

**Міністерство освіти і науки України**  
**Луцький національний технічний університет**  
Факультет архітектури, будівництва та дизайну  
Кафедра прикладної математики та механіки

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**  
**ЗА СТУПЕНЕМ ВИЩОЇ ОСВІТИ «МАГІСТР»**

**АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНИХ СТАЛИХ**  
**КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ**

**ANALYTICAL MODELS FOR DETERMINING THE ELASTIC**  
**CONSTANTS OF COMPOSITE MATERIALS**

спеціальність 113 Прикладна математика  
освітня програма Прикладна математика

Виконав: здобувач вищої освіти  
Групи ПРМм-21  
**Костюкевич Тарас Юрійович**

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник:  
к.т.н., доцент  
Фурс Тетяна Василівна

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Кваліфікаційну роботу  
допущено до захисту  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.  
PhD, доцент  
Гарант освітньої програми:  
Самоненко Інга Вікторівна

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Луцьк – 2025 року

# ЛУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет *архітектури, будівництва та дизайну*

Кафедра *прикладної математики та механіки*

Ступінь вищої освіти: *магістр*

Галузь знань: *11 Математика і статистика*

Спеціальність *113 Прикладна математика*

Освітня програма *Прикладна математика*

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Мікуліч О.А.

«\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_\_ р.

## **ЗАВДАННЯ**

### **НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ ЗДОБУВАЧУ ВИЩОЇ ОСВІТИ**

*Костюкевич Тарас Юрійович*

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема кваліфікаційної роботи

*Аналітичні моделі визначення пружних сталих композитних матеріалів /  
Analytical models for determining the elastic characteristics of composite materials*

Керівник роботи: *Фурс Тетяна Василівна*

затверджені наказом закладу вищої освіти від «25» січня 2025 р. № 45/01-02

2. Строк подання здобувачем вищої освіти кваліфікаційної роботи

«\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_\_ р.

3. Вихідні дані до роботи *Наукові публікації за темою кваліфікаційної роботи; теоретичний матеріал на тему деформування та коливань елементів конструкцій; алгоритми розв'язання обернених задач.*

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, що потрібно розробити):

*1. Аналіз проблематики за темою роботи*

*2. Аналітичні моделі деформування та коливань*

*3. Методи та алгоритми розв'язання обернених задач*

*4. Методи розрахунку пружних сталей на основі резонансних коливань*

5. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:

*Рисунки: модель навантаження зразка; модель коливання елемента кільцевого зразка; схема задачі розрахунку пружних характеристик при триточковому згині; розрахункові схеми зразків у задачах навантаження зосередженими силами та моментами; графік значень динамічного модуля пружності*

## 6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис	
		завдання видав	завдання прийняв
<i>1 розділ</i>	<i>Фурс Т. В., доцент кафедри</i>		
<i>2 розділ</i>	<i>Фурс Т. В., доцент кафедри</i>		
<i>3 розділ</i>	<i>Фурс Т. В., доцент кафедри</i>		
<i>Висновки</i>	<i>Фурс Т. В., доцент кафедри</i>		

7. Дата видачі завдання «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_\_ р.

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	<i>Обґрунтування теми</i>	<i>до 25.01.2025</i>	
2.	<i>Огляд літератури із досліджуваної проблеми</i>	<i>до 03.06.2025</i>	
3.	<i>Перший розділ</i>	<i>до 11.09.2025</i>	
4.	<i>Другий розділ</i>	<i>до 17.10.2025</i>	
5.	<i>Третій розділ</i>	<i>до 20.11.2025</i>	
6.	<i>Висновки та пропозиції</i>	<i>до 25.11.2025</i>	
7.	<i>Формування списку використаних джерел</i>	<i>до 29.11.2025</i>	
8.	<i>Формування додатків</i>	<i>до 03.12.2025</i>	
9.	<i>Оформлення ілюстративного матеріалу</i>	<i>до 09.12.2025</i>	
0.	<i>Нормоконтроль</i>	<i>до 13.12.2025</i>	
11.	<i>Інструментальна перевірка на академічний плагіат</i>	<i>до 22.12.2025</i>	<i>Показник запозичень тексту <u>3.08 %</u></i>
12.	<i>Представлення кваліфікаційної роботи магістра до захисту</i>	<i>до 26.12.2025</i>	

Здобувач вищої освіти \_\_\_\_\_ (Костюкевич Т. Ю.)  
(підпис) (прізвище, ініціали)

Керівник кваліфікаційної роботи \_\_\_\_\_ (Фурс. Т.В.)  
(підпис) (прізвище, ініціали)

## АНОТАЦІЯ

Костюкевич Т. Ю. Аналітичні моделі визначення пружних сталих композитних матеріалів. Рукопис.

Кваліфікаційна робота магістра ОП «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика». – Луцький національний технічний університет. Луцьк, 2025.

Кваліфікаційна робота магістра складається з вступу, чотирьох розділів, висновків і пропозицій, списку використаних джерел.

У роботі досліджено проблему визначення механічних характеристик анізотропних композитних матеріалів з урахуванням геометричних особливостей конструктивних елементів та характеру їх деформування. Обґрунтовано використання уточненої теорії згину для призматичних зразків та кілець, що враховує вплив поперечного зсуву та ефектів обтиснення. Розроблено та математично реалізовано чисельно-аналітичні схеми розв'язання обернених задач для визначення модулів пружності та зсуву за результатами статичних випробувань на згин. Створено алгоритм ідентифікації динамічних параметрів композитів на основі аналізу частот власних поперечних і поздовжніх коливань, що забезпечує високу точність при ініціалізації пружних сталей. Експериментальна перевірка та оцінка точності запропонованих моделей проведена з використанням методів математичної статистики на основі експериментальних даних

*Ключові слова:* композитні матеріали, анізотропія, пружні сталі, модуль пружності, модуль зсуву, уточнена теорія згину, обернені задачі, власні коливання, математичне моделювання.

## ABSTRACT

Kostiukevych T. Yu. Analytical models for determining the elastic characteristics of composite material. Manuscript.

Master's thesis in the educational program «Applied Mathematics», specialty 113 «Applied Mathematics». – Lutsk National Technical University. Lutsk, 2025.

The master's thesis consists of an introduction, three chapters, conclusions and recommendations, and a list of references.

The work investigates the problem of identifying mechanical characteristics of anisotropic composite materials, taking into account the geometric features of structural elements and the nature of their deformation. The use of a refined bending theory for prismatic specimens and rings is substantiated, which accounts for the influence of transverse shear and compression effects. Numerical-analytical schemes for solving inverse problems to determine elastic and shear moduli based on the results of static bending tests have been developed and mathematically implemented. An algorithm for identifying the dynamic parameters of composites based on the analysis of natural transverse and longitudinal vibration frequencies has been created, providing high accuracy in identifying elastic constants. Experimental verification and accuracy assessment of the proposed models were carried out using methods of mathematical statistics based on experimental data.

*Keywords:* composite materials, anisotropy, elastic constants, modulus of elasticity, shear modulus, refined bending theory, inverse problems, natural vibrations, mathematical modeling.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	7
РОЗДІЛ 1 .....	10
АНАЛІЗ ПРОБЛЕМАТИКИ ЗА ТЕМОЮ РОБОТИ, ПОСТАНОВКА ЗАВДАНЬ ДОСЛІДЖЕННЯ .....	10
1.1. Аналіз сучасних підходів до класифікації та визначення властивостей композитів .....	10
1.2. Огляд динамічних методів аналізу матеріалів .....	14
1.3. Математичні аспекти визначення пружних сталих анізотропних матеріалів і композитів .....	16
РОЗДІЛ 2 .....	20
АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕФОРМУВАННЯ ТА КОЛИВАНЬ .....	20
2.1. Розробка математичної моделі уточненої теорії згину призматичних елементів з композитних матеріалів .....	20
2.2. Математичні методи уточненого розрахунку механічних параметрів кілець із композитних матеріалів .....	24
2.3. Крайові задачі статички та динаміки для композитних зразків .....	27
РОЗДІЛ 3 .....	30
МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ .....	30
3.1. Чисельно-аналітична схема розрахунку пружних сталих при триточковому згині .....	30
3.2. Алгоритм визначення модуля зсуву шляхом моделювання чистого згину зразка .....	32
3.3. Математичний аналіз поперечних коливань зразків для визначення пружних сталих композитів .....	35
РОЗДІЛ 4 .....	41
МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ПРУЖНИХ СТАЛИХ НА ОСНОВІ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ .....	41
4.1. Аналітико-чисельний розрахунок поздовжніх коливань композитних систем .....	41
4.2. Обчислювальна модель визначення пружних сталих полімерної матриці за даними резонансних коливань .....	43
4.3. Статистична обробка даних та оцінка похибок моделі .....	45
ВИСНОВКИ .....	49
Список використаних джерел .....	51

## ВСТУП

### *Актуальність теми*

Успішне та ефективне застосування композитних матеріалів у різних секторах промисловості та високотехнологічних галузях (машинобудування, приладобудування, електротехніка, хімічна промисловість) вимагає отримання максимально повної та достовірної інформації про їхні властивості й характеристики. В процесі експлуатації елементи конструкцій піддаються дії різного виду силових впливів.

Одними з найважливіших механічних характеристик матеріалу є його пружні константи: модуль Юнга  $E$ , модуль зсуву  $G$  та коефіцієнт Пуассона  $\mu$ . Значення модулів  $E$  і  $G$  входять у більшість рівнянь теорії пружності, які пов'язують напруження з деформаціями (переміщеннями), і тому вони є незамінними в теоретичних розрахунках. Ці параметри необхідні при проектуванні конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість; в розрахунках, пов'язаних з аналізом вібрацій та ударних навантажень; при визначенні температурних та залишкових напружень.

Пружні сталі залежать від низки факторів: структури та складу матеріалу, технологічних режимів отримання матеріалу та виготовлення й обробки виробів. Отже, зміна значень модуля Юнга  $E$ , модуля зсуву  $G$  та коефіцієнта Пуассона  $\mu$  за певних умов у багатьох випадках може слугувати індикатором зміни структури та складу матеріалу, а також впливу зовнішніх факторів. Тому знання і використання методик визначення пружних сталей композитних матеріалів має велике значення в інженерній діяльності.

*Мета роботи:* побудова ефективної чисельно-аналітичної схеми визначення повного набору ефективних пружних сталей для композитного матеріалу зі складною геометрією періодичності та оцінка точності отриманих результатів.

Для досягнення сформульованої мети у роботі виконано наступне:

1. Проаналізовано сучасні підходи до класифікації композитів та існуючі методи ідентифікації їхніх механічних властивостей.

2. Розроблено математичну модель уточненої теорії згину для призматичних елементів та анізотропних кілець, що враховує вплив поперечного зсуву та обтиснення.

3. Побудовано чисельно-аналітичну схему розв'язання оберненої задачі для визначення модулів пружності та зсуву за результатами триточкового та чистого згину.

4. Досліджено математичний апарат аналізу власних поперечних і поздовжніх коливань для визначення динамічних характеристик композитних систем.

5. Проведено статистичну обробку та оцінку похибок отриманих моделей на прикладі експериментальних даних.

*Об'єкт дослідження:* процеси деформування та коливань елементів конструкцій, виготовлених з анізотропних композитних матеріалів.

*Предмет дослідження:* аналітичні моделі, обчислювальні алгоритми та математичні підходи для ідентифікації пружних сталей (модуля Юнга, модуля зсуву) з урахуванням геометричних особливостей і типу навантаження.

