протокол № ___ від «__» ______________ 2026 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри прикладної математики та механіки
протокол № __ від «__» _______________ 2026 року.
Завідувача кафедри _________________ О. МІКУЛІЧ

Укладач: ______________ О. МІКУЛІЧ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Рецензент: ______________ А. СЯСЬКИЙ, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Відповідальний за випуск: ______________ О.МІКУЛІЧ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ.

Д 12 *Диференціальні рівняння [Текст]: Конспект лекцій для студентів спеціальності «Прикладна математика» денної форми навчання / уклад. О.А. Мікуліч. — Луцьк: ЛНТУ, 2026. — 44 с.*

У конспекті лекцій викладено основи курсу «Диференціальні рівняння та ДРЧП». Матеріал згрупований за основними темами дисципліни: «Вихідні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь», «Інтегровані класи диференціальних рівнянь першого порядку», «Лінійні системи диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння вищих порядків» та «Диференціальні рівняння в частинних похідних».

Методичні вказівки призначені для студентів спеціальності «Прикладна математика» денної форми навчання.

ВСТУП

При розв'язуванні різноманітних задач фізики, хімії, математики, та інших наук отримують математичні моделі у вигляді рівнянь, що пов'язують одну або декілька незалежних змінних, невідому функцію цих змінних і похідні (або диференціали) цієї функції. Такі рівняння називають **диференціальними.** Якщо незалежна змінна одна, то рівняння називається **звичайним**; якщо незалежних змінних дві або більше, то рівняння називається **диференціальним рівнянням з частинними похідними.**

Якщо проаналізувати методи розв’язання диференціальних рівнянь, то для отримання розв’язків необхідно добре вміти інтегрувати та брати похідні. Все решта зводиться до низки схем, що не складно зрозуміти. Нижче наведено основний матеріал курсу, що згрупований за 6-ма темами.

Таблиця інтегралів

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

2. $\int \frac{d\left(f(x)\right)}{f(x)} = \ln|\,f(x)\,| + C$.

3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

4. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$.

5. $\int a^{kx}dx = \frac{a^{kx}}{k\cdot\ln a} + C$.

6. $\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$.

7. $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$.

8. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$.

9. $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

10. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

11. .

Внесення під знак диференціалу

$$f'(x)dx = d\left(f(x)\right)$$

Інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Основна тригонометрична підстановка

$tg\frac{x}{2} = t$ – заміна, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

ТЕМА 1.

Вихідні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь

Під **математичним моделюванням** розуміють метод дослідження процесів або явищ шляхом побудови їхніх математичних моделей і вивчення цих процесів на основі побудованих моделей. Найкраще описують певні явища моделі, побудовані на принципі адекватності між змінними складеного рівняння і досліджуваного процесу. При удосконаленні математичної моделі для більш точного опису процесів, відбувається ускладнення математичних рівнянь, що потребує при моделюванні на ЕОМ більше часу.

Математичний опис різних процесів та явищ матеріального світу приводить в багатьох випадках до рівнянь, що містять шукану функцію під знаком похідної чи диференціала. Такі рівняння називають *диференціальними*.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ЕКОЛОГІЇ

За допомогою диференціальних рівнянь можна описати процес розмноження чи вимирання популяцій.

Нехай $x(t)$ – кількісний стан популяції в момент t, A – число, яке відповідає кількості народжених, B – умираючих в одиницю часу. Тоді швидкість зміни координати $x(t)$ задається формулою

.

Якщо A і B залежати від x лінійно:

$$A = ax, B = bx,$$

де – коефіцієнт народжуваності, b – смертності, то диференціальні рівняння має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x.$$

Розв’язок отриманого диференціального рівняння записується у вигляді:

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}.$$

З розв’язку видно, що при $a > b$ популяція виживаюча, а при $a < b$ – вимираюча.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ФІЗИЦІ

Побудуємо диференціальні рівняння, що описують закони руху планет. Згідно закону всесвітнього тяжіння два тіла, які знаходяться на віддалі r один від одного, і які мають маси m і M притягаються з силою

$$F = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2},$$

де – константа тяжіння.

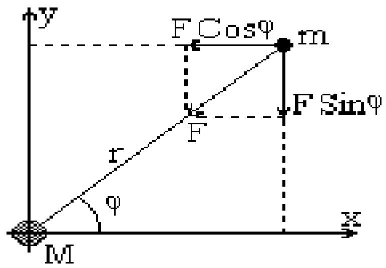

Рис. 1

Опишемо рух планети з масою m навколо Сонця маси M . Вплив інших планет на них не будемо враховувати (Рис. 1).

Припустимо, що Сонце знаходиться в початку координат, а планета має положення $x(t), y(t)$ в момент часу t. Використавши другий закон Ньютона запишемо

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -FCos\phi = -\gamma \frac{mM}{r^2} Cos\phi \\ m\ddot{y} = -FSin\phi = -\gamma \frac{mM}{r^2} Sin\phi \end{cases}.$$

Враховуючи, що $Cos\phi = \frac{x}{r}, Sin\phi = \frac{y}{r}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$, і позначаючи $k = \gamma \cdot M$, прийдемо до системи

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{kx}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \\ \ddot{y} = -\frac{ky}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \end{cases}.$$

Розв'язки отриманої системи диференціальних рівнянь дають можливість отримати рівняння, що описують зміну положення планети з часом.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЕКОНОМІЦІ

Попит і пропозиція – економічні категорії товарного виробництва. Попит – представлена на ринку потреба в товарах, пропозиція – продукт, який є на ринку чи може бути доставлений на нього.

Нехай

$p(t)$ – ціна, наприклад, на фрукти,

$\frac{dp}{dt}$ – тенденція формування ціни.

Тоді, як попит так і пропозиція будуть функціями введених величин. Як показує практика, ці функції можуть бути різними. Часто попит q і пропозиція S задаються лінійними залежностями, наприклад:

$$q = 4p' - 2p + 39,$$

$$S = 44p' + 2p - 1$$

Для того, щоб попит відповідав пропозиції необхідно, щоб $S = q$:

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Звідки

$$40p' + 4p - 40 = 0.$$

Розв'язок отриманого диференціального рівняння дасть можливість отримати закон зміни ціни, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв’язує незалежну змінну *x*, шукану функцію *y(x)* та її похідні Символічно диференційне рівняння записується у вигляді:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Якщо невідома функція, яка входить до диференціального рівняння, є функцією двох і більше незалежних змінних, то маємо *диференційне рівняння з частинними похідними*:

$$u = u\left(x, y\right), F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, що входить в рівняння.

Загальним розв’язком диференціального рівняння називають функцію вигляду:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – сталі, кількість яких залежить від порядку диференціального рівняння, після підстановки якої в диференціальне рівняння воно обертається на тотожність. Якщо сталим $C_1, C_2, ..., C_n$ надати якісь певні значення, то отримаємо *частинний розв’язок*.

Процес знаходження розв’язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння*.

ТЕМА 2.
Інтегровані класи диференціальних рівнянь першого порядку

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y':

$$F(x, y, y') = 0 . \tag{1}$$

Розв'язавши рівняння (1) відносно y' (якщо це можливо), приходимо до диференціального рівняння:

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

яке називають *розв'язаним відносно похідної*.

Розв'язком рівняння (1) (або (2)) на інтервалі (a, b) називають диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність при всіх x з інтервалу (a, b):

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 .$$

Загальним розв'язком рівняння (1) (або (2)) називають функцію

$$y = \varphi(x, C),$$

яка є розв'язком даного рівняння при будь-якому фіксованому значенні сталої C і для довільної *початкової умови*

$$y(x_0) = y_0$$

існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв'язок

$$y = \varphi(x, C_0)$$

задовольняє початкову умову. Розв'язок

$$y = \varphi(x, C_0)$$

називають *частинним* або *розв'язком задачі Коші*.

Співвідношення

$$G(x, y, C) = 0,$$

яким загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, C)$$

рівняння (1) задається неявно, називають *загальним інтегралом* рівняння (1). При конкретному значенні $C = C_0$ співвідношення

$$G(x, y, C_0) = 0$$

називають *частинним інтегралом*.

Найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x) \tag{3}$$

зводиться до обчислення невизначеного інтеграла. Так як

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

то маємо

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x\right), \text{ або } dy = f\left(x\right)dx.$$

Інтегруємо:

$$\int dy = \int f\left(x\right)dx + C$$

і отримуємо

$$y = \int f\left(x\right)dx + C.$$

Тут під невизначеним інтегралом розуміємо одну з первісних функції $f\left(x\right)$.

НЕПОВНІ РІВНЯННЯ

Диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції має вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\ , \quad x \in (a,b). \tag{1}$$

Припустимо, що *f(x)* є неперервною функцією на (a,b). Тоді функція

$$y = \int f(x)dx + C \tag{2}$$

є загальним розв`язком диференціального рівняння (1) в області

$$a < x < b,\ -\infty < y < +\infty.$$

Особливих розв’язків диференціальне рівняння (1) не має.

Разом з диференціальним рівнянням (1) розглянемо початкові умови

$$y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

Проінтегруємо рівняння (2) від $x_0 \in (a,b)$ до x

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + C.$$

Знаходимо значення сталої *C* з умови (3). Тоді

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + y_0 \tag{4}$$

– загальний розв′язок диференціального рівняння (1) в формі Коші.

