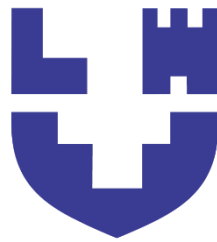


**Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет**



ІДЕНТИФІКАЦІЯ І МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ БЕЗПЛОТНИХ АПАРАТІВ

Методичні вказівки до виконання курсової роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами»
галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації
(G Інженерія, виробництво та будівництво)
спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та
робототехніка
(G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка)
денної та заочної форм навчання

Луцьк, 2025

УДК 519.85; 517.8
I-59

Рекомендовано до видання вченою радою факультету КІТ ЛНТУ, протокол № __ від «__» _____ 2025 року

Голова вченої ради факультету КІТ _____ Інна КОНДІУС

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки _____ Наталія ПОЛІЩУК

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ, протокол № _ від «__» _____ 2025 року.

Завідувач кафедри АКІТ _____ Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ

Укладач: _____ Лариса ГУМЕНЮК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ

Рецензент: _____ Людмила САМЧУК, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки та мехатроніки ЛНТУ

Відповідальний за випуск: _____ Олександр ПОВСТЯНОЙ, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ

Ідентифікація і моделювання об'єктів та систем безпілотних апаратів:
методичні вказівки до виконання курсової роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, I-59 автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 34 с.

У методичних вказівках викладено теорію побудови математичних моделей та їх дослідження числовими методами та шляхом лінеаризації. Наведено методичні рекомендації до виконання роботи та приклад побудови математичної моделі.

Методичні вказівки укладено в результаті опрацювання опублікованих джерел.

ЗМІСТ

1.	Завдання до курсової роботи	4
2.	Вимоги до оформлення курсової роботи	5
3.	Основні теоретичні відомості	5
4.	Формати використання функцій FSOLVE та STEP	13
5.	Хід виконання роботи	17
6.	Варіанти завдань до курсової роботи	19
7.	Приклад виконання завдання	22

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ ТА ШЛЯХОМ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Мета роботи: Побудова математичних моделей нелінійних об'єктів, та використання засобів середовища MATLAB для дослідження моделей.

Необхідна підготовка: знання законів збереження та деяких гідравлічних залежностей руху рідини в трубопроводі, володіння основними принципами програмування в середовищі MATLAB.

1. ЗАВДАННЯ ДО КУРСОВОЇ РОБОТИ

Для заданого варіанту об'єкту, конструктивних параметрів, значень вхідних та керуючих величин в стані рівноваги та стрибкоподібних відхилень від нього, приведених в Розділі 6:

1. Побудувати математичну модель об'єкта.
2. Записати рівняння математичної моделі для стану рівноваги. Отримати аналітичні залежності для визначення невідомих номінальних значень параметрів системи;
3. Лінеаризувати нелінійну систему відносно одержаного стану рівноваги;
4. Обчислити параметри стану системи в стані рівноваги:
 - а) використовуючи аналітичні вирази отримані при виконанні п.2;
 - б) розв'язуючи систему нелінійних алгебраїчних рівнянь з використанням зовнішньої функції FSOLVE пакету MATLAB.

Порівняти отримані результати;

5. Для заданих відхилень вхідних та керуючих величин від номінальних значень та початкових умов для параметрів стану, одержаних в пункті п.4, розв'язати систему нелінійних диференційних рівнянь, отриману в пункті п.1, числовим методом. Для розв'язування використати зовнішні функції ODE23 чи ODE45;

6. Побудувати графіки зміни параметрів стану \tilde{Q} та \tilde{h} в часі

$$(\tilde{Q} = Q - Q_H; \tilde{h} = h - h_H)$$

7. Для заданих відхилень вхідних та керуючих величин від номінальних значень розв'язати систему лінеаризованих рівнянь, одержану в пункті п.3. Для розв'язку системи використати:

а) зовнішні функції ODE23 чи ODE45;

б) зовнішню функцію середовища будувати графіки зміни параметрів стану \tilde{Q} та \tilde{h} в часі;

8. Результати моделювання – одноіменні залежності, $\tilde{h}(t)$ та $\tilde{Q}(t)$ отримані в пунктах п.6, п.7 накласти на одному графіку;

9. Проаналізувати фізичний зміст одержаних результатів та зробити висновки.

2. ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Пояснювальна записка до курсового проекту повинна містити:

- 1) завдання із відповідним варіантом об'єкту та аналітичних залежностей, які описують об'єкт у стані рівноваги;
- 2) вивід математичної моделі об'єкту та аналітичних залежностей, які описують об'єкт у стані рівноваги;
- 3) послідовність математичних перетворень при лінеаризації нелінійної математичної моделі;
- 4) роздруковані тексти створених script - файлів та зовнішніх функцій, необхідних для виконання роботи;
- 5) роздруковані числові результати обчислень;
- 6) висновки до роботи.

Графічна частина курсового проекту повинна містити роздруковані графічні результати обчислень.

3. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Моделювання є одним із найважливіших етапів наукових досліджень, проектування технічних об'єктів і систем, прогнозування їх поведінки.

Під математичним моделюванням розуміють опис певного процесу (явища) системою математичних залежностей (алгебраїчні, диференційні рівняння), яка дала б можливість знайти параметри стану процесу (явища) у довільний момент часу.

Найважливішими закономірностями, які описують будь-яке явище чи процес, є закони збереження маси та енергії, тому дані закони використовуються прямо чи опосередковано при моделюванні будь-якої системи.

В даній роботі поставлено за мету, побудувати математичну модель гідравлічної проточної ємності. Для ємності, яка має N вхідних та M вихідних потоків речовини закон збереження маси залишається у такому вигляді:

$$\frac{dm}{dt} = \sum_{i=1}^N Q_i^{\text{ВХ}} - \sum_{j=1}^M Q_j^{\text{ВИХ}}, \quad (1.1)$$

де $Q_i^{\text{ВХ}}$, $Q_j^{\text{ВИХ}}$ - відповідно масові витрати i – го вхідного та j – го вихідного потоків;

$\frac{dm}{dt}$ – зміна маси речовини в системі.

Рівняння збереження енергії побудуємо, прийнявши такі припущення:

- 1) всі ємності, трубопроводи та регулюючі органи теплоізольовані;
- 2) всі елементарні об'єкти є об'єктами ідеального змішування;
- 3) тепло та масообмін на границі розділу фаз рідина-повітря відсутні;
- 4) фізичні властивості рідини в заданих діапазонах вважаємо сталими величинами.

З врахуванням припущень 1)-4) рівняння збереження енергії для гідравлічної ємності має вигляд:

$$\frac{d(m c T)}{dt} = \sum_{i=1}^N Q_i^{\text{ВХ}} c T_i - \sum_{j=1}^M Q_j^{\text{ВИХ}} c T_j, \quad (1.2)$$

де c – питома теплоємність рідини, ДЖ/(кг*К),

T – температура рідини в ємності,

T_i , T_j – відповідно температура i – го вхідного та j – го вихідного потоку.

Залежно від умов протікання рідини, в трубопроводах може встановитися турбулентний або ламінарний режим течії.

Для математичного опису трубопроводів з **турбулентним режимом** течії використовують ідеалізоване **рівняння Дарсі - Вейсбаха**:

$$Q = \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}, k = \sqrt{\frac{\pi^2 d^2}{8 L \xi}}, \quad (1.3)$$

Трубопроводи з **ламінарним режимом** течії описують ідеалізованим **рівнянням Пуазейля**:

$$Q = k \frac{\Delta P}{\rho}, k = \frac{\pi r^4}{8 L \nu}, \quad (1.4)$$

Витрата речовини в трубопроводі, на якому встановлено вентиль або **регулюючий орган** визначається залежністю:

$$Q = k_B l \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}, \quad (1.5)$$

У формулах (1.3), (1.4), (1.5) прийнято такі позначення:

ΔP – різниця тисків на початку і в кінці трубопроводу, Па;

ρ – густина рідини, кг/м³

Q – об'ємна витрата рідини, м³/с;

d, r, L – відповідно діаметр, радіус і довжина трубопроводу, м;

ξ – коефіцієнт опору рухові рідини в трубопроводі.