*Методологія досліджень.* У роботі використано методи теорії пружності анізотропного тіла, апарат диференціальних рівнянь для опису згину та коливань, метод Фур'є для аналізу динамічних процесів, а також методи математичної статистики для верифікації результатів.

*Наукова новизна одержаних результатів* полягає у розробці уточнених моделей згину анізотропних призматичних та кільцевих елементів, які, на відміну від класичних теорій, враховують поперечний зсув, що дозволяє суттєво підвищити точність ідентифікації пружних сталей композитів.

*Практичне значення* результатів кваліфікаційної роботи полягає у створенні придатних для інженерної практики алгоритмів обробки результатів статичних та резонансних випробувань, що забезпечують точність визначення модулів пружності з похибкою не більше 1%.

*Одержані результати можуть бути використані* у подальших наукових дослідженнях та практичній діяльності в області технології одержання композитів з прогнозованими властивостями.

*Особистий внесок здобувача.* Кваліфікаційна робота магістра є самостійно виконаним дослідженням.

*Об'єм та структура роботи.* Кваліфікаційна робота магістра складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Об'єм роботи становить 52 сторінки. Робота містить 9 рисунків, 3 таблиці та 24 найменування використаної літератури.

У процесі підготовки магістерської кваліфікаційної роботи застосовувалися технології штучного інтелекту як допоміжний інструментарій. Зокрема, для стилістичної правки та структурування тексту використано ChatGPT-4o та Gemini 3.0. Автор несе повну відповідальність за зміст роботи: усі наукові положення та висновки є результатом самостійного дослідження, а згенеровані матеріали пройшли ретельну верифікацію на предмет точності та відсутності плагіату.

## РОЗДІЛ 1

### АНАЛІЗ ПРОБЛЕМАТИКИ ЗА ТЕМОЮ РОБОТИ, ПОСТАНОВКА ЗАВДАНЬ ДОСЛІДЖЕННЯ

#### 1.1. Аналіз сучасних підходів до класифікації та визначення властивостей композитів

До композитних матеріалів (КМ) відносять штучно створені багатокомпонентні системи, які не трапляються в природі, а є штучно створені. Такі матеріали характеризуються низкою визначальних ознак: вони складаються щонайменше з двох фаз, що різняться хімічним складом і структурою та мають чітко виражену межу розділу; наділені новими властивостями, які відрізняються від властивостей складових компонентів; є неоднорідними на мікрорівні та однорідними на макрорівні; склад, форма і просторовий розподіл компонентів задаються на етапі проєктування [1].

З геометричної точки зору складові композиції є різнорідними. Компонент, що утворює неперервне середовище в усьому об'ємі матеріалу, розглядається як матриця, тоді як компонент із дискретним розподілом трактується як армуючий (зміцнюючий) елемент [2].

У ролі матричних матеріалів можуть використовуватися метали та їх сплави, органічні й неорганічні полімери, керамічні та інші системи. Армуюча фаза, зазвичай, представлена дрібнодисперсними порошковими частинками або волокнистими елементами різної природи. За типом армування композитні матеріали поділяють на дві базові групи – дисперснозміцнені та волокнисті, які істотно відрізняються як структурною організацією, так і механізмами формування високих пружних і міцнісних характеристик.

У дисперснозміцнених композитах основне навантаження сприймається матрицею, всередині якої наявність великої кількості практично нерозчинних частинок другої фази формує структуру, що ефективно протидіє пластичній деформації. Як показують дослідження [2], у цих деформаціях завдяки

дислокаціям, зсув атомів в сусіднє положення відбувається не одночасно по всій поверхні ковзання, а розтягується в часі. Таке поступове ковзання за рахунок зміщень атомів в області дислокацій не вимагає значних напружень, що і проявляється при випробуванні пластичних матеріалів. Зміцнення таких матеріалів полягає в створенні в них структури, яка гальмує рух дислокацій [2]. Найбільш ефективно гальмування їх руху забезпечують частинки другої фази – карбіди, нітриди, оксиди, бориди, які вирізняються високими значеннями міцності, модуля пружності та температури плавлення.

У волокнистих композитах матричне середовище, зазвичай пластичне, підсилюється високоміцними волокнами, дротом, ниткоподібними монокристаллами, сітками, тканинами або папером.

Концепція створення волокнисто-армованих структур полягає не у повному усуненні пластичної деформації матриці, а в забезпеченні ефективної передачі навантаження на волокна під час деформування, з використанням їх високих пружних і міцнісних параметрів.

З крихких речовин можна одержати матеріали з високо відтвореною міцністю в основному тільки в вигляді волокон [2]. Це зумовлене тим, що волокна менш чутливі до дефектів кристалічної будови, ніж монолітні вироби. Армуючі волокна, які використовуються у створенні композитів, повинні відповідати комплексу експлуатаційних і технологічних вимог, зокрема щодо міцності, жорсткості, густини, стабільності властивостей у заданому температурному діапазоні та хімічної стійкості.

Теоретична міцність матеріалів  $\sigma_M$  зростає зі збільшенням модуля пружності  $E$  і поверхневої енергії  $\gamma$  речовини та зменшується зі збільшенням відстані між сусідніми атомними площинами  $a_0$  [2]

$$\sigma_M = \left( \frac{\gamma E}{a_0} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

Тобто, високоміцні тверді тіла повинні мати високі модулі пружності і поверхневу енергію і можливо високе число атомів в одиниці об'єму. Цим вимогам задовольняють берилій, бор, вуглець, азот, алюміній, кремній. При створенні волокнистих композитів застосовують вуглецеві, борні, органічні й

металеві волокна, а також нитковидні кристали ряду карбідів, оксидів, нітридів та ін. Найбільший питомий модуль пружності (120-335 МПа м<sup>3</sup>/кг) мають вуглець, бор, берилій, карбід і нітрид кремнію [3].

Якщо за класифікаційну ознаку прийняти матеріал матриці, то виділяють три основні класи композитів: з металевою, полімерною та керамічною матрицями. При цьому лише композити з полімерною матрицею мають усталені назви, що поєднують тип матриці та армуючого компонента: вуглепластики, склопластики, боропластики, металопластики. Окрему групу становлять гібридні композити, в яких використовуються волокна двох і більше типів, наприклад, вуглесклопластики.

Найбільшого поширення набули композити з полімерною матрицею, що зумовлює їх вибір як об'єкта даного дослідження. Для волокнистих полімерних композитів характерний рівномірний розподіл високоміцних і високомодульних волокон у пластичній матриці, причому їх об'ємна частка може досягати 75%.

Ще однією визначальною рисою волокнистої композиційної структури є анізотропія властивостей, зумовлена переважаючою орієнтацією волокон у певних напрямках.

Існує низка підходів до обчислення пружних сталих композитних матеріалів за відомими характеристиками їх компонентів. Прямий метод [4] ґрунтується на розв'язанні задач напружено-деформованого стану для неоднорідного композитного середовища за різних простих граничних умов. На основі усереднених напружень і деформацій визначають ефективні модулі пружності, замінюючи реальний композит еквівалентним однорідним середовищем. Реалізація такого підходу можлива лише для повністю заданої фазової геометрії і потребує використання складних чисельних методів. Зокрема, у роботі [5] цей підхід реалізовано для гексагонального розміщення волокон, а в [6] – для кубічної структури круглих волокон. Водночас такі моделі не враховують статистичні варіації в розташуванні волокон, що можуть впливати на ефективні пружні характеристики.

Другий підхід базується на наближеній апроксимації поля напружень для регулярної фазової структури композиту, яка моделюється як комбінація простих

елементів, з'єднаних паралельно або послідовно [7]. У межах цього підходу припускається або однорідність поля деформацій, або матеріал представляється у вигляді стержневої форми, або ж набору різнорідних шарів.

Третій підхід до визначення ефективних пружних сталих спирається на варіаційні методи теорії пружності. У цьому випадку ефективні модулі пружності виражаються через пружну енергію, для якої знаходять верхні та нижні оцінки за умови спрощених усереднених полів напружень і деформацій. Отже, шукані значення пружних сталих лежать у певному інтервалі між цими оцінками. Застосування таких методів в інженерній практиці доцільне переважно за відсутності альтернативних підходів.

В роботі [8] для зручності ефективні модулі позначають індексами II і  $\perp$ . Перший відноситься до модуля пружності вздовж волокон, другий – поперек волокон. Індеси модуля зсуву  $G$  визначають площину, в якій відбувається зсув. Наприклад,  $G_{yy}^*$  - ефективний модуль зсуву для деформацій в площині, перпендикулярній до волокон;  $\mu_{xy}^*$  – коефіцієнт Пуассона при розтягу в поздовжньому напрямку.

Між коефіцієнтом Пуассона та модулем пружності існують співвідношення:

$$\mu_{xy}^* / E_{II}^* = \mu_{yx}^* | E_{\perp}^* . \quad (1.2)$$

У даній роботі ефективні модулі можуть бути оцінені за такими формулами:

$$E_{II}^* = V_B E_B + V_m E_m; \quad \mu_{yy}^* = V_B \mu_B + V_m \mu_m; \quad (1.3)$$

$$1/E_{\perp}^* = V_B/E_B + V_m/E_m; \quad 1/G_{xy}^* = V_B/G_B + V_m/G_m. \quad (1.4)$$

Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона в напрямку армування для композитів із вмістом високомодульних волокон, що перевищує критичне значення, можуть також визначатися за законом адитивності [9]:

$$E_{x_{1+2}} = E_m V_m + E_{a_1} V_{a_1} + E_{a_2} V_{a_2}; \quad (1.5)$$

$$\mu_{yx_{1+2}} = \mu_m V_m + \mu_{a_1} V_{a_1} + \mu_{a_2} V_{a_2}, \quad (1.6)$$

де  $V_a$  – вміст зміцнюючої фази в кожному з двокомпонентних матеріалів.

У роботі [10] введено коефіцієнт реалізації модуля пружності  $K_E$ , який який дає змогу кількісно оцінити вплив окремих факторів геометрії та розмірів волокон, їх поперечного перерізу, шорсткості, наявності обривів, довжини дискретних волокон, а також дисперсії модуля пружності й відносного видовження – на ефективну реалізацію пружних властивостей композиту. Для високонаповнених систем із паралельною орієнтацією волокон цей коефіцієнт визначається за рівняннями:

$$K_E = \frac{E_x}{V_a E_a} ; \quad (1.7)$$

$$K_E = k_m \cdot k_l \cdot k_w \cdot k_u \cdot k_{VE} , \quad (1.8)$$

де  $k_m$ ,  $k_E$ ,  $k_w$ ,  $k_u$ ,  $k_{VE}$  – коефіцієнти, що враховують вплив взаємодії компонентів, дисперсії міцності та модуля пружності, дискретності й розорієнтації волокон, а також пористості матриці на ступінь реалізації модуля пружності.

Композити, сформовані з волокон різної природи та геометрії, характеризуються не лише широким діапазоном фізико-механічних властивостей, а й можливістю їх цілеспрямованого регулювання, зокрема жорсткості, міцності та в'язкості руйнування. Крім того, для таких матеріалів типовим є прояв синергетичного ефекту, що полягає в узгодженій дії кількох факторів у одному напрямку [2].

