Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет

ТЕОРІЯ ІНФОРМАЦІЇ ТА КОДУВАННЯ

Методичні вказівки до лабораторних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
освітньої програми «Інформаційні системи та технології охорони і безпеки»
спеціальності 126 (F6) Інформаційні системи та технології
галузі знань 12 (F) Інформаційні технології
денної та заочної форм навчання

Луцьк 2026

УДК 621.391(075.8)
Т 33

Рекомендовано до видання вченою радою факультету КІТ ЛНТУ,
протокол № ______ від «___ » _________ 20 26 року.

Голова вченої ради факультету КІТ _________________ Інна КОНДІУС

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ
Директор бібліотеки ________________ Наталія ПОЛІЩУК

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри комп'ютерної інженерії та безпеки
ЛНТУ, протокол № _______ від « ______ » ________________ 20 26 року.

Завідувач кафедри КІБ ________________ Тарас ТЕРЛЕЦЬКИЙ

Укладачі: ________________ Сергій ГРИНЮК, кандидат технічних наук,
доцент кафедри комп'ютерної інженерії та безпеки ЛНТУ

________________ Оксана МІСКЕВИЧ, старший викладач,
кафедри комп'ютерної інженерії та безпеки ЛНТУ

Рецензент: ________________ Сергій КОСТЮЧКО, кандидат технічних наук,
доцент кафедри комп'ютерної інженерії та безпеки ЛНТУ

Відповідальний за випуск: ________________ Тарас ТЕРЛЕЦЬКИЙ, кандидат
технічних наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та безпеки ЛНТУ

Т 33

Теорія інформації та кодування: методичні вказівки до лабораторних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Інформаційні системи та технології охорони і безпеки» галузі знань F (12) Інформаційні технології спеціальності F6 (126) Інформаційні системи та технології денної та заочної форм навчання / уклад. С.В. Гринюк, О.І. Міскевич. Луцьк: ЛНТУ, 2026. 74 с.

Видання містить методичні вказівки до лабораторних занять, контрольні завдання і питання. Призначене для здобувачів вищої освіти з галузі знань F денної форми навчання

ЗМІСТ

Лабораторна робота №1

Тема: Дискретні джерела повідомлень. Кількісна оцінка інформації

Мета: розглянути способи вимірювання кількість інформації в повідомленні

Теоретичні відомості

Ансамбль повідомлень

Дискретне джерело повідомлень за одиницю часу створює одне з **n** можливих повідомлень $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$. Множина $\mathbf{A = \{a_1, ..., a_n\}}$ називається дискретною множиною повідомлень або просто множиною повідомлень **A**. Таким чином, дискретне джерело за одиницю часу створює певне повідомлення $\mathbf{a_i \in A}$ з імовірністю $\mathbf{p(a_i) = p_i \in P}$.

Дві множини **A** та **P** дають достатньо повний опис дискретного джерела повідомлень у вигляді його ймовірнісної моделі, а тому разом вони утворюють **ансамбль** повідомлень дискретного джерела.

Вважається, що повідомлення передаються за допомогою деякого числа символів n, які надсилаються послідовно. Якщо кожен із символів може приймати m різних значень, то це m складає алфавіт, а n – довжина повідомлення. Тоді кількість повідомлень визначається як

$M = m^n$ – експоненціальний закон.

При m=2 (“0” або “1”) та n=3, $M = 2^3 = 8$ (тобто, 000,001,010,011,100,101,110,111).

Інформація та ймовірності

Якщо є набір М повідомлень, сформульованих у відповідності з експоненційним законом, тобто із рівномірних рівноправних символів, то всі ці повідомлення володіють однаковою ймовірністю. Тобто сума ймовірністей по цьому набору повідомлень рівна 1; тоді ймовірність одного повідомлення

$$P = \frac{1}{M}, \quad M = \frac{1}{P}$$

і тоді $I = \log M = \log \frac{1}{P}$; тобто $\dot{I} = -\log P$

Знак “-“ поставлений щоб зробити значення від логарифму додатнім log числа меншого 1, відємний. Таким чином ще одне формування закону Хартлі таке:

Кількість інформації рівна логарифму ймовірності повідомлення з протилежним знаком.

Статистична міра інформації. Формула Шенона

Якщо ймовірності повідомлень P не є рівним, тобто при формуванні повідомлень враховуються їх певна статистична структура, тоді кожний символ у повідомленні володіє ймовірністю P_i.

Шенон вводить поняття про середню інформацію на одне повідомлення:

$I = -\log P_{(c)}$,

де $P_{(c)}$ деяка середня ймовірність одного повідомлення.

Середня кількість інформації у повідомленні знаходиться як

$$I_{cp} = -n\sum_{i=1}^{i=m} P_i \log P_i$$

При дуже великій кількості n символів в повідомленні вступає в силу закон великих чисел, згідно якого ймовірності символів можуть визначатися як їх частота появи в повідомленні.

$$P_i \cong \frac{n_i}{n},$$

де P_i – відносна частота появи сигналу зі значенням I ;

n_i – число символів зі значенням i ;

n – загальна довжина повідомлення.

Статистична міра інформації. Формула Шенона

Якщо ймовірності повідомлень P не є рівним, тобто при формуванні повідомлень враховуються їх певна статистична структура, тоді кожний символ у повідомленні володіє ймовірністю P_i.

Шенон вводить поняття про середню інформацію на одне повідомлення:

$I = -\log P_{(c)}$,

де $P_{(c)}$ деяка середня ймовірність одного повідомлення.

Середня кількість інформації у повідомленні знаходиться як

$$I_{cp} = -n\sum_{i=1}^{i=m} P_i \log P_i$$

При дуже великій кількості n символів в повідомленні вступає в силу закон великих чисел, згідно якого ймовірності символів можуть визначатися як їх частота появи в повідомленні.

$$P_i \cong \frac{n_i}{n},$$

де P_i – відносна частота появи сигналу зі значенням I ;
n_i – число символів зі значенням i ;
n – загальна довжина повідомлення.

Приклади виконання завдань

Приклад_1. Задано три повідомлення *A*, *B*, *C* - множини літер прізвища, імені, по-батькові українською та англійською мовою відповідно. Визначити кількість інформації, що містить кожне повідомлення.

Розв'язання. Джерело повідомлень вибирає повідомлення з множини літер прізвища, імені, по-батькові українською мовою

ІВАНОВ_ІВАН_ІВАНОВИЧ N=20

Розрахунок ансамблю джерела повідомлень

A={І, В, А, Н, О, И, Ч, _}

Кількість різних повідомлень k=8.

$p_i = n_i / N$ $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

літера	І	В	А	Н	О	И	Ч	_
a_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	3	5	3	3	2	1	1	2
p_i	0.15	0.25	0.15	0.15	0.10	0.05	0.05	0.10

Кількість інформації, що містить кожне повідомлення

$I(a_i) = -\log p_i$

a_i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.15	0.25	0.15	0.15	0.10	0.05	0.05	0.10
$I(a_i)$	2.737	2.000	2.737	2.737	3.322	4.322	4.322	3.322

Завдання на лабораторну роботу №1

Завдання 1.

Відомо, що телевимірювальна величина повинна бути в межах від 21 В до 40 В. Зміни провели приладом, який показав 30 В, але він мав похибку ±2В. Визначити кількість інформації, отриманої в результаті досліду.

Завдання 2.

В деякому місті 25% населення складають студенти. Серед студентів 50% хлопці. Всього хлопців в місті 35%. Скільки додаткової інформації міститься в повідомленні, що зустрічний студент – студент.

Завдання 3.

Сигнал складається з семи двійкових елементів. Визначити кількість інформації в сигналі, коли елементи рівноймовірні, тобто $P_1 = P_2 = 1/2$, і коли $p_1 = 3/4$, а $P_2 = 1/4$.

Завдання 4.

Ансамбль *A* містить 16 рівноймовірних повідомлень. Визначити кількість інформації, яку містить кожне таке повідомлення.

Завдання 5.

Визначити кількість інформації в повідомленні довжиною в 1000 символів, якщо алфавіт повідомлення складається з 32 рівноймовірних символів.

Завдання 6.

Ансамбль повідомлень джерела *A* визначено як *A*={*a, b,* c, *d*} та *p(a)*=1/2, *p(b)*=1/4, *p*(c*)*=1/8=*p(d)*=1/8. Визначити кількість інформації, що міститься в кожному повідомленні.

Завдання 7.

Ансамбль А подано як *A={a, b)* та ймовірності *p(a)*=0,05, *p(b)*=0,95. Визначити кількість інформації, що міститься в кожному повідомленні.

Завдання 8.

Ансамбль повідомлень джерела *A* визначено як *A* = {*a, b,* c} та *p(a)* = 0,65; *p(b)* = 0,25; *p*(c) = 0,1. Визначити кількість інформації, що передається в одному та 100 повідомленнях.

Завдання 9.

Визначити кількість інформації в повідомленні довжиною в 1000 символів, якщо алфавіт повідомлення складається з 128 рівноймовірних символів.

Завдання 10.