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості, м²/с.

k_B – пропускна здатність регулюючого органу, м²;

l – ступінь відкриття регулюючого органу, $l \in [0;1]$.

Використання рівнянь (1.1), (1.3), (1.4) і 1.(5) для побудови математичної моделі проточної гідравлічної ємності показано в прикладі виконання курсової роботи.

Стан кожної технічної системи характеризується значенням ряду величин (температури, рівня), які називають параметрами стану системи. Якщо значення параметрів стану системи не змінюються протягом деякого проміжку часу, то кажуть, що система перебуває у стані рівноваги.

Лінеаризація – це метод дослідження нелінійних систем шляхом наближення їх лінійними системами. При цьому досліджують систему не в цілому діапазоні можливих змін вхідних та керуючих величин (відповідно і параметрів стану та вихідних величин), а при невеликих їх відхиленнях від номінальних режимів роботи системи – станів рівноваги чи траєкторій (функцій часу). Лінеаризована модель системи - це наближення до нелінійної математичної моделі, одержаної, як правило, аналітичним чи аналітично – експериментальним методом. Очевидно, що лінеаризована модель системи є менш точною від нелінійної математичної моделі. Однак, чим меншими є відхилення вхідних та керуючих величин та викликані ними відхилення параметрів стану від стану рівноваги, тим похибка від такого наближення є меншою.

Як правило, всі технологічні об'єкти створюють для роботи в режимах, що забезпечують стан рівноваги об'єкту. При цьому допускають певні невеликі відхилення вхідних величин від режимних, які призводять до невеликих змін параметрів стану об'єкту. Часом в умовах практики виникає необхідність змінити режим роботи об'єкту та дослідити його поведінку (властивості) в новому стані рівноваги. Тобто, у більшості випадків, які мають практичний інтерес, виникає потреба дослідження системи при невеликих відхиленнях вхідних величин від номінальних.

Якщо значення вхідних величин та параметрів стану системи, при яких об'єкт знаходиться у стані рівноваги, відповідають значенням, для яких цей об'єкт створений, чи експлуатується, то такі значення вхідних та керуючих величин, а також відповідні параметри стану називають номінальними і позначають індексом 'н', або 'о'. Наприклад, вираз $f_i(y_{10}, y_{20}, p_{10}, p_{20}, l_{10}, l_{20}) = f_i|_n$ означатиме значення функції f (число) при номінальних значеннях параметрів стану y , вхідних величин p та керувань l .

З курсу математичного аналізу відомо, що будь-яку нелінійну n -раз диференційовану в точці, наприклад z_0 , функцію можна як завгодно точно розкласти в степеневий ряд за відхиленнями незалежної змінної z (аргументу нелінійної функції, для функції багатьох змінних – величини векторної) від значень z_0 . В нашому випадку, вектор z – це множина (вектор) змінних, в яку входять параметри стану x_i , вхідні величини p_j та керування l_k .

Розглянемо випадок функції однієї змінної:

$$y=f(z).$$

Ця функція може бути як завгодно точно наближена в околі точки z_0 формулою Тейлора:

$$\begin{aligned} \tilde{y} = f(z_0) + \frac{df}{dz} \cdot \Big|_{z = z_0} \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dz^2} \cdot \Big|_{z = z_0} \cdot (z - z_0)^2 + \\ + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n} \cdot \Big|_{z = z_0} \cdot (z - z_0)^n \end{aligned} \quad (3.1)$$

Чим менше відхилення $\tilde{z}(t)=Z(t)-Z_0$ та більше число членів розкладу у виразі (3.1), тим наближення точніше. Зі зменшенням відхилення аргументу z від стану рівноваги вплив членів вищого порядку зменшується. При достатньо малих відхиленнях $\tilde{z}(t)=Z(t)-Z_0$ можна прийняти, що:

$$y \cong f(z_0) + \frac{df}{dz} \cdot \Big|_{z = z_0} \cdot \tilde{z}$$

Нехай значенню аргументу z_0 відповідає значення функції $y_0=f(z_0)$, а невеликі прирости його \tilde{z} приводять до невеликих приростів $y = y_0 + \tilde{y}$:

$$y_0 + \tilde{y} \cong f(z_0) + \frac{df}{dz} \cdot \Big|_{z = z_0} \cdot \tilde{z} \quad \text{або} \quad \tilde{y} = \frac{df}{dz} \cdot \Big|_{z = z_0} \cdot \tilde{z}$$

Отже, замість того, щоб досліджувати *нелінійну функцію* при невеликих відхиленнях аргументу від певного (номінального) значення z_0 , ми будемо досліджувати її *лінійне наближення* в цій точці:

$$\tilde{y} = a\tilde{z} \quad \text{де} \quad a = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$$

а результати дослідження переносити на нелінійний об'єкт за формулою:

$$y \approx y_0 + \tilde{y}$$

Для функції багатьох змінних ·

$$y=f(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

таким наближенням буде гіперплощина:

$$\tilde{y} = a_1 \tilde{z}_1 + a_2 \tilde{z}_2 + \dots + a_n \tilde{z}_n, \quad \text{де:}$$

$$a_i = \left. \frac{df}{dz_i} \right|_{\substack{z_1 = z_{10} \\ z_2 = z_{20} \\ \dots \\ z_n = z_{n0}}} = \left. \frac{df}{dz_i} \right|_{\mathbf{H}}, \quad \tilde{z}_i = z_i - z_{i0}, i = 1, 2, \dots, n$$

Розглянемо тепер нелінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{dy \cdot (t)}{dt} = f(y(t), u(t))$$

Допустимо, що значенню $u(t)=u_0=\text{const}$ при $t \rightarrow \infty$ відповідає значення $y(t)=y_0$.

Тобто, об'єкт, що описується цим рівнянням, в точці (y_0, u_0) має стан рівноваги і досягнув його. Вивести його з цього стану може лиш відхилення $u(t)$ від значення u_0 . Нехай це відхилення:

$$u(t) = u_0 + \tilde{u}(t)$$

є невеликим і приводить до невеликих відхилень

$$y(t) = y_0 + \tilde{y}(t)$$

Тоді наближено можна записати:

$$\frac{d(y_0 + \tilde{y}(t))}{dt} \approx f(y_0, u_0) + \left. \frac{\partial f \cdot (y, u)}{\partial y} \right|_{\substack{y_0 \\ u_0}} \cdot \tilde{y}(t) + \left. \frac{\partial f \cdot (y, u)}{\partial u} \right|_{\substack{y_0 \\ u_0}} \cdot \tilde{u}(t),$$

або, з врахуванням того, що

$$\frac{dy_0}{dt} = f(y_0, u_0) = 0,$$

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = a\tilde{y} + b\tilde{u},$$

$$\text{де } a = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_0, u_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_H, \quad b = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{y_0, u_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_H$$

Лінеаризуємо тепер систему нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з однією вхідною величиною $u(t)$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases} \quad (3.2)$$

та вихідною величиною

$$y(t) = \varphi(x_1, x_2, u)$$

навколо стану рівноваги (x_{10}, x_{20}, u_0) .

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2, u)}{\partial x_1} \right|_H \cdot \tilde{x}_1 + \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2, u)}{\partial x_2} \right|_H \cdot \tilde{x}_2 + \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2, u)}{\partial u} \right|_H \cdot \tilde{u} \\ \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial x_1} \right|_H \cdot \tilde{x}_1 + \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial x_2} \right|_H \cdot \tilde{x}_2 + \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial u} \right|_H \cdot \tilde{u} \end{cases}$$

$$\tilde{y}(t) = \left. \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, u)}{\partial x_1} \right|_H \cdot \tilde{x}_1 + \left. \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, u)}{\partial x_2} \right|_H \cdot \tilde{x}_2 + \left. \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, u)}{\partial u} \right|_H \cdot \tilde{u},$$

де умовні позначення:

$$\left. \frac{\partial f_1 \cdot (x_1 \ x_2 \ u)}{\partial x_1} \right|_H \quad \text{та} \quad \left. \frac{\partial \varphi \cdot (x_1 \ x_2 \ u)}{\partial x_1} \right|_H$$

означають значення часткових похідних (числа) в стані рівноваги (в точці x_{10}, x_{20}, u_0).

