МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Методичні вказівки до виконання самостійних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
освітньої програми «Штучний інтелект та аналіз масивів даних»
галузь знань F Інформаційні технології
спеціальності  F1 Прикладна математика
денної форми навчання

Луцьк 2026

УДК 517.9
Д 14

До друку
Голова вченої ради факультету архітектури, будівництва та дизайну
_________________ О. АНДРІЙЧУК

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки ________________ Н. ПОЛІЩУК

Рекомендовано до видання вченою радою факультету архітектури, будівництва та дизайну ЛНТУ,
протокол № ___ від «__» _____________ 2026 року.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри прикладної математики та механіки
протокол № __ від «__» ______________ 2026 року.
Завідувача кафедри ________________ О. МІКУЛІЧ

Укладач: _____________ О. МІКУЛІЧ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Рецензент: _____________ А. СЯСЬКИЙ, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ

Відповідальний за випуск: _____________ О.МІКУЛІЧ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та механіки ЛНТУ.

Д14 *Диференціальні рівняння. Методичні вказівки до виконання самостійних робіт для здобувачів першого (бакалаврського) рівня спеціальності «Прикладна математика» денної форми навчання / укладач О.А. Мікуліч. – Луцьк: ЛНТУ, 2026. – 32 с*.

Методичні вказівки складені відповідно до діючої програми курсу «Диференціальні рівняння та ДРЧП» з метою сприяння самостійного вивчення важливого розділу математики — диференціальних рівнянь, та методів їх розв’язання. Тут наведено велика кількість прикладів розв’язків типових задач та подано завдання для самостійного підготовки студента.

## ЗМІСТ

## ВСТУП

При розв'язуванні різноманітних задач фізики, хімії, математики, та інших наук отримують математичні моделі у вигляді рівнянь, що пов'язують одну або декілька незалежних змінних, невідому функцію цих змінних і похідні (або диференціали) цієї функції. Такі рівняння називають **диференціальними.** Якщо незалежна змінна одна, то рівняння називається **звичайним**; якщо незалежних змінних дві або більше, то рівняння називається **диференціальним рівнянням з частинними похідними.**

Якщо проаналізувати методи розв’язання диференціальних рівнянь, то для отримання розв’язків необхідно добре вміти інтегрувати та брати похідні. Все решта зводиться до низки схем, що не складно зрозуміти. Нижче наведено приклади розв’язання основних типів диференціальних рівнянь та завдання для самостійного опрацювання.

### Таблиця інтегралів

**1.** $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$ .

**2.** $\int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$ .

**3.** $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ .

**4.** $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$ .

**5.** $\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \cdot \ln a} + C$ .

**6.** $\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$ .

7. $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$ .

**8.** $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ .

**9.** $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ .

**10.** $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ .

.

## Диференціальні рівняння першого порядку

### *Рівняння, розв'язані відносно похідної*

*Диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння, яке містить незалежну змінну .., невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну $y'$:

$$F(x,\ y,\ y') = 0\,. \tag{1}$$

Розв'язавши рівняння (1) відносно $y'$ (якщо це можливо), приходимо до диференціального рівняння

$$y' = F(x,\ y), \tag{2}$$

яке називають *розв'язаним відносно похідної*.

*Розв'язком* рівняння (1) (або (2)) на інтервалі $(a,\ b)$ називають диференційовну на цьому інтервалі функцію .., яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність при всіх $x \in (a,\ b)$:

$$F\big(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)\big) \equiv 0\,.$$

*Найпростіше диференціальне рівняння першого порядку*

$$y' = f(x) \tag{3}$$

зводиться до обчислення невизначеного інтеграла:

Так як
$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$
то
$$y = \int f(x)\,dx + C\,.$$

Тут під невизначеним інтегралом розуміємо одну з первісних функції $f(x)$.

ПРИКЛАДИ.

**1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = x^2 + 4x - 7\,.$$

Розв'язання:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 7\,,$$

$$dy = \left(x^2 + 4x - 7\right)dx\,,$$

$$\int dy = \int \left(x^2 + 4x - 7\right)dx\,,$$

$$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C$$

– загальний розв'язок заданого диференціального рівняння. ..