## 1.2. Огляд динамічних методів аналізу матеріалів

Використання динамічних методів аналізу дозволяє встановити зв'язок між експериментальними даними та реологічними характеристиками матеріалів, що є критичним для адекватної оцінки їхньої механічної поведінки. Зокрема, для розрахунку модулів пружності та декременту згасання при поздовжніх коливаннях ефективним є резонансний метод [11].

Вивчення полімерів у режимі сталих вимушених коливань дозволило виявити значущу залежність їхніх властивостей від частоти та температури. Встановлено принцип температурно-частотної еквівалентності: зростання температури впливає на матеріал аналогічно до зниження частоти навантаження [12]. Крім того, логарифмічний декремент коливань композитів (зокрема полімерних) суттєво залежить від амплітуди напружень, виду напруженого стану та температурних умов.

У науковій практиці розрізняють кілька видів модулів пружності, хоча цей поділ значною мірою є умовним через постійну швидкість деформування в реальних умовах. Так як деформування на практиці ведеться з визначеною швидкістю, то поділ модуля пружності на статичний і динамічний має цілком умовний характер.

Статичний модуль пружності: визначається як тангенс кута нахилу дотичної  $tg\alpha$  до діаграми «напруження–деформація»  $\sigma=f(\varepsilon)$  у початковий період навантаження за умови стандартної швидкості навантаження [13].

Миттєвий модуль пружності: відповідає максимальному значенню нахилу діаграми  $\sigma=f(\varepsilon)$  при надшвидкому деформуванні.

Динамічний модуль пружності  $E_{дин.}$  займає проміжне значення між статичним і миттєвим. Його розраховують за власною або резонансною частотою коливань зразка. Зі зростанням частоти динамічний модуль асимптотично наближається до миттєвого.

Вплив швидкості деформування. Форма діаграми  $\sigma=f(\varepsilon)$  та механічні показники полімерних матеріалів суттєво корелюють зі швидкістю навантаження. Підвищення температури або сповільнення деформації призводять до зниження міцності та твердості. Натомість при високих швидкостях діаграма трансформується у лінійну пропорційну залежність, що відповідає закону Гука, а модуль пружності зростає.

Різниця між показниками полімерів при статичному та динамічному навантаженнях може відрізнятись у два рази і більше. Динамічні випробування

охоплюють широкий діапазон частот (які можуть відрізнятися на кілька порядків), що дозволяє комплексно оцінити пружні та демпфуючі властивості.

### 1.3. Математичні аспекти визначення пружних сталих анізотропних матеріалів і композитів

Математичне моделювання механічної поведінки композитних матеріалів базується на визначенні співвідношень, що пов'язують тензори напружень  $\sigma$  та деформацій  $\varepsilon$ . Визначення пружних сталих є однією з ключових задач ідентифікації параметрів математичної моделі матеріалу [14].

Для ізотропних матеріалів конститутивні рівняння (узагальнений закон Гука) повністю визначаються двома незалежними інваріантами – модулем Юнга  $E$  та коефіцієнтом Пуассона  $\mu$ . Однак, для анізотропних композитних середовищ задача суттєво ускладнюється. У загальному випадку анізотропії зв'язок описується тензором модулів пружності четвертого рангу  $C_{ijkl}$ :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (1.9)$$

Такий підхід вимагає знаходження значно більшої кількості незалежних компонент (до 21 для триклинної симетрії, 9 для ортотропних матеріалів) [15].

З точки зору прикладної математики, визначення компонент тензора пружності належить до класу обернених задач механіки деформівного твердого тіла. Особливістю таких задач є те, що вони часто є некоректно поставленими, а їх розв'язок може бути нестійким до малих збурень у вхідних даних, тобто характеризується високою чутливістю до похибок експериментальних вимірювань [16].

Для забезпечення єдиності та достовірності розв'язку необхідне застосування методів регуляризації (наприклад, метод Тихонова) при мінімізації функціоналу нев'язки між експериментальними та модельними даними:

$$J(C) = \|A(C) - u_\delta\|^2 + \alpha\Omega(C) \quad (1.10)$$

де  $\alpha$  – параметр регуляризації,  $\Omega(C)$  – стабілізуючий функціонал [16].

Існуючі підходи до визначення параметрів поділяють на дві групи, кожна з яких спирається на свій клас диференціальних рівнянь.

Статичні методи базуються на розв'язанні крайових задач для рівнянь рівноваги при відомих навантаженнях (розтяг, стиск, згин, кручення). Експериментальні залежності обробляються з використанням лінійних моделей, що дозволяє визначити ізотермічні модулі [17].

Проте, неоднорідність по товщині матеріалу впливає на напружено-деформований стан (НДС), що робить класичні аналітичні розв'язки (наприклад, балки Ейлера-Бернуллі) недостатньо точними для композитів із низьким модулем зсуву. Це вимагає застосування уточнених математичних моделей (наприклад, теорії Тимошенка або скінченно-елементних моделей високого порядку), здатних коректно описувати поля напружень [17]. Дослідження показують, що ігнорування деформацій зсуву може призводити до похибок в оцінці модулів до 20%.

Динамічні методи зводяться до задач на власні значення або аналізу хвильових рівнянь.

Резонансні методи (частота коливань  $10^3 \dots 10^6$  Гц) полягають у знаходженні власних частот коливань  $\omega_n$ , які є власними числами відповідного диференціального оператора і функціонально залежать від пружних сталей [18]. Ультразвукові методи (частота коливань  $10^3 \dots 10^8$  Гц) базуються на розв'язанні рівнянь Крістоффеля:

$$\det|C_{ijkl}n_jn_l - \rho v^2 \delta_{ik}| = 0, \quad (1.11)$$

де  $n$  – вектор нормалі хвильового фронту,  $v$  – фазова швидкість,  $\rho$  – густина [1].

Внутрішня структура матеріалу, дефекти та анізотропія призводять до дисперсії та дисипації енергії хвиль. Математично це описується введенням комплексних модулів пружності  $C^* = C' + iC''$ , де уявна частина відповідає за демпфуючі властивості.

Теоретичні дослідження ґрунтуються на представленні модулів пружності як других похідних від функції питомої потенціальної енергії деформації  $W$ :

$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$ . Порівняння теоретичних оцінок з експериментальними даними для тонкостінних конструкцій (метод триточкового згину) демонструє високу точність за умови коректного вибору граничних умов [18].

У роботі [19] наведено детальний аналіз методів визначення пружних сталих анізотропних матеріалів, а також розглянуто задачі розрахунку напружено-деформованого стану тонкостінних призматичних конструкцій із введенням коефіцієнтів зсуву для окремих типів профілів. В дослідженні [20] запропоновано уточнену методику визначення пружних і міцнісних характеристик композитів за результатами випробувань на триточковий згин, при цьому показано, що вибір розрахункової моделі суттєво впливає на оцінку модуля зсуву. Зокрема, для певних матеріалів отримані значення можуть відрізнятись до 20 % порівняно з результатами, отриманими на основі класичної моделі типу С. Тимошенка.

Дослідження роботи [21] присвячені аналізу впливу дисперсного армування на модулі пружності та зсуву однонаправлених склопластиків. Експериментальні випробування проводилися при різних схемах навантаження, включаючи кручення та згин, а також у режимі повзучості, із використанням відомих аналітичних залежностей для прогину балки [21].

Таким чином, задача визначення пружних сталих композитів трансформується з суто експериментальної в комплексну математичну проблему ідентифікації параметрів операторних рівнянь. Необхідність використання спеціалізованих методів випробувань разом із застосуванням уточнених динамічних моделей дозволяє мінімізувати похибки та отримати достовірні характеристики матеріалів.

Метод триточкового згину авторами [22] був використаний для випробувань на довготривалу міцність літійового ситалу СО115М при кімнатній температурі. Одержано величини модуля пружності і руйнівного навантаження з похибкою до 1%. Визначення таким способом коефіцієнта Пуассона дає можливість визначити і модуль зсуву.

Порівняльні випробування зразків на міцність при чистому (чотириточковому) і поперечному (триточковому) згинах зразків постійного поперечного перерізу. Разом з тим, в роботі використовуються класичні формули опору матеріалів, що пов'язано з строгою регламентацією довжини зразків.

Теоретичні й експериментальні оцінки пружних характеристик еластомерів [23], їх величини беруться як частинні похідні від функції питомої потенціальної енергії деформації. Значення цих похідних при малих деформаціях порівнюються з теоретичними значеннями, виведеними з урахуванням ефекту стисливості. Спостерігається хороше співпадіння теоретично запропонованих і експериментально отриманих даних.

## РОЗДІЛ 2

### АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕФОРМУВАННЯ ТА КОЛИВАНЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

#### 2.1. Розробка математичної моделі уточненої теорії згину призматичних елементів з композитних матеріалів

Для визначення модуля пружності композитного матеріалу на практиці часто користуються випробуваннями на трьохточковий згин прямих зразків [19-20]. Ці випробування досить прості у виконанні і дозволяють дуже швидко прогнозувати роботу матеріалу в умовах складного напруженого стану. Але для композитних матеріалів з великими відношеннями модулів  $E_x/G_{xz}$ , на вертикальні переміщення  $W_{max}$  суттєво впливає поперечний зсув. Модуль Юнга у цьому випадку можна визначити за формулою:

$$E_\phi = \frac{Pl^3}{48JW_{max}}, \quad (2.1)$$

де  $W_{max}$  – прогин вільно опертого зразка під дією сили  $P$ , яка прикладена посередині прольоту довжиною  $l$ ;  $J$  – момент інерції перерізу зразка.

Але модуль Юнга, визначений таким способом, є фіктивним, так як включає в себе також вплив поперечного зсуву. Тому згідно даних [19] співвідношення між фіктивним модулем пружності  $E_\phi$  і реальними модулями  $E_x$  і  $G_{xz}$  візьмемо у вигляді:

$$\frac{1}{E_\phi} = \frac{1}{E_x} + \frac{k}{G_{xz}} \left( \frac{2h}{l} \right)^2 \quad (2.2)$$

Коефіцієнт  $k = 1 \div 1,5$  вибирається залежно від моделі зразка.

$E_x$  – модуль пружності в поздовжньому напрямі,  $G_{xz}$  – модуль зсуву в поперечних перерізах зразка.

Для побудови математичної моделі уточненої теорії згину зразка скористаємось деякою методикою [24]. Побудуємо схематично модель

навантаження зразка (рисунок 2.1). Прийmemo, що горизонтальне  $U(x, z)$  і вертикальне  $W(x, z)$  переміщення зразка можна записати у вигляді рядів по координаті  $z$ :

$$U(x, z) = u(x) + \sum_{i=1}^3 u_i(x) \cdot z^i \quad (2.3)$$

$$W(x, z) = w(x) + \sum_{i=1}^4 w_i(x) \cdot z^i$$

Тут  $u(x)$ ,  $w(x)$  – горизонтальне і вертикальне переміщення середньої лінії зразка;

$u_i(x)$ ,  $w_i(x)$  – невідомі функції, які знаходяться з граничних умов і рівнянь рівноваги.