Зауважимо, що часткові похідні від функції в правих частинах рівнянь, потрібно брати по всіх параметрах стану та тих вхідних величинах, значення яких відхиляються від стану рівноваги.

В компактнішій формі лінеаризована система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} = a_{11} \cdot \tilde{x}_1 + a_{12} \cdot \tilde{x}_2 + b_1 \cdot \tilde{u} \\ \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = a_{21} \cdot \tilde{x}_1 + a_{22} \cdot \tilde{x}_2 + b_2 \cdot \tilde{u} \end{cases}$$

$$\tilde{y}(t) = c_1 \cdot \tilde{x}_1 + c_2 \cdot \tilde{x}_2 + d \cdot \tilde{u} ,$$

$$\text{де: } a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i \cdot (x_1 \ x_2 \ u)}{\partial x_j} \right|_H, \quad b_i = \left. \frac{\partial f_i \cdot (x_1 \ x_2 \ u)}{\partial u} \right|_H,$$

$$c_i = \left. \frac{\partial \varphi \cdot (x_1 \ x_2 \ u)}{\partial x_i} \right|_H, \quad d = \left. \frac{\partial \varphi \cdot (x_1 \ x_2 \ u)}{\partial u} \right|_H.$$

Запишемо тепер цю систему в матричній формі:

$$X = AX + BU \tag{3.3}$$

$$Y = CX + DU,$$

де:

$$X = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2]^T; \quad U = \tilde{u}; \quad Y = \tilde{y};$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad B = [b_1 \ b_2]^T; \quad C = [c_1 \ c_2]^T; \quad D = d$$

Матрична форма (3.3) представлення систем використовується у всіх сучасних середовищах для дослідження та імітаційного моделювання систем.

В загальному випадку, для об'єкту з n параметрами стану (об'єкту n -го порядку), s вихідними величинами, m вхідними величинами та k керуваннями, моделлю якого є система (10)-(11), лінеаризована система у матричній формі буде мати вигляд:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} \\ \frac{d\tilde{x}_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{x}_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\tilde{y}_1}{dt} \\ \frac{d\tilde{y}_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{y}_s}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{bmatrix}$$

де:

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_H, \quad b_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \right|_H, \quad c_{ir} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial l_r} \right|_H, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, k,$$

$$d_{ij} = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_H, \quad e_{ik} = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \right|_H, \quad g_{ir} = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial l_r} \right|_H, \quad i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, k$$

Отже, якщо стоїть завдання дослідження нелінійної системи при невеликих відхиленнях вхідних та керуючих величин відносно стану рівноваги, то нелінійна система може бути наближено замінена лінійною системою. Чим менші відхилення системи від стану рівноваги, тим точність наближення є більшою.

Одержані результати досліджень – функції $\tilde{x}_i(t)$, $\tilde{y}_j(t)$ є відхиленнями параметрів стану та вихідних величин від стану рівноваги. Абсолютні значення обчислюють за формулами:

$$x_i(t) = x_{i0} + \tilde{x}_i(t); \quad y_j(t) = y_{j0} + \tilde{y}_j(t)$$

4. ФОРМАТИ ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЙ FSOLVE та STEP

FSOLVE - Зовнішня функція, призначена для розв'язування систем нелінійних (алгебраїчних та трансцендентних) рівнянь.

Найпростіший формат використання функції наступний:

$X = \text{FSOLVE}(\text{'name'}, XO),$

де: 'name' - символічна змінна - ім'я матричної нелінійної функції (системи рівнянь), розв'язок якої потрібно знайти. Звичайно це ім'я m - файлу на диску, вміст якого це - конкретний математичний вираз для обчислення значень системи нелінійних рівнянь;

XO - вектор початкового наближення, початкова точка для ітераційного процесу знаходження розв'язку. Число елементів вектору повинно дорівнювати числу незалежних змінних в системі рівнянь.

X - вектор значень незалежних змінних, які є розв'язком системи рівнянь (розв'язок).

Приклад 4.1.

Потрібно розв'язати систему рівнянь $F(x, y, z)=0$, де

$F(x, y, z)=[f1(x, y, z)f2(x, y, z)f3(x,y,z)]^T$

$$f1(x, y, z)=\sin(x)+y^2+\log(z)-7=0$$

$$f2(x, y, z)=3*x+2^y-z^3+1=0$$

$$f3(x, y, z)=x+y+z-5=0$$

Створимо на диску, в доступному для системи MATLAB в каталозі (користувача!) m - файл для обчислення значень $f_i(x, y, z)$. Надамо йому ім'я, наприклад, XYZ. Для цього відкриємо довільний, доступний системі редактор, і створимо за правилами мови програмування MATLAB та формату використання зовнішньої функції FUNCTION файл:

```
function f=xyz(x)
```

```
% Файл до прикладу 4.1.
```

```
% f=[f(1) f(2) f(3)]T, x=[x(1) x(2). x(3)]T
```

```
% Приймемо, що x(1)=x; x(2)=y; x(3)=z
```

```
f=[ sin (x(1))+ x(2)^2+log(x(3))-7; 3*X(1) + 2^x(2) - x(3)^3 + 1; x(1)+x(2)+x(3)-5];
```

Запишемо цей файл на диску під іменем x y z .

Задавши початкову точку наближення, наприклад, $x=1$, $y=1$, $z=1$, тобто $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$, можна виконати обчислення розв'язку системи рівнянь. Для цього, наприклад, в режимі прямих обчислень, виконаємо команди:

```
» x0=[1 1 1]';  
» x=fsolve('xyz',x0)
```

В результаті виконання команди на екран дисплею буде виведений вектор X з трьох значень аргументів, які є розв'язком системи нелінійних рівнянь.

Допускається також наступний формат використання функції `fsolve`:

```
»x=fsolve('xyz', [111])
```

Аналогічний результат одержимо, коли зовнішня функція на диску буде, наприклад, наступною:

```
function g = xyz(p)  
x = p(1);y = p(2);z = p(3);  
g = zeros(3,1);  
g(1) = sin(x) + y^2 + log(z) - 7;  
g(2)=- 3*x + 2^y - z^3 + 1;  
g(3) = x + y + z - 5;
```

Допускається також використання формату

$X = \text{FSOLVE}(F, X_0)$, де F - символна змінна. $F='F(x)'$.

Приклад:

```
«f='[sin(x(1))+ x(2)^2+log(x(3))-7; 3*x(1) + 2^x(2) - x(3)^3 + 1; x(1)+x(2)+x(3)-5]';  
«x0=[1 1 1]';  
«x=fsolve(f,x0)  
x= 0.5991  
2.3959  
2.0050
```

ЗАУВАЖЕННЯ. Всі вектори у форматі використання функції `FSOLVE` повинні бути вектор-стовпцями.

Система нелінійних рівнянь розв'язується оптимізаційними методами. По замовчуванню використовується градієнтний метод Ньютона. Однак можна вибрати також комбінований метод Ньютона - Коші (алгоритм Левенберга - Марквардта).

STEP - Обчислення перехідної функції неперервної стаціонарної системи - реакції лінійної попередньо не збудженої системи на одиничний стрибкоподібний вхідний сигнал. Система може бути задана як функцією передачі :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)};$$

так і в матричному вигляді:

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

Число стовпців матриць A і C а також B і D повинно бути однаковим.

У випадку заданої функції передачі системи використовують формати:

$$[Y, X] = \text{STEP}(\text{NUM}, \text{DEN}, T), \quad Y = \text{STEP}(\text{NUM}, \text{DEN}, T),$$

$$[Y, X, T] = \text{STEP}(\text{NUM}, \text{DEN}), \quad [Y, T] = \text{STEP}(\text{NUM}, \text{DEN}),$$

$$\text{STEP}(\text{NUM}, \text{DEN}),$$

Y - вектор – стовпець значень вихідної величини (власне перехідна функція системи);

X - матриця значень реакції параметрів стану системи на дію одиничної стрибкоподібної функції. Число стовпців матриці дорівнює числу параметрів стану - порядку системи. При цьому виводяться параметри стану еквівалентної системи в стандартній формі.

Вектор T з монотонно зростаючими значеннями часу.

NUM, DEN - вектори коефіцієнтів вхідного та власного операторів лінійної системи відповідно.