**2.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = \cos x$, якщо $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = \cos x\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x\,,$$

$$dy = \cos x\, dx,$$
$$\int dy = \int \cos x\, dx,$$
$$y = \sin x + C$$

– загальний розв’язок. Тепер знайдемо розв’язок задачі Коші. За умовою задачі $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Тому, підставляючи в загальний розв’язок, маємо

$$3 = \sin\frac{\pi}{2} + C,$$
$$3 = 1 + C,$$
$$C = 3 - 1 = 2.$$

Підставивши $C = 2$ в загальний розв’язок, знаходимо частинний розв’язок:

$$y = \sin x + 2.$$

Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати диференціальні рівняння:

**1.** $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

**2.** $y' = \operatorname{arctg} x$.

**3.** $y' = tgx$.

**4.** $y' = e^{2x} + 4$.

**5.** $y' = x - \dfrac{x}{x-1}$.

**6.** $y' = x^3 - 5x^2 + 4$, якщо $y(1) = 2$

**7.** $y' = \dfrac{1}{x^2}$, якщо $y(-1) = 5$.

**8**. $y' = \dfrac{x-1}{x^2}$, якщо $y(2) = 2$.

**9**. $y' = \cos \pi x$, якщо $y(0) = 0$.

**10**. $y' = 2^{2x}$, якщо $y(0) = 4$.

### *Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними*

Диференціальне рівняння виду

$$y' = f(x)\cdot g(y) \tag{4}$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*. Права частина рівняння (4) є добутком двох функцій, залежних лише від однієї змінної: перша функція залежить лише від *x*, а друга – лише від *y*.

Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$,

то маємо $y' = f(x)\cdot g(y)$,

або $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$.

Помножимо обидві частини рівності на вираз $\dfrac{dx}{g(y)}$ (припускаємо, що $g(y)\neq 0$). Отримаємо рівняння з *відокремленими змінними*

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \tag{5}$$

У лівій частині рівності (5) маємо диференціал деякої функції по змінній *y*, а у правій – по змінній *x*.

Інтегруючи рівняння (5)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \tag{6}$$

отримаємо загальний інтеграл (розв’язок) диференціального рівняння (4).

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0 \tag{7}$$

зводиться до диференціального рівняння (4):

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

Інтегруючи ліву частину за змінною *y*, а праву – за змінною *x*, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (7):

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + C.$$

ПРИКЛАДИ.

**1.** Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$.

Розв’язання:

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}\cdot y$.

Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на $dx$ і поділимо на $y$. Отримаємо

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y|=\ln|x|+\ln C,$$

$$\ln|y|=\ln|C\,x|,$$

звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння –

$$y=Cx.$$

**2.** Знайти частковий розв'язок рівняння $\frac{dy}{dx}=3\sqrt{\frac{x}{y}}$, якщо $y(1)=9$.

Розв'язання:

Так як $\frac{dy}{dx}=3\sqrt{\frac{x}{y}}=3\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$, то це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Помноживши рівняння на $\sqrt{y}\,dx$, дістанемо

$$\sqrt{y}\,dy=3\sqrt{x}\,dx.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$$\int\sqrt{y}\,dy=3\int\sqrt{x}\,dx,$$

$$\int y^{\frac{1}{2}}\,dy=3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx,$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=3\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C,$$

звідки знаходимо загальний інтеграл

$$y^{\frac{3}{2}}=3x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}C,\text{ або } y^{\frac{3}{2}}=3x^{\frac{3}{2}}+C.$$

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y=9$ при $x=1$. Підставляючи вказані значення $y$ та $x$ у загальний інтеграл, знаходимо сталу $C$:

$$9^{\frac{3}{2}}=3\cdot1^{\frac{3}{2}}+C,$$

$$27=3+C,$$

$$C=24.$$

Підставивши знайдене значення $C=24$ у вираз для загального інтегралу, дістаємо частинний інтеграл заданого диференціального рівняння –

$$y^{\frac{3}{2}}=3x^{\frac{3}{2}}+24.$$

## Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

**1.** $\left(1+e^{2x}\right)y^2 y' = e^x$,

**2.** $y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$,

**3.** $6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$,

**4.** $\sqrt{4+y^2}\,dx - ydy = x^2 ydy$,

**5.** $(8+e^x)dy - ye^x dx = 0$,

**6.** $\sqrt{5+y^2}\,dx + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$,

**7.** $y\ln y + xy' = 0$

**8.** $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.

**9.** $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

**10.** $x^2 y' + y = 0$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

**1.** $x^2\left(y^3+5\right)dx + \left(x^3+5\right)y^2 dy = 0$, якщо $y(0)=1$.

**2.** $\left(x^2+1\right)y' + 2xy^2 = 0$, якщо $y(0)=1$.

**3.** $y'\left(x^2+1\right) = 2xy$, якщо $y(0)=1$.

**4.** $y = 2y'\sqrt{x}$, якщо $y(4)=1$.

**5.** $y' = \left(2y+1\right)\operatorname{ctg} x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

**6.** $y(1+\ln y) + xy' = 0$, якщо $y(e)=1$.

**7.** $(3+e^x)yy' = e^x$, якщо $y(0)=1$.

**8.** $y' = \left(y-1\right)\operatorname{tg} x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

**9.** $\dfrac{y'}{\sin x} = \left(4y-2\right)\cos x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

**10.** $y\left(2+3\ln y\right)dx + xdy = 0$, якщо $y(e) = \dfrac{1}{2}$.

### *Однорідні диференціальні рівняння*

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є *однорідною функцією нульового виміру*, тобто для будь-якого $t > 0$

$$f(tx, ty) = f(x, y). \qquad (8)$$

Покладемо $t = \dfrac{1}{x}$:

$$f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тоді, з урахуванням (8), рівняння (2) запишеться у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (9)$$

