Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет

ІДЕНТИФІКАЦІЯ І МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ БЕЗПІЛОТНИХ АПАРАТІВ

Методичні вказівки до практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами»
галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації
(G Інженерія, виробництво та будівництво)
спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка
(G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка)
денної та заочної форм навчання

Луцьк 2025

УДК 519.85; 517.8
І-59

Рекомендовано до видання вченою радою факультету КІТ ЛНТУ, протокол № _ від «__» _________ 2025 року

Голова вченої ради факультету КІТ ________________ Інна КОНДІУС

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки _____________ Наталія ПОЛІЩУК

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ, протокол № _ від «__» ______ 2025 року.

Завідувач кафедри АКІТ	______________	Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ
Укладач:	______________	Лариса ГУМЕНЮК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ
Рецензент:	______________	Людмила САМЧУК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки та мехатроніки ЛНТУ
Відповідальний за випуск:	______________	Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ

І-59 **Ідентифікація і моделювання об'єктів та систем безпілотних апаратів:** методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 74 с.

У методичних вказівках розглянуто широке коло задач лінійного програмування. Викладено методи рішення задач оптимізації. Наведено приклади рішення та задачі для самостійного розв'язку.

Методичні вказівки укладено в результаті опрацювання опублікованих джерел.

ЗМІСТ

Практичне заняття № 1

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки до виконання завдання

Графічний метод доцільно застосовувати для розв'язування задач лінійного програмування із двома змінними. Обмежене використання даного методу зумовлене складністю побудови багатокутника розв'язків для задач з трьома змінними, а графічне зображення, де кількість змінних перевищує число три, взагалі неможливе.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 \qquad (1.1)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \le b_n \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (1.3)$$

Згідно з даним методом, кожна нерівність системи (1.2) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $(i - 1,2, \dots, n)$ і серед всіх цих півплощин можна вибрати спільну частину (переріз усіх зазначених півплощин), тобто множину точок, координати яких задовольняють усі обмеження задачі — багатокутник розв'язків.

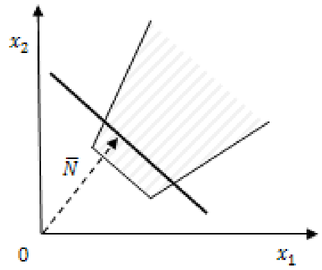
Звідси випливає, що розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом, означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (1.1) функція мети набуває свого максимального або мінімального значення.

Алгоритм графічного методу складається з таких етапів:

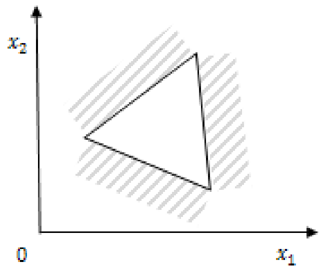
1. Будують прямі, рівняння яких знаходять у результаті заміни в обмеженнях (2) знаків нерівностей на знаки рівнянь.
2. Знаходять півплощини, обумовлені кожним з обмежень задачі.
3. Знаходять багатокутник рішень.
4. Будують вектор – градієнт цільової функції $\overrightarrow{N} = (c_1;\ c_2)$, який задає напрям зростання функції
5. Будують пряму $c_1x_1 + c_2x_2\ = \text{const}$, перпендикулярну до вектра $\vec{N}$.
6. Пересуваючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2\ = \text{const}$ в напрямку вектра $\vec{N}$ (для задачі на знаходження максимуму) або в протилежному напрямку (для задачі на знаходження мінімуму), знаходять вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набуває свого екстремального значення.
7. Визначають координати точки максимуму функції і обчислюють значення цільової функції в цій точці.

При використанні графічного методу для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування можливі такі випадки:

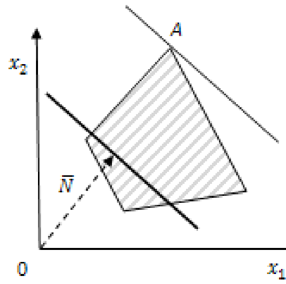
1. Функція мети є необмеженою на множині розв'язків. В такому випадку задача лінійного програмування не має оптимальних планів.



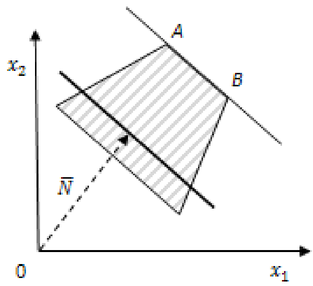
2. Система обмежень є несумісною. Функція мети оптимальних планів не має також.



4. Цільова функція набуває максимального значення в єдиній точці A багатокутника розв'язків.



4. Цільова функція набуває максимального значення в будь-якій точці відрізка AB.



Приклад виконання завдання.

Розв'язати задачу

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \to max \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Побудуємо багатокутник розв'язків

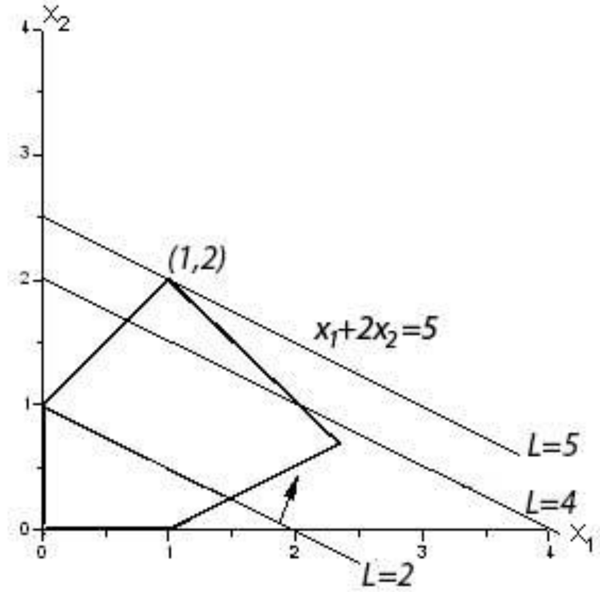


Рисунок 1 - Багатокутник розв'язків.

Нехай, наприклад, *L=2*. Тоді пряма $x_1 + 2x_2 \to max$ проходить через точки *(2,0)* і *(0,1)* , як зображено на рис. 1. Будемо тепер збільшувати L. Тоді пряма почне рухатися паралельно самій собі в напрямку стрілки. Легко здогадатися, що максимальне значення L вийде тоді, коли пряма пройде через вершину багатокутника, зазначену на малюнку, і подальше збільшення L призведе до того, що пряма вийде за межі багатокутника та її перетин з допустимою областю буде порожнім.

Виділена вершина лежить на перетині прямих

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

і тому має координати $x_1 = 1, x_2 = 2$. Це і є рішення нашої задачі.

Отже, $x_1 = 1, x_2 = 2$ є <u>*оптимальним планом*</u> нашої задачі. При цьому значення цільової функції дорівнює $L = x_1 + 2x_2 = 1 + 2 * 2 = 5$ і є максимальним.

Завдання для самостійного розв'язку

Графічним методом визначити оптимальний план задачі лінійного програмування

№		№		№	
1	$x_1 + 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_2 \ge 1, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$	9	$x_1 - 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	17	$3x_1 + 4x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 5, \\ x_2 \ge 5. \end{cases}$

2	$x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1-x_2\le 2,\\ x_1+x_2\le 2,\\ x_1-2x_2\le 1,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	10	$2x_1-4x_2\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2\le 11,\\ x_1+x_2\le 6,\\ x_1-x_2\le 2,\\ -2x_1+4x_2\ge 4,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	18	$x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 10,\\ -x_1+x_2\le 4,\\ x_1\le 5,\\ x_2\ge 0.\end{cases}$
3	$4x_1+3x_2\to\min$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 10,\\ x_1+2x_2\ge 2,\\ -x_1+3x_2\le 3,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	11	$x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1-x_2\le 3,\\ x_1+x_2\le 6,\\ -x_1+3x_2\le 10,\\ x_1+4x_2\ge 4,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	19	$3x_1-2x_2\to\min$ $\begin{cases}2x_1+2x_2\le 10,\\ -3x_1+4x_2\ge -12,\\ 2x_1+4x_2\le 12,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$
4	$3x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2\ge 3,\\ x_1-x_2\ge 0,\\ x_1\ge 2,\\ x_2\ge 0.\end{cases}$	12	$-x_1-2x_2\to\min$ $\begin{cases}3x_1+2x_2\ge 12,\\ -x_1+2x_2\ge 8,\\ 2x_1+3x_2\le 6,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	20	$2x_1+3x_2\to\max$ $\begin{cases}3x_1+x_2\ge 9,\\ x_1+5x_2\ge 10,\\ 4x_1-2x_2\ge -8,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$
5	$-3x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases}7x_1-x_2\ge 0,\\ 3x_1-2x_2\le 6,\\ x_1-4x_2\le 0,\\ x_1+x_2\le 6,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	13	$x_1+3x_2\to\max$ $\begin{cases}10x_1+3x_2\ge 30,\\ -x_1+x_2\le 5,\\ x_1+x_2\le 10,\\ x_2\ge 2,\\ x_1\ge 0.\end{cases}$	21	$2x_1-3x_2\to\max$ $\begin{cases}-5x_1+3x_2\le 15,\\ -2x_1+3x_2\ge 0,\\ x_1+x_2\ge 2,\\ 2x_1+x_2\le 10,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$
6	$2x_1-x_2\to\min$ $\begin{cases}3x_1+2x_2\le 12,\\ -2x_1+x_2\le 4,\\ x_1-3x_2\le 0,\\ x_1+2x_2\ge 2,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	14	$5x_1-2x_2\to\max$ $\begin{cases}-x_1+2x_2\le 5,\\ 5x_1-2x_2\le 10,\\ x_1-x_2\le 1,\\ 2x_1+x_2\ge 2,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	22	$F=4x_1+3x_2\to max$ $\begin{cases}x_1^2-2x_1+x_2^2-2x_2-34\le 0\\ x_1\ge 1\\ x_2\ge 1\end{cases}$
7	$-2x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}-3x_1+x_2\le 1,\\ x_1+x_2\le 2,\\ x_1-2x_2\le 0,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	15	$x_1-2x_2\to\min$ $\begin{cases}x_1-x_2\le 1,\\ x_1+x_2\le 2,\\ x_1-2x_2\ge 0,\\ 2x_1+2x_2\ge 1,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	23	$F=x_1x_2\to max$ $\begin{cases}6x_1+4x_2\ge 12\\ 2x_1+3x_2\le 24\\ -3x_1+4x_2\le 12\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$
8	$F=4x_1+5x_2\to max$ $\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 16\\ -x_1+2x_2\le 4\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$	16	$-x_1+x_2\to\min$ $\begin{cases}5x_1+2x_2\ge 10,\\ x_1+x_2\le 4,\\ -4x_1+x_2\ge -8,\\ x_1-2x_2\le 0,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$	24	$F=2x_1x_2\to max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 5\\ x_1\le 4\\ x_2\le 3\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$

Практичне заняття № 2

ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки до виконання завдання

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином спів ставити деяку іншу задачу (лінійного програмування), що називається двоїстою або пов'язаною по відношенню до вихідної або прямої.

Запишемо пряму (вихідну) задачу лінійного програмування, яка полягає у визначенні максимуму цільової функції:

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \to max \qquad (2.1)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geq b_k \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \cdots + a_{k+1n}x_n \geq b_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,l}, l \leq n) \qquad (2.3)$$

Двоїстою задачею лінійного програмування по відношенню до вихідної задачі (2.1) — (2.3) називається задача, яка полягає у визначенні мінімального значення цільової функції

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \to min \qquad (2.4)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq C_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \cdots + a_{mi}y_m \geq C_i \\ a_{1i+1}y_1 + a_{2i+1}y_2 + \cdots + a_{mi+1}y_m \geq C_{i+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + \underline{a_{mn}}y_m \geq C_n \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$y_i \geq 0 \; (i = \overline{1,k}, k \leq m) \qquad (2.6)$$

<u>Двоїста задача будується на основі наступних правил.</u>

1. Цільова функція вихідної задачі (2.1) — (2.3) задається на максимум, а цільова функція двоїстої задачі (2.4) — (2.6) задається на мінімум.
2. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{1m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

яка складається з коефіцієнтів при невідомих вихідної задачі переходить у A^T.

3. Число невідомих двоїстої задачі (2.4) — (2.6) дорівнює числу рівнянь системи обмежень (2.2). Число рівнянь в системі обмежень двоїстої задачі (2.5) дорівнює числу невідомих вихідної задачі (2.1) — (2.3).
4. Коефіцієнти при невідомих цільової функції двоїстої задачі дорівнюють стовпчику вільних членів вихідної задачі. Вільні члени системи обмежень (2.5) двоїстої задачі дорівнюють коефіцієнтам цільової функції прямої задачі.
5. Якщо деяка змінна x_j може приймати тільки додатні значення, то j-та нерівність в системі обмежень двоїстої задачі задається у вигляді нерівності. Якщо деяка змінна x_j може приймати як додатні так і від'ємні значення, тоді рівності в системі обмежень двоїстої задачі задаються у вигляді рівностей.

Зауваження: пара двоїстих задач може бути симетричною або не симетричною. Симетричною називається в тому випадку, якщо обмеження в системі (2.2) прямої задачі і обмеження в системі (2.5) двоїстої задачі задаються у вигляді нерівностей. В протилежному випадку не симетричною.

Приклад виконання завдання

Скласти двоїсту задачу по відношенню до задачі, що знаходиться в максимізації функції

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \tag{2.6}$$

за умов

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$x_1, x_2, x_3, \geq 0. \tag{2.8}$$

Рішення. Для даної задачі

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } A^{\text{т}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число змінних в двоїстій задачі дорівнює числу рівнянь в системі (2.7), тобто дорівнює трьом. Коефіцієнтами в цільовій функції двоїстої задачі являються вільні члени системи рівнянь (2.7), тобто числа 12, 24, 18.

Цільова функція вихідної задачі (2.6) – (2.8) досліджується на максимум, а система умов (2.7) містить тільки рівняння. Тому в двоїстій задачі цільова функція досліджується на мінімум, а її змінні можуть набувати будь-яких значень (в тому числі й від’ємних). Так як всі три змінні вихідної задачі (2.6) – (2.8) набувають тільки невід’ємних значень, то в системі умов двоїстої задачі мають бути три нерівності виду «≥». Звідки, для задачі (2.6) – (2.8) двоїста задача така: знайти мінімум функції $F^* = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3$ за умов

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3. \end{cases}$$

Завдання для самостійного розв'язку

Записати двоїсту задачу до поставленої задачі лінійного програмування.

№		№		№	
1	$Z=-30x_1+10x_2\to\max$ $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3\ge -2,\\ -3x_1+2x_2-x_3\le 3.\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$	9	$Z=4x_1+3x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3\ge 2,\\ x_1+x_2+x_3\le 5.\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$	17	$Z=3x_1+2x_2+5x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\le 50,\\ 3x_1+x_3\ge 15,\\ x_1+4x_2\le 40.\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$
2	$Z=2x_1+3x_2\to\max$ $\begin{cases}2x_1+3x_2\le 30,\\ x_1+x_2\ge 6,\\ 2x_1+x_2\ge 10.\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$	10	$Z=5x_1+12x_2-4x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\le 10,\\ 2x_1-x_2+3x_3\ge 8.\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ \text{j}=\overline{1,3}.$	18	$Z=5x_1+6x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 5,\\ x_1+x_2\ge 3,\\ 2x_1+x_2\le 8.\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$
3	$Z=-x_1+x_2\to\min$ $\begin{cases}2x_1-x_2\le 4,\\ x_1+2x_2\ge 2,\\ x_1+x_2\le 6.\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$	11	$Z=-3x_1-4x_2-5x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3\ge -4,\\ 2x_1+3x_2+2x_3\le 6.\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$	19	$F=6x_1-x_2+3x_3\to max;$ $\begin{cases}3x_1-7x_2+5x_3\le 15,\\ 2x_1+3x_2-4x_3=16,\\ 6x_1+5x_2-8x_3\le 12,\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3\ge 0.$
4	$Z=2x_1-2x_2+4x_3\to\min$ $\begin{cases}-x_2+4x_3\ge 1,\\ -x_1+5x_2\le 1,\\ -x_1+2x_2+3x_3\le 9.\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ \text{j}=\overline{1,3}.$	12	$Z=3x_1+6x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3\le 2,\\ x_1+3x_2+2x_3\ge 1.\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ \text{j}=\overline{1,3}.$	20	$Z=x_1+2x_2-3x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 5,\\ x_1-x_2+2x_3\ge 4,\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ \text{j}=\overline{1,3}.$
5	$Z=x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_2\ge 5,\\ 3x_1-x_2\le 6.\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ \text{j}=\overline{1,3}.$	13	$Z=10x_1+40x_2\to\min$ $\begin{cases}3x_1+5x_2\ge 8,\\ x_1+2x_2\ge 20,\\ 2x_1+4x_2\ge 25,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$	21	$Z=9x_1+8x_2+10x_3\to\max$ $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3\le 4,\\ x_1+2x_2+5x_3\le 6,\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$
6	$Z=x_1+2x_2+5x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+4x_3\ge 12,\\ x_1+x_2+x_3\ge 8,\\ x_1+2x_2+3x_3\le 20,\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$	14	$Z=x_1+5x_2+3x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 3,\\ 2x_1-x_2\le 4,\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$	22	$Z=x_1+5x_2+3x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 3,\\ 2x_1-x_2\le 4,\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$
7	$Z=x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 12,\\ -3x_1+2x_2\le -4,\\ x_1-x_2\le 2,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$	15	$Z=-x_1+x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3\le 3,\\ 2x-x_2+3x_3\ge -2,\end{cases}$ $x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$	23	$F=-3x_1+4x_2-6x_3\to min;$ $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3\ge 8,\\ -3x_1+2x_2-2x_3=10,\\ 5x_1-4x_2+x_3\ge 7,\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3\ge 0.$

8	$Z=5x_1+2x_2\to\min$ $\begin{cases}x_1+3x_2\ge 8,\\3x_1+4x_2\le 20,\\3x_1+x_2\ge 6.\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$	16	$F=3x_1+3x_2-4x_3\to max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3\ge 18,\\4x_1-5x_3\le 12,\\3x_1-2x_2+x_3\ge 14,\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3\ge 0.$	24	$F=2x_1+7x_2\to\max$ $\begin{cases}-2x_1+3x_2\le 14,\\x_1+x_2\le 8,\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0,$

Практичне заняття № 3

ЕКОНОМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ

Методичні вказівки до виконання завдання

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва n видів продукції використовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $b_i\left(i=\overline{1,\,m}\right)$. Норма витрат кожного ресурсу на одиницю продукції становить $a_{ij}\left(j=\overline{1,\,n};\ i=\overline{1,\,m}\right)$. Ціна одиниці продукції j-го виду дорівнює $c_j\left(j=\overline{1,\,n}\right)$. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\max Z=\max\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\quad\left(i=\overline{1,\,m}\right);$$

$$x_j\ge 0\quad\left(j=\overline{1,\,n}\right).$$

Пряма задача полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва продукції $X^*=\left(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*\right)$, який дає найбільший дохід.