Наприклад:

$$H(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 1}{5s^4 + 4s^3 + 3s + 2}$$

$$H(s) = \frac{2s}{4s^2 + 1}$$

$$\text{NUM}=[2 \ 4 \ 0 \ 1]; \text{DEN}=[5 \ 4 \ 0 \ 3 \ 2].$$

$$\text{NUM}=[2 \ 0]; \text{DEN}=[4 \ 0 \ 1].$$

Якщо вхідний параметр T не заданий, то він системою задається автоматично. Якщо не вказані вихідні параметри (формат STEP(NUM,DEN)), то в результаті виконання цієї зовнішньої функції буде виведений графік перехідної функції системи (для MATLAB for WINDOWS). Вектор часу та масштаби по осях при цьому встановлюються автоматично.

У випадку, коли система задана в матричній формі, використовують наступні формати функції:

$$[Y,X] = \text{STEP}(A,B,C,D,IU,T), [Y.X,T] = \text{STEP}(A,B,C,D,IU),$$

$$Y = \text{STEP}(A,B,C,D,IU,T), [Y.T] = \text{STEP}(A,B,C,D,IU),$$

$$\text{STEP}(A,B,C,D,IU),$$

де, крім відомих, IU - номер вхідної величини (індекс елемента у векторі вхідних величин U), для якої будується перехідна функція системи.

Приклад.

$$X=AX+BU; Y=CX+DU;$$

$$X=[X(1)X(2)]^T; U=[U(1)U(2)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = [0 \ 1]; D = [0 \ 0].$$

Тобто, задана система другого порядку з двома вхідними величинами U(1) та U(2) і однією вихідною величиною Y.

Для одержання значень перехідної функції системи по першій вхідній величині використаємо, наприклад, формат [Y.X,T] = STEP(A,B,C,D,1), а для перехідної функції по другому входу - функцію [Y.X.T] = STEP(A,B,C,D,2).

Зауваження: матриці A, B, C та D повинні бути узгодженими: число рядків матриць A і B та C і D а також число стовпців матриць A і C та B і D повинно бути однаковим.

5. ХІД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Побудувати математичну модель об'єкту згідно з варіантом завдання. Звернути увагу на тип диференціальних рівнянь, що входять в модель (лінійні, нелінійні).

2. Записати рівняння математичної моделі для стану рівноваги. Отримати аналітичні залежності для визначення невідомих параметрів стану.

3. Вивчити формати використання функцій пакету MATLAB: ODE23, ODE45, PLOT та правила створення зовнішніх функцій.

4. Використовуючи аналітичні вирази отримані при виконанні п.2 обчислити параметри стану системи для початкового стану рівноваги.

5. Знайти реакцію об'єкту на кожне із заданих збурень. Для цього, послідовно підставляючи в нелінійне диференціальне рівняння (отримане в п. 1 і описане в файлі математичної моделі) значення збурюючої величини, розв'язавши його за допомогою функцій ODE23, ODE45.

6. Для кожної реакції виписати значення вихідної величини, що відповідає кінцевому стану рівноваги. Оформити таблицю залежності значення вихідної величини об'єкту у стані рівноваги від значення збурюючої величини.

7. За допомогою функції PLOT побудувати графіки перехідних процесів та графік залежності значення вихідної величини об'єкту у стані рівноваги від значення збурюючої величини.

8. Лінеаризувати нелінійну систему відносно одержаного стану рівноваги;

9. Обчислити параметри стану системи в стані рівноваги:

а) використовуючи аналітичні вирази отримані при виконанні п.2;

б) розв'язуючи систему нелінійних алгебраїчних рівнянь з використанням зовнішньої функції FSOLVE пакету MATLAB. Порівняти отримані результати;

10. Для заданих відхилень вхідних та керуючих величин від номінальних значень та початкових умов для параметрів стану, одержаних в пункті п.4, розв'язати систему нелінійних диференціальних рівнянь, отриману в пункті п.1, числовим методом. Для розв'язування використати зовнішні функції ODE23 чи ODE45;

11. Побудувати графіки зміни параметрів стану \tilde{Q} та \tilde{h} в часі

$$(\tilde{Q} = Q - Q_H; \tilde{h} = h - h_H)$$

12. Для заданих відхилень вхідних та керуючих величин від номінальних значень розв'язати систему лінеаризованих рівнянь, одержану в пункті п.9. Для розв'язку системи використати:

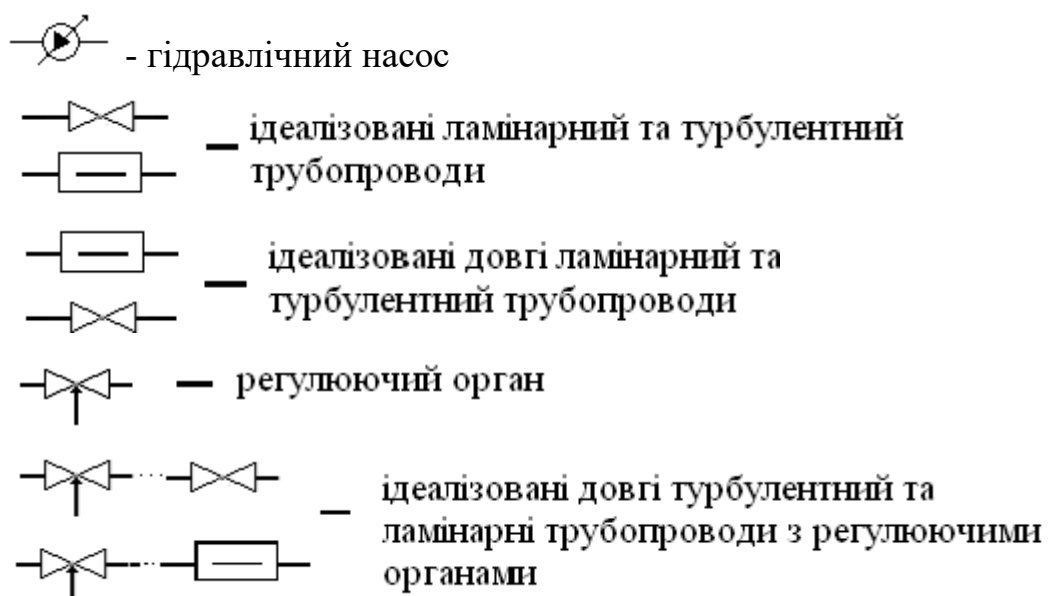
а) зовнішні функції ODE23 чи ODE45;

б) зовнішню функцію середовища будувати графіки зміни параметрів стану \tilde{Q} та \tilde{h} в часі;

13. Результати моделювання $\tilde{h}(t)$ та $\tilde{Q}(t)$ отримані в пунктах п.12, п.13 накласти на одному графіку;

6. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО КУРСОВОЇ РОБОТИ

Побудувати і дослідити (згідно ходу виконання роботи) математичну модель відкритої проточної гідравлічної ємності з довгим трубопроводом. Значення конструктивних параметрів ємності та трубопроводів, номінальні значення вхідних та вихідних величин приведені в табл. 1. Значення стрибкоподібно змінених вхідних величин чи керувань приведені в табл.2. Графічне зображення об'єкту моделювання показане на рис.1. Для побудови графічних зображень об'єктів, використовуються такі умовні позначення:



Таблиця 1. Варіанти завдань.