Для розв'язання рівняння (9) введемо допоміжну невідому функцію

$$u = u(x),$$

поклавши

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або} \quad y = ux, \qquad (10)$$

і перетворимо однорідне рівняння у рівняння з відокремлюваними змінними. З (10) знаходимо:

$$y' = u'x + u.$$

Тому рівняння (9) запишеться у вигляді:

$$u + xu' = g(u), \quad \text{або} \quad x\frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}. \qquad (11)$$

Проінтегрувавши рівняння (11), одержимо:

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість $u$ вираз $\dfrac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

<u>ПРИКЛАД.</u>

**1.** Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}.$$

Розв'язання:

Права частина даного рівняння – функція $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f\left(tx, ty\right)=\frac{\left(tx\right)^2+\left(ty\right)^2}{2\left(tx\right)^2}=\frac{t^2\left(x^2+y^2\right)}{2t^2x^2}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}=f\left(x, y\right),$$

тобто має місце рівність (8).

Застосуємо підстановку

$$y=ux,$$

$$y'=u'x+u.$$

Отримаємо:

$$u'x+u=\frac{x^2+x^2u^2}{2x^2},$$

$$u'x+u=\frac{x^2\left(1+u^2\right)}{2x^2},$$

$$u'x+u=\frac{1+u^2}{2},$$

$$u'x=\frac{1+u^2}{2}-u,$$

$$u'x=\frac{u^2-2u+1}{2},$$

$$u'x=\frac{\left(u-1\right)^2}{2},$$

$$u'=\frac{\left(u-1\right)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}. \qquad (12)$$

Диференціальне рівняння (12) – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\left(u-1\right)^2}{2}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{2du}{\left(u-1\right)^2}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{2du}{\left(u-1\right)^2}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1}=\ln\left|x\right|+\ln C,$$

$$\frac{-2}{u-1}=\ln C\left|x\right|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u=\frac{y}{x}$:

$$\frac{-2}{\frac{y}{x}-1}=\ln C\left|x\right|,$$

$$\frac{-2x}{y-x}=\ln C|x|,$$

звідки знаходимо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння –

$$y=x-\frac{2x}{\ln C|x|}.$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Розв’язати диференціальні рівняння:

**1.** $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

**2.** $(x+y)dx-xdy=0$.

**3.** $(x^2-xy)dy+y^2dx=0$.

**4.** $(2\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$.

**5.** $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$.

**6.** $y'=\dfrac{y}{x}+5\cos^2\dfrac{y}{x}$.

**7.** $y'+\sqrt{4-\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{y}{x}$.

**8.** $xy'-y=\sqrt{y^2+2x^2}$.

**9.** $y'=\dfrac{y}{x}+\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$.

**10.** $(x^2+3xy+y^2)dx-x^2dy=0$.

## *Лінійні диференціальні рівняння*

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x), \qquad (13)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(a, b)$, називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

У випадку, коли $P(x) = \pm Q(x)$ або $Q(x) = 0$, рівняння (13) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язання рівняння (13). Один із них – *метод Бернуллі*. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v, \qquad (14)$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з рівнянням (13).

Знаходимо похідну функції $y$:

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи $y$ та $y'$ в рівняння (13), отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x) \qquad (15)$$

Виберемо функцію $v$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0. \qquad (16)$$

Знаходимо $v$ з рівняння (16), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v,$$

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

звідки

$$\ln|v| = -\int P(x)dx,$$

або

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи $v$, знаходимо $u$ з рівняння:

$$u'v = Q(x),$$

яке випливає з (15) та (16):

$$v\frac{du}{dx} = Q(x),$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)}dx + C.$$

Підставляємо знайдені функції $u$ та $v$ у формулу (14) і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \qquad (17)$$

При розв'язуванні конкретних задач простіше виконувати вказаний вище алгоритм, аніж застосовувати готову формулу (17).

ПРИКЛАД.