Задано три повідомлення *A*, *B, C* - множини літер прізвища, імені, по-батькові українською та англійською мовою відповідно. Визначити кількість інформації, що містить кожне повідомлення.

Контольні питання

1. Що таке теорія інформації та кодування?
2. Які складові частини входять в інформаційну систему?
3. Що таке кодувальний і декодувальний пристрої?
4. Що таке модулятор і демодулятор?
5. Що таке лінія зв’язку і які вони бувають?
6. Що таке сигнал повідомлення і для яких цілей його використовують ?
7. Які сигнали є в теорії інформації ?
8. В яких одиницях оцінюють кількість інформації?
9. 2. Як оцінюють інформацію за методом Хартлі і методом Шеннона?
10. 3.Яка різниця між методами Хартлі і Шеннона?

Лабораторна робота №2

Тема: Безумовна ентропія
Мета: навчатися визначати ентропію дискретного джерела повідомлень

Теоретичні відомості

Ентропія дискретного джерела повідомлень

Кількісну міру апріорної невизначеності про те, яке повідомлення буде породжене дискретним джерелом повідомлень (або середню кількість інформації в кожному повідомленні) в теорії інформації називають **ентропією** і позначають **H**.

Точно ентропію ***H (A)*** можна визначити як математичне сподівання питомої кількості інформації:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 p_i$$

У випадку рівної ймовірності повідомлень **p(a₁)= p(a₂)=... p(aₖ)=1/k** ентропія джерела обчислюється за формулою:

$$H(A) = \log k$$

Ентропія як кількісна міра інформаційності джерела має такі властивості:

1) *ентропія дорівнює нулю, якщо хоча б одне з повідомлень достовірне*;
2) *ентропія завжди більша або дорівнює нулю, є величиною дійсною і обмеженою*;
3) *ентропія джерела з двома альтернативними подіями може змінюватися від 0 до 1*;
4) *ентропія - величина адитивна: ентропія джерела, повідомлення якого складаються з повідомлень декількох статистично незалежних джерел, дорівнює сумі ентропій цих джерел*;
5) *ентропія максимальна, якщо всі повідомлення мають однакову імовірність. Таким чином,*

$$H_{\max}(X) = \log_2 k\ .$$

Приклади виконання завдань

Приклад_1. Дискретні випадкові величини (д. в. в.) X_1 та X_2 визначаються підкиданням двох гральних кубиків. Д. в. в. $Y=X_1+X_2$. Знайти кількість інформації $I(Y, X_1)$, $I(X_1, X_1)$, $I(Y, Y)$.

Розв'язання

Побудуємо розподіл ймовірностей д. в. в. X_1 (або X_2) (*табл. 1*):

Таблиця 1

X_1	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Звідси знаходимо ентропію д. в. в X_1, що у даному випадку буде максимальною, оскільки значення рівноймовірні:

$HX_1=HX_2=log_2 6=1+log_2 3\approx 1+1{,}585\approx 2{,}585$ (*біт/сим*).

Оскільки X_1 та X_2 незалежні д. в. в., то їх сумісна ймовірність визначається так:

$P(X_1=i, X_2=j)=P(X_1=i)\cdot P(X_2=j)=1/36$; $i=1...6$, $j=1...6$.

Побудуємо допоміжною таблицю значень д. в. в. $Y=X_1+X_2$ (*табл.2*):

Таблиця 2

X_2	X_1					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Обчислимо ймовірності $P(Y=j)$ (j=2, 3, …, 12):

$P(Y=2)=1/36$; $P(Y=3)=2\cdot 1/36=1/18$; $P(Y=4)=3\cdot 1/36=1/12$;
$P(Y=5)=4\cdot 1/36=1/9$; $P(Y=6)=5\cdot 1/36=5/36$; $P(Y=7)=6\cdot 1/36=1/6$;
$P(Y=8)=5\cdot 1/36=5/36$; $P(Y=9)=4\cdot 1/36=1/9$; $P(Y=10)=3\cdot 1/36=1/12$; $P(Y=11)=2\cdot 1/36=1/18$;
$P(Y=12)=1/36$;

Скориставшись допоміжною таблицею (*табл.2*), запишемо безумовний закон розподілу д. в. в. Y (*табл. 3*):

Таблиця 3

Y_j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_j	*1/36*	*1/18*	*1/12*	*1/9*	*5/36*	*1/6*	*5/36*	*1/9*	*1/12*	*1/18*	*1/36*

Звідси знаходимо ентропію д. в. в. Y так:

$$HY=-\sum_{j=2}^{12} q_j \log_2 q_j =2\frac{1}{36}\log_2 36+2\frac{1}{18}\log_2 18+2\frac{1}{12}\log_2 12+$$

$$+2\frac{1}{9}\log_2 9+2\frac{5}{36}\log_2\frac{36}{5}+2\frac{1}{36}\log_2 36+\frac{1}{6}\log_2 6=\frac{23}{18}+$$

$$+\frac{5}{3}\log_2 3-\frac{5}{18}\log_2 5\approx 3{,}27\,(\textit{біт/сим})$$

Побудуємо таблицю розподілу ймовірностей системи д. в. в. (X_1, Y) $p_{ij}=P(X_1=i, Y=j)$ (*табл. 4*).

Таблиця 4

X_1	Y										
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*0*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*0*	*0*	*0*	*0*
3	*0*	*0*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*0*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*0*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*0*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*0*
6	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*	*1/36*
	1/36	*1/18*	*1/12*	*1/9*	*5/36*	*1/6*	*5/36*	*1/9*	*1/12*	*1/18*	*1/36*

Тоді взаємна ентропія д. в. в. X_1, Y

$H(X_1,Y)=-\sum_{ij} p_{ij}\log_2 p_{ij}=\log_2 36=2\log_2 6=2(1+\log_2 3)\approx 2+$

$+2\cdot 1{,}585\approx 5{,}17$ (***біт/сим***).

Кількість інформації, що містить д. в. в. $\boldsymbol{Y}$ стосовно д. в. в. $\boldsymbol{X_1}$, обчислимо за формулою $I(Y,X)=\sum_{ij} p_{ij}\log_2 \frac{p_{ij}}{p_i q_j}$. Отже,

$$I(Y,X_1)=\sum_{j=1}^{6}\sum_{1\le j-i\le 6} p_{ij}\log_2\frac{p_{ij}}{p_i q_j}=\frac{1}{36}\sum_{j=1}^{6}\sum_{1\le j-i\le 6}\log_2\left(\frac{1}{36\cdot 1/6\cdot q_j}\right)=$$

$$=\frac{1}{36}(\sum_{j=2}^{7}\log_2\frac{1}{6q_j}+\sum_{j=3}^{8}\log_2\frac{1}{6q_j}+\sum_{j=4}^{9}\log_2\frac{1}{6q_j}+\sum_{j=5}^{10}\log_2\frac{1}{6q_j}+$$

$$+\sum_{j=6}^{11}\log_2\frac{1}{6q_j}+\sum_{j=7}^{12}\log_2\frac{1}{6q_j})=\frac{1}{36}((\log_2\frac{6}{1}+\log_2\frac{6}{2}+\log_2\frac{6}{3}+$$

$$+\log_2\frac{6}{4}+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{6}{6})+(\log_2\frac{6}{2}+\log_2\frac{6}{3}+\log_2\frac{6}{4}+\log_2\frac{6}{5}+$$

$$+\log_2\frac{6}{6}+\log_2\frac{6}{5})+(\log_2\frac{6}{3}+\log_2\frac{6}{4}+\log_2\frac{6}{5}++\log_2\frac{6}{6}+\log_2\frac{6}{5}+$$

$$+\log_2\frac{6}{4})+(\log_2\frac{6}{4}+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{6}{6}+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{6}{4}+\log_2\frac{6}{3})+$$

$$+(\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{6}{6}+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{6}{4}+\log_2\frac{6}{3}+\log_2\frac{6}{2})+(\log_2\frac{6}{6}+$$

$$+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{6}{4}++\log_2\frac{6}{3}+\log_2\frac{6}{2}+\log_2\frac{6}{1}))=\frac{1}{36}(2\log_2 6+$$

$$+4\log_2 3+6\log_2 2+8\log_2\frac{3}{2}+10\log_2\frac{6}{5}++6\log_2 1)=\frac{1}{36}(10+$$

$$+24\log_2 3-10\log_2 5)\approx 0{,}69\,(\textit{біт/сим}).$$

Кількість інформації I(Y, X₁) здебільшого зручніше знайти, скориставшись *властивістю 4* кількості інформації і ентропії:

$$I(X,Y)=HX+HY-H(X,Y).$$

Оскільки $\boldsymbol{Y=X_1+X_2}$, де $\boldsymbol{X_1}$ та $\boldsymbol{X_2}$ – незалежні д. в. в., то

$$H(Y,X_1)=H(X_1+X_2,X_1)=HX_1+HX_2=2HX_1.$$

$$I(Y,X_1)=HY+HX_1-2HX_1=HY-HX_1=\frac{23}{18}+\frac{5}{3}\log_2 3-\frac{5}{18}\times$$

$$\times\log_2 5-(1+\log_2 3)=\frac{5}{18}+\frac{2}{3}\log_2 3-\frac{5}{18}\log_2 5\approx 0{,}69\,(\textit{біт/сим}).$$

Відповідь: $HX_1=HX_2=1+\log_2 3\approx 2{,}585$ (*біт/сим*);

$$I(Y,Y)=HY=\frac{23}{18}++\frac{5}{3}\log_2 3-\frac{5}{18}\log_2 5\approx 3{,}27\,(\textit{біт/сим});$$

$$I(Y,X)=\frac{5}{18}+\frac{2}{3}\log_2 3-\frac{5}{18}\log_2 5\approx 0{,}69\,(\textit{біт/сим}).$$

Приклад_2. Знайти ентропії дискретних випадкових величин (д. в. в.) $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ та кількість інформації, що містить д. в. в. $Z=|X-Y|$ стосовно $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$. $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ – незалежні д. в. в., які задаються такими розподілами (*табл. 1*, *табл. 2*):

Таблиця 1

X	**1**	**2**	**3**	**4**
p	*1/8*	*1/8*	*1/4*	*1/2*

Таблиця 2

Y	**1**	**2**	**3**	**4**
q	*1/4*			

Розв'язання

Скориставшись відповідним рядом розподілу ймовірностей д. в. в. ***X*** та ***Y***, знаходимо їх ентропії.