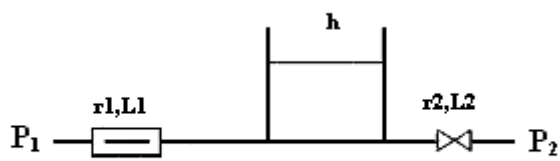
Для всіх варіантів прийняти: $\xi=0.9$, $\rho=1000 \text{ кг/м}^3$, $\nu=1\text{e-}5 \text{ Па}\cdot\text{с}$

Вар.	Рис.	p_1 , кПа	p_2 , кПа	L_1 , м	r_1 , м	L_2 , м	r_2 , м	k_B , м ²	l_1	l_2	d , м	Q , л/с
1	1	30	1	100	0,05	6	0,06	--	--	--	0,5	--
2	2	25	--	95	0,1	--	--	--	--	--	0,5	5
3	3	13	0	104	0,05	5	0,09	--	--	--	0,5	--
4	4	--	0,1	--	--	90	0,08	--	--	--	0,5	8
5	5	15	0,2	102	0,09	3	0,07	--	--	--	0,25	--
6	6	40	0,6	6	0,06	107	0,11	--	--	--	0,25	--
7	7	4	0,3	8	0,04	98	0,09	--	--	--	0,5	--
8	8	12	0	115	0,08	7	0,06	--	--	--	0,5	--
9	9	50	0,4	100	0,01	6	0,05	0,006	0,2	--	0,5	--
10	10	--	0,1	--	--	95	0,1	0,008	--	0,4	0,5	10
11	11	8	0	5	0,07	100	0,12	0,007	--	0,8	0,25	--
12	12	50	0	110	0,1	4	0,11	0,005	0,3	0,6	0,25	--
13	1	8	0,5	100	0,05	6	0,06	--	--	--	0,25	--
14	2	15	--	95	0,1	--	--	--	--	--	0,25	10
15	3	40	0,2	104	0,07	5	0,08	--	--	--	0,25	--
16	4	--	0,4	--	--	90	0,07	--	--	--	0,25	15
17	5	10	0,1	102	0,09	3	0,05	--	--	--	0,5	--
18	6	5	0	6	0,09	107	0,09	--	--	--	0,5	--
19	7	3	0,1	8	0,1	98	0,08	--	--	--	0,25	--
20	8	2,5	1	115	0,08	7	0,1	--	--	--	0,25	--
21	9	25	0	100	0,01	7	0,1	0,004	0,3	--	0,25	--
22	10	--	0,3	--	--	95	0,06	0,007	--	0,3	0,25	30
23	11	4	0	5	0,08	100	0,12	0,004	--	0,9	0,5	--
24	12	30	0,6	110	0,01	4	0,11	0,005	0,1	0,8	0,5	--

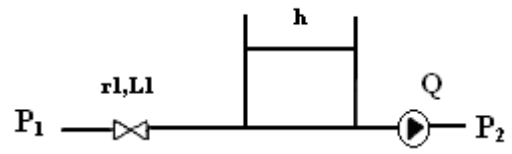
Таблиця 2. Значення стрибкоподібних змінних вхідних та керуючих величин

Вар.	Рис.	p_1,кПа	p_2,кПа	l_1	l_2
1	1	40, 50, 70	--	--	--
2	2	30, 45, 60	--	--	--
3	3	--	0,1; 0,2; 0,4	--	--
4	4	--	0,2; 0,3; 0,5	--	--
5	5	--	0,3; 0,5; 0,7	--	--
6	6	10, 20, 30	--	--	--
7	7	10, 15, 30	--	--	--
8	8	25, 35, 50	--	--	--
9	9	--	--	0,4; 0,5; 0,7	--
10	10	--	--	--	0,6; 0,7; 0,8
11	11	--	--	--	0,7; 0,5; 0,3
12	12	--	--	0,5; 0,7; 0,9	0,5; 0,4; 0,3
13	1	15, 25, 45	--	--	--
14	2	20, 40, 60	--	--	--
15	3	--	0,5; 0,7; 0,8	--	--
16	4	--	0,6; 0,7; 0,9	--	--
17	5	--	0,4; 0,6; 0,8	--	--
18	6	10, 15, 25	--	--	--
19	7	6, 8, 15	--	--	--
20	8	3, 9, 12	--	--	--
21	9	--	--	0,4; 0,6; 0,8	--
22	10	--	--	--	0,6; 0,7; 0,8
23	11	--	--	--	0,7; 0,5; 0,2
24	12	--	--	0,3; 0,5; 0,7	0,6; 0,5; 0,3

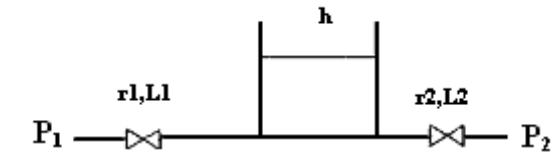
Варіанти схем об'єктів моделювання



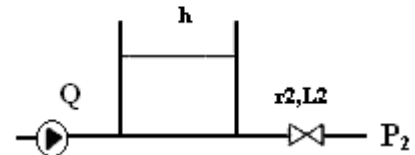
1)



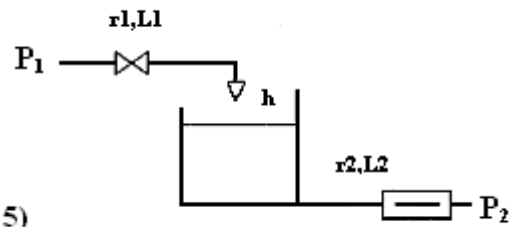
2)



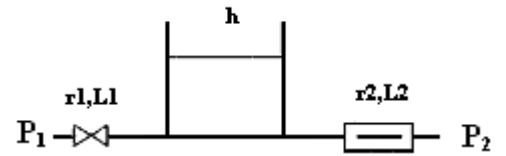
3)



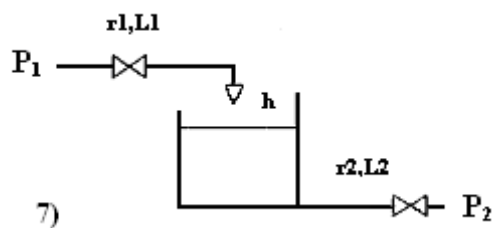
4)



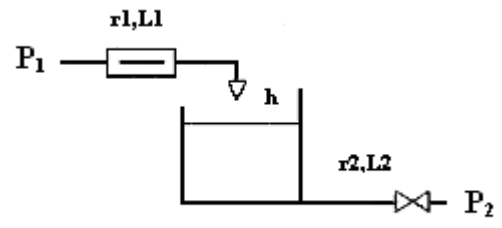
5)



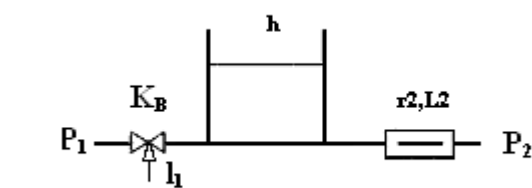
6)



7)

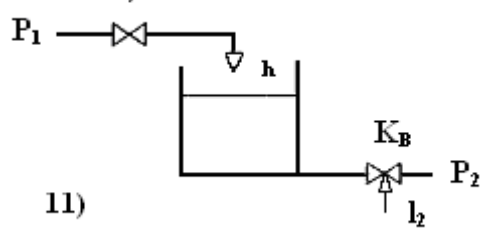
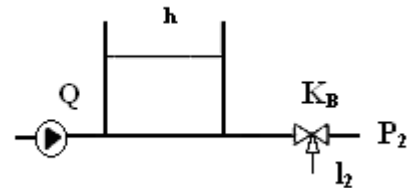


8)

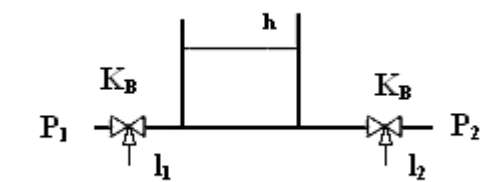


9)

екти 10)



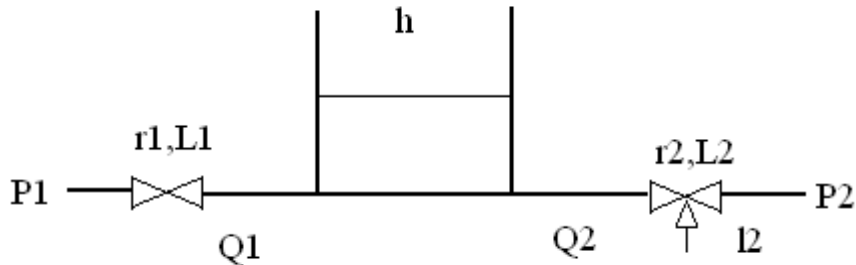
11)



12)

7. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

1. Завдання (варіант 13)



Побудувати та дослідити математичну модель відкритої проточної гідравлічної ємності, зображеної на малюнку.