**1.** Розв'язати диференціальні рівняння: $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$.

Розв'язання

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді (див. формулу (14)):

$$y = uv.$$

Тоді $$y' = u'v + uv'.$$

Підставляємо $y$ та $y'$ у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію $v$ так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0. \qquad (**)$$

Знаходимо $v$:

$$v' = \frac{2v}{x},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = 2\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln x^2,$$

звідки $$v = x^2.$$

Зауважимо, що оскільки в якості функції $v$ ми вибираємо один з розв'язків рівняння (**), то тут і надалі у методі Бернуллі, після інтегрування диференціального рівняння для знаходження $v$, покладаємо $C = 0$.

Підставляючи знайдену функцію $v$ в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження $u$:

$$u' \cdot x^2 = 2x^3,$$

$$u' = \frac{2x^3}{x^2},$$

$$\frac{du}{dx} = 2x,$$
$$du = 2x\,dx,$$
$$\int du = \int 2x\,dx,$$
$$u = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C,$$
$$u = x^2 + C.$$

За формулою (14) знаходимо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння –

$$y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2.$$

Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати диференціальні рівняння:

**1.** $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x$.

**2.** $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin 2x}{x}$.

**3.** $xy' - y = x^2 \cos x$.

**4.** $x^2 y' + 5xy + 4 = 0$.

**5.** $y' - \dfrac{2x}{x^2+1} y = x\sqrt{x^2+1}$.

**6.** $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x$.

**7.** $\left(x^2+1\right)y' + 4xy = 3$.

**8.** $y' - y = e^x$.

**9.** $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$.

**10.** $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$.

## *Диференціальне рівняння Бернуллі*

Рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^{\alpha}$$

або

$$y' = -P(x)y + Q(x)\cdot y^{\alpha}, \tag{18}$$

де функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі $(a, b)$, $\alpha \in R$, причому $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі*.

При $\alpha = 0$ рівняння (18) перетворюється в розглянуте раніше лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

а при $\alpha = 1$ – в рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = \big(Q(x) - P(x)\big)y.$$

Розв'язок рівняння Бернуллі зручно шукати у вигляді

$$y = u\cdot v.$$

<u>ПРИКЛАД.</u>

**1.** Розв'язати диференціальні рівняння: $x^2y^2\dfrac{dy}{dx} + xy^3 = a^2$ ($a$ – стала).

Розв'язання:

$$x^2y^2y' + xy^3 = a^2,$$

$$y^2y' + \frac{xy^3}{x^2} = \frac{a^2}{x^2},$$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{a^2}{x^2y^2}.$$

Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну:

$$y = uv.$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{a^2}{x^2u^2v^2},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{a^2}{x^2u^2v^2}. \tag{*}$$

Виберемо функцію $v$ так, щоб $v' + \dfrac{v}{x} = 0$. Знаходимо $v$:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Підставляючи $v$ в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження $u$:

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{a^2}{x^2\cdot u^2\,\frac{1}{x^2}},$$

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{a^2}{u^2},$$

$$u^2du=a^2xdx,$$

$$\int u^2du=a^2\int x\,dx,$$

$$\frac{u^3}{3}=a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right),$$

$$u=\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)}.$$

$$y=uv=\frac{1}{x}\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)},$$

або
$$y^3=\frac{3}{2}\frac{a^2}{x}+\frac{C}{x^3}.$$

## Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати диференціальні рівняння:

**1.** $y'+xy=3xy^3$.

**2.** $y'-\frac{1}{x}y=-y^2$.

**3.** $y'+\frac{2y}{x}=y^2x$.

**4.** $y'+2xy=2y^3x^3$.

**5.** $xy'-y(2y\ln x-1)=0$.

**6.** $xy'-4y=x^2\cdot\sqrt{y}$.

**7.** $\frac{x}{y}y'=x^2+y^3$.

**8.** $y'=\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y}$.

**9.** $xy'+y=(\ln x+1)y^2$.

**10.**. $x^2y'+xy+y^3=0$.

## Диференціальні рівняння другого порядку

*Диференціальним рівнянням другого порядку* називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну *x*, невідому функцію *y* та першу і другу похідні цієї функції:

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0, \tag{19}$$

або

$$y'' = f\left(x, y, y'\right). \tag{20}$$

*Загальним розв'язком* диференціального рівняння (19) (або (20)) є функція

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right),$$

яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність при довільних фіксованих значеннях сталих $C_1$ та $C_2$.

Будь-який *частинний розв'язок* диференціального рівняння другого порядку одержується із загального розв'язку накладанням на нього *початкових умов задачі Коші* у точці $x_0$:

$$y\left(x_0\right) = y_0 \quad \text{і} \quad y'\left(x_0\right) = y_0'. \tag{21}$$

При цьому сталі $C_1$ і $C_2$ будуть мати конкретні значення $C_1^0$ і $C_2^0$.