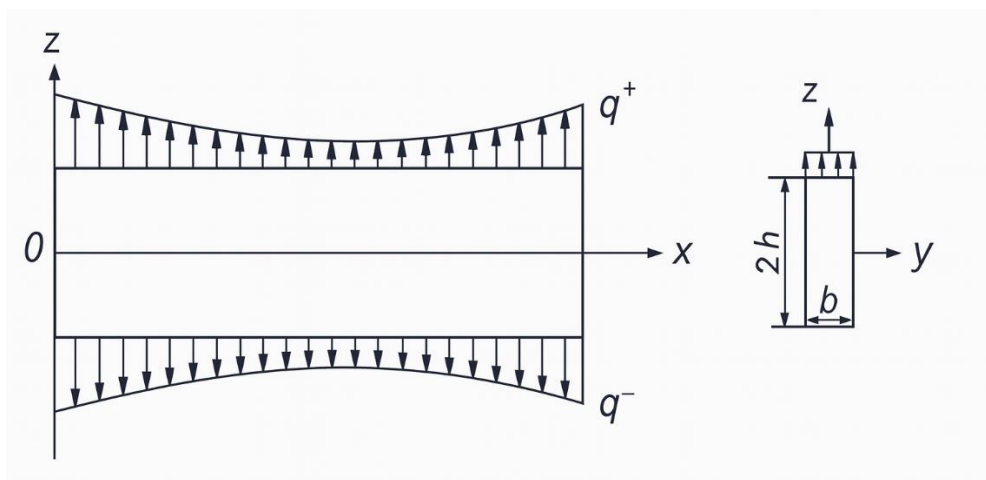


Рисунок 2.1 – Модель навантаження зразка

Будемо користуватись спрощеними рівняннями закону Гука для ортотропного тіла, нехтуючи впливом ефекту Пуасона на величини нормальних  $\sigma_x$  і  $\sigma_z$  напружень, а також впливом обтіснення на дотичне напруження  $\tau_{xz}$ :

$$\sigma_x = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot E_x ; \quad \tau_{xz} = G_{xz} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) ; \quad (2.4)$$

$$\sigma_z = EZ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{3z}{2h} \left( 1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \cdot q_1 + q_2,$$

де  $q_{1,2} = \frac{1}{2}(q^+ \pm q^-)$ ;

$E_z$  – модуль пружності в поперечному напрямку;

$2h$  – висота перерізу зразка;

$q^\pm(x)$  – нормальне навантаження на верхній і нижній гранях зразка.

З третього рівняння закону Гука знаходимо:

$$w_{[x,z]} = \int \frac{\sigma_z}{E_z} dz = w_{(x)} + \frac{3q_1}{4E_z} \left( \frac{z}{h} - \frac{z^3}{6h^3} \right) z + \frac{q_2 \cdot z}{E_z} . \quad (2.5)$$

Задовільняючи дотичне напруження  $\tau_{xz}$  нульовим граничним умовам на верхній і нижній грані зразка  $-(\tau_{xz} = 0 \text{ при } z = \pm h)$ , одержуємо систему рівнянь:

$$u_1 + \frac{dw}{dx} + 2u_2 h + 3u_3 h^2 = 0 ; \quad (2.6)$$

$$u_1 + \frac{dw}{dx} - 2u_2 h + 3u_3 h^2 = 0,$$

З якої знаходимо:  $u_2 = 0$  ;  $u_1 + \frac{dw}{dx} = -3u_3 h^2$  .

Підставивши знайдені вирази в формули для  $\tau_{xz}$ , будемо мати:

$$\tau_{xz} = -3h^2 G' \cdot u_3 \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (2.7)$$

Користуючись виразом для поперечної сили  $Q = \int_{-h}^h \tau_{xz} \cdot dz$  , знаходимо вираз для компоненти переміщення  $u_3(x)$  :

$$2u_3 \cdot G' h^2 = -\frac{Q(x)}{A} . \quad (2.8)$$

Тут  $A = 2h \cdot b$  – площа поперечного перерізу зразка.

На основі співвідношень (2.7) і (2.8) знаходимо остаточні вирази для  $\tau_{xz}$  і  $U(x, z)$ :

$$-\tau_{xz} = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \quad (2.9)$$

$$U(x, z) = u(x) - z \frac{dw}{dx} + \frac{3Q(x)}{2AG'} \left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) z$$

Проінтегруємо по  $z$  рівняння рівноваги в напруженнях:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (2.10)$$

одержимо рівняння рівноваги для зразка в зусиллях:

$$\frac{dN}{dx} = 0; \quad \frac{dM}{dx} = Q(x); \quad dQ/dx = -2q_1(x), \quad (2.11)$$

де  $N(x) = \int_{-h}^h \sigma_x dz$  – поздовжня сила,  $M(x) = \int_{-h}^h G_x z dz$  – згинний момент, які діють в поперечних перерізах зразка.

Використовуючи рівняння (2.11), а також залежності (2.4) – (2.8), одержуємо систему диференціальних рівнянь для композитного зразка:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0; \quad E \cdot J \frac{d^4 w}{dx^4} = 2q_1 - 2\varepsilon q_1'' \quad (2.12)$$

$$\text{де } \varepsilon = 0,4 \frac{E}{G_{xz}} h^2, \quad J = \frac{2}{3} B h^3.$$

Остаточний вираз для нормального напруження  $\sigma$  буде наступним:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} z + \frac{\varepsilon z}{4J} \left(1 - \frac{5z^2}{3h^2}\right) Q'(x), \quad (2.13)$$

$$\text{де } N = 2Eh \frac{du}{dx}, \quad Q(x) = \frac{5}{6} AG' \left(\frac{dw}{dx} + \gamma\right),$$

$$M(x) = EJ \frac{d\gamma}{dx} = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} - 2\varepsilon q_1(x); \quad \gamma = \frac{1}{J} \int_{-h}^h Uz dz.$$

У випадку, коли  $q^+ = q^-$ , зразок знаходиться в стані поперечного розтягу-стиску:  $w = 0$ ;  $N = 0$ ;  $M = 0$ .

З усіх формул залишається тільки формула (2.5) для вертикального переміщення:

$$W = q_2 z / E_z. \quad (2.14)$$

Формулу (2.14) можна використати для визначення поперечного модуля пружності:

$$E_z = \frac{h}{W_{max}} \cdot q_z. \quad (2.15)$$

## **2.2. Математичні методи уточненого розрахунку механічних параметрів кілець із композитних матеріалів**

В інженерії деякими елементами конструкцій є оболонки і кільця з композитних матеріалів. Методика дослідження таких матеріалів у вигляді плоских зразків не дає достатньо достовірних (коректних) результатів. Тому необхідно розробляти уточнені (скориговані) алгоритми щодо випробувань зразків у вигляді кілець або їх частин – сегментів.

Зазвичай у подібних випадках використовують класичні формули опору матеріалів. Однак, зважаючи на відносну товщину зразків і ступеня анізотропії матеріалу, використання цих формул може привести до великих похибок у визначенні модулів пружності як в напрямку намотки, так і в радіальному напрямку. Тому, зважаючи на такі міркування, виникає необхідність у розробці нових моделей і методів розрахунку на основі уточнених рівнянь згину циліндричних оболонок і кілець. Такі рівняння повинні враховувати ступінь анізотропії матеріалу, відносну товщину елемента, а також такі додаткові фактори як деформації поперечного зсуву і обтиснення.

Відомо, що розрахунок елементів конструкцій з матеріалу, який має криволінійну анізотропію, має певні труднощі [24]. Вони характеризуються складністю диференціальних рівнянь, котрі необхідно інтегрувати. Одними з таких елементів є композитні кільця, одержані способом намотування.

Розрахункові формули для таких елементів відзначаються складністю і їх практично неможливо використати для інженерних розрахунків при інших видах навантажень.

Розробимо на основі математичного апарату алгоритм визначення механічних параметрів кілець з композитного матеріалу, що характеризуються анізотропією властивостей. Нехай візьмемо за модель схему навантаження елемента кільцевого зразка, побудова якої приведена на рисунку 2.2.

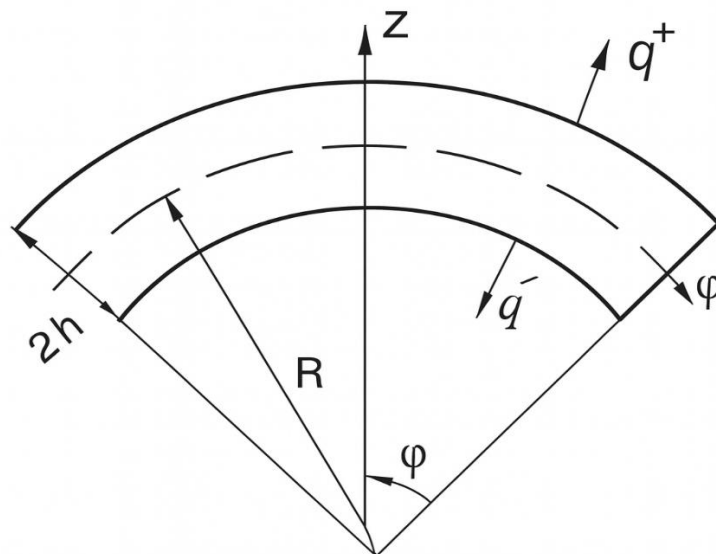


Рисунок 2.2 – Модель навантаження елемента кільцевого зразка

Будемо виходити з гіпотез, котрі запропоновані в [17]. У відповідності з цими гіпотезами подамо переміщення точок композитного кільця в тангенціальному і радіальному напрямках у вигляді скінченних рядів по поперечній координаті:

$$\begin{aligned} W(\varphi, z) &= w(\varphi) + \sum_{i=1}^4 w_i(\varphi) z^i \\ U(\varphi, z) &= u(\varphi) + \sum_{i=1}^3 u_i(\varphi) z^i; \end{aligned} \quad (2.16)$$

де  $u_i(\varphi)$  і  $w_i(\varphi)$  – це невідомі коефіцієнти розкладу переміщень, що частково обчислюються з граничних умов на зовнішній поверхні бруса одиничної ширини:

$$\tau_{\varphi z} = 0, \sigma_z = q^\pm, \text{ при } z = \pm h. \quad (2.17)$$

Тут  $\sigma_z$  – нормальне напруження в поперечному напрямку кільця;

$q^\pm(\varphi)$  – нормальне навантаження на зовнішній поверхні бруса;

$\tau_{\varphi z}, G'$  - дотичне напруження і модуль зсуву в перерізах, перпендикулярних до середньої лінії бруса;

$R$  – радіус кривини середньої лінії кільця;

$2h$  – товщина кільця.

В даному випадку, при визначенні компонентів переміщень  $U(\varphi, z)$  і  $W(\varphi, z)$  скористаємось спрощеними співвідношеннями закону Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу [24]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} + \left( \frac{d\omega}{d\varphi} - U \right) \frac{1}{R+z} &= \frac{\tau_{\varphi z}}{G'} \\ \left( W + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{R+z} &= \frac{\sigma_{\varphi}}{E}; \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E'} \end{aligned} \quad (2.18)$$

тут приймається:

$$\sigma_z = \frac{3z}{2h} \left( 1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) q_1 + q_2;$$

$E, E'$  -модулі Юнга в дотичному і нормальному напрямках;

$$q_{1,2} = \frac{1}{2} (q^+ \pm q^-).$$

Якщо підставити (2.16) в (2.18) і, задовільнити їх умовами (2.17), будемо мати:

$$w_1 = \frac{q_2}{E'}, \quad w_2 = \frac{3}{4} \frac{q_1}{E'h}; \quad w_3 = 0; \quad w_4 = \frac{-q_1}{8E'h^3}.$$

$$u_1 = \left( u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \frac{1}{R} - \left( 3 - \frac{h^2}{R^2} \right) h^2 u_3; \quad u_2 = \frac{-h^2}{R} \cdot u_3;$$

Таким чином, вирази для переміщень  $W(\varphi, z)$  і  $U(\varphi, z)$  кільця можна представити в такому вигляді:

$$\begin{aligned} W(\varphi, z) &= w(\varphi) + \frac{3}{4} z \left( \frac{z}{h} - \frac{z^3}{6h^3} \right) \frac{q_1}{E'} + z \frac{q_2}{E'}; \\ U(\varphi, z) &= u \left( 1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{z}{R} \frac{dw}{d\varphi} - z \left( 3 + \frac{z}{R} - \frac{z^2}{h^2} - \frac{h^2}{R^2} \right) h^2 u_3. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Аналіз виразів (2.19) для переміщень доводить, що перехід до гіпотези плоских перерізів цілком можливий, якщо в цих рівняннях прийняти  $u_3(\varphi)=0$  і  $\frac{q_1}{E'}=0$ .