Якщо *f(x)* – неперервна на (a,b) за виключенням точки $\xi \in (a,b)$, в якій $f(\xi)$ приймає нескінченне значення, то замість диференціального рівняння (1) будемо розглядати рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}. \tag{1$'$}$$

Пряма $x = \xi$ є розв′язком диференціального рівняння ($1'$) і ми цей розв′язок повинні приєднати до розв′язку диференціального рівняння (1). Цей розв′язок може бути частинним або особливим в залежності від того зберігається чи порушується в будь-якій його точці єдиність. Якщо $x=\xi$ – частинний розв′язок, то його часто можна отримати з загального при нескінченних значеннях сталої *C*, якщо ж він є особливим, то його отримують з загального при $C=C(y)$.

РІВНЯННЯ, ЯКЕ НЕ МІСТИТЬ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ

Таке рівняння має вигляд:

$$\frac{dy}{dx}=f(y). \tag{5}$$

Припускаємо, що функція $f(y)$ визначена і неперервна на інтервалі (c,d). Замість (5) розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)}. \tag{6}$$

Диференціальне рівняння (6) не містить шуканої функції і воно розв′язується аналогічно диференціальному рівнянню (1).

Якщо $f(y)\neq 0$, *y є (c,d)*, то

$$x=\int\frac{1}{f(y)}dy+c \tag{7}$$

– загальний розв′язок диференціального рівняння (2.39) в області

$$c < y < d, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Аналогічно

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{1}{f(\tau)}d\tau+x_0 \tag{8}$$

– загальний інтеграл в формі Коші.

Якщо $f(y)$ неперервна на *(c,d)* і приймає нульове значення при $y=\eta\in(c,d)$, то ми повинні розглядати диференціальне рівняння (5). Розв′язок $y=\eta$ буде частинним, якщо в кожній його точці зберігається єдиність і особливим, якщо в кожній його точці порушується єдиність. Якщо $y=\eta$ частинний розв′язок, то ми його отримуємо при нескінченних значеннях C $(\pm\infty)$, якщо особливий, то при $C=C(x)$.

Якщо $f(y)$ в точці $y=\overline{\eta}$ перетворюється в нескінченність $(\overline{\eta}\in(c,d))$, то розглядаємо диференціальне рівняння (5), яке має неперервну праву частину на *(c,d)*. При цьому диференціальне рівняння на (c,d) має єдиний розв’язок.

РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Розглянемо рівняння в диференціалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{9}$$

де $M(x, y), N(x, y)$ – неперервні функції своїх аргументів. У випадку, коли $M(x, y) = X(x), N(x, y) = Y(y)$, отримаємо спрощене рівняння

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0. \tag{9$'$}$$

Диференціальне рівняння (9) називається *рівнянням з відокремленими змінними*. Рівняння (9′) можна переписати таким чином

$$d\left(\int X(x)dx + \int Y(y)dy\right) = 0.$$

Звідки маємо загальний розв'язок в квадратурах

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C. \tag{10}$$

Якщо треба записати розв′язок задачі Коші, то записують так

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau + \int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau = C.$$

З умови (3) визначають $C = 0$. Отже

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau + \int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau = 0 \tag{11}$$

– розв′язок задачі Коші (3), (9′). При даних припущеннях особливих розв′язків диференціальне рівняння (9′) не має.

Узагальнене рівняння, що має вигляд:

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \tag{12}$$

називають **рівнянням з відокремлюваними змінними**.

Припустимо, що $m_1(x)n(y) \neq 0$, тоді розділимо обидві частини рівняння (12) на $m_1(x)n(y)$, отримаємо:

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0. \tag{13}$$

Аналогічно записуємо:

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = C \tag{14}$$

– загальний розв′язок диференціального рівняння (12) і

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(\tau)}{m_1(\tau)}d\tau + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(\tau)}{n(\tau)}d\tau = 0 \tag{15}$$

–розв'язок задачі Коші (3), (12). При діленні на $n(y)m_1(x)$ ми можемо загубити розв'язки, які визначаються рівняннями $n(y) = 0$, $m_1(x) = 0$. Дійсно, нехай $n(b) = 0$, то

$$m(x)n(b)dx + m_1(x)n_1(b)dy = 0$$

отже $y = b$ – розв'язок диференціального рівняння (12). Аналогічно $x = a \quad (m_1(a) = 0)$. Якщо ці розв'язки не входять в (14) при деяких C, то вони представляють собою особливі розв'язки диференціального рівняння (12).

З розв′язку $y = b$ ми повинні виключити точку $x = a$, так як в точці $x = a$ диференціальне рівняння (12) не визначає нахил поля y'. По тій же причині з розвязку $x = a$ виключається точка $y = b$.

Таким чином, розв′язки $x = a(y \neq b)$ і $y = b\ (x \neq a)$ примикають до точки (a,b) і можуть бути особливими. Других особливих розв'язків не має.

ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією виміру m, якщо

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y). \tag{16}$$

Якщо (16) виконуються при $t \geq 0$, то функція $f(x,y)$ називається **додатньо однорідною**.

Однорідне рівняння завжди можна звести до рівняння вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{17}$$

в якому функція $\varphi(\cdot)$ однорідна функція нульового виміру.

Однорідні рівняння завжди інтегруються в квадратурах заміною

$$y = zx. \tag{18}$$

При цьому рівняння у диференціалах зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

РІВНЯННЯ, ЗВІДНІ ДО ОДНОРІДНИХ

Розглянемо рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right), \tag{19}$$

що зводиться до однорідного. Якщо $c_1 = c = 0$, то це однорідне рівняння.

Припустимо, що хоч одне з чисел c_1, c не дорівнює 0. Можливі два випадки.

Перший – $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$. Проводимо заміну

$$x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta, \tag{20}$$

де ξ, η – нові змінні, α, β – параметри. Тоді

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}\right). \tag{21}$$

Параметри α, β вибираємо згідно системи

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a\alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}. \tag{22}$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система (22) має єдиний розв′язок. Таким чином, ми прийшли до однорідного диференціального рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right). \tag{23}$$

Другий – $\Delta = 0$. В цьому випадку $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$, тобто $a_1 = ka, b_1 = kb$. Тому

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax+by)+c_1}{ax+by+c}\right) = f_1(ax+by). \tag{24}$$

Заміною $t = ax + by$ диференціальне рівняння (2.59) приводимо до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dt}{dx} = a + bf_1(t). \tag{25}$$

УЗАГАЛЬНЕНО-ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

Диференціальне рівняння (9) називається **узагальнено-однорідним**, якщо існує таке число k, при якому ліва частина цього диференціального рівняння стає однорідною функцією від величин x, y, dx, dy в припущенні, що останні мають відповідно виміри: перший, k-ий, нульовий , $(k-1)$-ий. При $k=1$ маємо однорідне рівняння.

В цьому випадку диференціальне рівняння (9) заміною

$$y = zx^k \tag{26}$$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. При $k=0$ рівняння (9) є рівнянням з розділеними змінними. Особливі розв'язки таких рівнянь досліджуються аналогічно.

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{27}$$

називається **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**.

При $g(x) = 0$ воно називається **однорідним**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{28}$$

так як його ліва частина лінійна і однорідна відносно y і $\frac{dy}{dx}$. Рівняння (27) при $g(x) \neq 0$ називається **неоднорідним**. Диференціальне рівняння (28) інтегрується в квадратурах, так як воно являється диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0.$$

Звідки

$$y = ce^{-\int p(x)dx}. \tag{29}$$

Якщо $y(x_0) = y_0$, то

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}. \tag{30}$$

Загальні властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

1. Якщо $y_1(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (27), а (29) – загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (28), то сума

$$y = y_1(x) + ce^{-\int p(x)dx} \tag{31}$$

є загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (27).

2. Якщо відомо два частинних розв'язки диференціального рівняння (27), то загальний його розв'язок записується без квадратур

$$y = y_1(x) + c(y_2(x) - y_1(x)). \tag{32}$$

Розглянемо два методи інтегрування неоднорідного диференціального рівняння (27).

Метод Лагранжа

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{33}$$

Підставивши (33) в (27), отримаємо

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x).$$

Звідки $c'(x) = g(x)e^{\int p(x)dx}$, $c(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. Остаточно маємо

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c] \tag{34}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (27), який записаний через дві квадратури. Довільна стала входить завжди в загальний розв'язок лінійно.

Метод Ейлера

полягає в тому, що ліва частина диференціального рівняння (27) представляється у вигляді точної похідної шляхом домноження на деяку функцію $\mu = \mu(x)$ Визначимо $\mu(x)$. $(\mu y)' = \mu' y + \mu y' = \mu(y' + p(x)y)$. звідки $\mu' = \mu p(x)$, тобто $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$(функція $\mu(x)$ називається **інтегрувальним множником**). Тому

$$\left[e^{\int p(x)dx}y\right]' = g(x)e^{\int p(x)dx}. \tag{35}$$

Звідки $e^{\int p(x)dx}y = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. З останнього співвідношення отримуємо формулу (34).

Загальний розв'язок при умові $y(x_0) = y_0$ можна записати в формі Коші

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[\int\limits_{x_0}^{x} g(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}dx + y_0\right]. \tag{36}$$

РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Це рівняння має вигляд:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \tag{37}$$

Рівняння (37) завжди інтегрується в квадратурах шляхом підстановки

$$y^{1-n} = z. \tag{38}$$

Так як $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, то домножимо (37) на $(1-n)y^{-n}$

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x), \tag{39}$$

яке вже є лінійним.

При $0 < n < 1$ рівняння Бернуллі має особливий розв'язок $y(x) \equiv 0$. При $n > 1$ розв'язок $y(x) \equiv 0$ міститься в загальному розв'язку при $C = \infty$. При $n < 0$ $y(x) \equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння (2.74)

РІВНЯННЯ РІКАТТІ

Рівняння Рікатті має вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{40}$$

де *P(x), Q(x), R(x)* – визначені та неперервні на *(a,b)* скалярні функції. Причому $R(x) \neq 0$ і $P(x) \neq 0$, так як при цьому диференціальне рівняння (40) вироджується в рівняння Бернуллі або лінійне відповідно.