Ентропія д. в. в. X

$$HX = 2\frac{1}{8}\log_2 8 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{4}3 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{2} = 1{,}75 \ (біт/сим).$$

Ентропія д. в. в. Y $HY = \log_2 4 = 2$ (*біт/сим*).

Побудуємо допоміжну таблицю значень д. в. в. ***Z***=|***X-Y***| та їх ймовірностей (*табл. 3*). Оскільки ***X*** та ***Y*** – незалежні д. в. в., то сумісна ймовірність випадання пар значень (x_i, y_j) $p_{ij} = P(X=i, Y=j) = p(x_i)\cdot p(y_j) = p_i \cdot q_j, \quad i,j=\overline{1,4}$.

Таблиця 3

X	Y				$\sum_j p_{ij} = p_i$
	1	2	3	4	
1	0	1	2	3	1/8
	1/32	1/32	1/32	1/32	
2	1	0	1	2	1/8
	1/32	1/32	1/32	1/32	
3	2	1	0	1	1/4
	1/16	1/16	1/16	1/16	
4	3	2	1	0	1/2
	1/8	1/8	1/8	1/8	
$\sum_i p_{ij} = q_j$	1/4	1/4	1/4	1/4	1

Знайдемо ймовірності системи д. в. в. (***Z=j, X=i***, $j=\overline{0,3}$, $i=\overline{1,4}$):

P(Z=0, X=1)=1/32, P(Z=1, X=1)=1/32, P(Z=2, X=1)=1/32, P(Z=3, X=1)=1/32;
P(Z=0, X=2)=1/32, P(Z=1, X=2)=1/32+1/32=1/16, P(Z=2, X=2)=1/32, P(Z=3, X=2)=0;
P(Z=0, X=3)=1/16, P(Z=1, X=3)=1/16+1/16=1/8, P(Z=2, X=3)=1/16, P(Z=3, X=3)=0;
P(Z=0, X=4)=1/8, P(Z=1, X=4)=1/8, P(Z=2, X=4)=1/8, P(Z=3, X=4)=1/8.

Побудуємо таблицю розподілу ймовірностей системи д. в. в.(***X***, ***Z***) (*табл. 4*).

Таблиця 4

X	Z				$\sum_j p_{ij}$
	0	1	2	3	
1	1/32	1/32	1/32	1/32	1/8
2	1/32	1/16	1/32	0	1/8
3	1/16	1/8	1/16	0	1/4
4	1/8	1/8	1/8	1/8	1/2
$\sum_i p_{ij}$	1/4	11/32	1/4	5/32	1

Тоді взаємна ентропія д. в. в. ***Z*** та ***X***

$$H(Z,X) = -\sum_{ij} p_{ij}\log_2 p_{ij} = 6\cdot\frac{1}{32}\log_2 32 + 3\cdot\frac{1}{16}\log_2 16 +$$
$$+5\cdot\frac{1}{8}\log_2 8 = \frac{3}{16}\cdot 5 + \frac{3}{16}\cdot 4 + \frac{5}{8}\cdot 3 = \frac{57}{16} \approx 3{,}563\,(біт/сим).$$

Скориставшись *табл. 3* або *табл. 4*, побудуємо розподіл ймовірностей д. в. в. ***Z*** (*табл. 5*).

Таблиця 5

Z	0	1	2	3
p_i	*1/4*	*11/32*	*1/4*	*5/32*

Звідси знаходимо ***ентропію д. в. в. Z***:

$$HZ = \frac{2}{4}\log_2 4 + \frac{11}{32}\log_2\frac{32}{11} + \frac{5}{32}\log_2\frac{32}{5} = \frac{1}{2}2 + \frac{11}{32}(5 - \log_2 11) +$$

$$+\frac{5}{32}(5 - \log_2 5) = \frac{7}{2} - \frac{5}{32}\log_2 5 - \frac{11}{32}\log_2 11 \approx 1{,}948\,(\textit{біт/сим}).$$

Кількість інформації, що містить д. в. в. Z стосовно д. в. в. X, знаходимо, скориставшись *властивістю 4* кількості інформації і ентропії:

$$I(Z,X) = HZ + HX - H(Z,X) = \frac{7}{2} - \frac{5}{32}\log_2 5 - \frac{11}{32}\log_2 11 +$$

$$+\frac{7}{4} - \frac{57}{16} = \frac{27}{16} - \frac{5}{32}\log_2 5 - \frac{11}{32}\log_2 11 \approx 0{,}136\,(\textit{біт/сим}).$$

Побудуємо таблицю розподілу ймовірностей системи д. в. в.(Y, Z) (*табл. 6*). Для цього, скориставшись *табл. 3*, обчислимо ймовірності:

P*(*Z*=0, *Y*=1)=*1/32, ***P*(*Z*=1, *Y*=1)=*1/32***, ***P*(*Z*=2, *Y*=1)=*1/16***, ***P*(*Z*=3, *Y*=1)=*1/8***; ***P*(*Z*=0, *Y*=2)=*1/32***, ***P*(*Z*=1, *Y*=2)=*1/32*+*1/16*=*3/32***, ***P*(*Z*=2, *Y*=2)=*1/8***, ***P*(*Z*=3, *Y*=2)=*0***; ***P*(*Z*=0, *Y*=3)=*1/16***, ***P*(*Z*=1, *Y*=3)=*1/32*+*1/8*=*5/32***, ***P*(*Z*=2, *Y*=3)=*1/32***, ***P*(*Z*=3, *Y*=3)=*0***; ***P*(*Z*=0, *Y*=4)=*1/8***, ***P*(*Z*=1, *Y*=4)=*1/16***, ***P*(*Z*=2, *Y*=4)=*1/32***, ***P*(*Z*=3, *Y*=4)=*1/32***.

Таблиця 6

Y	Z				$\sum_j p_{ij}$
	0	1	2	3	
1	*1/32*	*1/32*	*1/16*	*1/8*	*1/4*
2	*1/32*	*3/32*	*1/8*	*0*	*1/4*
3	*1/16*	*5/32*	*1/32*	*0*	*1/4*
4	*1/8*	*1/16*	*1/32*	*1/32*	*1/4*
$\sum_i p_{ij}$	*1/4*	*11/32*	*1/4*	*5/32*	1

Тоді взаємна ентропія д. в. в. Z та Y

$$H(Z,Y) = 6\frac{1}{32}\log_2 32 + 3\cdot\frac{1}{16}\log_2 16 + 3\frac{1}{8}\log_2 8 + \frac{3}{32}\log_2\frac{32}{3} +$$

$$+\frac{5}{32}\log_2\frac{32}{5} = \frac{3}{16}\cdot 5 + \frac{3}{16}\cdot 4 + \frac{3}{8}\cdot 3 + \frac{3}{32}(5 - \log_2 3) + \frac{5}{32}(5 -$$

$$-\log_2 5) = \frac{65}{16} - \frac{3}{32}\log_2 3 - \frac{5}{32}\log_2 5 \approx 4{,}063 - \frac{3}{32}\cdot 1{,}585 - \frac{5}{32}\times$$

$$\times 2{,}322 \approx 3{,}551\,(\textit{біт/сим}).$$

Отже, ***кількість інформації, що містить д. в. в. Z стосовно д. в. в. Y***

$$I(Z,Y) = HZ + HY - H(Z,Y) = \frac{7}{2} - \frac{5}{32}\log_2 5 - \frac{11}{32}\log_2 11 + 2 -$$

$$-\left(\frac{65}{16} - \frac{3}{32}\log_2 3 - \frac{5}{32}\log_2 5\right) = \frac{23}{16} + \frac{3}{32}\log_2 3 - \frac{11}{32}\log_2 11 \approx$$

$$\approx 1{,}438 + \frac{3}{32}\cdot 1{,}585 - \frac{11}{32}\cdot 3{,}459 \approx 0{,}397\ (\textit{біт/сим}).$$

Відповідь: $\boldsymbol{HX} = 1{,}75$ (*біт/сим*); $\boldsymbol{HY} = 2$ (*біт/сим*); $\boldsymbol{HZ} = \frac{7}{2} - \frac{5}{32}\log_2 5 - \frac{11}{32}\log_2 11 \approx 1{,}948$ (*біт/сим*);

$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}) = \frac{27}{16} - \frac{5}{32}\log_2 5 - \frac{11}{32}\log_2 11 \approx 0{,}136$ (*біт/сим*);

$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y}) = \frac{23}{16} + \frac{3}{32}\log_2 3 - \frac{11}{32}\log_2 11 \approx 0{,}397$ (*біт/сим*).