Двоїста задача до поставленої прямої буде така:

$$F=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\to\min;$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j\quad\left(j=\overline{1,\,n}\right);$$

$$y_i\ge 0\quad\left(i=\overline{1,\,m}\right).$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає ось у чому. Визначити таку оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів y_i, використовуваних для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці i-го ресурсу, їх інколи ще називають ***тіньовою ціною відповідного ресурсу***.

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на ***дефіцитні*** та ***недефіцитні*** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є ***недефіцитним***. Якщо ж двоїста оцінка $y_i > 0$, то i-й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається ***дефіцитним***. У цьому разі величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), виготовляти продукцію не вигідно, вона ***нерентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона ***рентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають змогу модифікувати оптимальний план задачі лінійного програмування відповідно до змін умов прямої задачі й дістати при цьому такі результати.

1. Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

- склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;
- склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;
- змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

2. Уведення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв’язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

3. Уведення нової змінної в математичну модель задачі впливає на оптимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

Приклад виконання завдання

Деяке підприємство виробляє чотири види продукції А, В, С і Д, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на одиницю кожної продукції (в умовних одиницях) наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, ум. од., за видами продукції				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	2	5	2	4	250
2	1	6	2	4	280
3	3	2	1	1	80

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: для продукції А — 2 ум. од., для В і Д — по 4 од., для С — 3 од. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду в умовах обмеженості ресурсів, який дає підприємству найбільший дохід. Наведемо симплекс-таблицю, що відповідає оптимальному плану поставленої задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	45	–2	1/2	0	1	1/2	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	3/2	1	0	– 1/2	0	2
$Z_j - C_j \geq 0$		285	5	5/2	0	0	1/2	0	2

Виконаємо зазначені далі дії.

1. Сформулювати математичну модель даної задачі лінійного програмування та двоїстої до неї.

2. Записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач і зробити їх економічний аналіз.

3. Визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів.

4. Визначити план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо запас першого ресурсу збільшити на 10 од., другого — зменшити на 10 од., а третього — збільшити на 20 ум. од.

5. Визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.

6. Розрахувати інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції.

Розв'язування. 1. Математичні моделі прямої та двоїстої задачі мають такий вигляд:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 250, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 280, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 80, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4};$$

де x_j — обсяг виробництва продукції j-го виду $\left(j = \overline{1,\,4}\right)$;

$$F = 250y_1 + 280y_2 + 80y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3, \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad j = \overline{1,3},$$

де y_i — оцінка одиниці i-го виду ресурсу $\left(i = \overline{1,\,3}\right)$.

2. З наведеної симплекс-таблиці маємо:

$$X^* = (0;\ 0;\ 35;\ 45;\ 0;\ 30;\ 0),\ \max Z = 285;$$

$$Y^* = (4;\ 0;\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2;\ 0;\ 2);$$

$$\min F = 250/2 + 160 = 285 = \max Z.$$

Оптимальний план прямої задачі передбачає виробництво лише двох видів продукції С і Д у кількості відповідно 35 та 45 од. Випуск продукції А та В не передбачається ($x_1 = x_2 = 0$). Додаткові змінні x_5, x_6, x_7 характеризують залишок (невикористану частину) ресурсів відповідно 1, 2 та 3. Оскільки $x_6 = 30$, другий ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а перший та третій ресурси — повністю ($x_5 = x_7 = 0$). За такого оптимального плану виробництва продукції та використання ресурсів підприємство отримує найбільший дохід у розмірі 285 ум. од.

План двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві. Так, $y_1 = 1/2$ та $y_3 = 2$ відмінні від нуля, а ресурси 1 та 2 використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: $\min F = 285$ ум. од.

3. Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший — підстановкою X^* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у противному разі — недефіцитний.

$$\begin{cases} 2\cdot 0 + 5\cdot 0 + 2\cdot 35 + 4\cdot 45 = 250 & (\text{ресурс 1 дефіцитний});\\ 1\cdot 0 + 6\cdot 0 + 2\cdot 35 + 4\cdot 45 = 250 < 280 & (\text{ресурс 2 недефіцитний});\\ 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 35 + 1\cdot 45 = 80 & (\text{ресурс 3 дефіцитний}).\end{cases}$$

Другий спосіб — за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля — ресурс недефіцитний.

Третій спосіб — за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i-го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $y_i = 0$, то i-й ресурс недефіцитний. Так,

$y_1 = 1/2$ (ресурс 1 дефіцитний);
$y_2 = 0$ (ресурс 2 недефіцитний);
$y_3 = 2$ (ресурс 3 дефіцитний).

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то цільова функція $\max Z$ збільшиться за інших однакових умов на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме $\max Z = 285{,}5$ ум. од. Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпчика «x_5» останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці $y_1 = 1/2$. У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_4^* збільшиться на 1/2, змінної x_6^* — зменшиться на одиницю, а x_3^* — на 1/2. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$X^* = (0;\ 0;\ 34{,}5;\ 45{,}5;\ 0;\ 29;\ 0).$$

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов приводить до зростання випуску продукції Д та падіння виробництва продукції С, а обсяг використання ресурсу 2 збільшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства буде $\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 34{,}5 + 4 \cdot 45{,}5 = 285{,}5$, тобто зросте на $y_1 = 1/2$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 2 за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю ($b_3 = 80 + 1 = 81$). Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $y_3 = 2$, можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (0;\ 0;\ 37;\ 44;\ 0;\ 30;\ 0).$$

$$\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 44 = 287.$$

Отже, дохід підприємства збільшиться на дві умовні одиниці за рахунок збільшення виробництва продукції С на дві одиниці та зменшення випуску продукції Д на одну одиницю. При цьому обсяг використання ресурсу 2 не змінюється.

Але після проведеного аналізу постає логічне запитання: а чи зберігатимуться встановлені пропорції, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на одиницю, а наприклад, на 10 ум. од.? Щоб однозначно відповісти на поставлене запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки y_i залишаються на рівні оптимальних значень.

Приріст (зміну) запасу ресурсу 1 позначимо Δb_1. Тоді, якщо $b_1' = b_1 + \Delta b_1$, то новий оптимальний план

$$X^* = (0;\ 0;\ 35 - 1/2\Delta b_1;\ 45 + 1/2\Delta b_1;\ 0;\ 30 - \Delta b_1;\ 0).$$

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, — це умова невід’ємності, тобто

$$\begin{cases} 35 - 1/2\Delta b_1 \ge 0; \\ 45 + 1/2\Delta b_1 \ge 0; \\ 30 - \Delta b_1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \le 70; \\ \Delta b_1 \ge 90; \\ \Delta b_1 \le 30; \end{cases}$$

$$-90 \le \Delta b_1 \le 30\ .$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 30 ум. од. або зменшиться на 90 ум. од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу 1 залишиться $y_1 = 1/2$. Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах

$$250 - 90 \le b_1 + \Delta b_1 \le 250 + 30\,,$$

$$160 \le b_1 \le 280\ .$$

Згідно з цим максимально можливий дохід підприємства перебуватиме в межах

$$285 - 90 \cdot 1/2 \le Z_{\max} \le 285 + 30 \cdot 1/2\,,$$

$$240 \le Z_{\max} \le 300\ ,$$

а оптимальний план виробництва продукції

$$(0;\ 0;\ 80;\ 0;\ 0;\ 120;\ 0) \le X^* \le (0;\ 0;\ 20;\ 60;\ 0;\ 0;\ 0).$$

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $y_3 = 2$ дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 35 + 2b_3 \geq 0; \\ 45 - \Delta b_3 \geq 0; \\ 30 + 0\Delta b_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \geq -17{,}5; \\ \Delta b_3 \leq 45; \end{cases}$$

$$-17{,}5 \leq \Delta b_3 \leq 45 ,$$

$$62{,}5 \leq b_3 \leq 125 .$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 45 ум. од. або зменшиться на 17,5 ум. од., то двоїста оцінка $y_3 = 2$ цього ресурсу залишиться оптимальною. Згідно із цим можливий дохід підприємства та оптимальний план виробництва продукції перебуватимуть у межах

$$250 \leq \max Z \leq 375 ;$$

$$(0; 0; 0; 62{,}5; 0; 30; 0) \leq X^* \leq (0; 0; 125; 0; 0; 30; 0).$$

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

4. За умовою задачі обсяги всіх трьох ресурсів змінюються відповідно $\Delta b_1 = +10$, $\Delta b_2 = -10$, $\Delta b_3 = +20$. Для визначення компонентів нового оптимального плану скористаємось одним із головних співвідношень обчислювальної процедури симплекс-методу:

$$X^* = D^{-1} \cdot \vec{B} .$$

З останньої симплекс-таблиці можна записати обернену матрицю:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Змінені запаси ресурсів утворюють вектор

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 + 10 \\ 280 - 10 \\ 80 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} .$$

Тоді новий оптимальний план виробництва продукції за відповідної одночасної зміни запасів усіх трьох ресурсів

$$X^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix},$$

тобто $X^* = (0; 0; 70; 30; 0; 10; 0)$.

Усі $x_j \geq 0$, і тому оптимальним планом двоїстої задачі залишається $Y^* = (1/2; 0; 2)$. Загальний максимальний дохід підприємства зміниться на $\Delta Z_{\max} = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 10 \cdot 1/2 - 10 \cdot 0 + 20 \cdot 2 = = +45$ ум. од. і становитиме $\max Z = 285 + 45 = 330$ ум. од.

5. Оцінка рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконується за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (права частина), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\begin{cases} 2\cdot 1/2+1\cdot 0+3\cdot 2=7>2 & \text{(продукція А нерентабельна);} \\ 5\cdot 1/2+6\cdot 0+2\cdot 2=13/2>4 & \text{(продукція В нерентабельна);} \\ 2\cdot 1/2+2\cdot 0+1\cdot 2=3=3 & \text{(продукція С рентабельна);} \\ 4\cdot 1/2+4\cdot 0+1\cdot 2=4=4 & \text{(продукція Д рентабельна).} \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оцінковому рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках «x_1»—«x_4». Їх оптимальні значення $y_4 = 5$; $y_5 = 5/2$; $y_6 = 0$; $y_7 = 0$. Тому продукція А і В нерентабельна, а продукція С і Д — рентабельна.

6. Під впливом різних обставин ціна одиниці продукції на підприємстві може змінюватися (збільшуватися чи зменшуватися). І тому завжди цікаво знати, у межах яких змін ціни продукції кожного виду оптимальний план її виробництва залишається таким: $X^* = (0; 0; 35; 45)$.

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємось тим, що при цьому симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів оцінкового рядка. Нові оцінки $(Z_j - C_j)$ мають задовольняти умову оптимальності задачі максимізації, тобто бути невід'ємними.

Зміну коефіцієнта C_1 позначимо ΔC_1. Оскільки x_1 — небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна оцінка $Z_1 - C_1$:

$$(Z_1 - C_1) = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3/2 - (2 + \Delta C_1) = 5 - \Delta C_1.$$

За умови $Z_1 - C_1 \geq 0$ дістанемо нерівність $5 - \Delta C_1 \geq 0$, тобто $\Delta C_1 \leq 5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції А за інших однакових умов зросте не більш як на 5 ум. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві все одно залишиться $X^* = (0; 0; 35; 45)$. Лише максимальний дохід зміниться на $\max \Delta Z = \Delta C_1 x_1$.

Аналогічно розраховується інтервал зміни коефіцієнта ΔC_2:

$$(Z_2 - C_2) = 5/2 - \Delta C_2 \geq 0; \quad \Delta C_2 \leq 5/2.$$

Зі зростанням ціни одиниці продукції В на 5/2 ум. од. за інших однакових умов оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а $\max \Delta Z = \Delta C_2 X_2$.

Дещо складніше розраховується інтервал зміни коефіцієнтів для базисних змінних. У цьому разі зміни відбуваються також у стовпчику «$C_{баз}$» симплекс-таблиці, а це, у свою чергу, стосується всіх ненульових оцінок $(Z_j - C_j)$. Так, для базисної змінної x_3 зміна коефіцієнта на ΔC_3 приведе до таких оцінок:

$(Z_1 - C_1) = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + (3 + \Delta C_3) \cdot 5 - 2 = 5 + 5\Delta C_3$;

$(Z_2 - C_2) = 4 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1 + (3 + \Delta C_3) \cdot 3/2 - 4 = 5/2 + 3/2\Delta C_3$;

$(Z_5 - C_5) = 4 \cdot 1/2 + 0 \cdot (-1) - 1/2 \cdot (3 + \Delta C_3) - 0 = 1/2 - 1/2\Delta C_3$;

$(Z_7 - C_7) = 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (3 + \Delta C_3) - 0 = 2 + 2\Delta C_3$.

Нові значення оцінок мають задовольняти умову оптимальності, тобто $Z_j - C_j \geq 0$. Тому інтервал для ΔC_3 визначається з такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 5+5\Delta C_3 \geq 0, \\ 5/2+3/2\Delta C_3 \geq 0, \\ 1/2-1/2\Delta C_3 \geq 0, \\ 2+2\Delta C_3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta C_3 \geq -1, \\ \Delta C_3 \geq -5/3, \\ \Delta C_3 \leq 1, \\ \Delta C_3 \geq -1; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_3 \leq 1,$$

$$2 \leq C_3 \leq 4.$$

Отже, ціна одиниці продукції С може збільшуватися та зменшуватися на 1 ум. од. і перебувати в межах від 2 до 4 ум. од., але оптимальним планом виробництва продукції залишається $X^* = (0; 0; 35; 45)$.

Для базисної невідомої x_4 інтервал зміни коефіцієнта C_4 розраховується аналогічно:

$$\begin{cases} 5-2\Delta C_4 \geq 0; \\ 5/2+1/2\Delta C_4 \geq 0; \\ 1/2+1/2\Delta C_4 \geq 0; \\ 2-\Delta C_4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta C_4 \leq 5/2, \\ \Delta C_4 \geq -5, \\ \Delta C_4 \geq -1, \\ \Delta C_4 \leq 2; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_4 \leq 2,$$

$$3 \leq C_4 \leq 6.$$

Якщо за інших однакових умов ціна одиниці продукції Д зменшиться до 3 ум. од. або збільшиться до 6 ум. од., то оптимальний план виробництва продукції на підприємстві не зміниться ($X^* = (0; 0; 35; 45)$).

Якщо коливання ціни продукції виходять за визначені межі, то план $X^* = (0; 0; 35; 45)$ вже не буде оптимальним і його необхідно буде поліпшити згідно з алгоритмом симплекс-методу, тобто продовжити розв'язування задачі.

Виконаний у цій задачі аналіз лінійної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і дає змогу дослідити можливі зміни цього оптимального плану в результаті коректування умов прямої задачі.

Завдання для самостійного розв'язку

У наведених далі задачах виконати такі дії:

1) записати математичні моделі прямої та двоїстої задач;

2) записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач, подати їх економічний аналіз;

3) визначити статус ресурсів, що використовуються для виробництва продукції, та рентабельність кожного виду продукції;

4) обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно зміни запасів дефіцитних ресурсів;

5) розрахувати інтервали можливих змін ціни одиниці рентабельної продукції.

Задача 1. Підприємство виготовляє три види продукції А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	А	В	С	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: А — 9 ум. од., В — 10 ум. од. і С — 16 ум. од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Задача 2. Підприємство виготовляє продукцію А, В і С, для чого використовує три види ресурсів 1, 2, 3. Норма витрат усіх ресурсів на одиницю кожної продукції та обсяги ресурсів на підприємстві наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	А	В	С	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	244

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: А — 10 ум. од., В — 14 ум. од. і С — 12 ум. од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Задача 3. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів А, В, С і Д, для чого використовує три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів на підприємстві наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	2	1	1	1	280
2	1	—	1	1	80
3	1	5	1	—	250

Відома ціна одиниці продукції кожного виду продукції: А — 4 ум. од., В — 3 ум. од., С — 6 ум. од., Д — 7 ум. од. Визначити план виробництва продукції, який максимізує дохід підприємства.

Задача 4. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів з трьох видів ресурсів. Економічні показники виробництва наведено в таблиці. Визначити такий план виробництва продукції всіх видів, який забезпечить підприємству найбільший дохід.