### *Найпростіші диференціальні рівняння другого порядку*

Найпростіше диференціальне рівняння другого порядку має вигляд:

$$y'' = f\left(x\right), \tag{22}$$

де функція $f\left(x\right)$ – задана.

Розв'яжемо рівняння (22). За означенням другої похідної

$$y'' = \left(y'\right)' = \frac{d\left(y'\right)}{dx}.$$

Тоді маємо

$$\frac{d\left(y'\right)}{dx} = f\left(x\right).$$

Звідси

$$d\left(y'\right) = f\left(x\right)dx$$

і

$$y' = \int f\left(x\right)dx + C_1,$$

де $C_1$ – довільна стала. Аналогічно знаходимо

$$\frac{dy}{dx} = \int f\left(x\right)dx + C_1$$

або

$$dy = \left(\int f\left(x\right)dx + C_1\right)dx,$$

звідки

$$y = \int\left(\int f\left(x\right)dx\right)dx + C_1x + C_2. \tag{23}$$

Це і є загальний розв'язок диференціального рівняння (22).

<u>ПРИКЛАДИ.</u>

**1.** Розв'язати диференціальні рівняння $y'' = 12x^2 - 6x + 8$.

Розв'язання:

Маємо рівняння виду (22). Послідовно дістанемо:

$$\frac{d\left(y'\right)}{dx}=12x^2-6x+8,$$

$$d\left(y'\right)=\left(12x^2-6x+8\right)dx,$$

$$y'=\int\left(12x^2-6x+8\right)dx=12\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}+8x+C_1=4x^3-3x^2+8x+C_1.$$

Отже,

$$y'=4x^3-3x^2+8x+C_1,$$

$$dy=\left(4x^3-3x^2+8x+C_1\right)dx,$$

$$y=\int\left(4x^3-3x^2+8x+C_1\right)dx=4\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+8\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2.$$

Отримали розв'язок виду (23).

Отже, $y=x^4-x^3+4x^2+C_1x+C_2$.

**2.** Знайти частинний розв'язок рівняння $y''=\sin 5x$, якщо $y(0)=2$, $y'(0)=-1$.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння. Це рівняння виду (22). Послідовно дістанемо:

$$\frac{d\left(y'\right)}{dx}=\sin 5x,$$

$$d\left(y'\right)=\sin 5x\,dx,$$

$$y'=\int\sin 5x\,dx=\frac{1}{5}\int\sin 5x\,d\left(5x\right)=-\frac{1}{5}\cos 5x+C_1.$$

Остаточно маємо

$$y'=-\frac{1}{5}\cos 5x+C_1,$$

$$dy=\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+C_1\right)dx,$$

$$y=\int\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+C_1\right)dx=-\frac{1}{25}\sin 5x+C_1x+C_2.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з умовами $y(0)=2$ і $y'(0)=-1$:

$$\begin{cases} y(0)=-\frac{1}{25}\sin 0+C_1\cdot 0+C_2=2 \\ y'(0)=-\frac{1}{5}\cos 0+C_1=-1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2=2 \\ -\frac{1}{5}+C_1=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} C_2=2 \\ C_1=-1+\frac{1}{5}=-\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Отже,
$$y = -\frac{1}{25}\sin 5x - \frac{4}{5}x + 2.$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Розв’язати частинний розв’язок диференціальних рівнянь:

**1.** $y'' = 120x^4 + 4$, якщо $y(1) = -10$, $y'(1) = 3$.

**2.** $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$, якщо $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$.

**3.** $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

**4.** $y'' = 12x^4 + \dfrac{4}{x^4}$, якщо $y(2) = 1$, $y'(2) = 3$.

**5.** $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x - 4}}$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

**6.** $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

**7.** $y'' = \dfrac{x+2}{x^2 + 4x + 8}$, якщо $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$.

**8.** $y'' = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 4x - 8}}$, якщо $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

**9.** $y'' = x\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

**10.** $y'' = e^x \dfrac{1-e^x}{2+e^{2x}}$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

## *Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку*

Одним із методів розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку є метод пониження порядку. Він полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до диференціального рівняння першого порядку.

Розглянемо два типи таких диференціальних рівнянь.

**1°.** Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду

$$F\left(x, y', y''\right) = 0, \tag{24}$$

або

$$y'' = f\left(x, y'\right), \tag{25}$$

яке не містить явно шуканої функції $y = y\left(x\right)$.