Завдання до лабораторної роботи №2

Завдання 1.

Дискретні випадкові величини (д. в. в.) X_1 та X_2 визначаються підкиданням двох ідеальних тетраедрів, грані яких позначені числами від **1** до **4**. Знайти, скільки інформації про д. в. в. X_1 містить д. в. в. $Z=X_1*X_2$, а також ентропію HZ.

Завдання 2.

Знайти ентропії дискретних випадкових величин (д. в. в.) X, Y, Z і кількість інформації, що містить д. в. в. $Z=X+Y$ стосовно д. в. в. Y. X та Y незалежні д. в. в., задані такими розподілами:

X	**0**	**1**	**3**	**4**
P	*1/8*	*1/8*	*1/4*	*1/2*

Y	**-2**	**2**
P	*3/8*	*5/8*

.

Завдання 3.

Дискретні випадкові величини (д. в. в.) X_1 та X_2 визначаються підкиданням двох ідеальних тетраедрів, грані яких позначені числами від **1** до **4**. Д. в. в. Y дорівнює сумі чисел, що випали при підкиданні цих тетраедрів, тобто $Y=X_1+X_2$. Знайти кількість взаємної інформації $I(X, Y)$, ентропії HX_1, HY.

Завдання 4.

Дискретна випадкова величина (д. в. в.) X визначається кількістю очок, які випадуть при підкиданні грального кубика, а д. в. в. $Y=0$, якщо кількість очок, що випали, непарна, і $Y=1$, якщо кількість очок парна. Знайти кількість інформації $I(X, Y)$ та $I(Y, Y)$.

Завдання 5.

Знайти ентропії д. в. в. X, Y, Z і кількість інформації, що містить д. в. в. $Z=2X+Y$ стосовно X та Y. X, Y – незалежні д. в. в., задані такими розподілами ймовірностей:

X	**-1**	**0**	**1**
P	*1/4*	*1/2*	*1/4*

Y	**0**	**1**	**2**
P	*1/6*	*2/3*	*1/6*

.

Завдання 6.

Дискретна випадкова величина (д. в. в.) X_1 може набувати три значення: **-1**, **0** і **1** з однаковими ймовірностями. Д. в. в. X_2 з однаковими ймовірностями може набувати значення **0**, **1** і **2**. X_1 і X_2 – незалежні, $Y=X_1^2+X_2$. Знайти кількість інформації $I(X_1,Y)$, $I(X_2,Y)$ і ентропії HX_1, HX_2, HY.

Завдання 7.

Дискретна випадкова величина (д. в. в.) X з різною ймовірністю може набувати значень від **1** до **8**. Д. в. в. Y набуває значення **0**, якщо X парне, і **1**, якщо X непарне. Знайти кількість інформації $I(Y, X)$ і ентропію HX, якщо д. в. в. X задана таким розподілом ймовірностей:

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
P	*0,1*	*0,2*	*0,1*	*0,05*	*0,1*	*0,05*	*0,3*	*0,1*

.

Контрольні питання

1. Що таке ентропія?
2. Визначте властивості ентропії.
3. За яких умов ентропія максимальна?

Лабораторна робота №3

Тема: Умовна ентропія

Мета: навчатися визначати часткову і загальну умовну ентропію дискретного джерела повідомлень

Теоретичні відомості

Умовна ентропія

Раніше отримана формула ентропії визначає її середньою кількістю інформації, що припадає на одне повідомлення джерела ***статистично незалежних повідомлень.*** Така ентропія називається ***безумовною***.

Як відомо з відповідного розділу математичної статистики, мірою порушення статистичної незалежності повідомлень x і y є ***умовна ймовірність*** $p(x/y)$ появи повідомлення x_i за умови, що вже вибрано повідомлення y_j або умовна ймовірність появи повідомлення y_j, якщо вже отримане повідомлення x_i, причому в загальному випадку $p(x/y)\neq p(y/x)$.

Умовну ймовірність можна отримати з безумовної ймовірності $p(x)$ чи $p(y)$ та сумісної ймовірності системи в. в. $p(x, y)$ за формулою множення ймовірностей:

$$p(x, y)=p(x)\cdot p(y/x),$$

$$p(x, y)=p(y)\cdot p(y/x),$$

звідси

$$p(y/x) = p(x, y)/p(x),$$

$$p(x/y) = p(x, y)/p(y).$$

В окремому випадку для статистично незалежних повідомлень маємо: $\boldsymbol{p(y/x)=p(y)}$, $\boldsymbol{p(x/y)=p(x)}$.

При ***існуванні статистичної залежності*** між повідомленнями джерела факт вибору одного з повідомлень зменшує або збільшує ймовірності вибору інших повідомлень до ***умовних ймовірностей***. Відповідно змінюється й кількість інформації, що міститься в кожному з цих повідомлень. Ентропія такого джерела також змінюється відповідним чином, причому обчислюється ентропія за тією самою формулою, але вже з ***урахуванням умовних ймовірностей***. Така ентропія називається ***умовною***.

Властивості умовної ентропії

1) якщо джерела повідомлень X і Y статистично незалежні, то умовна ентропія джерела X стосовно Y дорівнює безумовній ентропії джерела X і навпаки:

$$\mathbf{H(X/Y)=H(X)},\ \mathbf{H(Y/X)=H(Y)};$$

2) якщо джерела повідомлень X і Y настільки статистично взаємозв'язані, що виникнення одного з повідомлень спричиняє безумовну появу іншого, то їхні умовні ентропії дорівнюють нулю:

$$\mathbf{H(X/Y)=H(Y/X)=0};$$

3) ентропія джерела статистично взаємозалежних повідомлень (умовна ентропія) менша від ентропії джерела незалежних повідомлень (безумовної ентропії):

$$\mathbf{H(X/Y)<H(X)},\ \mathbf{H(Y/X)<H(Y)}.$$

Часткова умовна ентропія

Часткова умовна ентропія - це кількість інформації, що припадає на одне повідомлення джерела X за умови встановлення факту вибору джерелом Y повідомлення y_j, або кількість інформації, що припадає на одне повідомлення джерела Y за умови, що відомий стан джерела X:

$$H(X/y_j) = -\sum_i p(x_i/y_j)\log_2 p(x_i/y_j),\ j = 1\ldots l$$
$$H(Y/x_i) = -\sum_j p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i),\ i = 1\ldots k$$

де $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_l\}$- алфавіти повідомлень; x_i - певне повідомлення джерела *X*, щодо якого визначається часткова умовна ентропія $H(Y/x_i)$ алфавіту *Y* за умови вибору джерелом *X* повідомлення x_i; y_j - певне повідомлення джерела *Y*, щодо якого визначається часткова умовна ентропія $H(X/y_j)$ алфавіту *X* за умови вибору повідомлення y_j; *i* - номер повідомлення з алфавіту *X; j* - номер повідомлення з алфавіту *Y*; $p(x_i/y_j)$, $p(y_j/x_i)$ – умовні імовірності.

Загальна умовна ентропія

Визначається так:

$$H(X/Y) = \sum_j p(y_j)H(X/y_j),$$
$$H(Y/X) = \sum_i p(x_i)H(Y/x_i).$$

Отже, загальна умовна ентропія – це середньостатистична кількість інформації (математичне сподівання), що припадає на будь-яке повідомлення джерела *X*, якщо відомий його статистичний взаємозв'язок з джерелом *Y*. Так само загальна умовна ентропія - це середня кількість інформації, яка міститься в повідомленнях джерела *Y* за наявності статистичного взаємозв'язку з джерелом *X*.

Приклади виконання завдань

Приклад_1. Матриця умовних ймовірностей каналу зв'язку між джерелом ***X*** і спостерігачем ***Y*** має вигляд

$$p(y_j/x_i) = \begin{bmatrix} 0{,}97 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}86 & 0{,}04 \\ 0{,}03 & 0{,}08 & 0{,}89 \end{bmatrix}.$$

Знайти часткову та загальну умовні ентропії повідомлень у цьому каналі, якщо задано розподіл ймовірностей джерела P_x={0,65; 0,3; 0,05}.

Розв'язання

Умовні ймовірності $p(y_j/x_i)$ при ***i=j*** характеризують вплив завад у каналі зв'язку.