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	6	1	2	4	300
2	5	2	2	4	200
3	2	3	1	1	90
Ціна продукції	4	2	3	4	

Задача 5. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів А, В, С і Д. Для цього використовуються ресурси трьох видів 1, 2, 3. Основні економічні показники процесу виробництва продукції на підприємстві наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	3	2	1	2	200
2	3	1	3	4	500
3	1	1	1	3	400
Ціна продукції	27	10	15	28	

Визначити план виробництва продукції, який забезпечує підприємству найбільший дохід.

Задача 6. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів і для цього використовує ресурси 1, 2, 3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції, запаси ресурсів та ціну кожного виду продукції наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	2	1	1	3	300
2	1	—	2	1	70
3	1	2	1	—	340
Ціна продукції	8	3	2	1	

Скласти такий план виробництва продукції, який забезпечить підприємству найбільший дохід.

Задача 7. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів А, В, С і Д. Для цього в технологічному процесі використовують три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції, запаси, а також ціну кожного виду продукції наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	1	—	2	1	180
2	—	1	3	2	250
3	4	2	—	4	800
Ціна продукції	9	6	4	7	

Задача 8. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів А, В, С, Д і для цього використовує три види ресурсів 1, 2, 3. У таблиці наведено норми витрат кожного з ресурсів на одиницю продукції, запаси ресурсів та ціни на продукцію.

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	1	2	2	1	300
2	3	—	2	2	600
3	1	4	—	1	200
Ціна продукції	3	2	5	4	

Визначити план виробництва продукції, який дасть змогу підприємству отримати найбільший дохід.

Задача 9. Підприємство виготовляє продукцію видів А, В, С і використовує для цього ресурси трьох видів 1, 2, 3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції, запаси ресурсів, а також ціни на продукцію наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	А	В	С	
1	2	1	2	120
2	3	1	2	200
3	2	2	1	120
Ціна продукції	2	3	4	

Визначити план виробництва продукції кожного виду, що дає найбільший дохід підприємству.

Задачі 10 - 12. Визначити оптимальний план задачі 4 у випадках, коли запаси ресурсів видів 1, 2, 3 задано такими векторами:

10) $\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 350 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 300 \\ 350 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Задачі 13 – 15. Розглянути задачу 6. Визначити оптимальний план цієї задачі, якщо запаси ресурсів трьох видів 1, 2, 3 на підприємстві змінюються:

13) $\Delta 1 = +50$, $\Delta 2 = +50$, $\Delta 3 = 0$;

14) $\Delta 1 = -50$, $\Delta 2 = 0$, $\Delta 3_3 = +50$;

15) $\Delta 1 = 0$, $\Delta 2 = 100$, $\Delta 3 = +100$.

Задачі 16 - 17. Розглянути задачу 2. Планується додатково випуск нової продукції Д з відповідними витратами ресурсів 1, 2, 3 на одиницю цієї продукції — 2, 4, 2 одиниць. Визначити оптимальний план виробництва продукції на підприємстві, якщо орієнтовна ціна нової продукції становить:

16) 12 ум. од.; 17) 15 ум. од.

Задача 18. Фірма виготовляє продукцію трьох видів А, В і С, використовуючи для цього верстати видів 1, 2 та 3. Для виробництва продукції А використовують усі три верстати, для виробництва продукції В — лише 1 та 3, а для продукції С — лише 1 та 2. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами		
	А	В	С
1	1	2	1
2	3	—	2
3	1	4	—

Час роботи верстата 1 для виробництва продукції становить 430 ум. од., верстата 2 — 460 ум. од. і верстата 3 — 450 ум. од. Ціна одиниці продукції А, В і С становить відповідно 4, 2 та 5 ум. од. Керівництво фірми має намір визначити оптимальний план виробництва продукції, який дасть найбільший дохід.

Практичне заняття № 4

СИМПЛЕКС-МЕТОД РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки до виконання завдання

Геометрична інтерпретація, якою ми користувалися при вирішенні задач лінійного програмування (ЛП), перестає бути придатною для цієї мети при кількості вільних змінних $n - m \geq 3$. Для знаходження рішення задачі ЛП в загальному випадку (при довільній кількості вільних змінних) застосовуються не геометричні, а обчислювальні методи. З них найбільш універсальним є так званий симплекс-метод.

Ідея симплекс-методу відносно проста. Нехай в задачі ЛП є *n* змінних і *m* незалежних лінійних обмежень, заданих у формі рівнянь, тобто задача ЛП сформульована в канонічній формі. Ми знаємо, що оптимальне рішення (якщо воно існує) досягається в одній з кутових точок області допустимих рішень (вершин ОДР), де принаймні $k = n - m$ змінних дорівнюють нулю. Виберемо якісь *k* змінних в якості вільних і виразимо через них інші *m* базисних змінних. Нехай, наприклад, в якості вільних обрані перші $k = n - m$ змінних $x_1, x_2, \dots x_k,$ а решта *m* виражені через них:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,k}x_k + b_{k+1} \\ x_{k+2} &= a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \dots + a_{k+2,k}x_k + b_{k+2} \\ &\dots \\ x_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,k}x_k + b_n \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Якщо вважати, що всі вільні змінні $x_1, x_2, \dots x_k$ дорівнюють нулю, то ми отримаємо рішення:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots\ x_k = 0,\ x_{k+1} = b_{k+1},\ x_{k+2} = b_{k+2},\ \dots ,\ x_n = b_n,$$

яке називається ***базисним***. Це рішення може бути допустимим або недопустимим. Воно допустиме, якщо всі вільні члени $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n$ невід'ємні. Якщо ця умова виконується, то отримане рішення називається допустимим базисним рішенням або ***опорним рішенням***. Допустиме базисне рішення відповідає одній з кутових точок ОДР (вершин ОДР). Припустимо, що умова невід'ємності вільних членів виконана. Тоді ми маємо допустиме базисне рішення, але чи є воно оптимальним? Щоб перевірити це, виразимо цільову функцію

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n\ , \qquad (4.2)$$

яку потрібно мінімізувати, через вільні змінні $x_1, x_2, \dots x_k$,:

$$z = d_0 + d_1x_1 + \dots + d_kx_k\ , \qquad (4.3)$$

Для цього треба в (4.2) підставити (1), виразити базисні змінні через вільні і звести подібні члени. Очевидно, що при $x_1 =0, x_2 =0, \dots x_k =0$ - $z = d_0$, тобто d_0 - це значення цільової функції при допустимому базисному рішенні. Подивимося, чи не можемо ми поліпшити рішення, тобто зменшити цільову функцію *z*, збільшуючи якісь з змінних $x_1, x_2, \dots x_k$ (зменшувати їх ми не можемо, тому що всі вони рівні нулю, а від'ємні значення змінних недопустимі).

Якщо всі коефіцієнти $d_1, d_2, \dots d_k$ у формулі (4.3) додатні, то, збільшуючи якісь з змінних $x_1, x_2, \dots x_k$ понад нуль, ми не зможемо зменшити цільову функцію *z*; отже, знайдене нами допустиме базисне рішення є оптимальним.

Якщо ж серед коефіцієнтів $d_1, d_2, \dots d_k$ у формулі (4.3) є від'ємні, то, збільшуючи деякі зі змінних $x_1, x_2, \dots x_k$, а саме - ті, коефіцієнти біля яких від'ємні, ми можемо поліпшити рішення, тобто зменшити *z*.

Нехай, наприклад, коефіцієнт d_1 у формулі (4.3) від'ємний. Значить, є сенс збільшити x_1, тобто перейти від даного допустимого базисного рішення (опорного рішення) до іншого, де змінна x_1 не дорівнює нулю, а замість неї дорівнює нулю якась інша змінна, тобто перейти від однієї вершини ОДР до іншої вершини. Збільшення x_1 "корисне" для цільової функції z, тому, що зменшує її. Однак збільшувати x_1 треба обережно, так, щоб не стали від'ємними інші змінні $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$, виражені через вільні змінні, зокрема, через x_1, у формулах (4.1). Оскільки інші вільні змінні $x_2, ... x_k$ залишаються рівними нулю, то зміни базисних змінних $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ при збільшенні x_1 ся формулами:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_{k+1,1}x_1 + b_1 \\ x_{k+2} &= a_{k+2,1}x_1 + b_2 \\ &\dots \\ x_n &= a_{n,1}\ x_1 + b_n \end{aligned} \tag{4.4}$$

Подивимося, чи небезпечним є збільшення x_1 для змінних $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$, тобто чи може воно робити їх від'ємними? Так, небезпечно, якщо коефіцієнт при x_1 у відповідному рівнянні від'ємний. Якщо серед рівнянь (4.4) немає рівняння з від'ємним коефіцієнтом при x_1, то величину x_1 можна збільшувати безмежно, а значить, цільова функція z необмежена знизу і оптимального рішення задачі ЛП не існує.

Припустимо, що це не так і що серед рівнянь (4.4) є такі, в яких коефіцієнт при x_1 від'ємний. Для змінних, що стоять в лівих частинах рівнянь, збільшення x_1 небезпечне - воно може зробити їх від'ємними. Візьмемо одну з таких змінних і подивимося, наскільки можна все таки збільшити x_1, поки змінна x_n не стане від'ємною? Випишемо l-е рівняння з системи (4.4)

$$x_{k+1} = a_{k+1,1}x_1 + b_1$$

Тут вільний член $b_l \geq 0$, а коефіцієнт $a_{k+1,1}$ від'ємний. Легко зрозуміти, що ми можемо збільшувати x_1 тільки до значення, рівного - b_l / $a_{k+1,1}$, а при подальшому збільшенні x_1 змінна x_{k+1} стане від'ємною.

Виберемо ту зі змінних $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$, яка раніше всіх перетвориться на нуль при збільшенні x_1, тобто ту, для якої величина - $b_l / a_{l,1}$ найменша. Нехай цією змінною буде x_r. Тоді має сенс "перерозв'язати" систему рівнянь (4.1) щодо базисних змінних, вивівши з числа вільних змінних x_1 і перевівши замість неї в групу вільних змінних x_r.

Дійсно, ми хочемо перейти від допустимого базисного рішення, яке задається рівняннями $x_1 = 0, x_2 = 0, ... x_k = 0,$ до допустимого базисного рішення, в якому вже $x_1 <> 0$, а $x_2 = 0, ... x_k = 0, x_r = 0$. Перше допустиме базисне рішення ми отримали, перетворивши на нуль всі нові вільні змінні $x_1, x_2, ... x_k$; друге ми отримаємо, якщо перетворимо на нуль колишні змінні $x_2, ... x_k, x_r$. При цьому базисними змінними будуть $x_1, x_{k+1}, ..., x_{r-1}, x_{r+1}, ..., x_n$.

Припустимо, рівняння типу (4.1) для нового набору базисних і вільних змінних складені. Тоді і цільову функцію z також можна виразити через нові вільні змінні. Якщо всі коефіцієнти біля змінних в цій формулі є додатними, то ми знайшли відносне рішення: воно вийде, якщо всі вільні змінні прирівняти до нуля. Якщо серед коефіцієнтів біля змінних є від'ємні, то процедура поліпшення рішення триває: система знову перерозв'язується щодо інших базисних змінних, і так далі, поки не буде знайдено оптимальне рішення, що перетворює цільову функцію z в мінімум, або не буде встановлено, що цільова функція необмежена знизу, тобто задача ЛП не має рішення.

Викладене вище є змістом симплекс-алгоритму. Суть симплекс - алгоритму полягає у встановленні для наявного допустимого базисного рішення, чи є воно оптимальним. Якщо ні, то у вказівці, як перейти до нового допустимого базисного рішення, в якому значення цільової функції буде не більше, ніж в попередньому рішенні.

Приклади виконання завдання.

Приклад 1.

Є задача лінійного програмування в стандартній формі, тобто з обмеженнями - нерівностями.

$$z = 5x_1 - 2x_3 \to \min$$

$$\begin{aligned}
&- 5x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2\\
&- x_1 + x_3 + x_4 \le 5\\
&- 3x_1 + 5x_4 \le 7\\
&x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

Рішення. Оскільки симплекс-алгоритм розроблений для задач ЛП в канонічній формі, де потрібно мінімізувати цільову функцію, то нам потрібно перейти від обмежень - нерівностей до обмежень рівнянь. Для цього введемо додаткові змінні x_5, x_6, x_7 такі, що:

$$\begin{aligned}
&- 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 2\\
&- x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 5 \qquad (4.5)\\
&- 3x_1 + 5x_4 + x_7 = 7\\
&x_5 >= 0,\ x_6 >= 0,\ x_7 >= 0
\end{aligned}$$

Таким чином, ми сформулювали вихідну задачу ЛП в канонічній формі, тобто з обмеженнями рівняннями. Кількість змінних $n = 7$, на 4 перевищує кількість рівнянь $m = 3$. Отже, чотири змінних можуть бути обрані в якості вільних.

Із системи рівнянь (4.5) видно, що в якості вільних змінних найпростіше вибрати x_1, x_2, x_3, x_4. Тоді базисні змінні x_5, x_6, x_7 будуть виражені через вільні так:

$$\begin{aligned}
&5x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = x_5 \quad \leftarrow\\
&x_1 - x_3 - x_4 + 5 = x_6 \qquad (4.6)\\
&3x_1 - 5x_4 + 7 = x_7
\end{aligned}$$

Цьому набору вільних і базисних змінних відповідає базисне рішення:

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,\\
&x_5 = 2,\\
&x_6 = 5,\\
&x_7 = 7,
\end{aligned}$$

яке є допустимим ($x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$, $x_7 \ge 0$) і при цьому $z = 0$.

Але чи є це рішення оптимальним? Ні! Тому що в рівнянні цільової функції z, яка виражена через вільні змінні x_1 і x_3, коефіцієнт при x_3 від'ємний ($z = 5x_1 - 2x_3$). Значить, збільшуючи x_3, можна зменшити z.

Спробуємо збільшити x_3. Простежимо за рівнянням (4.6), чи небезпечно це для інших змінних? Для цього випишемо, як змінюються базисні змінні при збільшенні змінної x_3, тоді як змінні x_1, x_2, x_4 залишаються рівними нулю:

$$x_5 = - 2x_3 + 2$$
$$x_6 = - x_3 + 5$$
$$x_7 = 7$$

Так, небезпечно для x_5 і x_6 - в ці рівняння змінна x_3 входить з від'ємним коефіцієнтом, значить, при збільшенні x_3 відповідні змінні x_5 і x_6 можуть стати від'ємними.

Подивимося, яка з цих змінних x_5 чи x_6 раніше перетвориться на нуль при збільшенні x_3. Очевидно, x_5: вона стане рівною нулю при $x_3 =1$, а змінна x_6 - тільки при $x_3 = 5$. Тому вибираємо змінну x_5 і вводимо її в число вільних замість x_3. Щоб "перерозв’язати" систему (4.5) відносно нових базисних змінних x_3, x_6, x_7, поступимо таким чином.

В системі (4.6) рівняння, яке відповідає обраній змінній x_5 (позначене ←), розв’яжемо щодо нової базисної змінної x_3:

$$x_3 = 5/2 * x_1 + 1/2 * x_2 – 1/2 * x_5 + 1$$

Цей вираз підставимо замість x_3 в інші рівняння системи (4.6).

Отже, ми привели систему (4.5) до вигляду:

$$\begin{aligned} x_3 &= 5/2 * x_1 + 1/2 * x_2 – 1/2 * x_5 + 1 \\ x_6 &= - 3/2 * x_1 – 1/2 * x_2 – x_4 + 1/2 * x_5 + 4 \quad \leftarrow \\ x_7 &= 3 x_1 – 5x_4 + 7 \end{aligned} \tag{4.7}$$

з вільними змінними x_1, x_2, x_4 , x_5 і базисними x_3, x_6, x_7.

Виразимо цільову функцію z через нові вільні змінні:

$$z = 5x_1 – 2x_3 = 5x_1 – 2(5/2 * x_1 + 1/2 * x_2 – 1/2 * x_5 + 1) = - x_2 + x_5 - 2 \tag{4.8}$$

Цьому новому набору вільних і базисних змінних відповідає нове допустиме базисне рішення:

$$x_1= x_2 = x_4 = x_5= 0,$$
$$x_3 = 1,$$
$$x_6 = 4,$$
$$x_7 = 7.$$

Значення цільової функції при цьому рішенні дорівнює $z = -2$. Це вже краще, ніж колишнє значення $z = 0$. Але чи є це рішення оптимальним? Все ще ні, тому що коефіцієнт при x_2 у виразі (4.8) від'ємний. Отже, будемо збільшувати x_2.

Подивимося, для якої зі змінних, що стоять в лівих частинах системи (4.7), це може бути "небезпечним". Для цього випишемо, як змінюються базисні змінні при збільшенні змінної x_2, тоді, як інші вільні змінні x_1, x_4, x_5 залишаються рівними нулю,

$$x_3 = 1/2x_2 + 1$$
$$x_6 = -1/2 * x_2 + 4$$
$$x_7 = 7$$

Це небезпечно тільки для x_6 (в перше рівняння x_2 входить з додатним коефіцієнтом, а в третє зовсім не входить).

Отже, поміняємо місцями змінні x_2 і x_6 - першу виведемо з числа вільних, а другу - введемо. Для цього розв'яжемо рівняння системи (4.7), яке відповідає обраній змінній x_6 (позначене ←), щодо x_2 і підставимо його в інші рівняння системи (4.7). Отримали ще один вид системи (4.5):

$$x_2 = -3x_1 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 + 8$$
$$x_3 = x_1 - x_4 - x_6 + 5$$
$$x_7 = 3x_1 - 5x_4 + 7$$

Виразимо цільову функцію z через нові вільні змінні:

$$z = -2x_2 + x_5 - 2 = -(-3x_1 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 + 8) + x_5 - 2 = 3x_1 + 2x_4 + 2x_6 - 10 \quad (4.9)$$

Новому набору вільних і базисних змінних відповідає нове допустиме базисне рішення:

$$x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0,$$
$$x_2 = 8,$$
$$x_3 = 5,$$
$$x_7 = 7.$$

Цільова функція $z = -10$ для цього рішення. Чи є це рішення оптимальним? На цей раз - так, тому що коефіцієнти при всіх вільних змінних у виразі (4.9) невід'ємні.