### 2.3. Крайові задачі статички та динаміки для композитних зразків

У рівняннях для переміщень  $U(z, \varphi)$  і  $W(z, \varphi)$  невизначеними залишаються три складові  $u(\varphi)$ ,  $w(\varphi)$ ,  $u_3(\varphi)$ . Щоб їх визначити скористаємось рівняннями рівноваги для напружень [23], що записані в циліндричній системі координат:

$$\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + (R + z) \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \sigma_z - \sigma_\varphi = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + (R + z) \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2\tau_{\varphi z} = 0.$$

Для цього потрібно проінтегрувати систему рівнянь (2.20) по координаті  $z$  від  $-h$  до  $h$ . Щоб отримати ще одне рівняння, домножимо перше рівняння (2.20) на  $z$  і ще раз візьмемо інтеграл. При цьому використаємо формулу інтегрування по частинах та врахуємо умови (2.17):

$$\int_{-h}^h z \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} dz = \int_{-h}^h \tau_{\varphi z} dz. \quad (2.21)$$

В результаті отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь рівноваги, які записуються через згинальний момент і внутрішні зусилля, що діють в поперечних перерізах кільця:

$$\frac{dQ}{d\varphi} - N = -2Rq_1 - 2hq_2,$$

$$\frac{dN}{d\varphi} + Q = 0; \quad \frac{dM}{d\varphi} - RQ = 0; \quad (2.22)$$

де  $Q = \int_{-h}^h \tau_{\varphi z} dz$  – поперечна сила;  $N = \int_{-h}^h \sigma_{\varphi} dz$  – поздовжня сила;  $M = \int_{-h}^h \sigma_{\varphi} z dz$  – згинальний момент.

Якщо в рівняння (2.22) замість внутрішніх сил підставити їх значення в переміщеннях, то вихідна система рівнянь відносно невідомих функцій  $u(\varphi)$ ,  $w(\varphi)$  і  $u_3(\varphi)$  вийде доволі складною. Отримати замкнуті розв'язки для такої системи є доволі складно. Тому, очевидно, цю задачу легше розв'язувати в два етапи. На першому етапі за основні невідомі потрібно взяти згинальний момент, поперечну та поздовжню сили. Ці значення легко знаходяться з системи рівнянь (2.22). Далі можна перейти до визначення названих вище невідомих складових переміщень, користуючись рівняннями такого вигляду:

$$\frac{du}{d\varphi} + w = \frac{M+RN}{EA} - \frac{Nh^2}{6ARG'} + \frac{q_1 h}{6E} \cdot \left( \frac{E'}{G'} - 1,35 \right) + \frac{q_2 h^2}{6G'R}; \quad (2.23)$$

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{-MR^2}{EJ'} + \frac{6NR}{5G'A} \left( 1 - 0,7 \frac{h^2}{R^2} \right) - \frac{6q_1}{5G'} \left( 1 - 0,7 \frac{h^2}{R^2} \right) \frac{R^2}{h} + \frac{q_2}{E'} \left( 1 - \frac{6E'}{5G'} \right) R;$$

$$2u_3 h^2 G' = -Q / A$$

Тут  $J' = \int_A \frac{R}{R+z} z^2 dA$  – величина, яка по своїй розмірності і змісту аналогічна моменту інерції поперечного перерізу кільця;

$A$  – площа поперечного перерізу кільця;

$q_1, q_2$  – перші похідні по  $\varphi$ .

При інтегруванні системи залежностей (2.23) з'являться довільні сталі, які можуть бути знайдені з граничних умов на краях зразка. Ці умови залежать від характеру кріплення його кінців. Наприклад, умови жорсткого затиснення мають вигляд:

$$U|_{z=z_0} = 0; \quad W|_{z=z_0} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0 \quad (2.24)$$

Шарнірне опирання кінців зразка можна реалізувати такими умовами:

$$U|_{z=z_0} = 0; \quad W|_{z=z_0} = 0; \quad M = M^* \quad (2.25)$$

Довільне навантаження кінців зразка записується наступним чином:

$$N = N^*; \quad Q = Q^*; \quad M = M^* \quad (2.26)$$

В приведених умовах величини  $N^*$ ,  $Q^*$ ,  $M^*$  - відомі силові фактори, якими завантажені кінці зразка, а параметр  $z_0$  змінюється в межах  $-h \leq z_0 \leq h$ .

В реальній роботі зразка може існувати й інший характер закріплення його кінців. Наприклад, кінематичні умови можуть бути і неоднорідними, і мати параметри, які характерні для кількох граничних умов одночасно. Від точності реалізації цих умов в значній мірі буде залежати і точність розв'язку конкретної задачі.

Напруження  $\sigma_\varphi$  і  $\tau_{\varphi z}$  знаходяться легше, якщо їх виразити через попередньо знайдені зусилля  $N$ ,  $Q$  і зовнішнє навантаження у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = & \frac{N}{A} + \frac{M}{RA} + \frac{M}{J'} \frac{Rz}{R+z} - \frac{E}{2G'} \frac{z}{R+z} \left( \frac{N}{A} - q_1 \frac{R}{h} - q_2 \right) \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{h^2}{3Rz} \left( 3 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) - \right. \\ & \left. - 0,35 \frac{h^2}{R^2} - 0,6 \right) + \frac{3}{4} \frac{E}{E'} \frac{q_1 h}{R+z} \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{z^4}{6h^4} - 0,3 \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right); \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{3}{2} \left( \frac{Q}{A} \right) \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 1 - \frac{z}{3R} \right).$$

В одержаній формулі для  $\sigma_\varphi$  перші три члени співпадають з відомим розв'язком опору матеріалів, побудованим на основі гіпотези плоских перерізів. Члени з множниками  $E/G'$  і  $E/E'$  враховують вплив поперечного зсуву і поперечного обтиснення матеріалу бруса. Впливом нормального напруження  $\sigma_z$  в даній формулі нехтується. У виразі для  $\tau_{\varphi z}$  крім врахування безпосереднього впливу зовнішнього навантаження на брус, додатковий множник  $(1-z/3R)$  дещо зміщує максимум напруження в бік внутрішнього радіуса бруса. Ця тенденція підтверджується точним розв'язком теорії пружності [30].

## РОЗДІЛ 3

## МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

### 3.1. Чисельно-аналітична схема розрахунку пружних сталей при триточковому згині

Змоделюємо згин зразка, який вільно лежить на двох опорах і навантажений посередині силою  $P$  (рисунок 3.1).

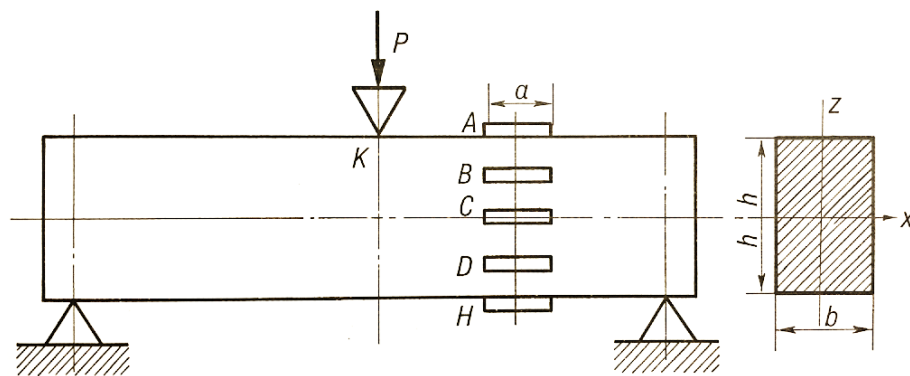


Рисунок 3.1 – Схема задачі розрахунку пружних характеристик при триточковому згині

Внаслідок симетрії задачі простіше розглянути згин консолі довжиною  $l/2$  під дією сили  $P/2$  на кінці. Граничні умови на краях зразка будуть наступними:

$$\begin{aligned}
 U = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z = z_0} \text{ при } x = 0; \\
 N = 0; \quad Q = -P/2; \quad M = 0 \text{ при } x = l/2,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

де параметр  $z_0$  задовільняє:  $-h \leq z_0 \leq h$ .

В якості розрахункових рівнянь задачі візьмемо диференційні рівняння (2.12),  $q_1=0$ :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^4 w}{dx^4} = 0.
 \tag{3.2}$$

Загальний розв'язок цих рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} u &= A_1 \cdot x + A_2; \\ w &= B_1 x^3 + B_2 x^2 + B_3 x + B_4, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $A_i, B_i$  – постійні інтегрування, які знаходяться з граничних умов (3.1).

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = 0, \quad B_1 &= \frac{P}{12JE}, \quad B_2 = -\frac{Pl}{8JE}, \\ B_3 &= -\frac{Bh^2}{4JG_{xz}} \left(1 - \frac{z_0}{3h^2}\right), \quad B_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Використовуючи співвідношення (3.3), (3.4) в формулах (2.5) і (2.13), знаходимо:

$$\sigma_x = \frac{P}{2J} \left(\frac{l}{2} - x\right) z; \quad (3.5)$$

$$w = \frac{Px^3}{12JE} - \frac{Plx^2}{8JE} - \frac{Ph^2x}{4JG_{xz}} \left(1 - \frac{z_0^2}{3h^2}\right).$$

Максимальний прогин кінця консолі буде дорівнювати максимальному прогину зразка на двох опорах:

$$w_{max} = \frac{Pl^3}{48JE} \left(1 + k \frac{E}{G_{xz}} \left(\frac{2h}{l}\right)^2\right), \quad (3.6)$$

$$\text{де } k = 1,5 \left(1 - \frac{z_0^2}{3h_0}\right).$$

Залежно від множини значень параметра  $z_0$  коефіцієнт  $k$  може приймати значення від 1 до 1,5. Найбільш точне його значення (в цих межах) можна одержати експериментальним шляхом для зразків різної товщини і з різних матеріалів, пружні постійні яких відомі. В більшості уточнених теорій зразків типу С. Тимошенка [17] коефіцієнт  $k = 1,2$ , що відповідає значенню  $z_0 = \sqrt{0,6} \cdot h$ .

Скориставшись точним розв'язком [19] цієї задачі вибираємо значення параметра  $z = \sqrt{0,7}h$ , що відповідає значенню коефіцієнта  $k = 1,15$ .

Точність даного вибору перевіримо при визначенні прогинів зразків з склопластиків: 21-63С ( $E/G_{xz} = 12,2$ ) і АГ-4С ( $E/G_{xz} = 23$ ), коли  $h/l = 0,1$ .

Запишемо вираз для максимального прогину зразка у вигляді:

$$W_{\max} = w_{\text{кл.}} \cdot S^* \quad (3.7)$$

$$\text{де } w_{\text{кл.}} = \frac{Pl^3}{48EJ},$$

$S^*$  - параметр уточнення [33].