При таких припущеннях відносно функцій *P(x), Q(x), R(x)* диференціальне рівняння (40) має єдиний розв'язок при $y(x_0) = y_0$. Тому диференціальне рівняння особливих розв'язків не має.

Властивості диференціального рівняння Рікатті:

а) диференціальне рівняння (40) інваріантно відносно перетворення

$$x = \varphi(t) \quad (\varphi'(t) \neq 0); \tag{41}$$

б) диференціальне рівняння (40) інваріантно відносно дробно–лінійного перетворення

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)}, \tag{42}$$

де $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$ будь-які неперервно-диференційовані функції на (*a*,*b*), які задовольняють умові $\alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x) \neq 0$, z – нова незалежна змінна.

Заміною $y = \alpha(x)z + \beta(x)$ диференціальне рівняння (40) приводиться до рівняння вигляду

$$\frac{dz}{dx} = \pm z^2 + a(x). \tag{43}$$

При змінних $P(x), Q(x), R(x)$ диференціальне рівняння (40) інтегрується тільки в деяких випадках, а саме:

$$y' = \varphi(x)\left(ay^2 + by + c\right), \quad a, b, c \text{ – константи.} \tag{44}$$

- диференціальне рівняння з розділеними змінними;

$$y' = a\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c\ , \quad a, b, c - \text{ константи.} \tag{45}$$

- однорідне диференціальне рівняння;

$$y' = a\frac{y^2}{x} + b\frac{y}{x} + c\,, \quad a, b, c \text{ – константи.} \tag{46}$$

- диференціальне рівняння, яке зводиться до диференціального рівняння (44) заміною $y = z\sqrt{x}$;

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2} \tag{47}$$

– інтегрується, так як є узагальнено–однорідним при $k = -1$. Заміна $y = \dfrac{z}{x}$.

Тут a, b, c – постійні, такі, що $a^2 + c^2 \neq 0$.

Побудова загального розв'язку диференціального рівняння (40) у випадках, якщо відомі частинні лінійно-незалежні розв'язки.

1) Якщо відомо один частинний розв'язок $y = y_1(x)$ диференціального рівняння (40), то воно зводиться до рівняння Бернуллі при *n*=2.

2) Якщо відомо два частинні розв'язки диференціального рівняння (40), то загальний розв'язок записується через одну квадратуру.

3) Якщо відомо три частинні розв'язки диференціального рівняння (40) $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$, то загальний розв'язок диференціального рівняння Рікатті в цьому випадку знаходиться без квадратур.

РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

Рівняння (9) називається рівняння в **повних диференціалах**, якщо його ліва частина представляє собою повний диференціал деякої функції $U(x,y)$, тобто

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y) = 0\,. \tag{48}$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (9) має вигляд

$$U\left(x,y\right) = C\,. \tag{49}$$

Особливих розв'язків в цьому випадку диференціальне рівняння (9) не має.

Для того, щоб диференціальне рівняння (9) було рівнянням в повних диференціалах необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,. \tag{50}$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (9) буде

$$\int_{x_0}^{x} M\left(x,y\right)dx + \int_{y_0}^{y} N\left(x_0,y\right)dy = C\,. \tag{51}$$

або

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = c\,. \tag{52}$$

В формулах (51), (52) точки x_0, y_0 вибирають довільно, але так, щоб інтеграли мали зміст. Якщо точки x_0, y_0 вибрані вдало, то задача інтегрування спрощується.

РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної має вигляд

$$F(x,y,y') = 0\,. \tag{53}$$

Найбільш часто зустрічаються диференціальні рівняння першого порядку n-ого степеня

$$y'^{n} + a_1(x,y)y'^{n-1} + .. + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0\,. \tag{54}$$

Функція $y = y(x)$, визначена і неперервно диференційовна на (a,b), називається ***розв'язком*** диференціального рівняння (53), якщо вона після підстановки в (33) перетворює це диференціальне рівняння в тотожність:

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0,\, x \in (a,b).$$

Будемо говорити, що рівняння $\Phi(x,y)$ визначає ***розв'язок*** диференціального рівняння (53) в неявній формі, якщо воно визначає y як функцію x і вона є розв'язком диференціального рівняння (53).

Говорять, що співвідношенням $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_0<t<t_1$, визначається **розв'язок** диференціального рівняння (53) в параметричній формі, якщо

$$F\left(\varphi(t),\psi(t),\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\right)\equiv 0,\ t_0<t<t_1.$$

Криві на площині (x,y), які відповідають розв'язкам, будемо називати **інтегральними кривими**.

Задача Коші – задача знаходження розв'язків, які задовольняють умові

$$y(x_0)=y_0.$$

Говорять, що задача Коші для диференціального рівняння (53) з початковими умовами (x_0,y_0) має єдиний розв'язок, якщо через точку (x_0,y_0) в достатньо малому околі її проходить стільки інтегральних кривих, скільки напрямків поля визначає диференціальне рівняння в цій точці. В противному – не єдиний розв'язок.

ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ВВЕДЕННЯ ПАРАМЕТРУ

Розглянемо диференціальне рівняння (53). Припустимо, що воно допускає параметризацію

$$x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v),\ y'=\eta(u,v) \tag{55}$$

так, що $F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\eta(u,v))\equiv 0$ при всіх значеннях параметрів u і v.

Використовуючи (55) і співвідношення $dy=y'dx$ ми завжди диференціальне рівняння (53) можемо привести до диференціального рівняння, яке розв'язане відносно похідної

$$dx=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv,\ dy=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv.$$

Тому

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\eta(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right).$$

Візьмемо, наприклад, u за незалежну змінну, v – за залежну, тоді прийдемо до диференціального рівняння

$$\frac{dv}{du}=f(u,v). \tag{56}$$

Якщо

$$v=w(u,c) \tag{57}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (56), то загальний розв'язок диференціального рівняння (53) можна отримати в параметричній формі

$$x=\varphi(u,w(u,c)),\ y=\psi(u,w(u,c)). \tag{58}$$

Розглянемо деякі частинні випадки.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ШУКАНОЇ ФУНКЦІЇ

Це рівняння має вигляд

$$y = \varphi(x, y'). \tag{59}$$

За параметри u і v можна взяти x і y'. Позначимо $y' = p$, тоді

$$y = \varphi(x, p), \; dy = pdx. \tag{60}$$

Маємо

$$dy = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp = pdx.$$

Звідки

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx} = p. \tag{61}$$

Нехай $p = w(x,c)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння (61), тоді $y = \varphi(x, w(x,c))$ – загальний розв'язок диференціального рівняння (59).

Диференціальне рівняння (61) може мати особливий розв'язок $p = \gamma(x)$, тоді диференціальне рівняння (59) може мати особливий розв'язок $y = \varphi(x, \gamma(x))$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ РОЗВ'ЯЗАНЕ ВІДНОСНО НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ

Це рівняння має вигляд

$$x = \varphi(y, y'). \tag{62}$$

Інтегрується воно аналогічно диференціальному рівнянню (59). Покладемо $y' = p$. Тоді

$$x = \varphi(y, p), dy = pdx.$$

Використовуючи співвідношення $dy = pdx$, отримаємо

$$dy = p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp\right).$$

Звідки

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dp}{dy}. \tag{63}$$

Якщо $p = w(y,c)$ – загальний інтеграл диференціального рівняння (63), то

$$x = \varphi(y, w(y,c)) \tag{64}$$

– загальний інтеграл диференціального рівняння (62).

Якщо $p = \gamma(y)$ – особливий розв'язок диференціального рівняння (63), то $x = \varphi(y, \gamma(y))$ – може бути особливим розв'язком диференціального рівняння (62).

РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА

Це рівняння має вигляд

$$y=\varphi(y')x+\psi(y'). \tag{65}$$

Воно інтегрується в квадратурах. Покладемо $y'=p, x=x$. Тоді

$$y=\varphi(p)x+\psi(p), dy=pdx. \tag{66}$$

З (66) маємо

$$\varphi(p)dx+\left(\varphi'(p)x+\psi'(p)\right)dp=pdx,$$

$$\left(\varphi(p)-p\right)dx+\left(\varphi'(p)x+\psi'(p)\right)dp=0. \tag{67}$$

Диференціальне рівняння (67) лінійне по x

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}. \tag{68}$$

Нехай $x=A(p)c+B(p)$ – розв'язок диференціального рівняння (68). Тоді загальний розв'язок рівняння Лагранжа запишемо в параметричній формі

$$\begin{cases} x=A(p)c+B(p) \\ y=\varphi(p)\left(A(p)c+B(p)\right)+\psi(p) \end{cases}. \tag{69}$$

Особливі розв'язки можуть бути там, де

$$\varphi(p)-p=0, \tag{70}$$

тобто

$$y=p_i x+\psi(p_i), \tag{71}$$

де p_i – корені рівняння (70). Розв'язок (71) може бути частинним або особливим.