Приклад 2.

Є задача лінійного програмування.

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 - x_2 \le 10$$
$$x_1 \le 20$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Рішення. Для того, щоб застосувати симплекс-алгоритм, необхідно перейти від задачі максимізації до еквівалентної задачі мінімізації і від обмежень - нерівностей до обмежень - рівнянь. Задача, що задовольняє зазначеним вимогам і еквівалентна вихідній, буде виглядати так:

$$z' = -2x_1 - x_2 \to \min$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + x_4 = 20 \quad (4.10)$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

Виберемо в якості базисних змінні x_3 і x_4, а в якості вільних змінні x_1 і x_2. Тоді базисні змінні виражаються через вільні наступним чином:

$$x_3 = -x_1 + x_2 + 10 \quad (4.11)$$
$$x_4 = -x_1 + 20$$

Цьому набору вільних і базисних змінних відповідає базисне рішення:

$$x_1 = x_2 = 0,$$
$$x_3 = 10,$$
$$x_4 = 20.$$

Це рішення є допустимим базисним рішенням. Значення цільової функції $z' = 0$ для цього рішення, але це рішення не є оптимальним, тому, що коефіцієнти при вільних змінних x_1 і x_2 у цільовій функції, вираженій через них, є від'ємними.

Таким чином, цільову функцію z′ ми можемо зменшити, збільшуючи як змінну x_1, так і x_2. Але треба вибрати тільки одну. Виберемо ту, коефіцієнт якої в цільовій функції максимальний по абсолютній величині. Цей вибір забезпечує найшвидше збільшення z′ при однаковій зміні альтернативних змінних x_1 і x_2.

Отже, змінну x_1 переведемо в базисні. Тоді зміна колишніх базисних змінних x_3 і x_4 при збільшенні x_1 визначається формулами

$$x_3 = - x_1 + 10$$
$$x_4 = - x_1 + 20$$

Звідси видно, що вільною змінною замість x_1 буде x_3. Тоді нові базисні змінні x_1 і x_4 виражаються через нові вільні x_2 і x_3 наступним чином:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - x_3 + 10 \\ x_4 &= -x_2 + x_3 + 10 \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Ці формули отримані з (4.11), де рівняння, яке відповідає x_3, розв'язане щодо нової базисної змінної x_1 і отриманий вираз підставляється в інші рівняння системи (4.11).

Цільова функція, виражена через нові вільні змінні, має вигляд:

$$z' = - 2x_1 - x_2 = -2(x_2 - x_3 + 10) - x_2 = - 3x_2 + 2x_3 - 20$$

Цьому набору вільних і базисних змінних відповідає базисне рішення:

$x_2 = x_3 = 0,$

$x_1 = 4,$

$x_4 = 20,$

і при цьому z′ = - 20.

Це рішення не є оптимальним, тому що коефіцієнт в цільової функції при змінній x_2 від'ємний. Отже, збільшуючи x_2 ми можемо зменшити значення цільової функції. Подивимося, як при цьому змінюються базисні змінні x_1 і x_4..

Із системи рівнянь (4.12) випливає

$$x_1 = x_2 + 10$$
$$x_4 = -x_2 + 10$$

Ясно, що змінні x_2 і x_4 міняються місцями, тобто новою вільною змінною замість x_2 буде x_4. З рівняння системи (4.12), яке відповідає x_4, знайдемо вираз базисної змінної x_2 через нові вільні x_3 і x_4. Підставивши цей вираз в інші рівняння системи (4.12), отримаємо

$$x_1 = -x_4 + 20$$
$$x_2 = x_3 - x_4 + 10$$

Цільова функція z′, виражена через нові вільні змінні x_3 і x_4, виглядає так:

$$z' = - 3x_2 + 2x_3 - 20 = -3(x_3 - x_4 + 10) + 2x_3 - 20 = - x_3 + 3x_4 - 50$$

Допустиме базисне рішення, яке відповідає цьому набору вільних і базисних змінних, має вигляд:

$x_3 = x_4 = 0,$

$x_1 = 20,$

$x_2 = 10.$

Але це рішення теж не є оптимальним, тому, що коефіцієнт при x_3 в z′ від'ємний. Тому при збільшенні x_3 цільова функція z′ буде зменшуватися. При цьому базисні змінні x_1 і x_2 будуть змінюватися відповідно до виразів:

$$x_1 = 20$$

$$x_2 = x_3 + 10$$

Але ці вирази показують, що при будь-якому збільшенні змінної x_3 базисні змінні x_1 і x_2 залишаються невід'ємними, тобто x_3 можна збільшувати скільки завгодно. А так при цьому цільова функція z′ зменшується до мінус нескінченності, то, отже, задача оптимального рішення не має.

Завдання для самостійного розв'язку

Розв'язати симплекс-методом

№		№		№	
1	$F=3x_1+2x_5-5x_6\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_5+5x_6=34,\\4x_1+x_3+2x_5-4x_6=28,\\-3x_1+x_4-3x_5+6x_6=24,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,6}).$	9	$F=2x_1+3x_2-x_4\to\max;$ $\begin{cases}2x_1-x_2-2x_4+x_5=16,\\3x_1+2x_2+x_3-3x_4=18,\\-x_1+3x_2+4x_4+x_6=24,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,6}).$	17	$\begin{cases}-x_1+2x_2\ge 2\\x_1+\quad x_2\ge 4\\x_1-\quad x_2\le 2\\\qquad x_2\le 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ \ x_2\le 0$ $F=x_1+2x_2\to max$
2	$\begin{cases}5x_1+2x_2\le 20,\\6x_1+12x_2\le 72,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0,\end{cases}$ $z=8x_1+6x_2\to max.$	10	$\begin{cases}4x_1+x_2+x_3=8,\\2x_1-x_2\le 2,\\x_1+x_2-x_4=2,\\x_i\ge 0, i=1,\ldots,4,\end{cases}$ $z=6x_1+x_3\to max.$	18	$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3\ge 7,\\-x_1+3x_3\le 2,\\4x_1+x_2-2x_3\ge 4,\\x_i\ge 0, i=1,\ldots,3,\end{cases}$ $z=3x_1-x_2-2x_3\to min.$
3	$F=x_1+2x_2-x_3\to\max;$ $\begin{cases}-x_1+4x_2-2x_3\leqslant 6,\\x_1+x_2+2x_3\geqslant 6,\\2x_1-x_2+2x_3=4,\end{cases}$ $x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$	11	$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=2,\\2x_1+x_2-3x_3+x_4=6,\\x_1+x_2+x_3+x_4=7,\\x_i\ge 0, i=1,\ldots,4,\end{cases}$ $z=2x_1+x_2-x_3-x_4\to max.$	19	$\begin{cases}-x_1+4x_2-2x_3\le 6,\\x_1+x_2+2x_3\ge 6,\\2x_1-x_2+2x_3=4,\\x_i\ge 0, i=1,2,3,\end{cases}$ $z=x_1+2x_2-x_3\to max.$
4	$\begin{cases}x_1+x_2\ge 1,\\-x_1+x_2\ge -1,\\2x_1-x_2\ge 0,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0,\end{cases}$ $z=-x_2\to min.$	12	$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=10,\\-2x_1-x_2-2x_4\ge 18,\\3x_1+2x_2+x_4\ge 36,\\x_i\ge 0, i=1,\ldots,4,\end{cases}$ $z=2x_1-x_2-x_4\to min.$	20	$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3-7x_4+15x_5=4,\\x_2+x_3-2x_4+2x_5=3,\\2x_1+x_3+5x_4=7,\\x_i\ge 0, i=1,\ldots,5,\end{cases}$ $z=x_3-2x_4-3x_5\to min.$
5	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=5,\\2x_1+x_2+x_4=9,\\x_1+2x_2+x_5=7,\\x_i\ge 0, i=1,\ldots,5,\end{cases}$ $z=2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5\to max.$	13	$\begin{cases}x_1-2x_2+x_4=-3,\\x_3-2x_4=2,\\3x_2-x_4+x_5\le 5,\\x_i\ge 0, i=1,\ldots,4,\end{cases}$ $z=x_1+x_2-x_3-2x_5\to min.$	21	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=15,\\2x_1+x_2+5x_3=20,\\x_1+2x_2+x_3+x_4=10,\\x_i\ge 0, i=1,\ldots,4,\end{cases}$ $z=x_1+2x_2+3x_3-x_4\to max.$

6	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3. \end{cases}$ $z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to max.$	14	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_i \geq 0, i = 1,\dots,4. \end{cases}$ $z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to min.$	22	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_i \geq 0, i = 1,\dots,4, \end{cases}$ $z = 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to max.$
7	$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$ $z = -x_1 + x_2 \to max.$	15	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = -13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \\ x_i \geq 0, i = 1,\dots,6, \end{cases}$ $z = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \to min.$	23	$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \end{cases}$ $z = 2x_1 + 3x_2 \to max.$
8	$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$ $z = 2x_1 + x_2 \to min.$	16	$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3, \end{cases}$ $z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to min.$	24	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_3 + x_6 = 18, \\ x_i \geq 0, i = 1,\dots,6, \end{cases}$ $z = 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 \to max.$

Практичне заняття № 5

ВИЗНАЧЕННЯ ОПОРНОГО ПЛАНУ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Методичні вказівки до виконання завдання

Транспортна задача — це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min; \qquad (5.1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (5.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}\right), \qquad (5.4)$$

де x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача;

c_{ij} — вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача;

a_i — запаси продукції i-го постачальника;

b_j — попит на продукцію j-го споживача.

Звичайно вихідні дані транспортної задачі записують у виді таблиці:

Пункт відправки / Пункт призначення	B_1	. . .	B_j	B_n	Запаси
A_1	x_{11}^{c11}	. . .	x_{ij}^{cij}	x_{in}^{cin}	a_1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_i	x_{i1}^{ci1}	. . .	x_{ij}^{cij}	x_{in}^{cin}	a_i
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	x_{m1}^{cm1}	. . .	x_{mj}^{cmj}	x_{mn}^{cmn}	a_m
Потреби	b_1	. . .	b_j	b_n	

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \qquad (5.5)$$

то таку транспорту задачу називають ***збалансованою***, або ***закритою***. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою***, або ***відкритою***.

Умова існування розв'язку транспортної задачі. Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (5.2)—(5.4) транспортної задачі, який позначають матрицею $x = (x_{ij})$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = (\vec{x}_{ij}^*)$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (5.1) набуває найменшого значення.

Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі — стовпчиками.

Метод північно – західного кута

Ідея методу північно-західного кута полягає в тому, що заповнення таблиці перевезень транспортної задачі починається з лівого верхнього (північно-західного) кута, не враховуючи вартостей перевезень. У клітину записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її і так далі. Закінчують заповнення даної таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Розглянемо приклад. На три бази A_1, A_2, A_3 поступив товар в кількості 140; 180; 160. Цей вантаж треба перевезти в п'ять пунктів призначення B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 в кількостях 60; 70; 120; 130; 100. Тарифи перевезення записані в наступній таблиці:

Пункти відправлення	*Пункти призначення*					*Запаси*
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Знайти план перевезення даної транспортної задачі методом північно-західного кута.

Для цього спочатку, не враховуючи вартостей перевезення, задовольняємо потреби першого пункту призначення B_1, використовуючи запаси першого пункту відправлення A_1. У нашому прикладі потреби в товарі пункту B_1 становлять $b_1=60$, а запаси відправника — $a_1=140$. Тобто із запасів першого пункту відправлення ми можемо повністю задовільнити потреби першого пункту призначення. Тому у клітинку A_1B_1 записуємо менше із значень a_1, b_1, тобто 60. Після цього таблиця набуде такого вигляду:

Пункти відправлення	*Пункти призначення*					*Запаси*
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Тепер переходимо до задоволення потреб другого пункту призначення — B_2, потреби якого становлять $b_2=70$. Після задоволення потреб пункту A_1, залишок запасів першого пункту відправлення становить 140 — 60 = 80 (цього достатньо, щоб задовільнити потреби і другого пункту призначення). Тому записуємо в клітинку A_2B_2 значення 70 і переходимо до задоволення потреб пункту B_3.

Пункти відправлення	*Пункти призначення*					*Запаси*
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3 70	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Залишок запасів у першого пункту призначення, після задоволення потреб пунктів призначення B_1 і B_2, становить 140 — 60 — 70 = 10. Тому третьому споживачеві від першого відправника можемо перевезти лише 10 одиниць продукції. Отже, в клітинку A_1B_3 помістимо число 10.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
	60	70	10			
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Після цього, оскільки запаси першого відправника повністю вичерпані, переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2. Його запаси рівні $a_2=180$. А незадоволені потреби третього пункту призначення 120 — 10 = 110. Тому в клітинку A_2B_3 записуємо число 110, і третій споживач, у такий сопсіб, також отримав необхідну кількість продукції.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
	60	70	10			
A_2	8	4	1	4	1	180
			110			
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Переходимо до задоволення потреб наступного споживача, а саме B_4. У результаті часткового використання запасів другого пункту відправлення його залишок продукції становить 180 — 110 = 70. Отже від другого пункту відправлення до четвертого пункту призначення можна перевезти лише 70 одиниць продукції. Тому клітинка A_2B_4 міститиме число 70, і цим запаси постачальника A_2 будуть також повністу вичерпані.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
	60	70	10			
A_2	8	4	1	4	1	180
			110	70		
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Переходимо до використання запасів останнього пункту відправлення A_3. Залишок потреб четвертого пункту становить 130 — 70 = 60.

Для їх задоволення скористаємось запасами відправника A_3. У клітинку A_3B_4 запишемо число 60 і потреби четвертого пункту також повністю задоволені.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3 70	4 10	2	4	140
A_2	8	4	1 110	4 70	1	180
A_3	9	7	3	7 60	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Переходимо до останнього споживача B_5 з потребами $b_5=100$, які повністю задовольняються за рахунок залишку третього відправника 160 — 60 =100, тобто у клітинку A_3B_5 запишемо число 100.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3 70	4 10	2	4	140
A_2	8	4	1 110	4 70	1	180
A_3	9	7	3	7 60	2 100	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Таким чином ми отримали кінцеву таблицю, у заповнених клітинках якої містяться числа, які означають можливий план перевезення продукції з загальною вартістю F = 60 * 2 + 70 * 3 + 10 * 4 + 110 * 1 + 70 * 4 + 60 * 7 + 100 * 2 = 1380 умовних одиниць.

Метод мінімальної вартості

Ідея методу мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Розглянемо приклад. На три бази A_1, A_2, A_3 поступив товар в кількості 160; 140 і 170 одиниць відповідно. Цей вантаж потрібно перевезти в чотири пункти призначення B_1, B_2, B_3, B_4, потреби яких становлять 120; 50; 190; 110. Тарифи перевезення записані в таблиці:

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потреби	120	50	190	110	470

Найменшу вартість має перевезення, яке здійснюються з A_1 в B_3, ціна перевезення одиниці продукції якого становить 1-ну умовну одиницю. Заповнимо дану клітинку. Оскільки відправник A_1 має в запасі 160 одиниць продукції, а пункт призначення B_3 потребує — 190, то від першого відправника третьому споживачеві можна перевезти лише 160 одиниць продукції. І таким чином запаси першого пункту відправлення повністю вичерпані (перший рядок викреслюємо з розгляду).

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
			160		
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потреби	120	50	190	110	470

З клітинок, що залишилися вибираємо ту, в якій знаходиться маршрут з мінімальною вартістю перевезення. Таких клітинок у нас дві: A_3B_2 і A_1B_4. Виходячи з того, що клітинка A_1B_4 знаходиться в першому рядку, а його ми на попередньому кроці викреслили з розгляду, то будемо заповнювати клітинку A_3B_2. Обсяг запасів пункту відправлення рівні $a_3=170$, а потреби $b_2=50$, тому, за рахунок запасів третього відправника, потреби другого споживача задовольняються в повному обсязі (стовбець під номером два викреслюється з розгляду) і в клітинку A_3B_2 записуємо число 50. В результаті отримуємо наступну таблицю:

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
			160		
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
		50			
Потреби	120	50	190	110	470

Знову вибираємо клітинку (серед тих що залишилися незаповненими) з найменшою вартістю перевезень. Такою клітинкою буде A_3B_3. Виходячи з того, що запаси третього пункту відправлення становлять $a_3=170-50=120$, а потреби третього пункту призначення рівні $b_3=190-160=30$, то ставимо в клітинку A_3B_3 значення 30. І таким чином потреби 3-го пункту призначення задоволені, а стовбець в якому знаходиться даний пункт викреслюємо з розгляду.

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2 50	3 30	6	170
Потреби	120	50	190	110	470

Продовжуючи даний процес до тих пір, поки усі запаси не будуть вичерпані, а потреби — задоволеними, ми отримаємо таблицю, у заповнених клітинках якої містяться числа, які означають можливий план перевезення продукції із загальною вартістю F = 120 * 4 + 50 * 2 + 160 * 1 + 3 * 30 + 20 * 8 + 90 * 6 = 1530

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	3 30	6 90	170
Потреби	120	50	190	110	470

Метод апроксимації Фогеля.