Дані підрахунків для параметра  $S^*$  запишемо в порівняльну таблицю 3.1.

Аналіз даних, приведених в таблиці 3.1, свідчить про те, що розроблений в роботі варіант теорії зразків досить точний (похибка не перевищує 1%) і ним можна користуватись для визначення модулів пружності.

Таблиця 3.1 – Порівняльні результати прогинів зразків

Матеріали	Значення за теорією пружності	Запропонована теорія (формула (3.6))	Теорія типу С. Тимошенка ( $k = 1.2$ )
21 – 63С	1,576	1.561	1.586
АГ – 4С	2,078	2.058	2.104

### 3.2. Алгоритм визначення модуля зсуву шляхом моделювання чистого згину зразка

Побудуємо модель згину зразка, який вільно лежить на двох опорах і симетрично навантажений на кінцях зосередженими силами (рисунок 3.2). Побудуємо для цієї моделі алгоритм розв'язання оберненої задачі.

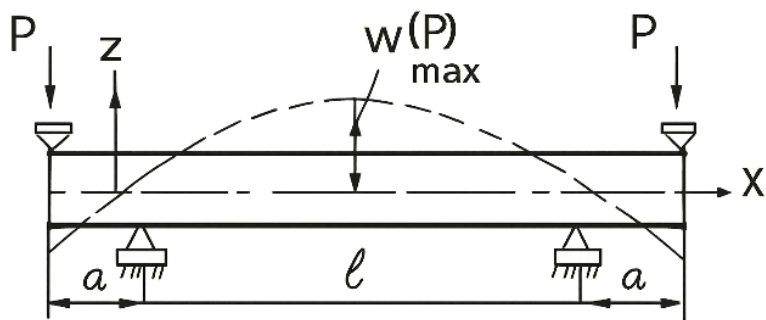


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема зразка в задачі навантаження зосередженими силами

Оскільки нас цікавить переміщення середини зразка, то розглянемо ще й еквівалентний йому шарнірно-опертий зразок, навантажений в опорах парами сил з моментом  $m = Pa$  (рисунок 3.3).

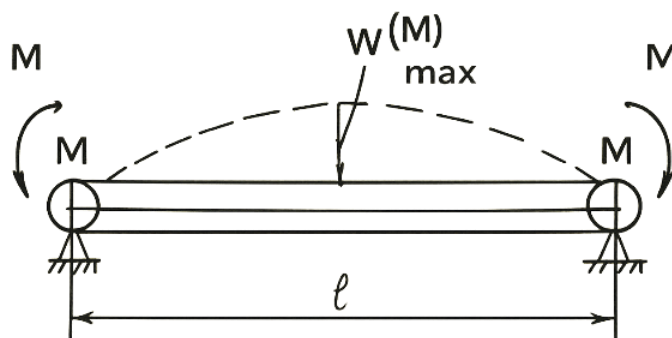


Рисунок 3.3 – Моделювання чистого згину зразка в задачі навантаження моментами

Граничні умови шарнірного опирання можна реалізувати наступним чином:

$$N = 0; \quad w = 0; \quad M = -m. \quad (3.8)$$

Задовільняючи цим умовам розв'язки (3.3), знаходимо постійні інтегрування  $A_i, B_i$ :

$$A_1 = A_2 = 0; \quad B_1 = B_4 = 0; \\ B_2 = -\frac{m}{2EJ} = -\frac{Pa}{2EJ}; \quad B_3 = \frac{ml}{2EJ} = \frac{Pal}{2EJ}.$$

На основі цих значень, вираз для вертикального переміщення має вигляд:

$$w(x) = \frac{Pax}{2EJ}(l-x). \quad (3.9)$$

Максимальний прогин зразка при  $x = 0,5l$  буде дорівнювати:

$$W_{max}^{(m)} = \frac{Pal^2}{8EJ}. \quad (3.10)$$

Знаходимо із цієї формули вираз для модуля пружності

$$E = \frac{Pal^2}{8W_{max}^{(m)}J}. \quad (3.11)$$

Підставивши значення  $E$  в формулу (3.6) знайдемо вираз для модуля зсуву  $G_{xz}$ :

$$G_{xz} = \frac{kPlah^2}{2J(6aW_{max}^{(P)} - lW_{max}^{(m)})}. \quad (3.12)$$

Для перевірки точності формули (3.12) скористаємось результатами роботи [21], де розглядався згин дерев'яного зразка з такими характеристиками:

$$E = 10^5 \text{ кГс/см}^2; \quad G_{xz} = 5500 \text{ кГс/см}^2; \quad P = 200 \text{ кГс}, \\ L = 1 \text{ м}, \quad 2h = 10 \text{ см}, \quad b = 3 \text{ см}$$

Середньоарифметичний прогин зразка, одержаний дослідним методом для п'яти однакових зразків (результат першого зразка відкинуто) дорівнює  $w_{max}^{(P)} = 1,98$  мм.

Прогин від чистого згину знайдемо за формулою (3.10), взявши  $a = 0,5$  м,  $k^{max} = 1,15$ ,  $w_{max}^{(m)} = 4,90$  мм.

Підставивши дані у формулу (3.12), одержимо значення модуля зсуву для дерева  $G_{xz} = 5530 \text{ кГс/см}^2$ , що є близьке до значення  $5500 \text{ кГс/см}^2$ .

При цьому зауважимо, що більш точне значення модуля  $G_{xz}$  можна одержати тільки при проведенні дослідів на чистий згин дерев'яного зразка і знаходженні дослідного значення  $W_{max}^{(m)}$  з точністю до  $0,001$  мм.

### 3.3. Математичний аналіз поперечних коливань зразків для визначення пружних сталих композитів

Пружні сталі матеріалів можна визначити за даними математичного аналізу поперечних коливань зразків, аналогічно як описано у [11].

В даному розділі шляхом виведення диференційного рівняння поперечних коливань зразка знайдемо частоту власних коливань шарнірно опертого призматичного зразка.

Одержані вирази частоти власних коливань можна буде використати для визначення пружних постійних композитного матеріалу.

Для виведення диференціального рівняння поперечних коливань композитного матеріалу зразка, скористаємось другим і третім рівняннями рівноваги (2.11), записавши в їх правих частинах відповідні інерційні величини:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q(x, t) = \rho J \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} ; \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho A \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} ,$$

де  $\gamma$  – узагальнений кут повороту поперечного перерізу зразка;

$\rho J \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}$  - момент інерції обертання маси зразка;

$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  – інтенсивність сили інерції маси зразка.

Підставивши в систему рівнянь (3.13) замість  $M$  і  $Q$  їх вирази з (2.13) через  $w$  і  $\gamma$  одержимо:

$$E_x J \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - k \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma \right) = \rho J \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} ;$$

$$k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} , \quad (3.14)$$

тут  $k = \frac{5}{6} A G_{xz}$

Виключимо з системи рівняння (3.14) величину  $\gamma(x, t)$ , вважаючи при цьому, що поперечний зсув дуже мало впливає на момент інерції обертання маси. Одержане таким чином диференціальне рівняння поперечних коливань призматичного зразка має вигляд :

$$E_x J \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho J \left(1 + \frac{6}{5} \frac{E_x}{G_{xz}}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.15)$$

Розглянемо випадок, коли призматичний зразок шарнірно опертий. Граничні умови на його кінцях будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} W &= 0; \quad N = 0; \\ M &= 0; \quad \text{при } x = 0 \dots l. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Виходячи з граничних умов (3.16), загальний розв'язок диференціального рівняння (3.15) можна записати наступним чином:

$$w(x, t) = X(x) \cos \omega_i t \quad (3.17)$$

У виразі (3.17) функція  $X(x)$  називається формою головного коливання зразка, або власною формою. Таких форм коливання прямого зразка може бути нескінченна кількість, і кожній з них відповідає певне значення частоти  $\omega_i$ , яка називається власною частотою коливань.

Прийmemo, як і в роботі [21], що основна форма коливань описується функцією:

$$X(x) = A_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (3.18)$$

Підставляючи цей вираз в (3.15) і (3.18), одержуємо для частоти  $\omega_i$  наступне рівняння :

$$d^2 \frac{i^4 \pi^4}{l^4} - \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \frac{J}{A} \left(1 + \frac{6}{5} \frac{E_x}{G_{xz}}\right) \omega_i^2 - \omega_i^2 = 0, \quad (3.19)$$

де  $d^2 = EJ/\rho A$ .

З рівняння (3.19) одержуємо:

$$\omega_i^2 = \frac{\alpha^2 \pi^4}{L^4} \left[ 1 + \frac{\pi^2 h^2}{3L^2} \left( 1 + \frac{6}{5} \frac{E_x}{G_{xz}} \right) \right]^{-1} \quad (3.20)$$

тут  $L=l/i$  – довжина хвилі.

Нехтуючи нескінченно малими величинами вищих порядків, вираз для частоти  $\omega_i$  можна одержати в дещо спрощеному вигляді:

$$\omega_i = \frac{\alpha \pi^2}{L^2} \left[ 1 - \frac{\pi h^2}{6L^2} \left( 1 + \frac{6}{5} \frac{E_x}{G_{xz}} \right) \right]. \quad (3.21)$$

У виразі (3.21) член в квадратних дужках з множником  $h^2/L^2$  є уточненням від врахування деформації поперечного зсуву і сил інерції обертання елемента зразка.

У випадку ізотропного матеріалу зразка ( $E/G_{xz} = 2,5$ ) поправка від врахування деформації поперечного зсуву перевищує поправку від врахування моменту інерції обертання втричі. Для композитних матеріалів ( $E/G_{xz} \geq 10$ ) поправка від поперечного зсуву вже буде відрізнятися на цілий порядок від уточнення за рахунок моменту обертання, і цим уточненням, напевно, можна буде нехтувати.

Формулу для визначення періоду коливань зразка знаходимо з частотного рівняння (3.20):

$$T_i = \frac{2L^2}{\alpha \pi} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 h^2}{3L^2} \left( 1 + \frac{6}{5} \frac{E}{G_{xz}} \right)}. \quad (3.22)$$

Якщо поздовжній модуль пружності  $E_x$  визначити одним з розглянутих вище методів, то частотне рівняння (3.22) дозволяє, через знайдений дослідним шляхом період  $T_i$ , знайти відношення модулів  $E_x/G_{xz}$ :

$$\frac{E_x}{G_{xz}} = \frac{25L^2}{\pi^2 h^2} \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 T_i^2}{4L^4} - 1 \right) - \frac{5}{6}. \quad (3.23)$$

Допустимо, що маса балки  $m$  нескінченно мала в порівнянні з масою вантажу ( $m \ll M$ ). Тоді для практичного розрахунку досить знати переміщення

системи тільки в одній точці під навантаженням. Тобто, ми будемо мати випадок системи з одним ступенем вільності (рисунок 3.4).