Часткова умовна ентропія спостерігача ***Y*** щодо джерела ***X*** визначається за формулою

$$H(Y/x_i) = -\sum_j p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i).$$

Знайдемо ***часткові умовні ентропії*** для всіх x_i, ***i***=1, …,3

$$H(Y/x_1) = -(0{,}97\log_2 0{,}97 + 0{,}02\log_2 0{,}02 + 0{,}01\log_2 0{,}01) = 1{,}98 + 2\times$$
$$\times\log_2 5 - 0{,}97\log_2 97 \approx 1{,}98 + 2\cdot 2{,}322 - 0{,}97\cdot 6{,}6 \approx 0{,}222\,(\text{біт/сим});$$

$$H(Y/x_2) = -(0{,}1\log_2 0{,}1 + 0{,}86\log_2 0{,}86 + 0{,}04\log_2 0{,}04) = 0{,}96 + 1{,}9\times$$
$$\times\log_2 5 - 0{,}86\log_2 43 \approx 0{,}96 + 1{,}9\cdot 2{,}322 - 0{,}86\cdot 5{,}426 \approx 0{,}705\,(\text{біт/сим});$$

$$H(Y/x_3) = -(0{,}03\log_2 0{,}03 + 0{,}08\log_2 0{,}08 + 0{,}89\log_2 0{,}89) =$$
$$= 1{,}76 + 2\log_2 5 - 0{,}03\log_2 3 - 0{,}89\log_2 89 \approx 1{,}76 + 2\cdot 2{,}322 - 0{,}03\times$$
$$\times{,}585 - 0{,}89\cdot 6{,}476 \approx 0{,}593\,(\text{біт/сим}).$$

Знаходимо ***загальну умовну ентропію*** дискретної випадкової величини (д. в. в.) $\boldsymbol{Y}$ стосовно д. в. в. $\boldsymbol{X}$:

$$H(Y/X)=\sum_i p(x_i)H(Y/x_i)=0{,}65\cdot 0{,}222+0{,}3\cdot 0{,}705+0{,}05\times$$
$$\times 0{,}593\approx 0{,}385$$ (*біт/сим*).

Скориставшись формулою множення ймовірностей

$$\boldsymbol{p(x_i, y_j)=p(x_i)\cdot p(y_j/x_i)},$$

побудуємо матрицю ймовірностей системи д. в. в. $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$:

$$p(x,y)=\begin{bmatrix}0{,}97\cdot 0{,}65 & 0{,}02\cdot 0{,}65 & 0{,}01\cdot 0{,}65\\ 0{,}1\cdot 0{,}3 & 0{,}86\cdot 0{,}3 & 0{,}04\cdot 0{,}3\\ 0{,}03\cdot 0{,}05 & 0{,}08\cdot 0{,}05 & 0{,}89\cdot 0{,}05\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}6305 & 0{,}013 & 0{,}0065\\ 0{,}03 & 0{,}258 & 0{,}012\\ 0{,}0015 & 0{,}004 & 0{,}0445\end{bmatrix}.$$ *Перевіряємо умову нормування*: $\sum_{ij}\boldsymbol{p_{ij}}$ = 0,6305+0,013+0,0065+

+0,03+0,258+0,012+0,0015+0,004+0,0445=1.

З матриці сумісних ймовірностей $\boldsymbol{p(x, y)}$ знаходимо взаємну ентропію д. в. в. $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$:

$$H(X,Y)=-\bigl(0{,}6306\log_2 0{,}6305+0{,}013\log_2 0{,}013+0{,}0065\log_2 0{,}0065+$$
$$+0{,}03\log_2 0{,}03+0{,}258\log_2 0{,}258+0{,}012\log_2 0{,}012+0{,}0015\times$$
$$\times\log_2 0{,}0015+0{,}004\log_2 0{,}004+0{,}0445\log_2 0{,}0445\bigr)=3{,}363+2{,}97\times$$
$$\times\log_2 5-0{,}3015\log_2 3-0{,}65\log_2 13-0{,}258\log_2 43-0{,}0445\log_2 89-$$
$$-0{,}6305\log_2 97\approx 3{,}363+2{,}97\cdot 2{,}322-0{,}3015\cdot 1{,}585-0{,}65\cdot 3{,}7-$$
$$-0{,}258\cdot 5{,}426--0{,}0445\cdot 6{,}476-0{,}6305\cdot 6{,}6\approx 1{,}527$$ (*біт/сим*).

Скориставшись заданим рядом розподілу ймовірностей д. в. в. $\boldsymbol{X}$, знайдемо ***ентропію X***:

$$HX=-\bigl(0{,}65\log_2 0{,}65+0{,}3\log_2 0{,}3+0{,}05\log_2 0{,}05\bigr)=1{,}7+\log_2 5-0{,}3\log_2 3-$$
$$-0{,}65\log_2 13\approx 1{,}7+2{,}322-0{,}3\cdot 1{,}585-0{,}65\cdot 3{,}7\approx 1{,}142$$ (*біт/сим*).

Перевірка: $\boldsymbol{H(X, Y)=HX+H(Y/X)}$=1,142+0,385≈1,527 (*біт/сим*).

Виконавши в матриці сумісних ймовірностей $\boldsymbol{p_{ij}= p(x, y)}$ згортку за $\boldsymbol{i}$, отримаємо приблизний безумовний розподіл д. в. в. $\boldsymbol{Y}$:

$$p(y_1)=\sum_i p(x_i,y_1)=0{,}6305+0{,}03+0{,}0015=0{,}662;$$

$$p(y_2)=\sum_i p(x_i,y_2)=0{,}013+0{,}258+0{,}004=0{,}275;$$

$$p(y_3)=\sum_i p(x_i,y_3)=0{,}0065+0{,}012+0{,}0445=0{,}063.$$

Перевіряємо умову нормування

$p(y_1)+p(y_2)+p(y_3)$=0,662+0,275+0,063=1.

Знаючи приблизний безумовний закон розподілу $\boldsymbol{P_y}$={0,662; 0,275; 0,063}, знайдемо матрицю умовних ймовірностей $\boldsymbol{p(x/y)}$, скориставшись формулою

$$p(x/y)=\frac{p(x,y)}{p(y)}.$$

$$p(x_i/y_j)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\frac{0{,}6305}{0{,}662} & \frac{0{,}013}{0{,}275} & \frac{0{,}0065}{0{,}063}\\ \frac{0{,}03}{0{,}662} & \frac{0{,}258}{0{,}275} & \frac{0{,}012}{0{,}063}\\ \frac{0{,}0015}{0{,}662} & \frac{0{,}004}{0{,}275} & \frac{0{,}0445}{0{,}063}\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3\end{array}\end{array}=\begin{bmatrix}0{,}9524 & 0{,}0473 & 0{,}1032\\ 0{,}0453 & 0{,}9382 & 0{,}1905\\ 0{,}0023 & 0{,}0145 & 0{,}7063\end{bmatrix}.$$

Перевіряємо умови нормування:

$$\sum_i p(x_i/y_1)=0{,}9524+0{,}0453+0{,}0023=1;$$

$$\sum_i p(x_i/y_2)=0{,}0473+0{,}9382+0{,}0145=1;$$

$$\sum_i p(x_i/y_3)=0{,}1032+0{,}1905+0{,}7063=1.$$

Виходячи з розподілу безумовних ймовірностей д. в. в. ***Y***, знайдемо ***ентропію Y***:

$$HY=-\left(0{,}662\log_2 0{,}662+0{,}275\log_2 0{,}275+0{,}063\log_2 0{,}063\right)\approx$$

$\approx 1{,}157$ (*біт/сим*).

З матриці умовних ймовірностей ***p(x/y)*** знайдемо ***часткові умовні ентропії*** д. в. в. ***X*** стосовно д. в. в. ***Y***:

$$H(X/y_1)=-\left(0{,}9524\log_2 0{,}9524+0{,}0453\log_2 0{,}0453+0{,}0023\times\right.$$

$\left.\times\log_2 0{,}0023\right)\approx 0{,}289$ (*біт/сим*);

$$H(X/y_2)=-\left(0{,}0473\log_2 0{,}0473+0{,}9382\log_2 0{,}9382+0{,}0145\times\right.$$

$\left.\times\log_2 0{,}0145\right)\approx 0{,}383$ (*біт/сим*);

$$H(X/y_3)=-\left(0{,}1032\log_2 0{,}1032+0{,}1905\log_2 0{,}1905+0{,}7063\times\right.$$

$\left.\times\log_2 0{,}7063\right)\approx 1{,}148$ (*біт/сим*).

Тоді ***загальна умовна ентропія X стосовно Y***

$$H(X/Y)=\sum_j p(y_j)H(X/y_j)=0{,}662\cdot 0{,}289+0{,}275\cdot 0{,}383+$$

$+\,0{,}063\cdot 1{,}148\approx 0{,}369$ (*біт/сим*).

Перевірка: ***H(X, Y)=HY+H(X/Y)***=1,157+0,369=1,527 (*біт/сим*).