Алгоритм даного методу наступний:

1. На довільному кроці методу, для кожного рядка та стовпця обчислюється різниця (*"штраф"*) між значеннями найменшої вартості та вартості, наступної за величиною. Якщо ж виявиться, що в рядку чи стовпці містяться дві комірки з однаковими мінімальними значеннями тарифів, то беремо саме їх. В такому випадку різниця буде дорівнювати нулю.
2. Обчислені штрафи записуються у додаткові рядки та стовпі транспортної таблиці**.**
3. Виокремлюємо рядок чи стовпець з найбільшим *"штрафом"* (якщо їх є декілька, то обираємо довільний з них).
4. У виокремленому на попередньому кроці рядку чи стовпці обираємо комірку з найменшою вартістю.
5. Для обраної комірки встановлюємо величину перевезень, аналогічно методу мінімального елемента, після чого, повторюємо всі вищеописані дії знову, тільки вже не враховуючи заповнені клітини.

Такі дії необхідно повторювати до тих пір, поки не залишиться незаповненим лише один рядок або стовпець. В такому випадку, обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати згідно методу мінімального елемента.

Розглянемо приклад. На три бази A_1, A_2, A_3 поступив товар в кількості *160, 140 і 170* одиниць відповідно. Цей вантаж потрібно перевезти в чотири пункти призначення B_1, B_2, B_3, B_4, потреби яких становлять *120, 50, 190, 110*. Тарифи на перевезення одиниці продукції записані в наступній таблиці.

Пункти відправлення	*Пункти призначення*				*Запаси*
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потреби	120	50	190	110	470

Для побудови опорного плану транспортної задачі методом Фогеля на першому кроці доповнимо транспортну таблицю додатковим рядком і стовпцем. Далі, згідно алгоритму, заповнимо їх комірки обчисленими для кожного рядка та стовпця *"штрафами"*.

Пункти відправлення	*Пункти призначення*				*Запаси*	*Різниці по рядках*
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7	8	1	2	160	$\lvert 1-2\rvert = 1$
A_2	4	5	9	8	140	$\lvert 4-5\rvert = 1$
A_3	9	2	3	6	170	$\lvert 2-3\rvert = 1$
Потреби	120	50	190	110	470	
Різниці по стовпцях	$\lvert 4-7\rvert = 3$	$\lvert 2-5\rvert = 3$	$\lvert 1-3\rvert = 2$	$\lvert 2-6\rvert = 4$		

Максимальне значення такої різниці на першому кроці відповідає четвертому стовпцю і означає, що у разі, коли не буде задоволена потреба четвертого пункту призначення перевезенням продукції від першого пункту відправлення за ціною *2* у. о. за одиницю товару, то на наступних кроках вартість перевезення може бути на *4* у. о. більшою. Тобто інакше може статися, що потребу четвертого пункту необхідно буде задовольняти перевезенням продукції від третього відправника, що призведе до збільшення вартості цього перевезення в *3* рази. Водночас для всіх інших пунктів призначення та пунктів відправлення такі різниці є меншими. Отже, найдоцільніше на першому кроці заповнити комірку A_1B_4. Після цього потреби пункту B_4 повністю задоволені, і всі комірки четвертого стовпчика виключаємо з подальших розрахунків різниць по рядках і стовпцях, після чого переходимо до наступного кроку.

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси	Різниці по рядках	
	B_1	B_2	B_3	B_4			
A_1	7	8	1	2 110	160	1	$\lvert 1-7\rvert = 6$
A_2	4	5	9	8	140	1	$\lvert 4-5\rvert = 1$
A_3	9	2	3	6	170	1	$\lvert 2-3\rvert = 1$
Потреби	120	50	190	110	470		
Різниці по стовпцях	3	3	2	4			
	$\lvert 4-7\rvert = 3$	$\lvert 2-5\rvert = 3$	$\lvert 1-3\rvert = 2$				

На другому кроці максимальна різниця дорівнює *6* і відповідає першому рядку таблиці. Тому заповнюємо її комірку з мінімальною вартістю, а саме комірку A_1B_2. Після цього з розгляду виключаються одразу всі комірки першого рядка, оскільки його запаси повністю вичерпані. Переходимо до кроку під номером три.

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси	Різниці по рядках		
	B_1	B_2	B_3	B_4				
A_1	7	8	1 50	2 110	160	1	6	
A_2	4	5	9	8	140	1	1	$\lvert 4-5\rvert = 1$
A_3	9	2	3	6	170	1	1	$\lvert 2-3\rvert = 1$
Потреби	120	50	190	110	470			
Різниці по стовпцях	3	3	2	4				
	3	3	2					
	$\lvert 4-9\rvert = 5$	$\lvert 2-5\rvert = 3$	$\lvert 3-9\rvert = 6$					

Третій крок розрахунку різниць (найбільше значення *6* відповідає третьому стовпцю) говорить про те, що доцільно, скориставшись запасами третього пункту відправлення, повністю задовільнити потреби третього пункту призначення, тобто заповнюємо комірку таблиці A_2B_2 і викреслюємо третій стовпець з розгляду. Далі, переходимо до четвертого кроку.

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси	Різниці по рядках			
	B_1	B_2	B_3	B_4					
A_1	7	8	1 50	2 110	160	1	6		
A_2	4	5	9	8	140	1	1	1	$\lvert 4-5\rvert = 1$
A_3	9	2	3 140	6	170	1	1	1	$\lvert 2-9\rvert = 7$
Потреби	120	50	190	110	470				
Різниці по стовпцях	3	3	2	4					
	3	3	2						
	5	3	6						
	$\lvert 4-9\rvert = 5$	$\lvert 2-5\rvert = 3$							

На четвертому кроці, скориставшись запасами, третього пункту відправлення, що залишились, частково задовільнимо потреби другого пункту призначення і таким чином викреслимо третій рядок таблиці з розгляду. На цьому процес обчислення різниць (*"штрафів"*) завершується, і решта клітин заповнюємо згідно алгоритму методу мінімального елемента. В результаті виконання даного кроку, ми отримали таблицю, у заповнених комірках якої містяться числа, які означають можливий план перевезення продукції із загальною вартістю $F=120*4+20*5+30*2+50*1+140*3+110*2=1330$.

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси	Різниці по рядках			
	B_1	B_2	B_3	B_4					
A_1	7	8	1 50	2 110	160	1	6		
A_2	4 120	5 20	9	8	140	1	1	1	|4 – 5| = 1
A_3	9	2 30	3 140	6	170	1	1	1	|2 – 9| = 7
Потреби	120	50	190	110	470				
Різниці по стовпцях	3	3	2	4					
	3	3	2						
	5	3	6						
	|4 – 9| = 5	|2 – 5| = 3							

Метод подвійної переваги

Метод подвійної переваги при знаходженні опорного плану транспортної задачі зазвичай використовується в тому випадку коли таблиця вартостей ТЗ достатньо велика і перебір всіх її елементів є досить трудоємкою процедурою. Також слід відмітити, що у багатьох випадках рішення транспортної задачі з використання методу подвійної переваги виявляється більш простим, зручним і швидким, порівняно з іншими методами.

Розглянемо алгоритм методу подвійної переваги:

1. На першому кроці, у кожному стовпці транспортної таблиці відзначають знаком *"V"* комірку з найменшою вартістю.
2. Потім те ж роблять в кожному рядку. В результаті виконання другого кроку, деякі комірки транспортної таблиці будуть містити відмітку *"VV"*.
3. На останньому кроці, у комірки з подвійними відмітками (подвійна перевага) поміщають максимально можливі обсяги перевезень, щоразу виключаючи з розгляду відповідні стовпці або рядки. Потім розподіляють перевезення по комірках з одиничною відміткою. Решта перевезення розподіляють згідно алгоритму методу мінімального елемента.

Розглянемо приклад. На три бази A_1, A_2, A_3 поступив товар в кількості *160, 140 і 170* одиниць відповідно. Цей груз потрібно перевезти в чотири пункти призначення B_1, B_2, B_3, B_4, потреби яких становлять *120, 50, 190, 110*. Тарифи на перевезення одиниці продукції записані в наступній таблиці:

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потреби	120	50	190	110	470

Для побудови опорного плану транспортної задачі методом подвійної переваги спочатку відзначаємо знаком *V* комірку з найменшою вартістю в кожному стовпці, потім — в кожному рядку. В результаті транспортна таблиця даної задачі набуде наступного вигляду:

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 VV	2 V	160
A_2	4 VV	5	9	8	140
A_3	9	2 VV	3	6	170
Потреби	120	50	190	110	470

Після цього, на першому кроці, заповнюємо комірки A_1B_3,, A_2B_1, A_3B_2 (мають відмітку *"VV"*). Зауважимо, що заповнювати комірку з відміткою *"V"* не будемо, тому що рядок в якому вона знаходиться вже виключно з розгляду. Далі, комірки що залишились, заповнюємо за мінімальною вартістю, тобто у наступній послідовності: A_3B_3,, A_3B_4, A_2B_4.

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	3 30	6 90	170
Потреби	120	50	190	110	470

Обчисливши загальну суму витрат на перевезення вантажу за цим планом *F=160*1+120*4+20*8+50*2+30*3+90*6=1530*. та порівнюючи її з результатами, отриманим за допомогою інших методів (метод мінімального елемента — *1530*; метод північно-західного кута — *1740*; метод Фогеля — *1330*) бачимо, що отримана сума не є мінімальною, що трапляється доволі рідко. Таким чином, для даної задачі, найменшу вартість має опорний план, отриманий за методом Фогеля, а отже, він найбільш близький до оптимального.

Після побудови першого опорного плану одним із розглянутих методів у таблиці має бути заповнено $(m+n-1)$ клітинок, де m — кількість постачальників; n — кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають ***невиродженим***. Якщо кількість заповнених клітинок перевищує $(n+m-1)$, то початковий план побудовано неправильно і він є неопорним. ***Ознакою опорності*** плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. ***Циклом*** у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як $(m + n - 1)$, то опорний план називають ***виродженим***. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану.

Завдання для самостійного розв'язку

Чотирьом взуттєвим фабрикам сировина поступає із трьох шкіряних заводів. Потреби в сировині першої, другої, третьої та четвертої фабрик відповідно складають $в_1, в_2, в_3, в_4$ тон. Запаси сировини на першому, другому і третьому складах відповідно дорівнюють a_1, a_2, a_3 тон. Транспортні затрати на перевезення однієї тони сировини із i – го складу на j – ту фабрику складають, відповідно, c_{ij} $(i= 1,2,3; j=1,2,3,4)$ гривень.

Скласти модель задачі, знайти опорний план методом північно-західного кута, методом мінімального елемента, методом апроксимації Фогеля та методом подвійної переваги. Порівняти отримані результати, визначити метод, найбільш близький до оптимального. Дані наведено в таблиці.

	a_1	a_2	a_3	$в_1$	$в_2$	$в_3$	$в_4$	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
1	20	30	40	20	30	15	25	6	8	4	9	8	4	5	1	9	1	6	2
2	10	15	25	5	10	15	20	4	1	7	3	3	8	1	1	7	4	5	5
3	15	30	30	10	15	20	30	1	8	3	7	9	3	5	5	2	4	1	2
4	10	20	30	5	10	15	20	4	1	3	4	6	7	1	5	7	3	8	2
5	20	30	50	10	20	30	40	5	1	3	7	4	2	4	6	2	1	3	5
6	10	20	20	5	10	15	20	2	3	4	5	1	8	6	1	3	7	2	4
7	50	30	20	5	10	35	50	5	8	1	4	8	7	4	5	6	2	1	3
8	20	40	40	10	20	30	40	1	2	7	8	2	3	7	5	3	9	5	1
9	20	30	50	10	20	30	40	5	1	3	7	4	2	4	6	2	1	3	5
10	15	30	30	10	15	20	30	1	8	3	7	9	3	5	5	2	4	1	2
11	10	20	30	5	10	15	20	4	1	3	4	6	7	1	5	7	3	8	2
12	50	30	20	5	10	35	50	5	8	1	4	8	7	4	5	6	2	1	3

13	20	30	40	20	30	15	25	6	8	4	9	8	4	5	1	9	1	6	2
14	20	40	40	10	20	30	40	1	2	7	8	2	3	7	5	3	9	5	1
15	10	20	20	5	10	15	20	2	3	4	5	1	8	6	1	3	7	2	4
16	10	15	25	5	10	15	20	4	1	7	3	3	8	1	1	7	4	5	5
17	15	30	30	10	15	20	30	1	8	3	7	9	3	5	5	2	4	1	2
18	20	30	50	10	20	30	40	5	1	3	7	4	2	4	6	2	1	3	5
19	50	30	20	5	10	35	50	5	8	1	4	8	7	4	5	6	2	1	3
20	10	20	30	5	10	15	20	4	1	3	4	6	7	1	5	7	3	8	2
21	20	30	40	20	30	15	25	6	8	4	9	8	4	5	1	9	1	6	2
22	20	40	40	10	20	30	40	1	2	7	8	2	3	7	5	3	9	5	1
23	10	20	20	5	10	15	20	2	3	4	5	1	8	6	1	3	7	2	4
24	10	15	25	5	10	15	20	4	1	7	3	3	8	1	1	7	4	5	5

Практичне заняття № 6

РІШЕННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

Методичні вказівки до виконання завдання

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування ефективніший метод, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму. Таким є ***метод потенціалів***.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів.

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.
3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.
5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості (5.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} або фіктивного споживача B_{n+1} вважається такою, що дорівнює нулю.

Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно постачальників та споживачів.

Умова оптимальності опорного плану транспортної задачі. Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}^*)$ існують числа u_i та v_j, для яких виконується умова

$$u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0,$$
$$u_i + v_j \le c_{ij}, x_{ij} = 0$$

для всіх $i = \overline{1,m}$ та $j = \overline{1,n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

4. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\max\{\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}\}$. Для вибраної порожньої клітинки будують цикл перерахування та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим по черзі — знаки «–» та «+»;

2) у порожню клітинку переносять менше з чисел x_{ij}, що стоять у клітинках зі знаком «–». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+».

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Новий опорний план перевіряють на оптимальність згідно з п. 3 розглянутого алгоритму.

Розглянемо застосування методу потенціалів для розв'язування транспортних задач.

Приклади виконання завдання

Приклад 1.

Знайти такий план закріплення магазинів за підприємствами, що забезпечує мінімальні витрати транспортних перевезень вантажу, якщо

28	27	18	27	24	200
18	26	27	32	21	250
27	33	23	31	34	200
190	100	120	110	130	

Розв'язування:

Розв'яжемо дану задачу методом потенціалів. Для цього необхідно спочатку перевірити чи є модель закритою, тобто $\sum a_i = \sum в_j$.

$\sum a_i = 200 + 250 + 200 = 650$

$\sum в_j = 190 + 100 + 120 + 110 + 130 = 650$

Отже модель закрита. Тепер необхідно побудувати опорний план задачі. Наприклад, методом північно – західного кута. Цей метод полягає в тому, що в верхню ліву клітку ставиться максимально можлива поставка і умовно викреслюється строка або стовпчик, чи запаси або, відповідно, потреби вичерпано. Далі в верхню ліву клітку знову ставиться максимально можлива поставка і т.д.

Магаз. / *Підпр.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*Запа-си*
1	190^{28}	10^{27}	^{18}	^{27}	^{24}	200
2	^{18}	90^{26}	120^{27}	$\mathbf{40^{32}}$	$\mathbf{*^{21}}$	250
3	^{27}	^{33}	^{23}	$\mathbf{70^{31}}$	$\mathbf{130^{34}}$	200
Пот-реби	190	100	120	110	130	650

2. Перевіримо даний план на оптимальність.

а) знайдемо потенціали для заповнених кліток з системи рівнянь $\beta_j – \alpha_i = c_{ij}$

Так як система невизначена (має безліч розв'язків), то одне значення необхідно задати наперед, щоб знайти один з розв'язків системи.

Наприклад $\alpha_1 = 0$

$\beta_1 – \alpha_1 = 28$ $\qquad \beta_1 = 28$

$\beta_2 – \alpha_1 = 27$ $\qquad \beta_2 = 27$

$\beta_2 – \alpha_2 = 26$ $\qquad \alpha_2 = \beta_2 – 26 = 1$

$\beta_3 – \alpha_2 = 27$ $\qquad \beta_3 = 27 + \alpha_2 = 28$

$\beta_4 – \alpha_2 = 32$ $\qquad \beta_4 = 32 + \alpha_2 =33$

$\beta_4 – \alpha_3 = 31$ $\qquad \alpha_3 = \beta_4 – 31 =2$

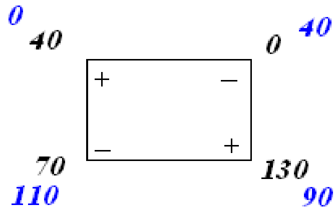
$\beta_5 – \alpha_3 = 34$ $\qquad \beta_5 = 34 + \alpha_3 = 36$

б) знайдемо потенціали для порожніх кліток з рівнянь $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$

$\alpha_{21} = \beta_1 - \alpha_2 - c_{21} = 28 - 1 - 18 = 9$
$\alpha_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - c_{31} = 28 - 2 - 27 = -1$
$\alpha_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - c_{32} = 27 - 2 - 33 = -8$
$\alpha_{13} = \beta_3 - \alpha_1 - c_{13} = 28 - 0 - 18 = 10$
$\alpha_{33} = \beta_3 - \alpha_3 - c_{33} = 28 - 2 - 23 = 3$
$\alpha_{14} = \beta_4 - \alpha_1 - c_{14} = 33 - 0 - 27 = 6$
$\alpha_{15} = \beta_5 - \alpha_1 - c_{15} = 36 - 0 - 24 = 12$
$\boldsymbol{\alpha_{25} = \beta_5 - \alpha_2 - c_{25} = 36 - 1 - 21 = 14}$

3. Так як серед α_{ij} є додатні числа, то даний план перевезень не є оптимальним. Необхідно побудувати цикл перерахунку для клітки з максимальним додатнім α_{ij}. Це клітка (2; 5). Побудуємо новий опорний план:

Магаз. / *Підпр.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*Запа-си*
1	190^{28}	10^{27}	^{18}	^{27}	^{24}	200
2	^{18}	90^{26}	$\mathbf{120^{27}}$	^{32}	$\mathbf{40^{21}}$	250
3	^{27}	^{33}	*** ^{23}**	110^{31}	$\mathbf{90^{34}}$	200
Пот-реби	190	100	120	110	130	650



2. Перевіримо даний план на оптимальність.