Значення конструктивних параметрів:

$$d=0.5\text{м}, r_1=0.06\text{м}, L_1=4\text{м}, r_2=0.14\text{м}, L_2=110\text{м}, k_b=1\text{e-}02\text{м}^2, \xi=0.9;$$

Номінальні значення:

- вхідних величин: $P_1=40\text{кПа}$, $P_2=0.2\text{кПа}$;

- керування: $I_2=0.3$;

Значення стрибкоподібно зміненої вхідної величини: $P_1=25\text{кПа}$.

2. Побудова математичної моделі

Згідно з рівнянням збереження маси речовини та ввівши деякі припущення (масообмін на границі розділу фаз рідина-повітря відсутній, $\rho=\text{const}$), запишемо диференціальне рівняння, що описує зміну рівня в ємності

$$S \frac{dh}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad (1)$$

де $S=\pi d^2/4$ - площа ємності, м^2 ;

h - рівень рідини в ємності, м ;

Q - об'ємна витрата, $\text{м}^3/\text{с}$.

Витрата в першому трубопроводі з турбулентним режимом течії визначається на основі закону Дарсі - Вейсбаха:

$$Q_1 = k_1 \cdot \sqrt{\frac{P_1 - \rho gh}{\rho}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^5}{L_1 \xi}} \quad (2)$$

Зміна витрати в другому трубопроводі описується диференціальним рівнянням:

$$A \frac{dQ_2}{dt} + \left(1 + \frac{k_2^2}{k_e^2 \cdot l^2} \right) Q_2^2 = \frac{k_2}{\rho} \cdot (\rho gh - P_2) \quad (3)$$

де

$$A = \frac{4 \cdot \pi \cdot r_2^3}{\xi}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^5}{L_2 \xi}}$$

g - прискорення земного тяжіння, $g=9.8 \text{ м/с}^2$.

Рівняння (1), (2), (3) складають систему нелінійних диференціальних рівнянь, що описують об'єкт моделювання:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \frac{dh}{dt} = Q_1 - Q_2 ; \\ Q_1 = k_1 \cdot \sqrt{\frac{P_1 - \rho gh}{\rho}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^5}{L_1 \xi}} ; \\ A \frac{dQ_2}{dt} + \left(1 + \frac{k_2^2}{k_e^2 \cdot l^2} \right) Q_2^2 = \frac{k_2}{\rho} \cdot (\rho gh - P_2), \\ A = \frac{4 \cdot \pi \cdot r_2^3}{\xi}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^5}{L_2 \xi}} . \end{array} \right. \quad (4)$$

Або в іншому вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \frac{dh}{dt} = k_1 \cdot \sqrt{\frac{P_1 - \rho gh}{\rho}} - Q_2 ; \\ A \frac{dQ_2}{dt} = \frac{k_2}{\rho} \cdot (\rho gh - P_2) - \left(1 + \frac{k_2^2}{k_e^2 \cdot l^2} \right) Q_2^2 . \end{array} \right. \quad (5)$$

Як видно з (5), параметри стану об'єкту - це рівень h - та витрата рідини Q_2 в другому трубопроводі. Нехай для даної проточної ємності зовнішнім об'єктом буде регулятор рівня рідини в ємності. Тоді, вихідною величиною об'єкту є рівень в ємності h .

3. Визначення невідомих параметрів стану рівноваги

3.1. За аналітичними залежностями

Параметрами стану для даного об'єкту є величини Q_2 та h . В стані рівноваги $Q_2=Q_{20}=\text{const}$, $h=h_0=\text{const}$. Враховуючи це, перепишемо систему (5) для стану рівноваги:

$$\begin{cases} 0 = k_1 \cdot \sqrt{\frac{P_{10} - \rho g h_0}{\rho}} - Q_{20} ; \\ 0 = \frac{k_2^2}{\rho} \cdot (\rho g h_0 - P_{20}) - \left(1 + \frac{k_2^2}{k_e^2 \cdot I_0^2}\right) Q^2 . \end{cases} \quad (6)$$

Із (6) :

$$Q_{10} = Q_{20} = k_1 \cdot \sqrt{\frac{P_{10} - \rho g h_0}{\rho}} \quad (7)$$

Якщо позначити :

$$B = \left(1 + \frac{k^2}{k_e^2 \cdot I^2}\right)$$

і підставити (7) в друге рівняння системи (6), то одержимо :

$$B k_1^2 \cdot \sqrt{\frac{P_{10} - \rho g h_0}{\rho}} = \frac{k_2^2}{\rho} \cdot (\rho g h_0 - P_{20}) ,$$

звідки

$$h_0 = \frac{B k_1^2 \cdot P_{10} + k_2^2 \cdot P_{20}}{(k_2^2 + B k_1^2) \rho g h_0}$$

Значення h_0 та Q_{10} , Q_{20} зручно знайти, описавши вирази (7), (8) в script- файлі. Наприклад, в даному варіанті початкові значення параметрів стану отримано при виконанні програми, записаної у script - файлі pu1.m:

% Файл розрахунку початкових значень параметрів

% за аналітичними залежностями

ro=1000; g=9.8; dz=0.9; kv=1e-2;

d=0.5; r1=0.06; L1 =4; r2=0.14; L2=110;

```

l=0.3; p1 =40000; p2=200;
%-----
k2=sqr(4*pi^2*r2^5/(L2*dz));
k1 =sqr(4*pi^2*r1^5/(L1 *dz));
B=1+(k2/kv/l)^2;
%-----
disp ( 'Початкові значення параметрів' )
h0=(B*k1^2*p1+k2^2*p2)/(B*k1^2+k2^2)/ro/g
Q20=k1*sqr((p1-ro*g*h0)/ro)
Результати виконання програми:
h0=2.3498, Q20 =0.0120

```

3.2. Числовими методами

Для перевірки правильності значень h_0 та Q_{20} отриманих за аналітичними залежностями (7) та (8), розв'яжемо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (6) за допомогою функції MATLAB FSOLVE. Для цього опишемо систему (6) у файлі pu2.m:

```

function y=pu2(x);
h=x(1); Q2=x(2)
ro=1000; g=9.8; dz=0.9; kv=1e-2;
d=0.5;r1=0.06;L1=4; r2=0.14; L2=110;
l=0.3; p1=40000; p2=200;
%-----
k2=sqrt(4*pi^2*r2^5/(L2*dz));
k1 =sqrt(4*pi^2*r1^5/(L1 *dz));
B=1+(k2/kv/l)^2;
%-----
y=[k1*sqrt((p1-ro*g*h)/ro)-Q2;
k2^2*(ro*g*h-p2)/ro-B*Q2^2];

```

Виконавши в режимі прямих обчислень послідовність команд

```

«x0=[1; 0.1]; y=fsolve('pu2',x0)

```

отримаємо $h_0 = 2.3517$, $Q_{20} = 0.0120$

4. Лінеаризація математичної моделі

Початковий стан рівноваги будемо розглядати як номінальний режим роботи об'єкту. Отже $P_{10} = P_{1H}$, $P_{20} = P_{2H}$, $Q_{20} = Q_{10} = Q_H$, $h_0 = h_H$, $I_0 = I_H$. Лінеаризуємо математичну модель відносно прийнятого номінального режиму.