Відповідь: $H(Y/x_1)\approx 0{,}222$ (*біт/сим*); $H(Y/x_2)\approx 0{,}705$ (*біт/сим*);
$H(Y/x_3)\approx 0{,}593$ (*біт/сим*); $H(Y/X)\approx 0{,}385$ (*біт/сим*); $H(X/y_1)\approx 0{,}289$ (*біт/сим*);
$H(X/y_2)\approx 0{,}383$ (*біт/*сим); $H(X/y_3)\approx 1{,}148$ (*біт/сим*); $H(X/Y)\approx 0{,}369$ (*біт/сим*).

Завдання на лабораторну роботу №3

Завдання 1.

Дослідження каналу зв'язку між джерелом X і спостерігачем Y виявило такі умовні ймовірності вибору повідомлень $y_j \in Y$:

$$p(y_j / x_i) = \begin{bmatrix} 0{,}97 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}86 & 0{,}04 \\ 0{,}03 & 0{,}08 & 0{,}89 \end{bmatrix}.$$

Знайти часткові $H(X/y_j)$ і загальну $H(X/Y)$ умовні ентропії повідомлень у цьому каналі, якщо джерело задане ансамблем $\{x_1, x_2, x_3\}$ з ймовірностями $\{0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}5\}$.

Завдання 2.

Два статистично залежних джерела X та Y визначаються матрицею сумісних ймовірностей

$$p(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}05 \end{bmatrix}.$$

Знайти часткові й загальну умовні ентропії $H(X/y_j)$, $H(X/Y)$ і взаємну інформацію $I(X, Y)$.

Завдання 3.

Матриця сумісних ймовірностей каналу зв'язку має вигляд

$$p(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} 0{,}29 & 0{,}005 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}19 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}005 & 0{,}49 \end{bmatrix}.$$

Знайти часткові й загальну умовні ентропії $H(X/y_j)$, $H(X/Y)$ і взаємну інформацію $I(X, Y)$.

Завдання 4

Знайти ентропії д. в. в. X, Y, Z і кількість інформації, що містить д. в. в. $Z=2X+Y$ стосовно X та Y. X, Y – незалежні д. в. в., задані такими розподілами ймовірностей:

X	-1	0	1
P	*1/4*	*1/2*	*1/4*

Y	0	1	2
P	*1/6*	*2/3*	*1/6*

.

Завдання 5

Дискретна випадкова величина (д. в. в.) X_1 може набувати три значення: -1, 0 і 1 з однаковими ймовірностями. Д. в. в. X_2 з однаковими ймовірностями може набувати значення 0, 1 і 2. X_1 і X_2 – незалежні, $Y=X_1^2+X_2$. Знайти кількість інформації $I(X_1,Y)$, $I(X_2,Y)$ і ентропії HX_1, HX_2, HY.

Завдання 6

Дискретна випадкова величина (д. в. в.) X з різною ймовірністю може набувати значень від 1 до 8. Д. в. в. Y набуває значення 0, якщо X парне, і 1, якщо X непарне. Знайти кількість інформації $I(Y, X)$ і ентропію HX, якщо д. в. в. X задана таким розподілом ймовірностей:

X	1	2	3	4	5	6	7	8
P	*0,1*	*0,2*	*0,1*	*0,05*	*0,1*	*0,05*	*0,3*	*0,1*

.

Контрольні питання

1. Що таке умовна ентропія?
2. Які є різновиди умовної ентропії?
3. Які основні властивості умовної ентропії?
4. Як визначається часткова умовна ентропія?
5. Як визначається загальна умовна ентропія?

Лабораторна робота №4

Тема: Ентропія об’єднаних джерел

Мета: навчатися визначати ентропію об’єднання двох джерел та кількість інформації, що передається в каналі зв’язку

Теоретичні відомості

Ентропія об'єднання двох джерел інформації

Ентропію *H(X, Y)* об'єднання двох джерел інформації *X* і *Y* знаходять через імовірності $p(x_i, y_j)$ системи випадкових повідомлень x_i, y_j для всіх $i=1...k$, і $j=1...l$. Для цього складається матриця ймовірностей системи двох статистично залежних джерел

$$p(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} p(x_1, y_1)\ p(x_1, y_2) \dots p(x_1, y_l) \\ p(x_2, y_1)\ p(x_2, y_2) \dots p(x_2, y_l) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ p(x_k, y_1)\ p(x_k, y_2)\ \dots p(x_k, y_l) \end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

Ентропія об'єднання двох джерел H(X, Y) (*взаємна ентропія*) - це середня кількість інформації, що припадає на два будь-які повідомлення джерел *X* і *Y*:

$$H(X,Y) = -\sum_{ij} p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i, y_j). \tag{8.2}$$

З рівності $\boldsymbol{p(x_i, y_j)= p(y_j, x_i)}$ випливає, що

$$\boldsymbol{H(X, Y)=H(Y, X)}.$$

Запишемо вираз (8.2) так:

$$H(X,Y) = -\sum_{ij} p(x_i) p(y_j / x_i) \log_2 \left[p(x_i) p(y_j / x_i) \right] =$$
$$= -\sum_{ij} p(x_i) p(y_j / x_i) \log_2 p(x_i) - \sum_{ij} p(x_i) p(y_j / x_i) \log_2 p(y_j / x_i) =$$
$$= -\left\{ \sum_i p(x_i) \log_2 p(x_i) + \sum_i p(x_i) \sum_j p(y_j / x_i) \log_2 p(y_j / x_i) \right\}$$

Перший доданок цього виразу відповідає безумовній ентропії ***H(X)***, а другий - умовній ***H(Y/X)***. Звідси

$$\boldsymbol{H(X, Y)=H(X)+H(Y/X)}. \tag{8.3}$$

Взаємної ентропії ***H(X, Y)*** має вигляд

$$\boldsymbol{H(X, Y)=H(Y)+H(X/Y)}, \tag{8.4}$$

звідси

$$\boldsymbol{H(Y/X)=H(X,Y)-H(X)}, \tag{8.5}$$

$$\boldsymbol{H(X/Y)=H(X,Y)-H(Y)}. \tag{8.6}$$

Кількість інформації, що припадає на одне повідомлення, передане по каналу зв'язку джерелом ***X*** спостерігачу ***Y***, за наявності завад і статистичного взаємозв'язку ансамблів ***X*** і ***Y*** і *властивості 4* кількості інформації і ентропії знаходиться за формулою

$$\boldsymbol{I(X,Y)=H(Y)+H(X)-H(X,Y)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)}. \tag{8.7}$$

Властивості ентропії об'єднання двох джерел інформації:

1) *при статистичній незалежності джерел* ***X*** *і* ***Y*** *їх взаємна ентропія дорівнює сумі ентропій кожного з джерел*, *тобто* ***H(X, Y)=H(X)+H(Y)***;

2) *при повній статистичній залежності джерел* ***X*** *і* ***Y*** *їх взаємна ентропія дорівнює безумовній ентропії одного з джерел, тобто* ***H(X,Y)=H(X)=H(Y)***;

3) *взаємна ентропія статистично залежних джерел* ***X*** *і* ***Y*** *менша суми безумовних ентропій кожного з них, тобто* ***H*(*X*, *Y*) ≤ *H*(*X*)+*H*(*Y*)**.

Приклади виконання завдань

Приклад_1. Ансамблі повідомлень джерел А (А={a_1, a_2, a_3, a_4) та В (В={ b_1, b_2, b_3, b_4) поєднанні. Ймовірності сумісних повідомлень $p(a_i,b_j)$ такі:

$$p(a_i,b_j)=\begin{Bmatrix} 0{,}2 & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}16 & 0{,}03 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}04 & 0{,}17 & 0{,}02 \\ 0{,}03 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{Bmatrix}$$

Визначити ентропію об'єднання цих джерел.

<u>Розв'язання</u>

$$H(A,B)=-\sum_i\sum_j p(a_i,b_j)\log p(a_i,b_j).$$

$$\mathrm{H}(A,B)=-(0{,}2\cdot\log_2 0{,}2+0{,}01\cdot\log_2 0{,}01+0{,}02\cdot\log_2 0{,}02+0{,}03\cdot\log_2 0{,}03+$$

$$+0{,}02\cdot\log_2 0{,}02+0{,}16\cdot\log_2 0{,}16+0{,}03\cdot\log_2 0{,}03+0{,}01\cdot\log_2 0{,}01+$$

$$+0{,}01\cdot\log_2 0{,}01+0{,}04\cdot\log_2 0{,}04+0{,}17\cdot\log_2 0{,}17+0{,}02\cdot\log_2 0{,}02+$$

$$+0{,}03\cdot\log_2 0{,}03+0{,}05\cdot\log_2 0{,}05+0{,}1\cdot\log_2 0{,}1+0{,}1\cdot\log_2 0{,}1)=$$

$$+0{,}03\cdot\log_2 0{,}03+0{,}05\cdot\log_2 0{,}05+0{,}1\cdot\log_2 0{,}1+0{,}1\cdot\log_2 0{,}1)=3{,}381$$

Завдання на лабораторну роботу №4

Завдання 1

Два статистично незалежних джерела А та В визначаються матрицею сумісних ймовірностей

$$p(a_i, b_j) = \left\{\begin{matrix} 0{,}2 & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}16 & 0{,}03 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}04 & 0{,}17 & 0{,}02 \\ 0{,}03 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{matrix}\right\}$$

Визначити часткову та загальну умовну ентропію, ентропію об'єднання цих джерел, а також кількість інформацій, що припадає на пару повідомлень (a_i, b_j).