а) знайдемо потенціали для заповнених кліток

Нехай $\alpha_1 = 0$

$\beta_1 - \alpha_1 = 28$	$\beta_1 = 28$
$\beta_2 - \alpha_1 = 27$	$\beta_2 = 27$
$\beta_2 - \alpha_2 = 26$	$\alpha_2 = \beta_2 - 26 = 1$
$\beta_3 - \alpha_2 = 27$	$\beta_3 = 27 + \alpha_2 = 28$
$\beta_4 - \alpha_3 = 31$	$\beta_4 = 31 + \alpha_2 = 19$
$\beta_5 - \alpha_2 = 21$	$\beta_5 = 21 + \alpha_2 = 22$
$\beta_5 - \alpha_3 = 34$	$\alpha_3 = \beta_5 - 34 = -12$

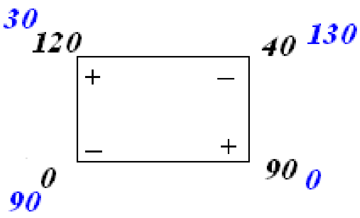
б) знайдемо потенціали для порожніх кліток

$\alpha_{21} = \beta_1 - \alpha_2 - c_{21} = 28 - 1 - 18 = 9$
$\alpha_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - c_{31} = 28 + 12 - 27 = 13$
$\alpha_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - c_{32} = 27 + 12 - 33 = 6$
$\alpha_{13} = \beta_3 - \alpha_1 - c_{13} = 28 - 0 - 18 = 10$
$\boldsymbol{\alpha_{33} = \beta_3 - \alpha_3 - c_{33} = 28 + 12 - 23 = 17}$
$\alpha_{14} = \beta_4 - \alpha_1 - c_{14} = 19 - 0 - 27 = -8$
$\alpha_{24} = \beta_4 - \alpha_2 - c_{24} = 19 - 1 - 32 = -14$
$\alpha_{15} = \beta_5 - \alpha_1 - c_{15} = 22 - 0 - 24 = -2$
$\alpha_{25} = \beta_5 - \alpha_2 - c_{25} = 22 - 1 - 21 = 0$

3. Так як серед α_{ij} є додатні числа, то даний план перевезень не є оптимальним. Необхідно побудувати цикл перерахунку для клітки (3; 3).

Будуємо новий опорний план:

Магаз. / *Підпр.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*Запа-си*
1	190^{28}	$\mathbf{10^{27}}$	$\mathbf{* \ ^{18}}$	^{27}	^{24}	200
2	^{18}	$\mathbf{90^{26}}$	$\mathbf{30^{27}}$	^{32}	130^{21}	250
3	^{27}	^{33}	90^{23}	110^{31}	^{34}	200
Пот-реби	190	100	120	110	130	650



2. Перевіримо даний план на оптимальність.

а) знайдемо потенціали для заповнених кліток

Нехай $\alpha_1 = 0$

$\beta_1 - \alpha_1 = 28$	$\beta_1 = 28$
$\beta_2 - \alpha_2 = 26$	$\beta_2 = 26 + \alpha_2 = 26 - 9 = 17$
$\beta_3 - \alpha_1 = 18$	$\beta_3 = 18$
$\beta_3 - \alpha_2 = 27$	$\alpha_2 = \beta_3 - 27 = 18 - 27 = -9$
$\beta_3 - \alpha_3 = 23$	$\alpha_3 = \beta_3 - 23 = 18 - 23 = -5$
$\beta_4 - \alpha_3 = 31$	$\beta_4 = 31 + \alpha_3 = 31 - 5 = 26$
$\beta_5 - \alpha_2 = 21$	$\beta_5 = 21 + \alpha_2 = 21 - 9 = 12$

б) знайдемо потенціали для порожніх кліток

$\boldsymbol{\alpha_{21} = \beta_1 - \alpha_2 - c_{21} = 28 + 9 - 18 = 19}$

$\alpha_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - c_{31} = 28 + 5 - 27 = 6$

$\alpha_{12} = \beta_2 - \alpha_1 - c_{12} = 17 - 0 - 27 = -10$

$\alpha_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - c_{32} = 17 + 5 - 33 = -11$

$\alpha_{14} = \beta_4 - \alpha_1 - c_{14} = 26 - 0 - 27 = -1$

$\alpha_{24} = \beta_4 - \alpha_2 - c_{24} = 26 + 9 - 32 = 3$

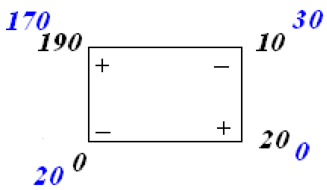
$\alpha_{15} = \beta_5 - \alpha_1 - c_{15} = 12 - 0 - 24 = -12$

$\alpha_{35} = \beta_5 - \alpha_3 - c_{35} = 12 + 5 - 34 = -17$

3. Так як серед α_{ij} є додатні числа, то даний план перевезень не є оптимальним. Необхідно побудувати цикл перерахунку для клітки (2; 1).

Будуємо новий опорний план:

Магаз. / *Підпр.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*Запа-си*
1	$\mathbf{170^{28}}$	$\mathbf{* \ ^{27}}$	30^{18}	^{27}	^{24}	200
2	$\mathbf{20\ ^{18}}$	$\mathbf{100^{26}}$	^{27}	^{32}	130^{21}	250
3	^{27}	^{33}	90^{23}	110^{31}	^{34}	200
Пот-реби	190	100	120	110	130	650



2. Перевіримо даний план на оптимальність.

а) знайдемо потенціали для заповнених кліток

Нехай $\alpha_1 = 0$

$\beta_1 - \alpha_1 = 28$	$\beta_1 = 28$
$\beta_1 - \alpha_2 = 18$	$\alpha_2 = \beta_1 - 18 = 10$
$\beta_2 - \alpha_2 = 26$	$\beta_2 = 26 + \alpha_2 = 36$
$\beta_3 - \alpha_1 = 18$	$\beta_3 = 18$
$\beta_3 - \alpha_3 = 23$	$\alpha_3 = \beta_3 - 23 = 18 - 23 = -5$
$\beta_4 - \alpha_3 = 31$	$\beta_4 = 31 + \alpha_3 = 31 - 5 = 26$
$\beta_5 - \alpha_2 = 21$	$\beta_5 = 21 + \alpha_2 = 31$

б) знайдемо потенціали для порожніх кліток

$\alpha_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - c_{31} = 28 + 5 - 27 = 6$

$\boldsymbol{\alpha_{12} = \beta_2 - \alpha_1 - c_{12} = 36 - 0 - 27 = 9}$

$\alpha_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - c_{32} = 36 + 5 - 33 = 8$

$\alpha_{23} = \beta_3 - \alpha_2 - c_{23} = 18 - 0 - 27 = -9$

$\alpha_{14} = \beta_4 - \alpha_1 - c_{14} = 26 - 0 - 27 = -1$

$\alpha_{24} = \beta_4 - \alpha_2 - c_{24} = 26 - 10 - 32 = -16$

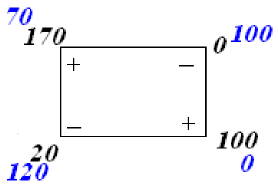
$\alpha_{15} = \beta_5 - \alpha_1 - c_{15} = 31 - 0 - 24 = 7$

$\alpha_{35} = \beta_5 - \alpha_3 - c_{35} = 31 + 5 - 34 = 2$

3. Так як серед α_{ij} є додатні числа, то даний план перевезень не є оптимальним. Необхідно побудувати цикл перерахунку для клітки (1; 2).

Будуємо новий опорний план:

Магаз. / *Підпр.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*Запаси*
1	**70^{28}**	100^{27}	30^{18}	^{27}	* ^{24}	200
2	**120^{18}**	^{26}	^{27}	^{32}	**130^{21}**	250
3	^{27}	^{33}	90^{23}	110^{31}	^{34}	200
Потреби	190	100	120	110	130	650



2. Перевіримо даний план на оптимальність.

а) знайдемо потенціали для заповнених кліток

Нехай $\alpha_1 = 0$

$\beta_1 - \alpha_1 = 28$	$\beta_1 = 28$
$\beta_1 - \alpha_2 = 18$	$\alpha_2 = \beta_1 - 18 = 10$
$\beta_2 - \alpha_1 = 27$	$\beta_2 = 27$
$\beta_3 - \alpha_1 = 18$	$\beta_3 = 18$
$\beta_3 - \alpha_3 = 23$	$\alpha_3 = \beta_3 - 23 = 18 - 23 = -5$
$\beta_4 - \alpha_3 = 31$	$\beta_4 = 31 + \alpha_3 = 31 - 5 = 26$
$\beta_5 - \alpha_2 = 21$	$\beta_5 = 21 + \alpha_2 = 31$

б) знайдемо потенціали для порожніх кліток

$\alpha_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - c_{31} = 28 + 5 - 27 = 6$

$\alpha_{22} = \beta_2 - \alpha_2 - c_{22} = 27 - 10 - 26 = -9$

$\alpha_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - c_{32} = 27 + 5 - 33 = 0$

$\alpha_{23} = \beta_3 - \alpha_2 - c_{23} = 18 - 10 - 27 = -19$

$\alpha_{14} = \beta_4 - \alpha_1 - c_{14} = 26 - 0 - 27 = -1$

$\alpha_{24} = \beta_4 - \alpha_2 - c_{24} = 26 - 10 - 32 = -16$

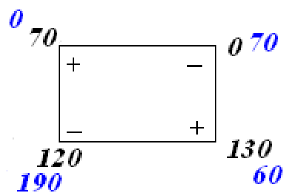
$\boldsymbol{\alpha_{15} = \beta_5 - \alpha_1 - c_{15} = 31 - 0 - 24 = 7}$

$\alpha_{35} = \beta_5 - \alpha_3 - c_{35} = 31 + 5 - 34 = 2$

3. Так як серед α_{ij} є додатні числа, то даний план перевезень не є оптимальним. Необхідно побудувати цикл перерахунку для клітки (1; 5).

Будуємо новий опорний план:

Магаз. / ***Підпр.***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***Запаси***
1	^{28}	100^{27}	30^{18}	^{27}	70^{24}	200
2	190^{18}	^{26}	^{27}	^{32}	60^{21}	250
3	^{27}	^{33}	90^{23}	110^{31}	^{34}	200
Потреби	190	100	120	110	130	650



2. Перевіримо даний план на оптимальність.

а) знайдемо потенціали для заповнених кліток

Нехай $\alpha_1 = 0$

$\beta_1 - \alpha_2 = 18$	$\beta_2 = 27$
$\beta_2 - \alpha_1 = 27$	$\beta_3 = 18$
$\beta_3 - \alpha_1 = 18$	$\beta_1 = 18 + \alpha_2 = 21$
$\beta_3 - \alpha_3 = 23$	$\alpha_3 = \beta_3 - 23 = -5$
$\beta_4 - \alpha_3 = 31$	$\beta_4 = 31 + \alpha_3 = 26$
$\beta_5 - \alpha_1 = 24$	$\beta_5 = 24$
$\beta_5 - \alpha_2 = 21$	$\alpha_2 = \beta_2 - 21 = 3$

б) знайдемо потенціали для порожніх кліток

$\alpha_{11} = \beta_1 - \alpha_1 - c_{11} = 21 - 0 - 28 = -7$

$\alpha_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - c_{31} = 21 + 5 - 27 = -1$

$\alpha_{22} = \beta_2 - \alpha_2 - c_{22} = 27 - 3 - 26 = -2$

$\alpha_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - c_{32} = 27 + 5 - 33 = -1$

$\alpha_{23} = \beta_3 - \alpha_2 - c_{23} = 18 - 3 - 27 = -12$

$\alpha_{14} = \beta_4 - \alpha_1 - c_{14} = 26 - 0 - 27 = -1$

$\alpha_{24} = \beta_4 - \alpha_2 - c_{24} = 26 - 3 - 32 = -9$

$\alpha_{35} = \beta_5 - \alpha_3 - c_{35} = 24 + 5 - 34 = -5$

3. Так як серед α_{ij} немає додатніх, то даний план перевезень є оптимальним, тобто забезпечує мінімальні витрати при перевезені вантажу.

Відповідь: $X^{*}=\begin{pmatrix} 0 & 100 & 30 & 0 & 70 \\ 190 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 90 & 110 & 0 \end{pmatrix}$

$S = 18\cdot 190+27\cdot 100+18\cdot 30+23\cdot 90+31\cdot 110+24\cdot 70+21\cdot 60=$
$=3420+2700+540+2070+3410+1680+1260=15080$(коп) або 150грн.80 коп.

Отже, згідно оптимального плану перевезень:
З підприємства № 1 — 100 од. виробів в маг. № 2
30 од. виробів в маг. № 3
70 од. виробів в маг. № 5
З підприємства № 2 — 190 од. виробів в маг. № 1
60 од. виробів в маг. № 5
З підприємства № 3 — 90 од. виробів в маг. № 3
1100 од. виробів в маг. № 4

При цьому плані перевезень витрати будуть мінімальні і будуть становити 150 грн. 80 коп.

Приклад 2.

Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i-ї фабрики до j-го замовника $(i=\overline{1,\ 3};\ \ j=\overline{1,\ 4})$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 290\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає ось у чому: уся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов’язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$Z = 4\cdot x_{11} + 4\cdot x_{12} + 2\cdot x_{13} + 5\cdot x_{14} + 5\cdot x_{21} + 3\cdot x_{22} + x_{23} +$$
$$+ 2\cdot x_{24} + 2\cdot x_{31} + x_{32} + 4\cdot x_{33} + 2\cdot x_{34} \to \min.$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} +$$
$$+ 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,3}; \quad j=\overline{1,4}.$$

Розв’язування. Розв’язування задачі подамо в таблицях, які назвемо транспортними. Перший опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості.

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 110	4	2 +	5 40–	$u_1 = 5$
$A_2 = 60$	5	3	1 –60	2 0+	$u_2 = 2$
$A_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Тому $Z = 4\cdot 110 + 5\cdot 40 + 1\cdot 60 + 1\cdot 40 + 2\cdot 40 = 820$ ум. од.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п’яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$. Для подальшого розв’язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу. Наприклад, заповнимо клітинку A_2B_4. Тепер перший план транспортної задачі є невиродженим, і його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = –1$, $v_2 = –1$, $v_3 = –1$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$$A_1B_2\text{: } u_1 + v_2 = 5 + (–1) = 4 = 4;$$
$$A_1B_3\text{: } u_1 + v_3 = 5 + (–1) = 4 > 2;$$
$$A_2B_1\text{: } u_2 + v_1 = 2 + (–1) = 1 < 5;$$
$$A_2B_2\text{: } u_2 + v_2 = 2 + (–1) = 1 < 3;$$
$$A_3B_1\text{: } u_3 + v_1 = 2 + (–1) = 1 < 2;$$
$$A_3B_3\text{: } u_3 + v_3 = 2 + (–1) = 1 < 4.$$

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) – c_{13} = 4 – 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки A_1B_3, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітинку A_1B_3 переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщуються в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщуються в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщуються в клітинках, позначених знаком «–».

У даному випадку $\min\{60;\ 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка A_1B_3 — 40 од. продукції, A_2B_3 – (60 – 40) = 20 од., A_2B_4 – (0 + 40) = 40 од. Клітинка A_1B_4, звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати $(n + m - 1)$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 –110	4	2 40+	5	$u_1 = 0$
$A_2 = 60$	5	3	1 –20	2 40+	$u_2 = -1$
$A_3 = 80$	2 1 +	1 40	4	2 40–	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Тому $Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки A_3B_1). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану транспортної задачі і дістанемо таку таблицю:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
$A_2 = 60$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
$A_3 = 80$	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Тому $Z_3 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720$ ум. од.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість виробництва та перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

Приклад 3.

Районне агропромислове об'єднання складається з трьох господарств A_1, A_2, A_3, що спеціалізуються на вирощуванні ранніх овочів. Кожне господарство щотижня збирає відповідно 50, 30 та 20 т овочів, які необхідно відправляти в чотири магазини B_1, B_2, B_3, B_4. Магазини бажають отримувати ранні овочі в кількості відповідно 30, 30, 10 та 20 т. Вартість перевезення 1 т овочів від господарства до магазинів наведено в таблиці.

Господарство	Вартість перевезення 1 т овочів у магазини			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	4	2
A_2	5	7	1	4
A_3	9	4	3	2

Визначити такий план перевезення овочів до магазинів, за якого загальні витрати агропромислового об'єднання будуть найменшими.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість тон овочів, які перевозять з i-го господарства j-го магазину ($i=\overline{1,\ 3}$; $j=\overline{1,\ 4}$). Тоді економіко-математична модель поставленої задачі має такий вигляд:

$$Z = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 5x_{21} + 7x_{22} + x_{23} +$$
$$+ 4x_{24} + 9x_{31} + 4x_{32} +3x_{33} +2x_{34} \rightarrow \min,$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \le 50, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \le 30, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \le 20, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+=30, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+=30, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+=10, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+=20, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,3}; \quad j=\overline{1,4}.$$

Знак «≤» у перших трьох обмеженнях задачі пояснюється тим, що за умовою транспортна задача є відкритою:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 100; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 90.$$

У такій ситуації, коли попит менший за пропозицію, частина овочів залишиться в господарствах і фактично буде вивезено менше, ніж зібрано.