РІВНЯННЯ КЛЕРО

Це рівняння – частинний випадок рівняння Лагранжа, коли $\varphi(y')=y'$

$$y=y'x+\psi(y'). \tag{72}$$

Покладемо $y'=p$, тоді

$$\begin{cases} y=px+\psi(p) \\ dy=pdx \end{cases}. \tag{73}$$

Використовуючи $dy=pdx$, отримаємо $pdx+\left(x+\psi'(p)\right)dp=pdx$. Звідки

$$\left(x+\psi'(p)\right)dp=0. \tag{74}$$

Рівняння (74) розпадається на два

$$dp=0,\ \ x+\psi'(p)=0. \tag{75}$$

Перше рівняння (75) дає $p=c$, підставляючи його в (73) будемо мати загальний розв’язок

$$y=cx+\psi(c). \tag{76}$$

Друге – $x=-\psi'(p)$, разом з (3.35) утворює параметричний розв’язок

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi(p) + \psi(p) \end{cases}. \tag{77}$$

Розв’язок (77) є особливим, так як він співпадає з обвідною. Дійсно

$$\begin{cases} y = cx + \psi(c) \\ 0 = x + \psi'(c) \end{cases},$$

звідки

$$\begin{cases} x = -\psi'(c) \\ y = -c\psi'(c) + \psi(c) \end{cases}. \tag{78}$$

Дискримінантна крива (78) співпадає з розв’язком (77).

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЯКІ МІСТЯТЬ ТІЛЬКИ ПОХІДНУ

Це рівняння вигляду

$$F(y') = 0. \tag{79}$$

Рівняння (79) може мати скінчену або нескінчену кількість дійсних розв’язків

$$y' = k_i, i = 1,2,..., \tag{80}$$

де k_i – деякі числа, які задовольняють рівняння $F(k_i) = 0$.

Інтегруємо (80)

$$y = k_i x + c, \quad i = 1,2,... \tag{81}$$

Так як $k_i = \frac{y-c}{x}$, то

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0 \tag{82}$$

– загальний інтеграл диференціального рівняння (79).

Таким чином, при таких припущеннях інтегральні криві диференціального рівняння (79) є системою прямих ліній, які можна записати у вигляді (82). При цьому в (82) можуть входити комплексні розв’язки диференціального рівняння.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЯКІ НЕ МІСТЯТЬ ШУКАНОЇ ФУНКЦІЇ

Такі рівняння мають вигляд

$$F(x, y') = 0. \tag{83}$$

Якщо (83) можна розв’язати відносно похідної

$$y' = f_k(x), k = 1,2,..., \tag{84}$$

то

$$y = \int f_k(x)dx + c, k = 1,2,... \tag{85}$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (83).

Якщо ж розв’язати відносно y' не можна, а допускається параметризація

$$F\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \equiv 0, \tag{86}$$

тобто

$$x = \varphi(t), y' = \psi(t). \tag{87}$$

Тоді загальний розв’язок знаходять в параметричній формі

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c \end{cases}. \tag{88}$$

Якщо диференціальне рівняння (83) має вигляд

$$x = \varphi(y'), \tag{89}$$

тоді це рівняння легко параметризується $y' = \varphi(t)$. В частинному випадку $y' = t$. Загальний розв’язок запишеться в формі

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int t\varphi'(t)dt + c \end{cases}. \tag{90}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЯКІ НЕ МІСТЯТЬ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ

Це рівняння вигляду

$$F\left(y, y'\right) = 0. \tag{91}$$

Якщо рівняння (91) розв’язане відносно y', тобто

$$y' = f_k(y), \ k = 1,2,\ldots\ , \tag{92}$$

то

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + c, \ k = 1,2,\ldots \tag{93}$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (91). Особливими розв’язками можуть бути криві $y = b_i$, де b_i – корені рівняння $f_k(b) = 0, \ k = 1,2,\ldots$ (або $F(b,0) = 0$).

Якщо не можна диференціальне рівняння (91) розв’язати відносно y', але воно допускає параметризацію

$$y = \varphi(t), y' = \psi(t), \tag{94}$$

то

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases} \tag{94}$$

– загальний розв’язок диференціального рівняння (91) в параметричній формі.

УЗАГАЛЬНЕНО ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

Диференціальне рівняння назвемо **узагальнено-однорідним**, якщо ліва частина є однорідною функцією аргументів x, y, y', яким відповідають величини 1-го, k-го і $(k-1)$ виміру, тобто

$$F\left(tx,t^k y,t^{k-1}y'\right)=t^m F\left(x,y,y'\right). \qquad (95)$$

Зробимо заміну

$$x=e^t,\, y=ze^{kt}, \qquad (96)$$

де t – нова незалежна змінна, z – нова шукана функція. Маємо

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{e^t}=\frac{dy}{dt}e^{-t}.$$

Тобто $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t}$. З іншої сторони

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\left(ze^{kt}\right)e^{-t}=\left(\frac{dz}{dt}e^{kt}+kze^{kt}\right)e^{-t}=\left(\frac{dz}{dt}+kz\right)e^{(k-1)t}. \qquad (3.64)$$

Підставимо (3.63),(3.64) в диференціальне рівняння (3.1)

$$F\left(e^t,ze^{kt},\left(\frac{dz}{dt}+kz\right)e^{(k-1)t}\right)=e^{mt}F\left(1,z,\frac{dz}{dt}+kz\right)=0.$$

Отримане рівняння

$$F\left(1,z,\frac{dz}{dt}+kz\right)=0 \qquad (97)$$

не містить незалежної змінної t.

ТЕМА 3

Лінійні системи диференціальних рівнянь

Сукупність рівнянь вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1,..., y_n, y_1',..., y_n') = 0 \\ \qquad ... \\ F_n(x, y_1,..., y_n, y_1',..., y_n') = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$

де $y_1,..., y_n$ – шукані функції від незалежної змінної x, називається системою диференціальних рівнянь першого порядку.

Будемо говорити, що систему звичайних диференціальних рівнянь (1) записано в нормальній формі, якщо її можна розв’язати відносно похідних і представити в такому вигляді

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1,..., y_n), \ i = 1,2,..., n. \qquad (2)$$

Число рівнянь системи диференціальних рівнянь (2) називається її **порядком**.

Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (2) лінійні по $y_1,..., y_n$

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j + f_i(x), \ i = 1,.., n, \qquad (3)$$

то система називається **лінійною**.

Сукупність n функцій

$$y_1 = y_1(x),..., y_n = y_n(x) \qquad (4)$$

визначених і неперервно диференційовних на (a,b) називається розв′язком системи (6.2), якщо вона перетворює всі рівняння системи (2) в тотожності на (a,b).

Задача Коші для системи диференціальних рівнянь (2) полягає у визначення серед всіх розв’язків такого, що

$$y_1 = y_1(x),..., y_n = y_n(x), \qquad (5)$$

який задовольняє умовам

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)},..., y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \qquad (6)$$

Тут $y_1^{(0)},..., y_n^{(0)}$ – початкові значення шуканих функцій, x_0 – початкове значення незалежної змінної x. Числа $x_0, y^{(0)},..., y_n^{(0)}$ називаються початковими даними розв′язку (5), умови (6) – початковими умовами.

Геометричний зміст задачі Коші – серед всіх інтегральних кривих системи диференціальних рівнянь (2) знайти ту, яка проходить через точку (6).

Механічний зміст задачі Коші – знайти такий рух, визначений системою диференціальних рівнянь (2), який задовольняє початковим умовам (6).

ЗАГАЛЬНИЙ, ЧАСТИННИЙ І ОСОБЛИВИЙ РОЗВ'ЯЗКИ

Сукупність n функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, c_1, ..., c_n) \\ \qquad ... \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, ..., c_n) \end{cases} \tag{7}$$

визначених в деякій області зміни змінних $x, c_1, ..., c_n$ і які мають неперервні частинні похідні за x, будемо називати **загальним розв’язком** системи (2), якщо систему (7) можна розв’язати відносно $c_1, ..., c_n$

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \qquad ... \\ c_n = \psi_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}, \tag{8}$$

а сукупність функцій (7) є розв’язком диференціального рівняння (2) для всіх сталих, визначених співвідношеннями (8).

Якщо в (7) роль сталих відіграють початкові умови

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \\ \qquad ... \\ y_n = \varphi_n(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \end{cases}, \tag{9}$$

то (9) називається **загальним розв’язком** в **формі Коші**.

Розв’язок системи диференціальних рівнянь (2) називається **частинним** якщо він складається з точок єдиності розв′язку задачі Коші. Його можна отримати при конкретних сталих, включаючи $\pm\infty$.

Розв’язок системи диференціальних рівнянь (2) називається **особливим**, якщо в кожній точці його порушується єдиність розв′язку задачі Коші.

ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ. МЕТОД ВИКЛЮЧЕННЯ

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \tag{10}$$

де коефіцієнти a_{ij} – сталі, t – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається *однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*

Задача Коші для системи (10) полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{11}$$

Розв’язання системи (10) виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12} \neq 0$, виразимо в ньому y через x:

$$y=\frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt}-\frac{a_{11}}{a_{12}}x. \tag{12}$$

Продиференціюємо цю рівність по t:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt}. \tag{13}$$

Підставляючи вирази (12) і (13) в друге рівняння системи (10), отримаємо

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt}=a_{21}x+a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt}-\frac{a_{11}}{a_{12}}x\right),$$

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}+\frac{a_{22}}{a_{12}}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}a_{22}-a_{21}\right)x=0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\left(a_{11}+a_{22}\right)\frac{dx}{dt}+\left(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\right)x=0. \tag{14}$$

Рівняння (14) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду з незалежною змінною t і невідомою функцією $x(t)$. Розв’язуємо його відносно $x(t)$. Після цього за формулою (12) знаходимо функцію $y(t)$ і записуємо остаточну відповідь.

Якщо в першому рівнянні системи (10) коефіцієнт $a_{12}=0$, то це рівняння матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt}=a_{11}x.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’язавши його, підставимо знайдену функцію $x(t)$ в друге рівняння системи (10) і отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y(t)$. Розв’язуємо його і записуємо остаточну відповідь.