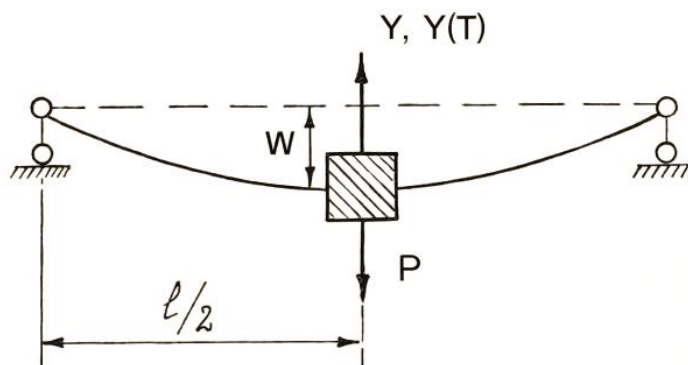


Рис. 3.4. Розрахункова схема навантаження зразка в задачі поперечних коливань

Під дією навантаження зразок одержить переміщення  $\Delta_{3p} = \rho\delta_{11}$  і буде знаходитись в рівновазі. Якщо після цього на зразок подіяти деякою силою  $R(t)$ , щоб він одержав додаткові переміщення і швидкість, то після раптового зняття цієї сили вантаж почне коливатись. При таких коливаннях в любий момент руху точки прикладення вантажу останній буде знаходитись під дією трьох сил:

- а) власної ваги –  $P = Mg$ ;
- б) сили пружності –  $Y = -c(\Delta_{3p} + w)$ ;
- в) сили інерції –  $J(t) = -M \frac{d^2w}{dt^2}$ .

Тут коефіцієнт жорсткості  $c = \delta_{11}^{-1}$  – величина, яка обернена до одиничного переміщення в місці прикладання навантаження;

$g$  – прискорення вільного падіння.

Користуючись формулою (3.6) можна записати:

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{48EJ} \left( 1 + 1,5 \frac{E_x}{G_{xz}} \left( \frac{2h}{l} \right)^2 \right).$$

Умова динамічної рівноваги всіх сил, прикладених в даному перерізі, дає диференціальне рівняння руху вантажу:

$$Mq - c(\Delta_{зр.} + w) - M \frac{d^2 w}{dt^2} = 0. \quad (3.24)$$

Враховуючи, що величина  $Mq = c\Delta_{зр.}$ , рівняння (3.24) приводиться до канонічного вигляду:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega \cdot w = 0, \quad (3.25)$$

$$\text{де } \omega^2 = \frac{1}{M\delta_{11}}.$$

Загальним розв'язком рівняння (3.25) буде:

$$w = \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin \omega t + v_0 \cos \omega t, \quad (3.26)$$

де  $v_0$  – початкова швидкість вантажу, коли  $t = 0$ .

З рівняння (3.26) видно, що після зняття сили  $R(t)$  вантаж буде здійснювати гармонічні коливання відносно положення рівноваги.

Період таких коливань можна знайти за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{Ml^3}{48EJ} \left( 1 + 1,5 \frac{E}{G_{xz}} \left( \frac{2h^2}{l} \right) \right)}. \quad (3.27)$$

Формула (3.27) дозволяє визначити через знайдені дослідним шляхом  $T$  і  $E_x$  відношення модулів  $E_x/G_{xz}$ :

$$\frac{E_x}{G_{xz}} = 0,87 \left( \frac{l}{2h} \right)^2 \left( \frac{12T^2 EJ}{M\pi^2} - 1 \right) \quad (3.28)$$

У випадку, коли маса зразка  $m$  співрозмірна з масою вантажу  $M$ , формули (3.27) і (3.28) можна уточнити. Це можна зробити шляхом підстановки в названі

формули замість величини  $M$  величину  $M_{yT} = M = \frac{17}{35}m$ . Величина  $\frac{17}{35}m$  носить назву приведеної маси зразка.

Формули (3.23) і (3.28) можуть бути використані ще і для перевірки точності інших методів визначення пружних постійних композитних матеріалів.

## РОЗДІЛ 4

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ПРУЖНИХ СТАЛИХ НА ОСНОВІ  
РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ4.1. Чисельно-аналітичний розрахунок поздовжніх коливань  
композитних систем

В даній роботі задача поздовжніх коливань композитного зразка розглядається у постановці класичної теорії композитних зразків. У цьому випадку за модель вибирається умова, що поперечні перерізи зразка під час поздовжніх коливань залишаються плоскими і паралельними один до одного і здійснюють переміщення вздовж осі зразка.

Диференційне рівняння для поздовжніх коливань зразка одержимо з першого з трьох рівнянь рівноваги, якщо в його правій частині замість нуля запишемо інерційний член  $\frac{m}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ . Одержане у такий спосіб диференційне рівняння буде мати такий вигляд:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{m}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

де  $l$ ,  $m$  – довжина і маса зразка;

$N = \frac{E}{A} \frac{\partial U}{\partial x}$  – поздовжня сила в зразку.

Змоделюємо розрахункову схему навантаження зразка (рисунок 4.1). Розмістимо початок координат в закріпленому кінці зразка. Гранична умова для закріпленого кінця запишеться:

$$U = 0 \text{ при } x = 0. \quad (4.2)$$

Гранична умова для другого кінця зразка, де закріплений вантаж з масою  $M$ , може бути записана так:

$$N = -M \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \text{ при } x = l. \quad (4.3)$$

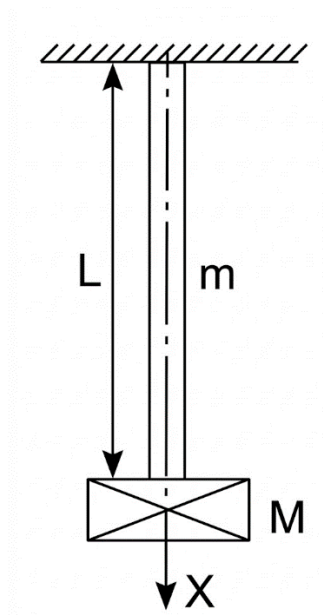


Рисунок 4.1 – Розрахункова схема навантаження зразка

Розв'язок диференційного рівняння (4.1) виконаємо для граничного випадку, коли маса зразка набагато менша від маси вантажа ( $m \ll M$ ), тобто маємо випадок, коли нехтуємо масою зразка при умові  $m \ll M$ .

Моделюємо ситуацію, коли маса зразка нескінченно мала у порівнянні з масою вантажа, прийmemo  $m = 0$ . Тоді диференційне рівняння поздовжніх коливань (4.1) з врахуванням виразу для  $N$  буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (4.4)$$

Скористаємось методом Фур'є і запишемо вираз для осьового переміщення  $U(x, t)$  у вигляді добутку двох функцій –  $X(x)$  і  $\Theta(t)$ :

$$U(x, t) = X(x) \cdot \Theta(t). \quad (4.5)$$

Враховуючи (4.5) і (4.2), розв'язок рівняння (4.4) буде мати вигляд:

$$U(x, t) = c_1 x \cdot \Theta(t), \quad (4.6)$$

де  $c_1$  – постійна інтегрування.

Підставивши цей розв'язок у рівняння (4.3), одержимо:

$$c_1 AE \Theta(t) = -c_1 M l \frac{d^2 \Theta}{dt^2}. \quad (4.7)$$

Приведемо рівняння (4.7) до стандартного вигляду:

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \omega^2 \Theta = 0, \quad (4.8)$$

де  $\omega^2 = EA/ML$ .

Загальний розв'язок рівняння (4.8) буде наступним:

$$\Theta(t) = c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t, \quad (4.9)$$

де  $\omega$  – кругова частота власних коливань;

$c_2, c_3$  – постійні інтегрування, які залежать від початкових умов.

Знаючи кругову частоту коливань, знаходимо період коливань за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{ML}{EA}}. \quad (4.10)$$

За дослідними значеннями періоду коливань легко знайти значення модуля пружності  $E$  матеріалу зразка:

$$E = \frac{4\pi^2 l M}{T^2 A}. \quad (4.11)$$

## **4.2. Обчислювальна модель визначення пружних сталей полімерної матриці за даними резонансних коливань**

Побудовано математичну модель обробки експериментальних даних, на основі якої з використанням обчислювальних методів визначено модуль пружності полімерної матриці композитного матеріалу. Верифікацію моделі здійснено для даних експерименту двох серій полімерних зразків [34]:

- 1) вздовж напрямку геометричної осі з ідентифікацією динамічного модуля пружності  $E_y$ ;
- 2) перпендикулярно до геометричної осі з ідентифікацією динамічного модуля пружності  $E_x$ .

За експериментальними значеннями періоду коливань, що відповідали моменту резонансу визначались значення модуля пружності 1-го роду за формулою (4.11).

Для одержаних даних динамічного модуля пружності для двох напрямків щодо геометричної осі здійснено статистичну обробку. Середнє арифметичне значення модуля пружності  $E$  з усіх визначень обчислено за формулою:

$$\bar{E} = \frac{\sum E_i}{N}. \quad (4.18)$$

Середнє квадратичне відхилення результатів визначення модуля пружності обчислено за формулою:

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\sum (E_i - \bar{E})^2}{N-1}}, \quad (4.19)$$

де  $N$  – число зразків.

Значення модуля пружності, що виходили за межі інтервалу значення модуля пружності, що виходили за межі інтервалу  $\bar{E} \pm 2\bar{S}$ , відкидалися. Для решти значень у кожній точці ідентифікації обчислювали нове середньоарифметичне значення модуля пружності та відповідне середньоквадратичне відхилення.

Результати розрахунків модуля пружності, тобто значення  $E_y$  і  $E_x$ , представлені на рисунку 4.2.

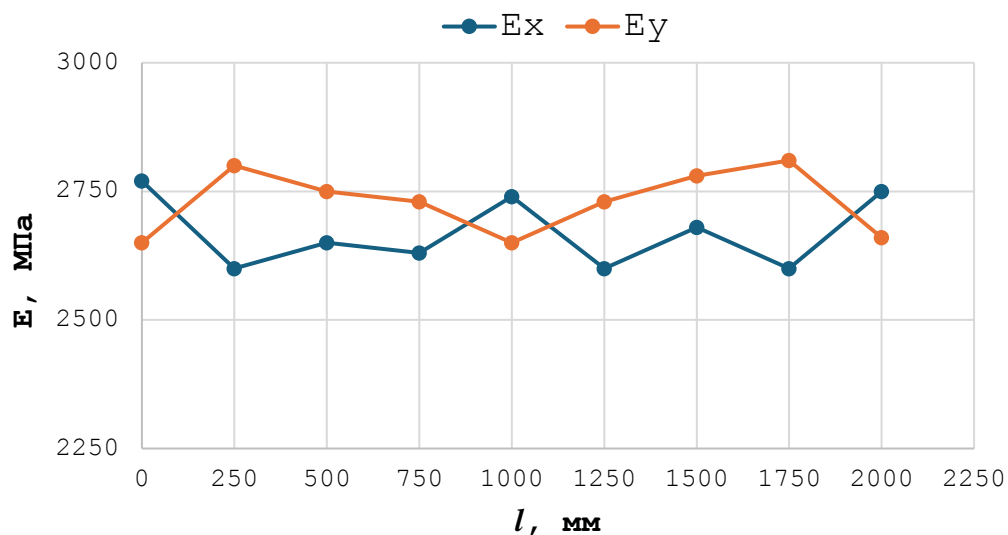


Рисунок 4.2 – Значення динамічного модуля пружності полімерних зразків в напрямку геометричної осі  $E_y$  і перпендикулярно геометричній осі  $E_x$

#### 4.3. Статистична обробка даних та оцінка похибок моделі

Було досліджено два статистичні ряди значень модуля Юнга для полімеру ПСМ-151, котрі відповідали певній орієнтації дослідних зразків (табл. 4.1, табл. 4.2).