Перепишемо систему (5) у формі (3.2):

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{S} \cdot \left(k_1 \cdot \sqrt{\frac{P_1 - \rho gh_0}{\rho}} - Q_2 \right) \\ \frac{dQ_2}{dt} = \frac{k_2^2}{A\rho} \cdot (\rho gh - P_2) - \frac{B}{A} Q_2^2 \end{cases} \quad (9)$$

Тоді лінеаризована система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{h}}{dt} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial h} \right]_H \tilde{h} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial Q_2} \right]_H \tilde{Q}_2 + \left[\frac{\partial f_1}{\partial P_1} \right]_H \tilde{P}_1, \\ \frac{dQ_2}{dt} = \left[\frac{\partial f_2}{\partial h} \right]_H \tilde{h} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial Q_2} \right]_H \tilde{Q}_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial P_2} \right]_H \tilde{P} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial I} \right]_H \tilde{I}, \end{cases} \quad (10)$$

де:

$$f_1 = \frac{1}{S} \cdot \left(k_1 \cdot \sqrt{\frac{P_1 - \rho gh_0}{\rho}} - Q_2 \right), \quad f_2 = \frac{k_2^2}{A\rho} \cdot (\rho gh - P_2) - \frac{B}{A} Q_2^2$$

Або, позначивши значення часткових похідних через a_{ij} та b_{ij} , отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{h}}{dt} = a_{11}\tilde{h} + a_{12}\tilde{Q}_2 + b_{11} \cdot \tilde{P}_1, \\ \frac{dQ_2}{dt} = a_{21}\tilde{h} + a_{22}\tilde{Q}_2 + b_{21}\tilde{P} + b_{22}I \end{cases} \quad (11)$$

Згідно із завданням, причиною відхилення параметрів об'єкту від стану рівноваги є зміна тиску P_1 . Зміни інших. вхідних та керуючих величин відсутні, ($\tilde{I}, \tilde{P}_2 = 0$) тому система (11) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{h}}{dt} = a_{11}\tilde{h} + a_{12}\tilde{Q}_2 + b_{11} \cdot \tilde{P}_1, \\ \frac{d\tilde{Q}_2}{dt} = a_{21}\tilde{h} + a_{22}\tilde{Q}_2 \end{cases} \quad (12)$$

Коефіцієнти системи (12) визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial h} \right]_H = -\frac{k_1 g}{2 S} \sqrt{\frac{\rho}{P_{1H} - \rho g h_H}}, & a_{12} &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial Q_2} \right]_H = -\frac{1}{S}, \\ b_{11} &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial P_1} \right]_H = \frac{k_1}{2 \rho S} \sqrt{\frac{\rho}{P_{1H} - \rho g h_H}}; \\ a_{22} &= \left[\frac{\partial f_2}{\partial Q_2} \right]_H = -\frac{2 B}{A} Q_{2H}, & a_{21} &= \left[\frac{\partial f_2}{\partial h} \right]_H = \frac{k_2^2 g}{A}. \end{aligned} \quad (13)$$

Щоб використати для дослідження лінійної моделі (12) матричні методи, на яких базуються функції STEP та IMPULSE, потрібно записати її в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{h}} \\ \dot{\tilde{Q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} * \tilde{P}_1, \quad (14)$$

або, застосувавши умовні позначення матриць,

$$X = A * X + B * \tilde{P}_1, \text{ де:}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{власна матриця системи}$$

$$X = \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} \quad \text{вектор параметрів стану,}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{матриця вхідних величин}$$

Згідно із стандартною формою (3.3) представлення лінійних систем, у випадку, коли рівень рідини в ємності є вихідною величиною об'єкту, повною моделлю лінеаризованого об'єкту буде система рівнянь:

$$X = A * X + B * \tilde{P}_1,$$

$$Y=C*X+D*U$$

де $C=[1 \ 0]$, $D=[0]$

5. Дослідження реакції моделі на стрибкоподібне збурення

5.1. Для нелінійної моделі

Щоб знайти реакцію нелінійної моделі на стрибкоподібну зміну тиску P_1 , розв'яжемо систему нелінійних диференціальних рівнянь (9) за допомогою функції ODE23. Для опису системи (9) доцільно використати раніше створений файл pu2.m, змінивши деякі його стрічки. Для цього за допомогою редактора, наприклад Norton Editor для MATLAB for DOS, чи Notepad для MATLAB4, або M-file Editor/Debugger для MATLAB5 перепишемо вміст файлу pu2.m під іменем nelmod.m і змінимо стрічки файлу nelmod.m наступним чином:

```
function y=pu2(x);                                function y=nelmod( t, x);
h=x(1);    Q2=x(2)                               h=x(1);    Q2=x(2)
ro=1000; g=9.8; dz=0.9; kv=1e-2;                 ro=1000; g=9.8; dz=0.9; kv=1e-2;
d=0.5;r1=0.06; L1=4;  r2=0.14;                   d=0.5; r1=0.06; L1=4;r2=0.14;
ll=0.3; p1 =40000; p2=200; L2=110;              l=0.3; p1 =40000; p2=200; L2=110;
%-----                                         %-----
k2=sqrt(4*pi^2*r2^5/(L2*dz)),                     k2=sqrt(4*pi^2*r^25/(L2*dz));
k1 =sqrt(4*pi^2*r1^5/(L1 *dz));                   k1 =sqrt(4*pi^2*r1^5/(L1*dz));
B=1+(k2/kv/l) ^2;                                  B=1+(k2/kv/l) ^2;
%-----                                         S=pi*d^2/4; A=4*pi*r2^3/dz;
y=[k1*sgrt((p1-r0*g*h)/r0)Q2;                     y=[(k1*sgrt((p1-r0*g*h)/r0)-Q2)/S;
    k2^2*(r0*g*h-p2)/r0-B*Q2^2];                 (k2^2*(r0*g*h-p2)/r0-B*Q2^2)/A];
```

Графіки перехідних процесів $h(t)$ та $Q(t)$ отримаємо, підставивши в файл nelmod.m значення тиску $P_1=25$ кПа та виконавши наступну послідовність команд:

```
»x0=[2.3498 0.012];
»[t,y]=ode23('nelmod',0,200,x0, 1e-4)
»plot(t,y(:,1));pause; plot(t,y(:,2))
```

Матриця у складається з двох стовпців, перший з яких містить значення зміни рівня в часі $h(t)$, а другий - залежності $Q_2(t)$.

5.2. Для лінійної моделі

Реакцію лінійної моделі на *одиночний* стрибкоподібний вхідний сигнал можна визначити за допомогою функції STEP. Для знаходження реакції на стрибкоподібне відхилення вхідної величини від номінального значення $P=P_1-P_{1H}$, перехідну функцію системи, одержану з допомогою функції STEP, потрібно домножити на P_1 .

Послідовність команд для знаходження значень матриці стану A та вектора вхідних величин b , які є вхідними аргументами для функції STEP, записана у файлі `matr.m`. Як видно з роздруку даного файлу, його доцільно створити, відредагувавши файл `nelmod.m`.

```
ro=1000, 9.8, dz=0.9; kv=1e-2;
d=0.5; r1=0.06; L1=4; r2=0.14; L2=110;
l0=0.3; p2=200;
p10=40000; h0=2.3498; Q20=0.012;
%-----
k2=sqrt(4*pi^2*r2^5/(L2*dz));
k1 =sqrt(4*pi^2*r1^5/(L1 *dz));
B=1+(k2/kv/l0)^2;
S=pi*d^2/4; A=4*pi*r2^3/dz;
%-----
a11=-k1*g*sqrt(ro/(p10-ro*g*h0))/(2*S); a12=-1/S;
b11=k1 *sqrt(ro/(p10-ro*g*h0))/(2*S*ro);
a21=k2^2*g/A; a22=-2*B*Q20/A;
a=[a11 a12; a21 a22], b=[b11; 0]
```

В результаті виконання послідовності операторів файлу `matr.m` отримаємо:

```
a=-0.0177 -5.0930
    0.0055 -2.1191
b= 1.8067E-6
```

Для побудови графіків перехідних процесів $\tilde{h}(t)$ та $\tilde{Q}_2(t)$ створимо файл `grafrez.m`

```

% Файл побудови графіків перехідних процесів лінійної моделі
P1 =25000; P10=40000; Px=P1-P10;
a=[-0.0177 -5.0930 ; 0.0055 -2.1191 ]; b=[ 1.8067e-6; 0];
c=[1 0]; d=[0];
t=[0:200];
[y,x]=step(a,b,c,d,1,t), pause
x=Px*x;
piot(t,x(:,1)); grid; ylabel('h,m'); xlabel('time,sec');
pause;
plot(t,x(:,2));grid; ylabel ('Q,m.kub/sec'); xlabel ('time,sec');

```

6. Порівняння графіків перехідних процесів, отриманих для нелінійної та лінійної моделей