Завдання 2

Два статистично незалежних джерела А та В визначаються матрицею сумісних ймовірностей

$$p(a_i, b_j) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}11 \\ 0{,}07 & 0{,}24 & 0{,}1 \\ 0{,}02 & 0{,}07 & 0{,}04 \end{bmatrix}$$

Визначити часткову та загальну умовну ентропію, ентропію об'єднання цих джерел, а також кількість інформацій, що припадає на пару повідомлень (a_i, b_j).

Завдання 3

Матриця сумісних ймовірностей каналу зв'язку має вигляд

$$p(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} 0{,}29 & 0{,}005 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}19 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}005 & 0{,}49 \end{bmatrix}.$$

Знайти часткові й загальну умовні ентропії $\boldsymbol{H(X/y_j)}$, $\boldsymbol{H(X/Y)}$ і ентропію об'єднання цих джерел.

Контрольні питання

1. Як визначається ентропія об'єднання двох джерел?
2. Які основні властивості ентропії об'єднання двох джерел?
3. Як визначається кількість інформації на одне повідомлення двох статистично взаємозв'язаних джерел?

Лабораторна робота №5

Тема: Характеристики дискретних джерел інформації

Мета: навчатися визначати продуктивність дискретного джерела повідомлень, швидкість передачі інформації каналами зв'язку.

Теоретичні відомості

Продуктивність дискретного джерела інформації. Швидкість передачі інформації

Нехай дискретне джерело X видає послідовність повідомлень $\{x_i\}$, заданих рядом ймовірностей $\{p_i\}$.

Якщо джерелом вибирається одне повідомлення x_i, то ним виробляється певна кількість інформації. Тоді швидкість утворення джерелом інформації повідомлень - ***продуктивність джерела*** щодо конкретного повідомлення можна визначити так:

$$V_{дж.i} = \frac{I(X_i)}{\tau_i}, \tag{9.1}$$

де через τ_i позначено проміжок часу вибору повідомлення x_i.

Оскільки джерелом за деякий часовий інтервал вибирається велика кількість повідомлень і в загальному випадку $\tau_i \neq \tau_j$, то продуктивність джерела інформації прийнято характеризувати середнім значенням

$$V_{дж} = \frac{1}{\tau_{сер}} \sum_{i=1}^{k} p_i I(X_i) = \frac{H(X)}{\tau_{ср}}, \tag{9.2}$$

де $\tau_{сер}$ – середній час вибору джерелом одного повідомлення.

Оскільки на вибір кожного повідомлення y_j джерелом Y витрачається час τ, то ***швидкість передачі інформації по каналу зв'язку*** знаходиться за формулою

$$V = \frac{I(X,Y)}{\tau}. \tag{9.3}$$

Інформаційні втрати при передачі інформації по дискретному каналу зв'язку

Інформаційні втрати в каналі визначаються умовною ентропією одного джерела щодо іншого, а кількість переданої інформації - безумовною ентропією джерела і інформаційними втратами

$$I(X,Y)=HX-H(X/Y)=HX-(H(X,Y)-HY)=HX+HY-H(X,Y), \tag{9.4}$$

$$I(Y,X)=HY-H(Y/X)=HY-(H(Y,X)-HX)=HY+HX-H(Y,X), \tag{9.5}$$

Пропускна здатність дискретного каналу. Основна теорема про кодування дискретного джерела.

Максимально можлива швидкість передачі інформації по каналу називається ***пропускною здатністю***, або ***ємністю каналу зв'язку C***.

Тоді пропускна здатність каналу визначається за формулою

$$C = \frac{1}{\tau}\left[\log_2 k - H(X/Y)\right]. \tag{9.6}$$

Приклади виконання завдань

Приклад_1. Матриця сумісних ймовірностей каналу зв'язку має вигляд

$$p(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}15 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{bmatrix}.$$

Знайти інформаційні втрати, пропускну здатність і швидкість передачі інформації по дискретному каналу зв'язку, якщо час передачі одного повідомлення τ=10^{-3} *с*.

<u>Розв'язання</u>

Інформаційні втрати в каналі зв'язку визначаються умовною ентропією $H(X/Y)$ одного джерела щодо іншого.

Для того щоб обчислити повну умовну ентропію $H(X/Y)$, потрібно знайти розподіли безумовних ймовірностей $p(x_i)$, $p(y_j)$ і побудувати матрицю умовних ймовірностей $p(x_i/y_j)$.

Безумовний закон розподілу $p(x_i)$ знаходимо, виконавши в матриці сумісних ймовірностей $p(x_i, y_j)$ згортку за j:

$p(x_1)$= 0,15+0,15+0=0,3, i=1;
$p(x_2)$= 0+0,25+0,1=0,35, i=2;
$p(x_3)$= 0+0,2+0,15=0,35, i=3.

Перевіряємо умову нормування

$p(x_1)+p(x_2)+p(x_3)$=0,3+0,35+0,35=1.

Виходячи з розподілу безумовних ймовірностей д. в. в. X, обчислимо її ентропію:

$HX = -\left(0{,}3\log_2 0{,}3 + 0{,}35\log_2 0{,}35 + 0{,}35\log_2 0{,}35\right) \approx 1{,}58\,1$ (*біт/сим*).

Безумовний закон розподілу $p(y_j)$ знаходимо, виконавши в матриці сумісних ймовірностей $p(x_i, y_j)$ згортку за i:

$p(y_1)$= 0,15+0+0=0,15, j=1;
$p(y_2)$= 0,15+0,25+0,2=0,6, j=2;
$p(y_3)$= 0+0,1+0,15=0,25, j=3.

Перевіряємо умову нормування:

$p(y_1)+p(y_2)+p(y_3)$=0,15+0,6+0,25=1.

Матрицю умовних ймовірностей знаходимо, скориставшись формулою множення ймовірностей $p(x_i, y_j)=p(y_j)\cdot p(x_i/y_j)$.

Звідси випливає, що $p(x_i / y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$.

Отже, матриця умовних ймовірностей $p(x_i/y_j)$ знаходиться так:

$$p(x_i / y_j) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \dfrac{0{,}15}{0{,}15} & \dfrac{0{,}15}{0{,}6} & \dfrac{0}{0{,}25} \\ \dfrac{0}{0{,}15} & \dfrac{0{,}25}{0{,}6} & \dfrac{0{,}1}{0{,}25} \\ \dfrac{0}{0{,}15} & \dfrac{0{,}2}{0{,}6} & \dfrac{0{,}15}{0{,}25} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}4167 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}3333 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Для матриці умовних ймовірностей $p(x_i/y_j)$ повинна виконуватися умова нормування $\sum_i p(x_i / y_j) = 1$.

Перевіряємо цю умову:

$$\sum_i p(x_i / y_1) = 1 + 0 + 0 = 1,$$
$$\sum_i p(x_i / y_2) = 0{,}25 + 0{,}42 + 0{,}33 = 1,$$
$$\sum_i p(x_i / y_3) = 0 + 0{,}4 + 0{,}6 = 1.$$

Скориставшись матрицею умовний ймовірностей ***p***(***x**ᵢ*/***y**ⱼ*), обчислимо часткові умовні ентропії ***X*** стосовно ***Y***:

$H(X / y_1) = -\sum_i p(x_i / y_1)\log_2 p(x_i / y_1) = -\log_2 1 = 0$ (*біт/сим*);

$H(X / y_2) = -\sum_i p(x_i / y_2)\log_2 p(x_i / y_2) = -(0{,}25\log_2 0{,}25 +$
$+ 0{,}42\log_2 0{,}42 + 0{,}33\log_2 0{,}33) \approx 1{,}555$ (*біт/сим*);

$H(X / y_3) = -\sum_i p(x_i / y_3)\log_2 p(x_i / y_3) = -(0 + 0{,}4\log_2 0{,}4 +$
$+ 0{,}6\log_2 0{,}6) \approx 0{,}971$ (*біт/сим*).

Виходячи з безумовного закону розподілу д. в. в. ***Y*** та знайдених часткових умовних ентропій ***H(X/yⱼ)***, відшукуємо їх математичне сподівання – загальну умовну ентропію
$H(X / Y) = \sum_j p(y_j) \cdot H(X / y_j) = 0{,}15 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 1{,}555 + 0{,}25 \cdot 0{,}971 \approx$
$\approx 1{,}176$ (*біт/сим*). Отже, ***інформаційні втрати*** в каналі зв'язку ***H***(***X***/***Y***)≈1,18 (*біт/сим*).

Пропускна здатність каналу із шумом обчислюється за формулою

$$C = \frac{1}{\tau}\left[\log_2 k - H(X / Y)\right],$$

де через ***k*** позначено об'єм алфавіту джерела; τ - час вибору повідомлення джерелом.

Отже, отримаємо $C = \frac{1}{10^{-3}}\left[\log_2 3 - 1{,}176\right] \approx 0{,}409 \cdot 10^3 = 409$ (*бод*).