МЕТОД ВИКЛЮЧЕННЯ В ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь, яка задана в нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} y_i' = f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \\ i=\overline{1,n} \end{cases} \tag{15}$$

або у векторній формі

$$y' = f(x,y), \quad f: R\times R^n \to R^n. \tag{16}$$

Нехай функції f_i визначені в області $D\subseteq R^{n+1}$.

Сукупність n функцій $y_1=\varphi_1(x),\ldots,y_n=\varphi_n(x)$, $\varphi_i\in C^1(J)$, $\varphi_i: J\to R$, $J\subseteq R$, називається *розв’язком системи (34) на* J, якщо

$$\forall x\in J:\ \left(x,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\right)\in D,$$

$$\forall x \in J: \begin{cases} \varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \\ i = \overline{1,n} \end{cases},$$

або у векторній формі:

Функція $y = \varphi(x)$, $\varphi \in C^1(J)$, $\varphi : J \to R$, $J \subseteq R$, називається *розв'язком системи (35),* якщо

1) $\forall x \in J: (x, \varphi(x)) \in D$,

2) $\forall x \in J: \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Часто нормальну систему розв'язати простіше, якщо її попередньо звести до рівняння *n*-го порядку. Цей метод називається **методом виключення**.

Припустимо, що функції f_i — диференційовані *n*–1 разів. Диференціюємо по *x* перше (взагалі кажучи, можна будь-яке) рівняння системи (15) *n*–1 разів, змінюючи після кожного диференціювання похідні y_i' їх значеннями з системи (15). Тобто

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' \overset{(34)}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n \equiv \Phi_2(x, y_1, ..., y_n);$$

$$y_1''' = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} \cdot y_1' + ... + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \cdot y_n' \overset{(34)}{=}$$

$$= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + ... + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \cdot f_n \equiv \Phi_3(x, y_1, ..., y_n)$$

. . . .

По аналогії

$$y_1^{(n)} = \Phi_n(x, y_1, ..., y_n). \tag{17}$$

Припустимо, що якобіан $\dfrac{D(f_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n-1})}{D(y_2, y_3, ..., y_n)} \neq 0$. Тоді, згідно теоремі про існування неявних функцій система рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ y_1^{(k)} = \Phi_k(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}, \quad k = \overline{2, n-1} \tag{18}$$

розв'язна відносно $y_2, ..., y_n$ (в околі кожної точці, де якобіан відмінний від нуля). При цьому $y_2, ..., y_n$ виразяться через $x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}$, тобто

$$\begin{cases} y_i = \omega_i\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right) \\ i = \overline{2, n}. \end{cases} \tag{19}$$

З урахуванням системи (18) та співвідношення (19) дістанемо рівняння *n*-го порядку

$$y_1^{(n)} = \Phi_n\left(x, y_1, \omega_2\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right), ..., \omega_n\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right)\right) \equiv f\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right),$$

тобто

$$y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right). \tag{20}$$

В теорії звичайних диференціальних рівнянь доведено, що розв'язок

$y_1 = \varphi(x)$ рівняння (20) і функції $y_2,...,y_n$, знайдені при $y_1 = \varphi(x)$ з (19), складають розв'язок системи (15). Та навпаки, якщо $y_1,...,y_n$ — розв'язок системи (15), то y_1 - розв'язок рівняння (18).

Рівняння (20) називається рівнянням *n*-го порядку, рівносильним до системи (25) у тому розумінні, що задача інтегрування системи (15) рівносильна до задачі інтегрування рівняння (20).

ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Лінійна однорідна система звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_k}{dx} = \sum\limits_{l=1}^{n} P_{kl}(x) y_l + f_k(x), \\ k = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (21)$$

або у векторному вигляді:

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + f(x), \qquad (22)$$

де $Y = col(y_1,...,y_n)$, $P(x) = (P_{kl}(x))_1^n$, $f(x) = col(f_1(x),..., f_n(x))$.

Якщо в (49) $f(x) \equiv 0$, то

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y \qquad (23)$$

— лінійна однорідна система.

Припустимо, що функції P_{kl}, $f_k \in C(J)$, $k,l = \overline{1,n}$.

Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) *або базисом системи* (23) *на J* називається n ЛНЗ на J її розв'язків $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix}$, …, $Y_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$, тобто таких розв'язків, для яких тотожності

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} \equiv 0,\ k = \overline{1,n},\ x \in J.$$

(α_i - сталі числа), виконуються тільки при $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Якщо $Y_1,...,Y_n$ — ФСР лінійної однорідної системи (50), то її загальний розв'язок має вигляд:

$$Y = c_1 Y_1 + ... + c_n Y_n,$$

де c_i — довільні сталі, або у скалярному вигляді

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ki},\ k = \overline{1,n}.$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь дорівнює сумі загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи

$$Y_0 = c_1 Y_1 + \ldots + c_n Y_n$$

та деякого частинного розв'язку $Y = z(x) = col\left(z_1(x), \ldots, z_n(x)\right)$ лінійної неоднорідної системи, тобто

$$Y = Y_0 + z(x) \equiv c_1 Y_1 + \ldots + c_n Y_n + z(x),$$

або у скалярному вигляді

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ki} + z_k(x),\ k = \overline{1, n}.$$

Знаючи ФСР лінійної однорідної системи, відповідної даній лінійній системі, завжди можна знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи методом варіацій сталих Лагранжа (метод варіацій Лагранжа вивчить самостійно).

Одним з класів лінійних систем, які інтегруються квадратурами, є системи зі сталими коефіцієнтами.

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛОСР ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Лінійна однорідна система рівнянь

$$\frac{dY}{dx} = AY, \qquad (24)$$

де $A = \left(a_{kl}\right)_{k,l=1}^{n}$ — стала дійсна матриця, завжди інтегруєма квадратурами. Одним з методів будування ФСР є **метод Ейлера**.

Лінійній системі (51) ставиться у відповідність характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0, \qquad \left(\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\right) \qquad (25)$$

Його корені називаються характеристичними числами системи (51). Структура ФСР системи (51) залежить від значінь її характеристичних чисел. Розрізняють такі випадки:

I. $\lambda = \lambda_1$ — простий дійсний корінь характеристичного рівняння. Йому відповідає частинний розв'язок системи (24) вигляду

$$y = \gamma\, e^{\lambda_1 x}, \qquad (26)$$

де γ — властивий вектор матриці A, що відповідає власному значенню λ_1 цієї матриці. Вектор $\gamma = col(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ означається з системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda E)\gamma = 0. \qquad (27)$$

Очевидно, що γ — дійсний вектор.

2. $\lambda_1 = a + bi,\ b \neq 0$ - простий корінь характеристичного рівняння (25). Тоді $\lambda_2 = a - bi$ також простий корінь рівняння (25). Аналогічним чином побудуємо частинний розв'язок системи (24) у вигляді (26), відповідне корінню $\lambda_1 = a + bi$ (або $\lambda_2 = a - bi$). Власний вектор γ також визначається з системи (27). Відокремлюючи у цьому рівнянні дійсну та умовну частини, дістаємо два дійсних лінійно незалежних розв'язка системи (27). Дійсні розв'язки, відповідні кореневі $\lambda_2 = a - bi$ (або $\lambda_1 = a + bi$) будуть лінійно залежними з знайденими.

Отже, двом простим комплексно спряженим коріням $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ відповідають два дійсних лінійно незалежних розв’язки системи (24).

3. Якщо $\lambda = \lambda_1$ - дійсний корінь характеристичного рівняння кратності $k > 1$, то розглянемо матрицю $A - \lambda_1 E$. Знайдемо її порядок *n*, ранг *r* та дефект $def = m = n - r$. Можливі два випадки:

3а) якщо $def(A - \lambda_1 E) = k$, то *k* ЛНЗ розв’язки мають вигляд

$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_k = \gamma_k e^{\lambda_1 x}$,

де γ_i — ЛНЗ власні вектори матриці *A*, відповідні власному значенню λ_1, що визначаємо з системи (27).

3б) якщо $def(A - \lambda_1 E) < k$, то при знаходженні *k* відповідних ЛНЗ розв’язків використовують метод невизначених коефіцієнтів. Суть його застосування у даному випадку полягає в наступному.

k ЛНЗ розв’язків шукаються не явно, а знаходиться *k*-параметрична сукупність функцій, яка потім і входить до загального розв’язку як блок, що відповідає кореню кратності *k*. Цей блок шукається у вигляді

$$Y = P_{k-m}(x) e^{\lambda_1 x}, \tag{28}$$

де $P_{k-m}(x) = col(P_{i,k-m}(x))$, $P_{i,k-m}(x)$ - поліном степеня *k*-*m* з невизначеними коефіцієнтами. Підставляючи розв’язок (28) в систему (24), *k* коефіцієнтів покладемо довільними параметрами, а решті виражаємо через них.

Якщо $\lambda_1 = a + bi$, то $\lambda_2 = a - bi$ - також буде коренем характеристичного рівняння та притому ж тієї ж кратності *k*. Знайшовши зазначеним у п.3 методом *k* ЛНЗ комплексних розв’язків, що відповідають кореневі $a + bi$ та відокремлюючи в них дійсні та умовні частини, дістаємо 2*k* ЛНЗ дійсних частинні розв’язки. Розв’язки, відповідні до кореня $a - bi$, будуть ЛЗ з розв’язками, що відповідають кореневі $a + bi$.