Зробимо заміну

$$y' = z\left(x\right),$$

тоді

$$y'' = z'.$$

Дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F\left(x, z, z'\right) = 0,$$

або

$$z' = f\left(x, z\right), \tag{26}$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок $z = z\left(x, C_1\right)$ рівняння (26), то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' = z\left(x, C_1\right).$$

Звідси маємо загальний розв'язок:

$$y = \int z\left(x, C_1\right)dx + C_2.$$

**2°.** Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду

$$F\left(y,\, y',\, y''\right) = 0, \tag{27}$$

або

$$y'' = f\left(y,\, y'\right), \tag{28}$$

яке не містить явно незалежну змінну *x*.

Зробимо заміну:

$$y' = p\left(y\right),$$

де *p* вважається функцією від *y*. Тоді

$$y'' = \left(y'\right)' = p'_x = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p = pp'_y.$$

Тому дістанемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$F\left(y, p, pp'_y\right) = 0, \text{ або } \ pp'_y = f\left(y, p\right). \tag{29}$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок рівняння (29) $p = p\left(y,\, C_1\right)$, то отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = p\left(y,\, C_1\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = p\left(y, C_1\right),$$

$$\frac{dy}{p\left(y, C_1\right)} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{p\left(y, C_1\right)} = x + C_2 .$$

Обчисливши невизначений інтеграл, отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) рівняння (27) або (28).

## ПРИКЛАДИ.

**1.** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' = -\frac{4}{x} y' + \frac{1}{x^6}$, якщо $y\left(-1\right) = \frac{1}{4}$, $y'\left(-1\right) = 4$.

Розв'язання:

Маємо рівняння виду (25). Зробимо заміну:

$$y' = z .$$

Тоді

$$y'' = z' .$$

Дістанемо рівняння:

$$z' = -\frac{4}{x} z + \frac{1}{x^6} .$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуємо його за методом Бернуллі:

$$z = u\left(x\right) \cdot v\left(x\right),$$

$$z' = u'v + uv' .$$

Тоді

$$u'v + uv' + \frac{4}{x} uv = \frac{1}{x^6},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{4}{x} v\right) = \frac{1}{x^6} . \qquad (*)$$

Виберемо функцію $v$ так, $v' + \frac{4}{x} v = 0$. Знаходимо $v$:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4}{x} v,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{4}{x} dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -4 \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln\left|v\right| = -4 \ln\left|x\right|,$$

$$\ln\left|v\right| = \ln \frac{1}{x^4},$$

$$v=\frac{1}{x^4}.$$

Підставляючи функцію $v$ в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження $u$:

$$u'\cdot\frac{1}{x^4}=\frac{1}{x^6},$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2},$$

$$du=\frac{dx}{x^2},$$

$$u=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C_1.$$

Тоді

$$z=u\cdot v=\frac{1}{x^4}\cdot\left(-\frac{1}{x}+C_1\right)=\frac{C_1}{x^4}-\frac{1}{x^5}.$$

Але $$z=y'.$$

Тому маємо:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{x^4}-\frac{1}{x^5},$$

$$dy=\left(\frac{C_1}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)dx,$$

$$y=\int\left(\frac{C_1}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)dx=C_1\int x^{-4}dx-\int x^{-5}dx=C_1\cdot\frac{x^{-3}}{-3}-\frac{x^{-4}}{-4}+C_2=\frac{1}{4x^4}-\frac{C_1}{3x^3}+C_2.$$

Маємо загальний розв'язок рівняння:

$$y=\frac{1}{4x^4}-\frac{C_1}{3x^3}+C_2.$$

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(-1)=\frac{1}{4},\ y'(-1)=4$:

$$\begin{cases} y(-1)=\frac{1}{4}+\frac{C_1}{3}+C_2=\frac{1}{4} \\ y'(-1)=C_1+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+C_2=0 \\ C_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=3 \\ C_2=-1 \end{cases}$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y=\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{x^3}-1.$

**2.** Знайти розв'язок диференціального рівняння, $y''=-\frac{2}{y^5}$, що задовольняє початкові умови $y(-1)=1,\ y'(-1)=1.$

Розв'язання:

Маємо рівняння виду (28). Зробимо заміну:

$$y'=p(y),$$

$$y''=pp'_y.$$

Дістанемо рівняння виду (31) з відокремлюваними змінними:

$$pp'_y = -\frac{2}{y^5}.$$

Розв'яжемо його:

$$p\frac{dp}{dy} = -\frac{2}{y^5},$$

$$p\,dp = -\frac{2}{y^5}dy,$$

$$\int p\,dp = -2\int y^{-5}dy,$$

$$\frac{p^2}{2} = -2\frac{y^{-4}}{-4} + C_1,$$

$$p^2 = y^{-4} + 2C_1,$$

$$p^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1,$$

$$\left(y'\right)^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1.$$

Так як потрібно знайти тільки такий частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, то можливо одразу знайти $C_1$ (підставляючи в отриману рівність умови $y(-1)=1,\ y'(-1)=1$):

$$1 = 1 + 2C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0.$$

Тому маємо $\left(y'\right)^2 = \dfrac{1}{y^4}$, звідки $y' = \dfrac{1}{y^2}$ (врахували початкову умову $y'(-1)=1$).