Розв'язування. Щоб визначити оптимальний план поставленої задачі, її необхідно збалансувати, тобто звести до закритого типу. Це виконується шляхом уведення додаткового, умовного споживача B_5 із попитом $B_5 = 100 - 90 = 10$ т. Вартість перевезення одиниці продукції до умовного споживача дорівнює нулю.

Перший опорний план транспортної задачі побудуємо методом подвійної переваги.

A_j	B_j					u_i
	$B_1 =$ 30	$B_2 =$ 30	$B_3 =$ 10	$B_4 =$ 20	$B_5 =$ 10	
$A_1 =$ 50	2 30	3 20	4	2	0	$u_1 =$ –4
$A_2 =$ 30	5 1	7 –10	1 10	4 0+	0 10	$u_2 =$ 0
$A_3 =$ 20	9	4 1 +	3	2 20–	0	$u_3 =$ –2
v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 1$	$v_4 = 0$	$v_5 = 0$	

Перший опорний план є виродженим, і тому в клітинку, наприклад A_2B_4, поставимо нуль і вважатимемо її заповненою.

Перевірка плану за допомогою потенціалів показує, що він є неоптимальним. Перехід до другого опорного плану виконується шляхом заповнення клітинки A_3B_2 згідно із побудованим циклом. Зазначену клітинку включено до циклу тому, що в разі кількох однакових найбільших порушень ($\Delta_{21} = \Delta_{32} = 1$) заповнюють таку клітинку таблиці, яка має меншу вартість перевезення одиниці продукції ($c_{32} < c_{21}$).

Другий план транспортної задачі наведемо у вигляді таблиці:

A_j	B_j					u_i
	$B_1 =$ 30	$B_2 =$ 30	$B_3 =$ 10	$B_4 =$ 20	$B_5 =$ 10	
$A_1 =$ 50	2 30	3 20	4	2	0	$u_1 =$ –3
$A_2 =$ 30	5	7	1 10	4 10	0 10	$u_2 =$ 0
$A_3 =$ 20	9	4 10	3	2 10	0	$u_3 =$ –2
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 6$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	$v_5 = 0$	

Умова оптимальності для цього опорного плану виконується, і тому можна записати:

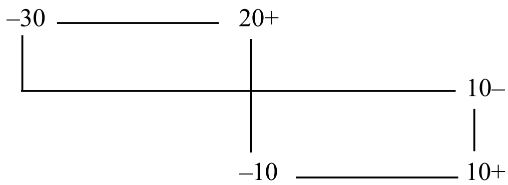
$$X^*{}_1 = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 320 \text{ ум. од.}$$

Згідно з оптимальним планом потреба магазинів у ранніх овочах задовольняється завдяки повному вивезенню продукції з першого та третього господарств і лише частково — з другого (залишок дорівнює 10 т). У цьому разі загальна вартість усіх перевезень буде найменшою і становитиме 230 ум. од.

Але виявляється, що розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план. Ознакою цього є виконання умови оптимальності для порожньої клітинки: $u_i + v_j = c_{ij}$. В останній таблиці це справджується для порожньої клітинки A_2B_1: $u_1 + v_1 = 0 + 5 = c_{21} = 5$.

Щоб отримати альтернативний оптимальний план, достатньо заповнити зазначену клітинку таблиці, виконавши перерозподіл продукції за таким циклом:



Наведемо транспортну таблицю, що відповідає другому оптимальному плану задачі.

A_j	B_j					u_i
	$B_1 =$ 30	$B_2 =$ 30	$B_3 =$ 10	$B_4 =$ 20	$B_5 =$ 10	
$A_1 =$ 50	2 20	3 30	4	2	0	$u_1 =$ –3
$A_2 =$ 30	5 10	7	1 10	4 0	0 10	$u_2 =$ 0
$A_3 =$ 20	9	4	3	2 20	0	$u_3 =$ –2
v_j	$v_1 =$ 5	$v_2 = 6$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	$v_5 = 0$	

Тому

$$X^*{}_2 = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 230 \text{ ум. од.}$$

Другий оптимальний план задачі формулюється так. Перевезти з першого господарства 20 т овочів до першого магазину та 30 т — до другого; з другого господарства — 10 т до першого магазину та 10 т овочів до третього, залишаючи невивезеними 10 т, а також з третього господарства до четвертого магазину — 20 т овочів. У цьому разі загальні транспортні витрати становитимуть 230 ум. од. і також будуть найменшими.

Завдання для самостійного розв'язку

Для завдань для самостійного розв'язку з практичного заняття 5 знайти методом потенціалів оптимальний план перевезень вантажів із складів на фабрики так, щоб витрати на перевезення були мінімальними.

Розв'язати наведені далі транспортні задачі методом потенціалів.

1.	$a_i = (8; 10; 5);$ $b_j = (5; 5; 10);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$
2.	$a_i = (8; 7; 6);$ $b_j = (7; 10; 6);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$
3.	$a_i = (15; 10; 5; 20);$ $b_j = (10; 20; 15);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 12 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$
4.	$a_i = (10; 20; 40);$ $b_j = (30; 10; 60);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$
5.	$a_i = (30; 35; 60);$ $b_j = (25; 25; 40; 30);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$
6.	$a_i = (160; 80; 60);$ $b_j = (60; 20; 40; 20; 100);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$
7.	$a_i = (30; 40; 20);$ $b_j = (40; 30; 20; 40);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$
8.	$a_i = (5; 20; 10);$ $b_j = (10; 25; 15);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$
9.	$a_i = (30; 40; 50);$ $b_j = (35; 30; 60);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$
10.	$a_i = (10; 20; 80; 50);$ $b_j = (30; 10; 60; 50);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$
11.	$a_i = (40; 20; 50; 20);$ $b_j = (20; 45; 35; 40);$	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

12.	a_i = (20; 25; 20; 10); b_j = (20; 30; 40; 15); Додаткова умова: попит третього споживача задовольнити повністю	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$
13.	a_i = (20; 16; 14; 22); b_j = (16; 18; 12; 15); Додаткова умова: ресурси четвертого постачальника використати повністю.	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$
14.	a_i = (10; 8; 15; 12); b_j = (15; 10; 5; 20); Додаткова умова: попит першого та четвертого споживачів задовольнити повністю.	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$
15.	a_i = (75; 80; 70); b_j = (30; 70; 70; 35); Додаткова умова: ресурси першого та третього постачальників використати повністю	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$
16.	a_i = (40; 30; 20; 40); b_j = (20; 40; 30); Додаткова умова: ресурси першого та другого постачальників в оптимальному плані використати повністю	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$
17.	Визначити оптимальний план за умови повного задоволення потреб першого та другого споживачів: a_i = (100; 150; 180; 70); b_j = (100; 200; 230; 80);	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
18.	a_i = (10; 20; 20; 30); b_j = (20; 15; 25; 10); Додаткова умова: ресурси четвертого постачальника потрібно використати повністю і за маршрутом A_4B_3 перевезти 20 од. продукції	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix},$
19.	a_i = (5; 20; 10; 15); b_j = (10; 25; 15; 5); Додаткова умова: попит другого споживача задовольнити повністю та за маршрутом A_2B_3 перевезти рівно 10 од. продукції.	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 1 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$

20.	$a_i = (80; 40; 60; 40)$; $b_j = (45; 65; 20; 80)$; Додаткові умови: повністю використати ресурси четвертого постачальника та не виконувати перевезення за маршрутами A_2B_3 та A_3B_4.	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 10 & 7 \\ 8 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.
21.	$a_i = (80; 40; 60; 40)$; $b_j = (70; 60; 80)$;	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,
22.	$a_i = (10; 80; 15)$; $b_j = (75; 20; 50)$;	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 6 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
23.	$a_i = (75; 40; 35; 40)$; $b_j = (20; 60; 140)$;	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$,
24.	$a_i = (60; 90; 50)$; $b_j = (30; 80; 20; 40)$;	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Практичне заняття № 7

ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки до виконання завдання

Існує широкий клас задач математичного програмування, в моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень, наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, корів у сільськогосподарських підприємствах тощо, тобто коли така вимога випливає з особливостей технології виробництва. До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень — 0 або 1 (бульові, або бінарні, змінні).

Приклад. Інвестиційна компанія може вкласти кошти у три різні підприємства. Ефективність кожного проекту оцінено згідно з тим, що його реалізація можлива за чотирьох умов. Дані про ці проекти наведено в таблиці:

Проект	Змінна	Умови реалізації проектів			
		y_1	y_2	y_3	y_4
1	x_1	8	15	21	4
2	x_2	10	16	18	6
3	x_3	12	14	17	7
Імовірнісні оцінки реалізації проектів		0,2	0,1	0,4	0,3

Кожна змінна x_1, x_2, x_3 може набувати лише двох значень –1 або 0, тобто інвестиційна компанія вкладає або не вкладає кошти у відповідне підприємство.

До цілочислового програмування відносять задачі про призначення, найкоротший шлях і т. ін. У реальних задачах часто цілочислових значень набувають не всі, а одна чи кілька змінних. Такі задачі називають *частково цілочисловими*.

Загальна задача цілочислового програмування записується так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \qquad (7.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \right\} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad (7.2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (7.3)$$

$$x_i \text{ — цілі} \qquad \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (7.4)$$

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують дві основні групи методів:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв’язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв’язування задачі з так званими *послабленими обмеженнями*, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв’язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв’язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв’язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв’язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв’язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод віток і меж.

Метод Гоморі

Нехай маємо задачу цілочислового програмування (7.1)—(7.4). Для її розв'язування можна скористатися ітеративним методом Гоморі. Суть його полягає ось у чому:

1. Знаходять розв'язок послабленої, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних — (7.1)—(7.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (7.1)—(7.4).

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j \geq \{b_j\},$$

де символ $\{\}$ позначає дробову частину числа.

Для визначення дробової частини будь-якого числа від цього числа віднімають цілу його частину — найбільше ціле число, що не перевищує даного. Цілу частину числа позначають символом []. Наприклад,

$$[1{,}3] = 1; \quad [-1{,}3] = -2;$$

$$\{1{,}3\} = 1{,}3 - 1 = 0{,}3; \quad \{-1{,}3\} = -1{,}3 - (-2) = 2 - 1{,}3 = 0{,}7.$$

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Здобуту розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Приклад. Сільськогосподарське підприємство задумало створити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн. і можливість придбати устаткування двох типів A і B. Техніко-економічну інформацію про ці два види устаткування подано в таблиці:

Техніко-економічний показник	Устаткування		Ресурс
	A	B	
Вартість, тис. грн.	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн./рік	350	150	—

Розв'язування. Нехай x_1 і x_2 — кількість комплектів устаткування відповідно типу А і В.

Запишемо економіко-математичну модель:

$$Z = 350x_1 + 150x_2 \to \max,$$

$$25x_1 + 10x_2 \le 100\ ,$$

$$40x_1 + 20x_2 \le 190\ ,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\ ,$$

x_1 і x_2 — цілі.

Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисловості. Остання симплексна таблиця набере вигляду:

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
$Z_j - C_j \ge 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження виду $\sum\limits_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j \ge \{b_j\}$:

$$\{1\}x_1 + \{0\}x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \ge \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

Оскільки $\left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}$, $\left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, $\left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то додаткове обмеження набирає вигляду

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \ge \frac{1}{2}\,.$$

Зведемо його до канонічної форми та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_5 + x_6 \ge \frac{1}{2}\,.$$

Приєднавши здобуте обмеження до останньої симплексної таблиці з умовно-оптимальним планом, дістанемо:

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0	0	$-M$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
x_6	$-M$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	-1	1
$Z_j - C_j \ge 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв’язуючи наведену задачу, остаточно знаходимо цілочисловий оптимальний план: $X^*(x_1 = 2;\ x_2 = 5)$, $Z_{max} = 1450$.

Метод «віток і меж»

Ефективнішим за метод Гоморі розв’язування задач цілочислового програмування є метод «віток і меж». Спочатку, як і в разі методу Гоморі, розв’язується послаблена (відкиданням умови цілочисловості) задача.

З цією метою застосовується симплексний метод.

Нехай потрібно знайти x_j — цілочислову змінну, значення якої x_j^* в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Тоді можна стверджувати, що в інтервалі $\left([x_j^*],\ [x_j^*]+1\right)$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо $x_j^* = 2{,}3,$ дістаємо інтервал (2,3), де, очевидно, немає x_j, яке набуває цілого значення.

Значенню $x_j^* = -2{,}3$ відповідає інтервал (–3; –2), де також не існує цілого значення x_j. Отже, допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей

$$x_j \le [x_j^*] \quad \text{або} \quad x_j \ge [x_j^*] + 1 .$$

Приписавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві не пов’язані між собою задачі. Тобто початкову задачу цілочислового програмування (7.1)—(7.4) розіб’ємо на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом розв’язуватимемо дві такі задачі:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad (7.5)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \qquad (7.6)$$

$$\left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (7.7)$$

$$x_j \text{ — цілі}, \qquad (7.8)$$

$$x_j \le [x_j^*]; \qquad (7.9)$$

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (7.10)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \qquad (7.11)$$

$$\left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (7.12)$$

$$x_j \text{ — цілі}, \quad \left(j=\overline{1,n}\right) \qquad (7.13)$$

$$x_j \geq \left[x_j^*\right]+1, \qquad (7.14)$$

де x_j^* — компонент розв’язку задачі (7.1)—(7.4).

Далі симплекс-методом розв’язуємо послаблені задачі (7.6)—(7.9) і (7.10)—(7.14), тобто з відкиданням обмежень (7.8) і (7.13). Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв’язками задачі (7.1)—(7.4). Інакше пошук розв’язку задачі триває. Для подальшого розгалуження беремо задачу з найбільшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки — з найменшим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв’язку. Здобутий план — оптимальний.

Розв’язування цілочислових задач методом «віток і меж» можна значно прискорити, приєднавши обмеження виду (7.9) і (7.14) до останньої симплекс-таблиці не початкової (7.1)—(7.4), а відповідних задач.

Розв’яжемо методом «віток і меж» задачу 7.1.

Відкинувши умову цілочисловості, дістанемо розв’язок $x_1 = 1$, $x_2 = 7\frac{1}{2}$. Отже, допустиме ціле значення x_2 має задовольняти одну з нерівностей $x_2 \leq \left[7\frac{1}{2}\right]=7$ або $x_2 \geq \left[7\frac{1}{2}\right]+1=8$. Далі приєднуємо до задачі кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочисловості, і розв’язуємо по черзі обидві утворені задачі. Для першої (з обмеженням $x_2 \leq 7$) оптимальним буде розв’язок $x_1^1 = 1{,}2$, $x_2^1 = 7$, $Z_{\max}^1 = 1470$, а для другої (з обмеженням $x_2 \geq 8$) — розв’язок $x_1^2 = 0{,}75$, $x_2^2 = 8$, $Z_{\max}^2 = 1462{,}5$. Оскільки цілочислового плану не знайдено, процес необхідно продовжити, узявши для наступного розгалуження першу задачу, оптимальний план якої дає більше значення функціоналу. Далі розв’язуємо задачу, приєднуючи до неї обмеження $x_1 \leq 1$ і $x_1 \geq 2$, звідки й знаходимо оптимальний план $X^*\left(x_1 = 2;\ x_2 = 5\right)$, $Z_{\max} = 1450$, що збігається з розв’язком, здобутим за методом Гоморі.

Приклади цілочислових економічних задач

Приклад 1. Задача комівояжера.

В економічному регіоні розміщено 6 пунктів (міст). Комівояжер, який виїжджає з міста 1, має побувати в кожному місті один раз і повернутися до вихідного пункту. Знайти найкоротший маршрут, якщо відстані між містами відомі (рис. 7.1).

Записати загальну і числову економіко-математичну модель.

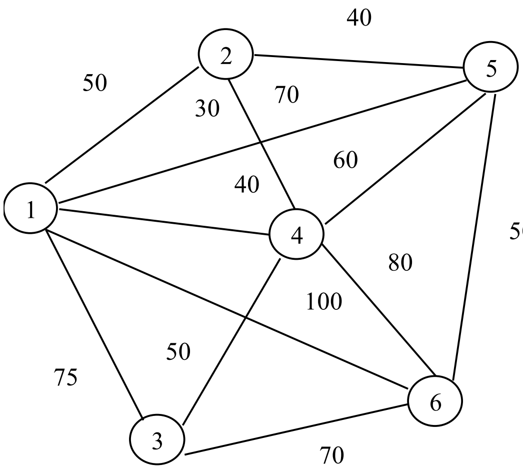


Рисунок 7.1

Розв'язування. Нехай маємо n пунктів, де має побувати комівояжер.

Позначимо:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0 \text{ — у противному разі.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} — бульові (цілочислові) змінні. Цільовою функцією цієї задачі є мінімізація всього маршруту комівояжера:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

де c_{ij} — відстань між містами i та j.

Обмеження щодо одноразового в'їзду в кожне місто:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(j = \overline{1,n};\ i \neq j\right).$$

Обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(i = \overline{1,n};\ i \neq j\right).$$

Ці обмеження не повністю описують допустимі маршрути і не виключають можливості розриву маршруту. Щоб усунути цей недолік, введемо додаткові змінні $u_i(u_j)$ $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j\right)$, які набувають невід'ємних цілих значень. Запишемо обмеження, які виключають можливість існування підмаршрутів:

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j\right),$$

де u_i (u_j) — порядковий номер міста за маршрутом прямування комівояжера.