Відомо, що різним кореням характеристичного рівняння відповідають ЛНЗ розв’язки системи (24). Отже знайшовши розв’язки, відповідні до всіх коренів характеристичного рівняння (25) з урахуванням кратності, дістаємо ФСР системи (24). Загальний розв’язок знайдемо, використовуючи теорему про загальний розв’язок ЛНСР.

Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами завжди інтегруються квадратурами, якщо вільний член $f_i(x)$, при $i = \overline{1, n}$, є елементарними функціями. Для цього можна використовувати метод варіації сталих Лагранжа.

СИСТЕМИ У СИМЕТРИЧНІЙ ФОРМІ

Системою звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі називається система рівнянь вигляду

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,...,x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1,...,x_n)}. \qquad (29)$$

Ця система рівносильна системі $n-1$ рівнянь в нормальній формі

$$\frac{dx_i}{dx_n} = ... = \frac{X_i(x_1,...,x_n)}{X_n(x_1,...,x_n)}, \ i = \overline{1, n-1}. \qquad (30)$$

Неперервно-диференційована в області визначення системи (29) функція $\psi(x_1,...,x_n)$ називається **першим інтегралом** цієї системи, якщо:

1) $\psi(x_1,...,x_n) \neq const$ в цієї області,

2) $\psi(x_1,...,x_n) \equiv const$, коли точка $(x_1,...,x_n)$ пробігає інтегральну криву системи (29).

Якщо відомо n-1 незалежних перших інтегралів системи (29) (тобто таких $\psi_i(x_1,...,x_n), \ i = \overline{1, n-1}$, що якобіан

$$\frac{D(\psi_1,...,\psi_{n-1})}{D(x_1,...,x_{n-1})} \neq 0,$$

то сукупність рівностей

$$\psi_i(x_1,...,x_n) = c_i, \qquad i = \overline{1, n-1}, \qquad (31)$$

де c_i - довільні сталі, визначає загальний інтеграл цієї системи.

Систему рівнянь (29) можна розв’язати методом знаходження інтегруємих комбінацій. Його суть у тому, що за допомогою арифметичних операцій з рівняння даної системи утворюють інтегруємі комбінації, тобто легко інтегруємі рівняння відносно нової невідомої функції $u(x_1,...,x_n)$.

При цьому часто зручно застосовувати властивість рівних дробів: якщо маємо рівні дробі

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n},$$

то $\forall k_1,...,k_n$:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + ... + k_n a_n}{k_1 b_1 + ... + k_n b_n}.$$

Приклади розв’язування системи в симетричній формі розглянемо в наступній главі при розв’язуванні рівнянь у частинних похідних 1-го порядку.

ТЕМА 4

Диференціальні рівняння вищих порядків

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

де $F\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ — відома функція своїх аргументів.

Якщо виконуються умови існування неявної функції відносно старшої похідної $y^{(n)}$, то рівняння (1) може бути розв'язано відносно n-ї похідної (узагалі говорячи, локально). Рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Нехай функція f визначена в області $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$. Функція $y = \varphi(x)$, $\varphi \in \mathbf{C}^{(n)}(I)$ називається ***розв'язком*** рівняння (2) на I, якщо:

1)$\forall\, x \in I : (x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$;

2) $\forall\, x \in I : \varphi^{(n)} = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$.

Задача Коші для рівняння (2) ставиться так: серед усіх розв’язків рівняння (2) знайти ті, які задовольняють початковим умовам: при $x = x_0$: $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, де x_0, y_0, y_0', $y_0^{(n-1)}$ — задані числа з $\mathbf{R}$. Задача Коші записується так:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, k = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Нехай у кожній точці $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ області $D = D_1\times D_2 \subseteq \mathbf{R}^1\times \mathbf{R}^n$ має місце існування й єдність розв’язку задачі Коші для рівняння (2). Тоді n-параметричне сімейство функцій

$$y = \varphi(x, c_1, \ldots, c_n) \;\Leftrightarrow\; y = \varphi(x, C),\ C\in E \subseteq \mathbf{R}^n \tag{4}$$

(E — множина припустимих значень параметрів) називається ***загальним розв’язком*** рівняння (2) в області D, якщо $\varphi \in C^{n,0}_{x,c}(D_1\times E)$ і:

1. при будь-якім фіксованому значенні $C\in E$ функція (4) є розв’язком диференціального рівняння (2);
2. $\forall (x_0, y_0, y_0', y_0^{(n-1)}) \in D$ існує таке значення параметрів $(c^0_1, \ldots, c^0_n) = C^0 \in E$, що функція (4) при $C = C^0$ є розв’язком задачі Коші (3).

Якщо ж загальний розв’язок рівняння (2) знайдений неявно у вигляді

$$\Phi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0, \tag{5}$$

то його називають ***загальним інтегралом*** цього рівняння.

РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ, ЩО ІНТЕГРУЮТЬСЯ В КВАДРАТУРАХ

У загальному випадку нелінійні диференціальні рівняння n-го порядку не інтегруються в квадратурах.

До нелінійних рівнянь n-го порядку, що інтегруються в квадратурах відносяться наступні види рівнянь:

а) $F(x, y^{(n)}) = 0$; б) $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$; в) $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$.

Зупинимося на питанні інтегрування зазначених рівнянь у випадку, коли їх можна представити у вигляді (2):

а) $y^{(n)} = f(x)$. (6)

Тоді загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int}_{n \text{ разів}} f(x)dx + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n.$$

б) $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$. (7)

Виконаємо заміну $y^{(n-1)} = z(x)$, тоді $y^{(n)} = z'(x)$ і рівняння (7) перепишемо у вигляді:

$$z' = f(z).$$

Це — рівняння зі змінними, що розділяються. Нехай його загальний розв’язок має вигляд: $z = \varphi(x, c)$.

Але тому що $z(x) = y^{(n-1)}$, то $y^{(n-1)} = \varphi(x, c_1)$, тобто ми отримаємо рівняння виду (6), що відомо як вирішується.

в) $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$. (8)

Виконаємо заміну $y^{(n-2)} = z(x)$, тоді $y^{(n-1)} = z'(x)$, а $y^{(n)} = z''(x)$. Після заміни рівняння (8) перепишеться у вигляді:

$$z''(x) = f(z). \tag{9}$$

Один з методів інтегрування рівняння (9) такий: помножимо обидві частини рівняння на $2z'(x)dx$, тоді одержуємо

$$d(z')^2 = 2f(z)dz,$$

звідкіля $(z')^2 = 2\int f(z)dz + c_1$. Розв'яжемо останнє рівняння відносно похідної і розділимо змінні:

$$\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}} = \pm dx,$$

звідкіля знаходимо загальний інтеграл рівняння (9):

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}} = \pm x + c_2.$$

Цей загальний інтеграл при заміні z на $y^{(n-2)}$ приймає вигляд:

$$\Phi(x, y^{(n-2)}, c_1, c_2) = 0.$$

Припустимо, що це рівняння удалося розв’язати відносно похідної, тоді $y^{(n-2)} = \varphi(x, c_1, c_2)$, тобто знову отримане рівняння вигляду (6), що інтегрується в квадратурах.

РІВНЯННЯ n-ГО ПОРЯДКУ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

Деякі рівняння удається розв’язати, попередньо понизивши їхній порядок. Розглянемо кілька випадків, коли порядок рівняння можна понизити:

а) рівняння явно не містить шуканої функції y і декілька її похідних підряд, починаючи з першої, тобто має вигляд

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{10}$$

де $k \geq 1$, $k \in \mathbf{N}$.

б) рівняння не містить явно незалежної змінної x, тобто має вигляд

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{11}$$

в) рівняння (1) — однорідне щодо функції y і всіх її похідних (однорідність за незалежній змінній x не потрібна), тобто функція F така, що $\exists m \in \mathbf{R}$, $\forall k > 0$:

$$F(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

Число m називають ступенем однорідності функції F.

г) ліва частина рівняння (1) є повною похідною по x від деякого диференціального виразу (n–1)-го порядку. Таке рівняння називається рівнянням у повних (або точних) похідних.

У кожному із зазначених випадків вивчимо способи зниження порядку рівнянь.

а) Порядок такого рівняння завжди може бути знижений на k одиниць. Покладемо в (10) $y^{(k)} = z(x)$, тоді, відповідно $y^{(k+1)} = z'(x)$, ... $y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$. Одержимо рівняння порядку $n - k$, тобто

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0, \tag{12}$$

Припустимо тепер, що нам удалося знайти загальний розв’язок рівняння (12): $z(x) = \varphi(x, c_1, \ldots, c_{n-k})$. Оскільки $y^{(k)} = z(x)$, одержуємо рівняння

$$y^{(k)} = \varphi(x, c_1, \ldots, c_{n-k})$$

– вигляду (6), що інтегрується в квадратурах.

б) Порядок такого рівняння завжди можна понизити на одиницю. Для цього покладемо в (11) $y' = z(y)$, де z – нова шукана функція, y – нова незалежна змінна (тобто виходить, $y \neq \text{const.}$). Тоді

$$y'' = z'_x = z'_y y' = z'_y z\,,\ y''' = z^2 z'' + z(z')^2 \text{ і т.д.}$$

Підставляючи вирази y', y'', ..., $y^{(n)}$ у нових змінних у рівняння (11), одержуємо диференціальне рівняння порядку $n - 1$:

$$\Phi(y, z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{(n-1)}z}{dy^{n-1}}) = 0\,. \tag{13}$$

Припустивши тепер, що удалося знайти загальний розв’язок рівняння (13) $z(y) = \psi(y, c_1, \ldots, c_{n-1})$ одержимо диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються (тому що $z(y) = y'$):

$$y' = \psi(y, c_1, \ldots, c_{n-1}).$$

Помітимо, що, вирішуючи рівняння (11) таким методом, можна втратити розв’язок вигляду $y = c$, де $c = \text{const}$.