Розв'язуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2},$$

$$y^2dy = dx,$$

$$\int y^2dy = \int dx,$$

$$\frac{y^3}{3} = x + C_2 \Leftrightarrow y^3 = 3x + 3C_2.$$

Підставляємо початкову умову $y(-1)=1$ і знаходимо:

$$1^3 = 3\cdot(-1) + 3C_2,$$

$$3C_2 = 4,$$

$$C_2 = \frac{4}{3}.$$

Тоді $$y^3 = 3x + 4.$$

Остаточно маємо $$y = \sqrt[3]{3x+4}.$$

## Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння при заданих початкових умовах:

**1.** $y''(1+y)-5(y')^2=0$, якщо $y(1)=0$, $y'(1)=2$.

**2.** $2xy''-y'=0$, якщо $y(4)=10$, $y'(4)=3$.

**3.** $yy''-(y')^2-y^2y'=0$, якщо $y(2)=18$, $y'(2)=3$..

**4.** $3yy''+(y')^2=0$, якщо $y(0)=1$, $y'(0)=1$..

**5.** $y''+\dfrac{y'}{x}=x^2$, якщо $y(1)=2$, $y'(1)=3$..

**6.** $y''x\ln x=y'$, якщо $y(e)=1$, $y'(e)=2$..

**7.** $y''+y'tgx=\sin 2x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$.

**8.** $y''=(y')^2$, якщо $y(1)=1$, $y'(1)=-1$.

**9.** $y''(y+1)=2(y')^2$, якщо $y(0)=1$, $y'(0)=-3$.

**10.** $y''+y'e^x=e^{2x}$ , якщо $y(1)=0$, $y'(1)=1$.

## *Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (30)$$

де $p$ і $q$ – дійсні числа, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.*

Квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (31)$$

називається відповідним *характеристичним рівнянням*.

Загальний розв'язок рівняння (30) залежить від значень коренів характеристичного рівняння. Можливі три випадки.

**1.** Якщо корені характеристичного рівняння (31) дійсні та різні, тобто $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок диференціального рівняння (31) має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (32)$$

**2.** Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right). \qquad (33)$$

**3.** Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:

$$\left(D = p^2 - 4q < 0\right),$$

тобто $$k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta,$$

де $i = \sqrt{-1}$ (*уявна одиниця*),

$$\alpha = -\frac{p}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2},$$

то

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right). \qquad (34)$$

У формулах (32)-(34) $C_1$ і $C_2$ довільні сталі.

ПРИКЛАДИ.

**1.** Розв'язати диференціальні рівняння $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Розв'язання:

Маємо рівняння виду (30). Запишемо його характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$D = (-5)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0,$$

тоді $$k_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ і } k_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Маємо перший випадок (корені дійсні та різні). Тому за формулою (32) загальний розв'язок диференціального рівняння –

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}.$$

**2.** Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Розв’язання:

Це рівняння виду (30). Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2+8k+16=0,$$

або $$\left(k+4\right)^2=0.$$

Тому $$k_1=k_2=-4,$$

тобто маємо другий випадок. Тоді за формулою (33) записуємо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y=e^{-4x}\left(C_1+C_2x\right).$$

**96.** Розв’язати диференціальне рівняння $y''+2y'+10y=0$.

Розв’язання:

Маємо рівняння виду (30). Записуємо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2+2k+10=0.$$

Розв’язуємо його:

$$D=2^2-4\cdot1\cdot10=4-40=-36,$$

$$k_1=\frac{-2-\sqrt{-36}}{2}=\frac{-2-6i}{2}=-1-3i,$$

$$k_2=\frac{-2+\sqrt{-36}}{2}=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. Це третій випадок. При цьому $\alpha=-1,\ \beta=3$. Тому за формулою (34) записуємо загальний розв’язок рівняння:

$$y=e^{-x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x).$$

## Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати диференціальні рівняння :

**1.** $y''+25y=0$.

**2.** $y''-2y'+1=0$.

**3.** $y''-y'-6y=0$.

**4.** $y''-16y=0$.

**5.** $y''-4y'+5y=0$.

**6.** $y''-9y'=0$.

**7.** $y''+3y'+2y=0$.

**8.** $y''-4y'+29y=0$.

**9.** $y''+6y'+34y=0$.

**10.** $y''-12y'+36y=0$.

## Однорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{35}$$

де коефіцієнти $a_{ij}$ – сталі, $t$ – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається *однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*