Запишемо числову економіко-математичну модель комівояжера за розглядуваних умов.

Критерій оптимальності:

$$\min\ (50x_{12} + 75x_{13} + 40x_{14} + 70x_{15} + 100x_{16} + 30x_{23} + 40x_{25} +$$
$$+ 50x_{34} + 70x_{36} + 60x_{45} + 80x_{46} + 50x_{56});$$

а) обмеження щодо одноразового в'їзду в кожне місто:

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1,$$
$$x_{12} + x_{42} + x_{52} = 1,$$

$$x_{13}+x_{43}+x_{63}=1,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{54}+x_{64}=1,$$
$$x_{15}+x_{25}+x_{45}+x_{65}=1,$$
$$x_{16}+x_{36}+x_{46}+x_{56}=1;$$

б) обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}=1,$$
$$x_{21}+x_{24}+x_{25}=1,$$
$$x_{31}+x_{34}+x_{36}=1,$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{45}+x_{46}=1,$$
$$x_{51}+x_{52}+x_{54}+x_{56}=1,$$
$$x_{61}+x_{63}+x_{64}+x_{65}=1;$$

в) обмеження щодо виключення підмаршрутів:

$$u_2-u_4+6x_{24}\le 5,$$
$$u_2-u_5+6x_{25}\le 5,$$
$$u_3-u_4+6x_{34}\le 5,$$
$$u_3-u_6+6x_{36}\le 5,$$
$$u_4-u_2+6x_{42}\le 5,$$
$$u_4-u_3+6x_{43}\le 5,$$
$$u_4-u_5+6x_{45}\le 5,$$
$$u_4-u_6+6x_{46}\le 5,$$
$$u_5-u_2+6x_{52}\le 5,$$
$$u_5-u_4+6x_{54}\le 5,$$
$$u_5-u_6+6x_{56}\le 5,$$
$$u_6-u_3+6x_{63}\le 5,$$
$$u_6-u_4+6x_{64}\le 5,$$
$$u_6-u_5+6x_{65}\le 5;$$
$$x_{ij}=\begin{cases}0\\1\end{cases}\left(i=\overline{1,6};\ j=\overline{1,6}\right),$$

$u_i(u_j)$ — цілі числа $\left(i=\overline{2,6};\ j=\overline{2,6};\ i\ne j\right)$.

Такі задачі розв’язуються спеціальними методами [1; 10].

Приклад 2. Фермер планує виробляти три види продукції — озиму пшеницю, цукрові буряки та молоко. Сумарні витрати складаються з двох частин: постійних — k_j, які не залежать від обсягу виробництва, і поточних c_j на виробництво одиниці продукції, де j — номер продукції. Відповідні дані наведено в таблиці:

Показник	Вид продукції		
	Озима пшениця, т	Цукровий буряк, т	Молоко, т
Постійні витрати, тис. грн.	40	70	20
Поточні витрати на одиницю продукції, грн.	400	150	500
Норма витрат ріллі, га	0,2	0,02	0,25
Ціна одиниці продукції, грн.	800	300	1000

Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду, якщо з цією метою використовується 100 га ріллі.

Розв'язування. Нехай x_j — обсяг виробництва j-го виду продукції, $j=\overline{1,3}$. Функція сумарних витрат на виробництво j-ї продукції набуває вигляду:

$$d_j(x_j)=\begin{cases}k_j+l_jx_j, & x_j>0;\\ 0, & x_j=0.\end{cases}$$

Як цільову функцію беремо максимізацію валового прибутку:

$$Z=\sum_{j=1}^{3}\left(y_jx_j-d_j(x_j)\right)\to \max,$$

де y_j — ціна одиниці j-ї продукції.

Обмеження щодо ріллі:

$$\sum_{j=1}^{3}a_jx_j\le A,$$

де a_j — норма витрат ріллі на одиницю j-ї продукції; A — ресурс ріллі.

Цільова функція цієї задачі не є лінійною, оскільки має розрив у початку координат. Отже, ця задача не може бути розв'язана симплексним методом.

Щоб розв'язати цю задачу, скористаємося штучним прийомом. Введемо бульові змінні такою умовою:

$$y_j=\begin{cases}0, & x_j=0,\\ 1, & x_j>0;\end{cases}$$

її можна записати у вигляді лінійної нерівності

$$x_j\le My_j\quad \left(j=\overline{1,3}\right),$$

де M — досить велике число, за якого умова $x_j\le My_j\ \left(j=\overline{1,3}\right)$ виконується для всіх допустимих обсягів виробництва продукції.

У результаті маємо таку економіко-математичну модель:

$$Z=\sum_{j=1}^{3}\left((y_i-c_j)x_j-k_jy_j\right)\to \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{3}a_jx_j\le A,$$

$$0\le x_j\le My_j\ \left(j=\overline{1,3}\right),$$

$$y_j=\begin{cases}0\\ 1\end{cases},\ j=\overline{1,3}.$$

Запишемо числову економіко-математичну модель. Очевидно, що максимум пшениці становить $\frac{1000}{0{,}2} = 500$ т, цукрових буряків — $\frac{1000}{0{,}02} = 5000$ т, молока — $\frac{1000}{0{,}25} = 400$ т. Отже, M може дорівнювати 5000. Звідси маємо:

$$\min Z = 400x_1 + 158x_2 + 500x_3 - 40\,000y_1 - 70\,000y_2 - 20\,000y_3$$

за умов

$$0{,}2x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}25x_3 \le 100\ ,$$
$$0 \le x_1 \le 5000y_1\,,$$
$$0 \le x_2 \le 5000y_2\,,$$
$$0 \le x_3 \le 5000y_3\,,$$
$$y_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},\ j = \overline{1,3}\,.$$

Приклад 3. Задача планування виробничої лінії.

Оптимізувати режим функціонування виробничої лінії, яка охоплює 11 операцій з виготовлення двох виробів. Лінію обладнано одним багатоопераційним верстатом. Послідовність і тривалість (у хвилинах) виконання операцій відбиває рис. 7.2.

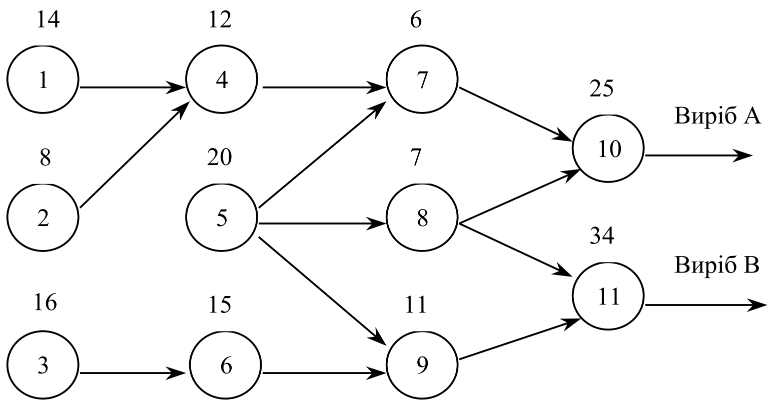


Рисунок 7.2

Установлено термін виготовлення кожного з виробів А та В як проміжок часу від деякого початкового моменту. Нехай це буде відповідно 120 і 150 хв. Передбачається, що в кожний момент часу на верстаті може виконуватися одна операція.

Визначити оптимальний термін початку кожної операції.

Розв'язування. Розглянемо спочатку задачу в загальному вигляді, скориставшись позначеннями:

$a_{j(k)}$ — час виконання j-ї операції $\left(j = \overline{1,n}\right)$; d_j — момент часу (термін) для j-го виробу, до якого необхідно завершити операцію j; x_j — час (термін) початку j-ї операції; t — сумарний час виконання всіх операцій. Економіко-математична модель містить три типи обмежень.

1. Послідовність виконання i-ї операції записується для всіх пар операцій $x_i + a_i \le x_j \ \left(i, j = \overline{1,n}\right)$, якщо i-та операція передує в часі j-й операції.

2. Обмеження нерозгалуженості виробничого процесу для операцій i та j, які не виконуються одночасно ($i \ne j$), має вигляд:

або $x_i - x_j \ge a_j$, якщо операція j передує в часі операції i;

або $x_j - x_i \ge a_i$, якщо операція i передує в часі операції j.

Логічні обмеження виду «або-або» не можуть входити до економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування, оскільки породжують неопуклу множину допустимих розв’язків. Тому необхідно ввести допоміжні змінні, які дозволяють записати наведені щойно логічні умови у вигляді лінійних обмежень. Це такі бульові змінні:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо операція } j \text{ передує } i; \\ 1, & \text{якщо операція } i \text{ передує } j. \end{cases}$$

Увівши змінні y_{ij}, запишемо шукані обмеження:

$$My_{ij} + \left(x_i - x_j\right) \ge a_j \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right),$$

$$M\left(1 - y_{ij}\right) + \left(x_j - x_i\right) \ge a_i \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right),$$

де M — досить велике число.

3. Обмеження щодо термінів виготовлення кожного виробу:

$$x_j + a_j \le d_j^{(k)} \quad (k = 1,2),$$

де j — остання операція для k-го виробу.

4. Усі операції мають бути виконанні до моменту часу t:

$$x_j + a_j \le t \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Критерій оптимальності:

$$Z = t \to \min,$$

тобто ставиться задача, щоб обидва вироби були виготовлені за мінімальний час.

Запишемо числову економіко-математичну модель:

$$Z = t \to \min$$

за наведених далі умов.

1. Послідовність виконання операцій:

$$x_1 + 14 \le x_4,$$
$$x_2 + 8 \le x_4,$$
$$x_3 + 16 \le x_6,$$
$$x_4 + 12 \le x_7,$$
$$x_5 + 20 \le x_7,$$
$$x_5 + 20 \le x_8,$$
$$x_5 + 20 \le x_9,$$
$$x_6 + 15 \le x_9,$$
$$x_7 + 6 \le x_{10},$$
$$x_8 + 7 \le x_{10},$$
$$x_8 + 7 \le x_{11},$$
$$x_9 + 11 \le x_{11}.$$

2. Обмеження щодо нерозгалуженості виробничого процесу:

$$My_{12} + (x_1 - x_2) \geq 8,$$
$$M(1 - y_{12}) + (x_2 - x_1) \geq 14,$$
$$My_{13} + (x_1 - x_3) \geq 16,$$
$$M(1 - y_{13}) + (x_3 - x_1) \geq 14,$$
$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq a_j,$$
$$My_{ij} + (x_j - x_i) \geq a_i,$$
$$My_{10,11} + (x_{10} - x_{11}) \geq 34,$$
$$M(1 - y_{10,11}) + (x_{11} - x_{10}) \geq 25.$$

3. Обмеження щодо термінів виготовлення виробів:

$$x_{10} + 25 \leq 120,$$
$$x_{11} + 34 \leq 150.$$

4. Усі операції мають бути виконані до моменту часу *t*:

$$x_1 + 14 \leq t,$$
$$x_2 + 8 \leq t,$$
$$x_3 + 16 \leq t,$$
$$x_4 + 12 \leq t,$$
$$x_5 + 20 \leq t,$$
$$x_6 + 15 \leq t,$$
$$x_7 + 6 \leq t,$$
$$x_8 + 78 \leq t,$$
$$x_9 + 11 \leq t,$$
$$x_{10} + 25 \leq t,$$
$$x_{11} + 34 \leq t.$$

5. Обмеження на змінні:

$$x_i(x_j) \geq 0, \ t \geq 0;$$
$$y_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \ \left(i, j = \overline{1,8}\right).$$

Отже, маємо частково цілочислову задачу з бульовими змінними.

Приклад 4. Задача оптимального призначення.

Розподілити чотирьох робітників за чотирма видами устаткування так, щоб їх загальна продуктивність праці була максимальною. Дані стосовно продуктивності праці кожного робітника на устаткуванні кожного виду наведено в таблиці:

Робітник	Продуктивність праці, грн./год, на устаткуванні			
	1	2	3	4
1	12	9	8	7
2	10	7	6	5
3	9	6	4	4
4	8	5	3	2

Розв'язування. Дану задачу можна розглядати як транспортну, в якій робітники ототожнюються з постачальниками вантажів, а види устаткування — зі споживачами цих вантажів. Обсяги пропозиції та попиту в кожному випадку дорівнюють одиниці. Отже, змінні будуть булевими:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-й робітник виконує роботу на } j\text{-му устаткуванні;} \\ 0 & \text{— у противному разі.} \end{cases}$$

Якщо c_{ij} — продуктивність праці i-го робітника на j-му устаткуванні, то економіко-математичну модель про призначення у загальному вигляді можна записати так:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \left(i = \overline{1,n}\right),$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right),$$

$$x_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \ \left(i, j = \overline{1,n}\right).$$

Числова модель набирає вигляду:

$$\max\ (12x_{11} + 9x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 10x_{21} + 7x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} +$$
$$+ 9x_{31} + 6x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} + 8x_{41} + 5x_{42} + 3x_{43} + 2x_{44})$$

за умов

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1,$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1,$$
$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \ \left(i, j = \overline{1,n}\right),$$
$$x_{ij} \text{ — цілі числа } \left(i, j = \overline{1,n}\right).$$

Завдання для самостійного розв'язку

Методом Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування.

1. $Z = x_1 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$	2. $Z = x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$

3. $Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36; \\ x_2 \leq 13; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$	4. $Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$, $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$
5. $Z = x_1 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9; \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4; \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$	6. $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$, $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_1 = 3; \\ x_2 + x_3 + 2x_1 = 5; \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$
7. $Z = x_1 - x_2 - x_4 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6; \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 8; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$	8. $Z = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min$, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5; \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2; \\ x_3 - x_4 + x_6 = 1; \\ x_j \text{ — цілі}, x_j \geq 0. \end{cases}$
9. $Z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$, $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 1; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$	10. $Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$, $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \leq 4; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq -1; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$
11. $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5; \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 5; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$	12. $Z = 2x_1 - x_2 - x_3 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 12; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$
13. $Z = -2x_1 + 5x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -6; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$	14. $Z = -5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$, $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 4; \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 2; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$
15. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 7; \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 9; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$	16. $Z = 2x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12; \\ 4x_1 + x_2 \geq 10; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$
17. $Z = x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 5; \\ x_2 \leq 2; \\ x_j \text{ — цілі}, x_j \geq 0. \end{cases}$	18. $Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -6; \\ x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_j \geq 0, x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$

19. $Z = 6x_1 + 4x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_1 - 2x_2 \le 2; \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$	20. $Z = x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 8; \\ 2x_1 + x_2 \le 5; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$

Методом «віток і меж» розв'язати задачу цілочислового програмування

21. $Z = 2x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 16; \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі},\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$	22. $Z = 3x_1 + 7x_2 \to \max$, $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \le 32; \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі},\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$
23. $Z = x_1 + 4x_2 \to \max$, $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10; \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі},\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$	24. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$, $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40; \\ 3x_1 + 9x_2 \le 27; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі},\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$
25. $Z = 8x_1 + 5x_2 \to \max$, $\begin{cases} 12x_1 + 2x_2 \le 24; \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі},\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$	26. $Z = 5x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 28; \\ 9x_1 + 5x_2 \le 45; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі},\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$

Задача 27. Побудувати модель задачі цілочислового програмування для вибору варіанта розміщення чотирьох різних видів технологічного устаткування на двох виробничих дільницях цеху. Витрати на підготовку та встановлення устаткування відбиває таблиця:

Дільниця	Витрати на встановлення устаткування				Витрати на підготовку
	1	2	3	4	
1	4	2	7	9	10
2	6	5	3	6	14

Визначити такий порядок розміщення устаткування на дільницях, за якого сумарні витрати на його встановлення та підготовку є мінімальними.

Задача 28. Розв'язати задачу оптимального розкрою двох заготовок завдовжки 15 і 12 м на деталі трьох типів завдовжки 3, 4 і 2 м. Відомо, що запас заготовок становить відповідно 100 і 80 одиниць, а попит на деталі — 30, 20, 15 одиниць.

Знайти план оптимального розкрою заготівок за двома варіантами:

1) мінімізації відходів від розкрою;

2) максимізації комплектів, до яких деталі входять відповідно в кількості 4, 2 і 3.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Ідентифікація та моделювання технологічних об’єктів: методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Ідентифікація та моделювання технологічних об’єктів» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання за освітньо-професійною програмою зі спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»; уклад.: С. О. Тимчук, А. О. Панов. Х.: ДБТУ, 2023. 50 с.

2. Ідентифікація та моделювання технологічних об’єктів. / уклад. В. Левицький, А. Микитишин. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, 2022. 38 с.

3. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об’єктів і систем керування: навчальний посібник. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/download/197/357/389-1?inline=1 (дата звернення 20.09.2025).

4. Коваль А. В. Ідентифікація та моделювання технологічних об’єктів: навч. Посібник. URL: https://learn.ztu.edu.ua/pluginfile.php/50180/mod_resource/content/1/%D0%86%D1%82%D0%B0%D0%9C%D0%A2%D0%9E_%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87_%D0%BF%D0%BE%D1%81.pdf
(дата звернення 20.09.2025)

5. Букетов А. В. Ідентифікація і моделювання технологічних об’єктів та систем: навчальний посібник. URL: https://elartu.tntu.edu.ua/handle/123456789/894 (дата звернення 20.09.2025).

Ідентифікація і моделювання об’єктів та систем безпілотних апаратів: методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 74 с.

Комп’ютерний набір Л.О. Гуменюк

Редактор Л.О. Гуменюк

Підп. до друку «__» ____2023 р. Папір офс.
Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 4,6. Обл.-вид. арк. 1.
Тираж 30 прим.

Відділ іміджу та промоції
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – ВІП ЛНТУ