в) Порядок однорідного рівняння завжди може бути знижений на одиницю. Справді, покладемо в однорідному рівнянні n-го порядку $y' = y{\cdot}z(x)$. Тоді $y'' = y \cdot (z' + z^2)$, ... , $y^{(n)} = y{\cdot}\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})$.

Однорідне рівняння прийме вид

$$F(x, y, y{\cdot}z, y{\cdot}(z' + z^2), \ \ldots, y{\cdot}\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0,$$

або, з урахуванням однорідності функції F:

$$y^m{\cdot}F(x, 1, z, z' + z^2, \ \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Отже, однорідне рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} y^m = 0 \\ F(x, 1, z, \ldots, \omega) = 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Друге зі співвідношень (14) – звичайне диференціальне рівняння (n –1)-го порядку щодо невідомої функції $z = z(x)$.

Подальші міркування є такими ж, як у випадках а) і б).

г) У цьому випадку порядок рівняння завжди може бути знижений на одиницю.

Дійсно, якщо

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \text{ то}$$

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \text{ і}$$

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = c_1$$

- рівняння (n–1)-го порядку.

Рівняння (1) може не бути рівнянням у повних похідних, але після деяких перетворень зводитися до нього.

ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ n-ГО ПОРЯДКУ

Лінійним рівнянням n-го порядку називається рівняння вигляду

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{15}$$

де $p_i(x)$ і $f(x)$ – відомі функції, y – невідома функція незалежної змінної x.

Якщо $f(x) \equiv 0$ при $x \in \Im$ то на $\Im$ (15) — *лінійне однорідне* рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{16}$$

у противному випадку, (15) — *лінійне неоднорідне* рівняння.

n функцій $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ називаються *лінійно незалежними* (ЛНЗ) на $\Im$, якщо тотожність

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \text{ на } \Im$$

с постійними числами α_i виконується тільки тоді, коли всі $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) чи *базисом* лінійного однорідного рівняння (16) на $\Im$ називається n ЛНЗ на $\Im$ розв'язків цього рівняння.

Нехай $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — ФСР лінійного однорідного рівняння (16) на $\Im$. Тоді загальний розв'язок рівняння (16) дорівнює лінійної комбінації цієї ФСР із довільними постійними:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

де c_i — довільні сталі, $i = \overline{1, n}$.

Лінійне однорідне рівняння (16) називається *рівнянням, що відповідає лінійному неоднорідному рівнянню* (15).

Одним з класів лінійних рівнянь, що інтегруються в квадратурах і часто зустрічаються на практиці, є лінійні диференціальні рівняння *n-го* порядку з постійними коефіцієнтами.

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянемо лінійне однорідне рівняння *n-го* порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{17}$$

де a_i — постійні дійсні числа. Рівнянню (17) поставимо у відповідність алгебраїчне рівняння виду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\ , \tag{18}$$

яке називається *характеристичним* рівнянням, а його корені – *характеристичними числами* рівняння (17).

Структура ФСР (а, виходить, і загального розв’язку) рівняння (17) залежить від значень коренів характеристичного рівняння (18). Розрізняють чотири випадки.

1) Число λ_1 — простий дійсний корінь характеристичного рівняння (18). Йому у ФСР рівняння (17) відповідає розв’язок

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}\ .$$

2) Число $\lambda_1 = a + i\cdot b$ — простий комплексний корінь характеристичного рівняння. Тоді $\lambda_2 = a - i\cdot b$ — теж простий корінь характеристичного рівняння (18). Парі простих комплексно сполучених коренів $a \pm i\cdot b$ відповідають два дійсних лінійно незалежних розв’язки

$$y_1 = e^{ax}\cos bx\ ,\quad y_2 = e^{ax}\sin bx$$

3) Число λ_1 — дійсний корінь кратності k. Йому відповідає k дійсних лінійно незалежних розв’язків рівняння (17):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}\ ,\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\lambda_1 x}\ \ldots$$

4) Кожне з чисел $a \pm i\cdot b$ є коренем кратності k. Їм відповідають $2k$ базисних розв’язків вигляду

$$y_1 = e^{ax}\cos bx\ ,\ y_3 = xe^{ax}\cos bx\ ,\ \ldots,\ y_{2k-1} = x^{k-1}e^{ax}\cos bx\ ,$$

$$y_2 = e^{ax}\sin bx\ ,\ y_4 = xe^{ax}\sin bx\ ,\ \ldots,\ y_{2k} = x^{k-1}e^{ax}\sin bx\ \ldots$$

Доведено, що розв’язки, що відповідають різним кореням характеристичного рівняння (16), є лінійно незалежними. Тоді, після знаходження всіх розв’язків, що відповідають усім кореням характеристичного рівняння, для знаходження загального розв’язку рівняння (17) залишилося скористатися теоремою про його загальний розв’язок.

ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

Нехай $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — ФСР рівняння (16), $z(x)$ — довільний частинний розв'язок рівняння (15). Тоді загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (15) дорівнює сумі загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (16), що відповідає рівнянню (15), і любого частинного розв'язку лінійного однорідного рівняння (15), тобто

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k + z(x).$$

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (21)$$

Якщо $f(x)$ — елементарна функція, то рівняння (21) інтегрується в квадратурах за допомогою методу варіації постійних Лагранжа, тому що рівняння (17) має ФСР, що складається з елементарних функцій (метод Лагранжа вивчите самостійно).

Розглянемо випадок лінійних неоднорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами і спеціальним видом правої частини. Якщо права частина рівняння (21) має так званий спеціальний вигляд, то воно може бути вирішено (крім методу варіації постійних Лагранжа) також методом невизначених коефіцієнтів. Зупинимося на цьому питанні. Укажемо спеціальні види правих частин і відповідні їм окремі розв'язки:

1. $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x),$ (22)

   де $P_m(x)$ — поліном від x ступеня m. Тоді частинний розв'язок $z(x)$ рівняння (21) із правою частиною (22) має вигляд

   $$z(x) = x^s e^{\alpha x} Q_m(x),$$

   де число α є коренем кратності s характеристичного рівняння (18), $Q_m(x)$ — поліном від x того ж ступеня m з невизначеними коефіцієнтами.

2. $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$ (23)

   де $P_m(x)$ і $Q_l(x)$ — поліноми від x ступенів m і l відповідно. Тоді частинний розв'язок рівняння (21) варто шукати в такому вигляді:

   $$z(x) = x^s e^{\alpha x}(R_q(x)\cos\beta x + T_q(x)\sin\beta x),$$

   де $\alpha + i\beta$ — корінь характеристичного рівняння кратності s, $R_q(x)$ і $T_q(x)$ — поліноми ступеня q з невизначеними коефіцієнтами, $q = \max\{m, l\}$.

Якщо $z_k(x)$, $k = \overline{1,l}$ — розв'язки відповідно рівнянь $Ly = f_k(x)$, $k = \overline{1,l}$, то функція $z(x) = z_1(x) + \ldots + z_l(x)$ є розв'язком рівняння

$$Ly = f_1(x) + \ldots + f_l(x).$$

РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА

Лінійним неоднорідним рівнянням Ейлера називається рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \,. \qquad (32)$$

Якщо $f(x) \equiv 0$, то (32) — лінійне однорідне рівняння Ейлера.

Рівняння Ейлера можливо привести до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Дійсно, нехай $x > 0$. Зробимо перетворення незалежної змінної

$$x = e^t, t \in R, \qquad (33)$$

$$y(x) = y(e^t), \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

тоді

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t}\right)e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}.$$

За методом індукції можливо показати, що k-я похідна $\frac{d^ky}{dx^k}$ дорівнює лінійній комбінації похідних від першого до k-того порядку зі сталими коефіцієнтами, до яких входить множник e^{-kt}. Таким чином, підставляючи (33) до рівняння (32), коефіцієнти стають сталими в залік того, що

$$\forall k = \overline{0,n}\colon a_{n-k} x^k e^{-kt} = a_{n-k} e^{kt} e^{-kt} = a_{n-k} = const.$$

Якщо $x < 0$, то зробимо перетворення $x = -e^t, t \in R$. Це доведе до розв'язку того ж вигляду, що у випадку $x > 0$ (з перетворенням x на $-x$).

До рівняння Ейлера можна привести рівняння вигляду

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0$$

перетворенням $ax + b = t$.

ТЕМА 5

Диференціальні рівняння в частинних похідних

Рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$\Phi(x_1,..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ... , \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 . \qquad (1)$$

Розв'язком рівняння (1) називається функція

$$u = u(x_1, x_2, ..., x_n) , \qquad (2)$$

яка визначена і неперервна разом з частинними похідними в деякій області змінних $x_1,.., x_n$ і перетворює в цій області рівняння (1) в тотожність. При цьому $x_1,.., x_n$ і значення $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ... , \frac{\partial u}{\partial x_n}$ лежать в області визначення функції $\Phi(x_1,..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ... , \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Якщо в рівнянні (1) функція $\Phi(x_1,..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ... , \frac{\partial u}{\partial x_n})$ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то воно називається **лінійним**

$$X_1(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, ..., x_n, u). \qquad (3)$$

Розглянемо однорідне рівняння, тобто випадок коли $R(x_1,..., x_n, u) \equiv 0$, а функції $X_i(x_1,..., x_n, u)$, $i = 1,2,..., n$ не залежать від u

$$X_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \qquad (4)$$

Рівняння (4) має очевидний розв'язок

$$u = c \ (c=const). \qquad (5)$$

Разом з (4) будемо розглядати систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,.., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,.., x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,.., x_n)} . \qquad (6)$$

Припустимо, що коефіцієнти $X_1(x_1,.., x_n), \ldots, X_n(x_1,.., x_n)$ рівняння (4) неперервні разом з частинними похідними по $x_1,..,x_n$ в деякому околі точки $x_1^{(0)}$,.., $x_n^{(0)}$ і в цій точці вони одночасно не перетворюються в нуль (тобто точка ($x_1^{(0)}$,.., $x_n^{(0)}$) не є особливою точкою системи (6)). Наприклад, припустимо, що

$$X_n(x_1^{(0)},.., x_n^{(0)}) \neq 0. \qquad (7)$$

При цьому припущенні система (6) має рівно (n-1) незалежних інтегралів, визначених і неперервних разом з частинними похідними в околі точки ($x_1^{(0)}$,.., $x_n^{(0)}$). Це випливає з того, що система (6) рівносильна нормальній системі розмірності (n-1)

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1(x_1,..,x_n)}{X_n(x_1,..,x_n)},$$

$$\frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2(x_1,..,x_n)}{X_n(x_1,..,x_n)}, \tag{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}(x_1,..,x_n)}{X_n(x_1,..,x_n)}$$

для якої виконуються умови теореми про існування незалежних інтегралів нормальної системи.

ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОРІДНОГО ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Нехай

$$\psi_1(x_1,\,...,x_n),...\,,\psi_{n-1}(x_1,\,...,x_n) \tag{9}$$

незалежні інтеграли системи (6). Тоді функція

$$u=\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_{n-1})\,, \tag{10}$$

де $\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_{n-1})$ – будь-яка диференційована функція, буде розв'язком рівняння (4)

Дійсно, підставимо (10) в (4)

$$X_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+...+X_n\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=$$

$$=X_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}+X_2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2}+...+X_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}(X_1\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2}+...+X_n\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n})\equiv 0\,. \tag{11}$$

Формулу (10) називають загальним розв'язком рівняння (4). На відміну від загального розв'язку звичайного диференціального рівняння в (10) входять не довільні сталі, а довільна функція.

Задача знаходження загального розв'язку рівняння (4) рівносильна задачі знаходження (n-1) незалежних інтегралів відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі.

Розглянемо випадок двох незалежних змінних

$$X(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0\,. \tag{12}$$

Запишемо систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}. \tag{13}$$

Якщо $\psi(x,y)$ – інтеграл системи (13), то

$$z = \Phi(\psi(x,y)) \tag{14}$$

загальний розв’язок рівняння (12). Тут $\Phi(\psi(x,y))$ довільна неперервно диференційована функція від ψ.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

Перейдемо до постановки і розв’язання задачі Коші для рівняння (4). Серед всіх розв’язків рівняння знайти такий

$$u = f(x_1,...,x_n), \tag{15}$$

який задовольняє початковій умові

$$u = \varphi(x_1,...,x_{n-1}) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}, \tag{16}$$

або

$$u\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1,...,x_{n-1}), \tag{17}$$

де $\varphi(x_1,...,x_{n-1})$ задана неперервно-диференційована функція від $x_1,...,x_{n-1}$.

Для випадку двох змінних: знайти функцію

$$z = f(x,y), \tag{18}$$

яка задовольняє умові

$$z = \varphi(y) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}. \tag{19}$$

Геометрично (19),(18) означає, що серед всіх інтегральних поверхонь знайти ту, яка проходить через задану криву (17) при $x_n = x_n^{(0)}$. Ця крива лежить в площині $x_n = x_0$, яка паралельна площині YOZ.

В загальному випадку розв’язування задачі Коші зводиться до визначення вигляду функції $\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})$ так , щоб

$$\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1,...,x_{n-1}). \tag{20}$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,...,x_n)\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \overline{\psi_1} \\ \text{M} \\ \psi_{n-1}(x_1,...,x_n)\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \overline{\psi}_{n-1} \end{cases}. \tag{21}$$

Тоді (20) перепишемо так

$$\Phi(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1,...,x_{n-1}). \tag{22}$$

Розв’яжемо систему (21) в околі точок $x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}$, відносно $x_1,...,x_{n-1}$ (це можливо так як $\psi_1,...,\psi_{n-1}$ – незалежні інтеграли)

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_{n-1}) \end{cases}. \quad (23)$$

Тоді функцію $\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})$ вибираємо таким чином

$$\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1,...,\psi_{n-1}),...,\omega_{n-1}(\psi_1,...,\psi_{n-1})). \quad (24)$$

Тоді умова (8.40) буде виконуватися

$$\Phi(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\overline{\psi}_1,...,\overline{\psi}_{n-1}),...,\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,...,\overline{\psi}_{n-1})) = \varphi(x_1,...,x_{n-1}).$$

Тому функція

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1,...,\psi_{n-1}),...,\omega_{n-1}(\psi_1,...,\psi_{n-1})) \quad (25)$$

– шуканий розв'язок задачі Коші.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Розглянемо неоднорідне рівняння:

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1,...,x_n,u). \quad (26)$$

Розв'язок диференціального рівняння (26) шукаємо у вигляді

$$V(x_1,...,x_n,u) = 0, \quad (27)$$

де $V(x_1,...,x_n,u)$ неперервно-диференційована функція по всім змінним і $\dfrac{\partial V(x_1,...,x_n,u)}{\partial u} \neq 0$ в околі точки $(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)},u^{(0)})$.

Припустимо, що в (26) $u(\cdot)$ залежить від $x_1,...,x_n$. Продиференціюємо (26) по x_k

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (28)$$

Підставивши (28) в (26), отримаємо

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + ... + X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + R(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \quad (29)$$

Рівняння (29) – це вже однорідне рівняння. Його розв'язуємо по відомій схемі:

а) складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,...,x_n,u)}=...=\frac{dx_n}{X_n(x_1,...,x_n,u)}=\frac{du}{R(x_1,...,x_n,u)}; \qquad (30)$$

б) знаходимо n незалежних інтегралів

$$\psi_1(x_1,...,x_n,u),...,\psi_n(x_1,...,x_n,u); \qquad (31)$$

в) записуємо загальний розв'язок

$$V=\Phi(\psi_1(x_1,...,x_n,u),...,\psi_n(x_1,...,x_n,u))=0. \qquad (32)$$

ЗАДАЧА КОШІ

Для неоднорідних диференціальних рівнянь в частинних похідних задача Коші ставиться та розв'язується для рівняння (26) аналогічно: знайти таку функцію

$$u=f(x_1,...,x_n), \qquad (33)$$

яка задовольняє початковій умові

$$u=\varphi(x_1,...,x_{n-1}) \text{ при } x_n=x_n^{(0)}, \qquad (34)$$

де $\varphi(x_1,...,x_{n-1})$ – задана неперервно-диференційована функція від $x_1,...,x_{n-1}$.

Алгоритм для знаходження розв'язку задачі Коші:

а) перепишемо початкові умови (34) у вигляді

$$u-\varphi(x_1,...,x_{n-1})=0 \text{ при } x_n=x_n^{(0)};$$

б) знаходимо n інтегралів $\psi_1,...,\psi_n$ і складаємо систему

$$\begin{cases}\psi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n^{(0)},u)=\overline{\psi_1}\\ \vdots\\ \psi_n(x_1,...,x_{n-1},x_n^{(0)},u)=\overline{\psi_n}\end{cases}; \qquad (35)$$

в) розв'язуємо систему (35) відносно $x_1,...,x_{n-1},u$

$$\begin{cases}x_1=\omega_1(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_n)\\ \vdots\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_n)\\ u=\omega_n(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_n)\end{cases}; \qquad (36)$$

г) записуємо розв'язок задачі Коші в вигляді

$$\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})=\psi_n(\psi_1,...,\psi_n)-\varphi(\omega_1(\psi_1,...,\psi_n),...,\omega_{n-1}(\psi_1,...,\psi_n)). \qquad (37)$$

При цьому умова (34) буде виконуватися.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Головач Г.П Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. –К.:Техніка, 1997. –285с.
2. Каленюк П. І., Рудавський Ю. К., Тацій Р. М., Клюйник І. Ф., Колісник В. М., Костробій П. П., Олексів І. Я. Диференціальні рівняння. // Навчальний посібник. - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2014. 380 с.
3. Лиходєєва Г., Пастирєва К. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно. – Вид-во: Центр навчальної літератури, 2018. – 144 с.
4. Маринець К. В. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування, Частина І: Навч. Посіб. – Ужгород:Вид-тво УжНУ «Говерла», 2015. – 83 с.
5. Маринець К. В. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь, Частина ІІ: Навч. Посіб. – Ужгород:Вид-тво УжНУ «Говерла», 2017. – 83 с.
6. Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. –К.: Либідь, 1997. –192с.
7. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у задачах: Навч. Посібник. – К.: Либідь, 2003. – 504 с.
8. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. –360с.
9. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Книга 2. – К: Либідь, 2010.
10. Шкіль М.І., Сотниченко М.А. Звичайні диференціальні рівняня. –К.: Вища школа, 1992. –303с.

ЗМІСТ

Диференціальні рівняння [Текст]: *Конспект лекцій для студентів спеціальності «Прикладна математика» денної форми навчання / уклад. О.А. Мікуліч. — Луцьк: ЛНТУ, 2026. — 44 с*

Комп'ютерний набір О.А. Мікуліч

Редактор О.А. Мікуліч

Підп. до друку «____»______________2026 р.
Формат А4. Папір офс.
Ум. друк. арк. 4. Обл.-вид. арк. 2,75.
Тираж 10 прим.

Інформаційно-видавничий відділ
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – кафедра ПММ ЛНТУ