Задача Коші для системи (35) полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{36}$$

Розв’язання системи (35) виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12} \neq 0$, виразимо в ньому *y* через *x*:

$$y = \frac{1}{a_{12}} \frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x. \tag{37}$$

Продиференціюємо цю рівність по $t$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt}. \tag{38}$$

Підставляючи вирази (37) і (38) в друге рівняння системи (35), отримаємо

$$\frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt} = a_{21}x + a_{22}\left( \frac{1}{a_{12}} \frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x \right),$$

$$\frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \left( \frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{22}}{a_{12}} \right) \frac{dx}{dt} + \left( \frac{a_{11}}{a_{12}} a_{22} - a_{21} \right) x = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) x = 0. \tag{39}$$

Рівняння (39) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30) з незалежною змінною $t$ і невідомою функцією $x(t)$. Розв’язуємо його відносно $x(t)$. Після цього за формулою (37) знаходимо функцію $y(t)$ і записуємо остаточну відповідь.

*Зауваження.* Якщо в першому рівнянні системи (35) коефіцієнт $a_{12} = 0$, то це рівняння матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’язавши його, підставимо знайдену функцію $x(t)$ в друге рівняння системи (35) і отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y(t)$. Розв’язуємо його і записуємо остаточну відповідь.

<u>ПРИКЛАД.</u>

**1.** Розв’язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Розв’язання:

Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо *y*:

$$\frac{dx}{dt} = -x + 5y\,,$$

$$5y = \frac{dx}{dt} + x\,,$$

$$y = \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x\,.$$

Диференціюємо останню рівність по $t$ і отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dx}{dt}.$$

Підставимо знайдені *y* та $\dfrac{dy}{dt}$ в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} = x + 3\left(\frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 5x + 3\frac{dx}{dt} + 3x\,,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 8x = 0\,.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30). Коренями його характеристичного рівняння:

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

є
$$k_1 = -2 \text{ і } k_2 = 4\,.$$

Тоді загальний розв’язок цього рівняння буде мати вигляд:

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}\,,$$

де $C_1$ і $C_2$ – довільні сталі. Так як

$$\frac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{4t}\,,$$

то підставляючи знайдені $x(t)$ та $\dfrac{dx}{dt}$ у вираз для *y* ( $y = \dfrac{1}{5}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{5}x$ ), отримаємо:

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(-2C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{4t}\right) + \frac{1}{5}\left(C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}\right),$$

$$y(t) = -\frac{1}{5}C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}\,.$$

Запишемо тепер загальний розв’язок системи:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{4t} \\ y(t) = -\dfrac{1}{5}C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}. \end{cases}$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

**1.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y, \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y, \end{cases}.$

**5.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y, \end{cases}.$

**6.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - y, \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 9y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - 3y. \end{cases}$

**9.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}, \end{cases}.$

**10.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 6y, \end{cases}.$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Головач Г.П Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. –К.:Техніка, 1997. –285с.

2. Каленюк П. І., Рудавський Ю. К., Тацій Р. М., Клюйник І. Ф., Колісник В. М., Костробій П. П., Олексів І. Я. Диференціальні рівняння. // Навчальний посібник. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2014. 380 с.

3. Лиходєєва Г., Пастирєва К. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно. – Вид-во: Центр навчальної літератури, 2018. – 144 с.

4. Маринець К. В. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування, Частина I: Навч. Посіб. – Ужгород:Вид-тво УжНУ «Говерла», 2015. – 83 с.

5. Маринець К. В. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь, Частина II: Навч. Посіб. – Ужгород:Вид-тво УжНУ «Говерла», 2017. – 83 с.

6. Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: Либідь, 1997. –192с.

7. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у задачах: Навч. Посібник. – К.: Либідь, 2003. – 504 с.

8. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. –К.: Либідь, 1994. –360с.

9. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Книга 2. – К: Либідь, 2010.

10. Шкіль М.І., Сотниченко М.А. Звичайні диференціальні рівняня. –К.: Вища школа, 1992. –303с.

**Диференціальні рівняння.** Методичні вказівки до виконання самостійних робіт для здобувачів першого (бакалаврського) рівня спеціальності «Прикладна математика» денної форми навчання / укладач О.А. Мікуліч. – Луцьк: ЛНТУ, 2026. – 32 с.

Комп'ютерний набір О. А. Мікуліч
Редактор О. А. Мікуліч

Підп. до друку «__ »________2026 р.
Формат 60х84/16. Папір офс.
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 2,0.
Тираж 10 прим.

Інформаційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – Кафедра ПММ ЛНТУ