Для порівняння графіків перехідних процесів потрібно накласти в одній системі координат графіки $h(t)$ - нелінійної моделі, $\tilde{h}(t)$ - лінійної моделі і, відповідно, в іншій $Q_2(t)$ - нелінійної моделі, $\tilde{Q}_2(t)$ - лінійної моделі. Файл графічного порівняння результатів створимо, відредагувавши файл grafrez.m:

```

% Файл порівняння графіків перехідних процесів лінійної
% та нелінійної моделі
% -----
% Розв'язування нелінійної системи
x0=[2.3498 0.012];
[t1;y1]=ode23('nelmod',0,200,x0,1e-4);
%-----
% Розв'язування лінійної системи
a=[-0.0177 -5.0930;0.0055 -2.1191]; b[-0.0271;0]
c=[1 0 ]; d=[0];
t2=[0:200];
[y2,x2]=step(a,b,c,d,1,t), pause
% -----

```

% Порівняння графіків перехідних процесів

```
plot(t1,y1(:,1),'--',t2,x2(:,1)+2.3498); grid;
```

```
ylabel('h,m'); xlabel('time,sec'); pause;
```

```
plot(t1,y1(:,2),'--',t2,x2(:,2)+0.0120); grid;
```

```
ylabel('Q,m.kub/sec'); xlabel('time,sec');
```

```
pause;close
```

Зауваження: Для порівняння графіків відхилень $\tilde{h}(t)$ та $\tilde{Q}_2(t)$ та дійсних величин $h(t), Q_2(t)$ до величин відхилень потрібно додати номінальні значення параметрів $h_n=2.3498, Q_{2n}=0.012$.

В результаті виконання програми grafrez.m отримаємо графіки перехідних процесів в нелінійній та лінеаризованій моделях, показані на рис. 13, 14.

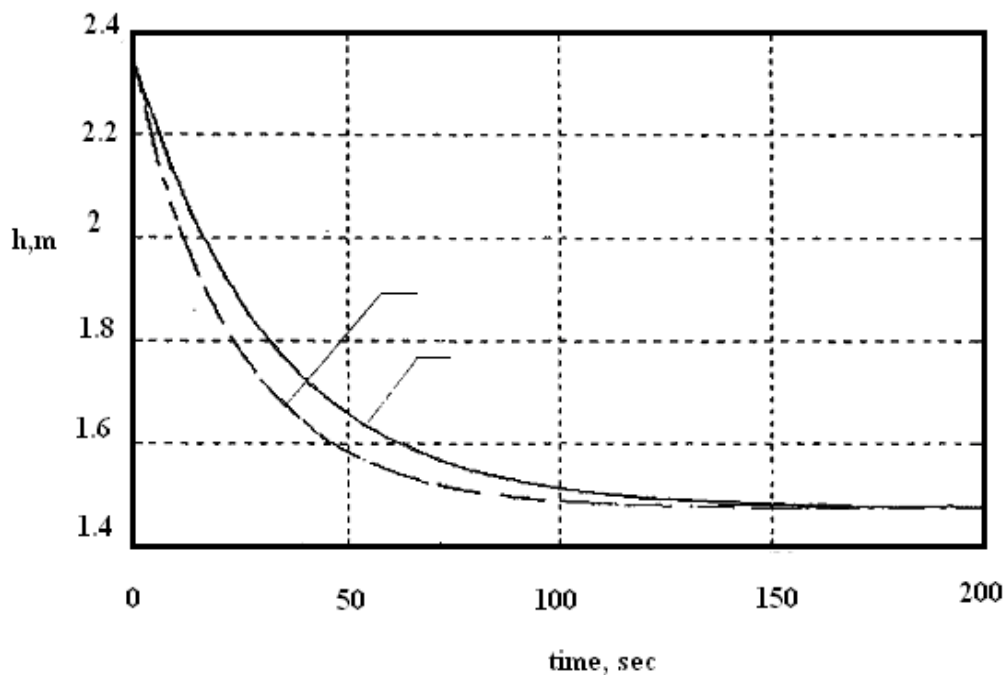


Рис.13 .Графіки перехідних процесів (зміни рівня) в нелінійній (1) та лінеаризованій (2) моделях

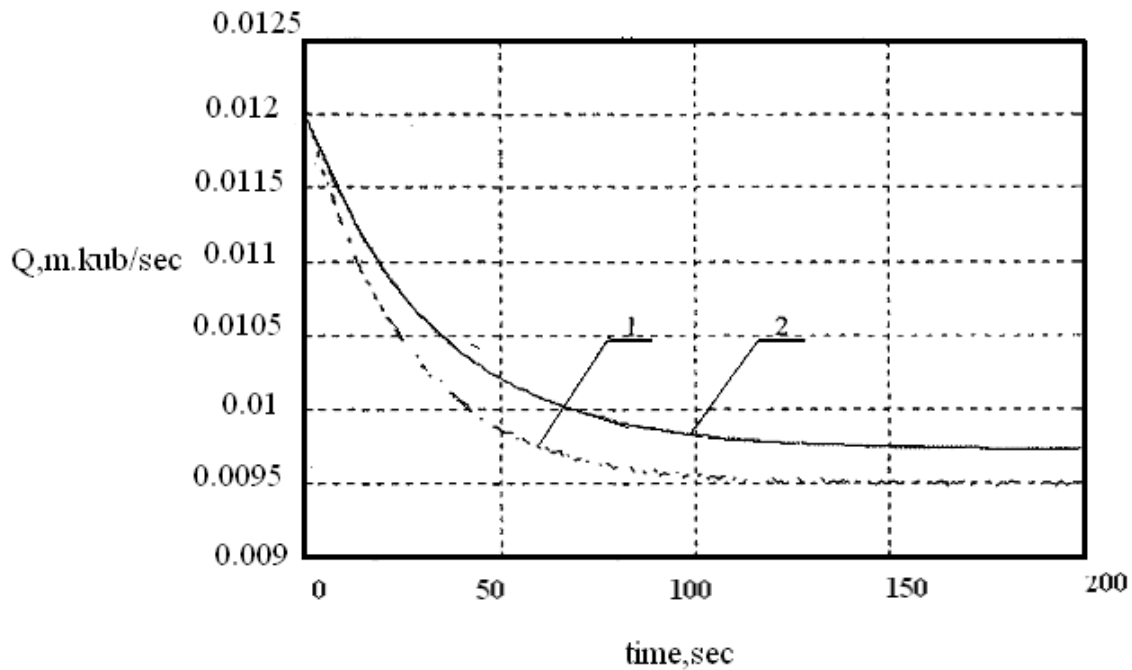


Рис. 14. Графіки зміни витрати рідини в довгому трубопроводі для нелінійної (1) та лінеаризованої (2) моделей

7. Висновки

Максимальні відхилення результатів досліджень лінеаризованої моделі від результатів, держаних для нелінійної моделі, не перевищують 2.5%. Якщо врахувати те, що похибка побудови нелінійної моделі аналітичним методом як правило перевищує 5%, заміна при дослідженнях нелінійної моделі лінійними наближеннями можлива, а результати досліджень можуть бути перенесені на нелінійну модель.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Семенова І. Ю. Математичні моделі МСС. Навчальний посібник. URL: <https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/03/MatModelMSSlast.pdf> (дата звернення 20.09.2025).
2. Нелінійні моделі регресії і їх лінеаризація. URL: https://stud.com.ua/93346/statistika/neliniyni_modeli_regresiyi_linearizatsiya#google_vignette (дата звернення 20.09.2025).
3. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорія автоматичного управління» та «Основи автоматики та управління». URL: <https://studfile.net/preview/5944736/#3> (дата звернення 20.09.2025).
4. Моделювання систем у середовищі MATLAB-SIMULINK: Комп'ютерний практикум. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/a2900f2d-de83-4943-b031-b3fa6f8e7c5b/content> (дата звернення 20.09.2025).

Ідентифікація і моделювання об'єктів та систем безпілотних апаратів: методичні вказівки до виконання курсової роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Системи керування безпілотними апаратами» галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації (G Інженерія, виробництво та будівництво) спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка (G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка) денної та заочної форм навчання/ уклад. Л. О. Гуменюк. Луцьк: ЛНТУ, 2025. 34 с.

Комп'ютерний набір

Л.О. Гуменюк

Редактор

Л.О. Гуменюк

Підп. до друку «__» ____2025 р. Папір офс.
Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 2,125. Обл.-вид. арк. 1.
Тираж 30 прим.

Відділ іміджу та промоції
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – ВІП ЛНТУ