Таблиця 4.1 – Значення динамічного модуля пружності полімера ПСМ-151 в напрямку геометричної осі

2585.3	2652.1	2222.8	2493	2732.1
2641.5	2610.1	2738.8	2693.5	2740.2
2633	2781.6	2707.3	2729.4	2777.9
2287	2800.3	2722.6	2647.7	2713.9
2626.2	2730	2685.6	2529.5	2686.2

Таблиця 2.2 – Значення динамічного модуля пружності полімеру ПСМ-151 в напрямку перпендикулярному до геометричної осі

2724	2386.9	2727.4	2638.8	2612
2759.4	2547.6	2738.2	2661	2607
2705.3	2662.3	2675.9	2596.7	2692.8
2700	2683.7	2683	2589.3	2688.2
2579.1	2653.4	2662.3	2392.6	2728

На основі даних матеріалу було побудовано відповідно два інтервальні статистичні ряди з такими межами (МПа): 2200-2300; 2300-2400; 2400-2500; 2500-2600; 2600-2700; 2700-2800; 2800-2900.

Для цих даних визначались: середнє значення динамічного модуля пружності та середнє квадратичне відхилення. Причому, кожний інтервальний статистичний ряд перевірено на наявність «випадаючих» значень за правилом  $\bar{t} \pm 3\sigma$ . Виявлені «випадаючі» значення вилучали зі статистичного ряду.

Також було визначено коефіцієнт варіації – безрозмірну характеристику статистичних даних:

$$\tilde{U} = \frac{\sigma}{\bar{E}} \quad (4.23)$$

Початкова статистична обробка даних кожного ряду виявила:

- 1) «випадаючі» значення 2287, 2222.8 (МПа) (з даних таблиці 4.1);
- 2) коефіцієнт варіації для усіх статистичних рядів знаходився у межах  $0 \leq U \leq 0.3$ , що вказувало на відповідність даних нормальному закону розподілу.

Після вилучення «випадаючих» значень отримано такі значення основних статистичних характеристик:

- в напрямку геометричної осі (дані таблиці 4.1):

$$\bar{E}_y = 2686 \text{ МПа}, \sigma_y = 84.3 \text{ МПа}, U_y = 0.031;$$

- в напрямку перпендикулярному до геометричної осі (дані таблиці 4.2):

$$\bar{E}_x = 2640 \text{ МПа}, \sigma_x = 106.1 \text{ МПа}, U_x = 0.04.$$

Важливим є прогнозування ймовірності отримання значення модуля пружності полімерної матриці в заданих межах. З цією метою побудовано функції ймовірностей для відповідних інтервалів, що базуються на нормальному законі розподілу випадкових величин. Результати цих розподілів у вигляді графіків приведені на рисунку 4.3.

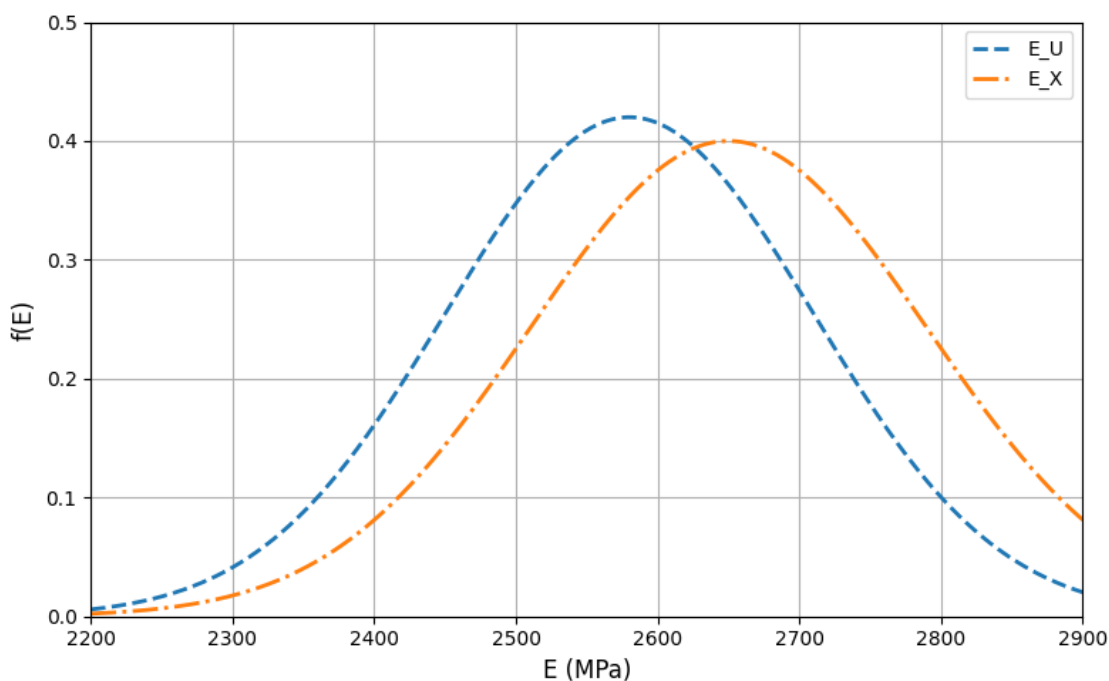


Рисунок 4.3 – Функції ймовірностей інтервалів модулів пружності полімеру:

$E_y$  – в напрямку геометричної осі матеріалу;

$E_x$  – в напрямку перпендикулярному геометричної осі матеріалу.

Аналіз отриманих імовірнісних кривих показує, що максимальна ймовірність реалізації відповідає інтервалу значень  $E = 2500 \dots 2800$  МПа. У межах цього інтервалу для кожного з розглянутих розподілів спостерігаються

відмінності параметрів. Зокрема, для розподілу  $E_y$  характерне зміщення області найбільшої ймовірності до інтервалу 2600 ... 2800 МПа.

Розподіл  $E_y$  задовольняє інтервал 2600...2700 МПа, із спільною і найбільшою ймовірністю 0.43, тоді як для розподілу  $E_x$  цей інтервал має ймовірність 0.37.

Узагальнений характер варіації модуля пружності полімеру доцільно описувати розподілом  $E_y$ , оскільки розподіл  $E_x$  повністю міститься в його межах. Така властивість свідчить про близькість матеріалу до ізотропної моделі. Водночас у задачах, що потребують підвищеної технологічної точності параметрів складових елементів, зафіксовані статистичні відхилення можуть суттєво впливати на результати моделювання та прогнозування.

## ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розв'язано актуальну науково-прикладну задачу, пов'язану з розробкою та обґрунтуванням аналітичних і чисельно-аналітичних моделей визначення пружних сталих композитних матеріалів. У ході дослідження отримано такі основні результати:

1. Виконано аналіз сучасних підходів до класифікації композитних матеріалів і методів визначення їх механічних характеристик; показано обмеженість класичних статичних методів для анізотропних композитів і обґрунтовано доцільність застосування уточнених математичних моделей та динамічних, зокрема резонансних і коливальних методів аналізу.

2. Розроблено математичну модель уточненої теорії згину призматичних елементів з композитних матеріалів, яка враховує вплив поперечного зсуву та обтиснення; на основі рівнянь рівноваги та спрощених співвідношень закону Гука для ортотропного тіла отримано аналітичні вирази для напружень і переміщень;

3. Запропоновано математичний підхід до розрахунку механічних параметрів композитних кілець, що забезпечує коректний опис їх деформування за умов криволінійної анізотропії;

4. Побудовано чисельно-аналітичні схеми розв'язання обернених задач визначення модулів пружності та зсуву за результатами випробувань на триточковий і чистий згин; розроблено алгоритм визначення модуля зсуву, ефективність якого підтверджено порівнянням з відомими експериментальними даними;

5. Виконано математичний аналіз поперечних коливань зразків і отримано частотні співвідношення, що дозволяють визначати пружні сталі композитних матеріалів за власними частотами коливань;

6. Встановлено, що запропоновані моделі забезпечують високу точність визначення пружних сталих композитів: відносна похибка розрахунків не перевищує 1 %, що підтверджує коректність і практичну придатність розроблених підходів.

Отримані результати можуть бути використані для обробки експериментальних даних, проектування конструкцій з композитних матеріалів, а також у подальших наукових дослідженнях, пов'язаних із розв'язанням обернених задач механіки та математичним моделюванням анізотропних середовищ.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Буренніков, Ю. А., Сивак І. О., Сухоруков С. І. Нові матеріали та композити : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2013. 158 с.
2. Hull D., Clyne T. W. An Introduction to Composite Materials. 2nd ed. Cambridge University Press, 1996.
3. Ward I. M., Sweeney J. An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers. 3rd ed. Wiley, 2012.
4. Шваб'юк В.І. Опір матеріалів : підручник. Київ : Знання, 2016. 407 с.
5. Saba N., Jawaid M., Alothman O. Y., Paridah M. T. A review on dynamic mechanical properties of natural fibre reinforced polymer composites. *Construction and Building Materials*. 2016. Vol. 106. P. 149-159. DOI: [10.1016/j.conbuildmat.2015.12.075](https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.12.075)
6. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. 2nd ed. CRC Press, 2003. 207 p.
7. Швайко М. Ю. Основи теорії коливань механічних систем: Навч. посіб. Дніпропетровський державний університет. Дніпропетровськ : РВВ ДДУ, 2000. 268 с.
8. Ogden R. W. Non-Linear Elastic Deformations. Dover Publications, 1997. 345 p.
9. Gent A. N. Engineering with Rubber: How to Design Rubber Components. 3rd ed. Hanser, 2012. 433 p.
10. Menard K. P., Menard N. R. Dynamic Mechanical Analysis: A Practical Introduction. 3rd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2020. 266 p.
11. Brinson H. F., Brinson L. C. Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction. 2nd Edition. Springer, 2015.
12. Chandra R., Singh S. P., Gupta K. Damping in fiber-reinforced composite materials and structures. *Journal of Composite Materials*. 1999. Vol. 33, Iss. 21. P. 1969-2011. DOI: [10.1177/002199839903302102](https://doi.org/10.1177/002199839903302102)
13. Ward I. M., Sweeney J. An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers. 3rd Edition. Chichester: Wiley, 2012. 402 p.
14. Christensen R. M. Mechanics of Composite Materials. Dover Publications, 2012.

15. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. 2nd Edition. CRC Press, 2016.
16. Tarantola A. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. SIAM, 2005.
17. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теорія пружності. К.: Наука, 1985. 576 с.
18. Лехніцький С.Г. Теорія пружності анізотропного тіла. Вид. 2-ге, К.: Наука, 1987. 416 с.
19. Bank L. C. Shear coefficients for thin-walled composite beams. *Composite Structures*. 1987. Vol. 8, Iss. 1. P. 47-61.
20. Mujika F. On the difference between the shear modulus determined by the resonant beam test and the static tension test. *Polymer Testing*. 2006. Vol. 25, Iss. 5. P. 584-591. DOI: 10.1016/j.polymeresting. 2006.03.004
21. Guedes R. M. Creep and fatigue of FRP composites under high temperature // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2019. Vol. 23. P. 1-2.
22. Quinn G. D., Swab J. J. Fractography and estimates of fracture origin size from fracture mechanics. *Journal of the American Ceramic Society*. 2017. V. 100, I. 2. P. 511-522. DOI: 10.1111/jace.14486
23. Ogden R. W. Non-Linear Elastic Deformations. Dover Publications, 1997.
24. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів : підручник. За ред. Г. С. Писаренка. К.: Вища школа, 1993. - 655 с.