Кількість переданої по каналу інформації, що припадає на одне повідомлення джерела, знаходиться, виходячи із середньої кількості інформації, що виробляється джерелом – його ентропії і інформаційних втрат в каналі:
I(***X***, ***Y***)=***HX***-***H***(***X***/***Y***)=1,581-1,176≈0,406 (*біт/сим*).

Швидкість передачі інформації знаходиться так:

$$v = \frac{I(X,Y)}{\tau} = 0{,}406 \cdot 10^3 = 406 \text{ (бод)}.$$

Відповідь: ***H***(***X***/***Y***)≈1,18 (*біт/сим*); ***C***≈409 (*бод*); ***v***=406 (*бод*).

Завдання на лабораторну роботу №5

Завдання 1

Джерело повідомлень ***X*** задано ансамблем $\{x_1, x_2, x_3\}$ з ймовірностями $p(x_1)=0,65$, $p(x_2)=0,25$, $p(x_3)=0,1$. Матриця умовних ймовірностей каналу має вигляд

$$p(y_j / x_i) = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,005 & 0,005 \\ 0,13 & 0,75 & 0,12 \\ 0,15 & 0,35 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Знайти кількість інформації, передану в одному й 100 повідомленнях джерела, інформаційні втрати в каналі при передачі 100 повідомлень з алфавіту ***X***?

Завдання 2

Канал передачі інформації заданий ансамблем $\{x_1, x_2, x_3\}$ з ймовірностями $\{0,3; 0,2; 0,5\}$. Матриця умовних ймовірностей каналу має вигляд

$$p(y_j / x_i) = \begin{bmatrix} 0,97 & 0,015 & 0,015 \\ 0,015 & 0,97 & 0,015 \\ 0,015 & 0,015 & 0,97 \end{bmatrix}.$$

Знайти інформаційні втрати в каналі, пропускну здатність каналу й швидкість передачі повідомлень джерелом, якщо час передачі одного повідомлення $\tau=10^{-3}$ *с*.

Завдання 3

Матриця сумісних ймовірностей каналу зв'язку має вигляд

$$p(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} 0,29 & 0,005 & 0,005 \\ 0,005 & 0,19 & 0,005 \\ 0,005 & 0,005 & 0,49 \end{bmatrix}.$$

Знайти інформаційні втрати в каналі й швидкість передачі інформації, якщо час передачі одного повідомлення $\tau=10^{-3}$ *с*.

Завдання 4

Знайти кількість переданої інформації в одному повідомленні джерела й пропускну здатність каналу зв'язку при $\tau=10^{-3}$ *с*, де τ - час, затрачуваний на передачу одного повідомлення, якщо матриця сумісних ймовірностей каналу має вигляд

$$p(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Завдання 5

Знайти пропускну здатність каналу зв'язку при $\tau=10^{-2}$ *с*, де τ - час, затрачуваний на передачу одного повідомлення, якщо матриця сумісних ймовірностей каналу має вигляд

$$p(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,15 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,15 \end{bmatrix}.$$

Чи можлива безпомилкова передача в цьому каналі, якщо продуктивність джерела $V_{дж}$=96 *сим/с*?

Завдання 6

Знайти інформаційні втрати в каналі й пропускну здатність дискретного каналу зв'язку при $\tau=10^{-3}$ *с*, де τ - час, затрачуваний на передачу одного повідомлення, якщо матриця сумісних ймовірностей каналу має вигляд

$$p(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} 0{,}63 & 0{,}035 & 0{,}035 \\ 0{,}02 & 0{,}16 & 0{,}02 \\ 0{,}017 & 0{,}013 & 0{,}07 \end{bmatrix}.$$

Чи можлива безпомилкова передача інформації в цьому каналі, якщо продуктивність джерела $V_{дж}$=860 *сим/с*?

Завдання 7

Визначити продуктивність джерела з ансамблем A = { a_1, a_2, a_3 a_4, a_5, a_6, a_7, a_8} та $p_i \in$ {0,1; 0,2; 0,1; 0,15; 0,05; 0,1; 0,2; 0,1}; $\tau_i \in$ {0,01; 0,001; 0,01; 0,005; 0,008; 0,006; 0,003; 0,001}. За яких умов ця продуктивність буде максимальною? Визначити її значення для того самого розподілу τ_i.

Контрольні питання

1. Чим визначається продуктивність дискретного джерела?
2. Як можна визначити продуктивність дискретного джерела з різною тривалістю вибору повідомлень?
3. Як визначається швидкість передачі інформації по дискретному каналу?
4. Чому дорівнюють інформаційні втрати при передачі інформації по каналу зв'язку?
5. Чому дорівнюють втрати інформації в каналі з абсолютною статистичною залежністю його виходу та входу?
6. Чому дорівнюють втрати інформації в каналі із статистично незалежними його виходом і входом?
7. Як визначається кількість інформації, що передається в одному повідомленні?

Лабораторна робота №6

Тема: Характеристики неперервних джерел інформації

Мета: навчатися визначати продуктивність неперервного джерела повідомлень, швидкість передачі інформації каналами зв'язку.

Теоретичні відомості

Диференційна ентропія джерела:

$$H_{\Delta}(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} W(x)\log W(x)dx.$$

Відносна диференційна умовна ентропія джерела:

$$H_{\Delta}(X/Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(x,y)\log\frac{W(x,y)}{W(y)}dxdy.$$

Епсілон-ентропія джерела:

$$H(X)_{\varepsilon} = \min I(Y,X) = H_{\Delta}(X) - \max H_{\Delta}(X/Y).$$

Епсілон-ентропія для одного незалежного відліку при гаусовському процесі *X(t)* і *E(t)*:

$$\max H(X)_{\varepsilon} = 0{,}5\log(\sigma_X^2/\sigma_E^2),$$

де σ_X^2 і σ_E^2 – середньоквадратичне значення сигналу і шуму відповідно.

Епсілон-продуктивність джерела при дискретному часі:

$$H'(X)_{\varepsilon} = V_{\tau}H(X)_{\varepsilon} = V_{\tau}(H_{\Delta}(X)) - \log\sqrt{2\pi e\varepsilon_0^2}\ \frac{біт}{c},$$

де $V_{\tau} = 1/\Delta t$ – швидкість передачі звітів; $\Delta t = 1/2\Delta F$ – інтервал дискретизації; ΔF – полоса частот сигналу *X(t)*.

Якщо час неперервний, то:

$$H'(X)_{\varepsilon} = 2\Delta F(H_{\Delta}(X)) - \log\sqrt{2\pi e\varepsilon_0^2}\ \frac{біт}{c}.$$

Максимальне значення епсілон-продуктивності має місце, коли сигнал *X(t)* являється гаусовським:

$$\max H'(X)_{\varepsilon} = \frac{V_{\tau}}{2}\log(\sigma_X^2/\varepsilon_0^2)\frac{біт}{c},$$

$$\max H'(X)_{\varepsilon} = \Delta F\log(\sigma_X^2/\varepsilon_0^2)\frac{біт}{c},$$

де ε_0^2 – максимальна потужність перешкоди.

Об'єм інформації, яка видається джерелом, за час *T*:

$$\max V = \max H'(X)_{\varepsilon}\cdot T = \Delta FT\log(\sigma_X^2/\varepsilon_0^2)\ біт.$$

Надлишковість джерела:

$$R_X = 1 - \frac{H_{\Delta}(X) - \log\sqrt{2\pi e\varepsilon_0^2}}{0{,}5\log(\sigma_X^2/\varepsilon_0^2)}.$$

Кількість інформації, яка міститься в одній неперервній випадковій величині, відносно іншої:

$$I(X,Y) = H_{\Delta}(X) - H_{\Delta}(X/Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(x,y)\log\frac{W(x,y)}{W(x)W(y)}dxdy.$$

Пропускна здатність каналу з дискретним часом:

$$C = 0{,}5V_{\tau}\log(1+\sigma_x^2/\sigma_E^2).$$

Пропускна здатність каналу з неперервним часом:

$$C = \Delta F\log(1+\sigma_x^2/\sigma_E^2).$$

Число рівнів, які можуть бути розпізнані без помилок:

$$M = \sqrt{1+\frac{\sigma_X^2}{\sigma_E^2}} = \sqrt{1+\frac{P_X}{P_\theta}},$$

де P_θ та P_X - потужність корисного сигналу та шуму відповідно.

Приймач не розрізняє зміни вхідного сигналу менше чим корінь квадратний з потужності шуму, тобто:

$$\delta = \sqrt{P_\theta}$$

Найбільша кількість інформації, яка переноситься імпульсом, маючим М різних рівнів:

$$I = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_X}{P_\theta}).$$

Приклади виконання завдань

Приклад 1. Визначити ентропію випадкових величин рівномірно розподіленої на інтервалі з шириною $\varepsilon = \beta - \alpha$.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що густина ймовірності $W(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}$, а ентропія

$$H_\Delta(X) = -\int_\alpha^\beta W(x)\log W(x)dx = -\int_\alpha^\beta \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}dx = \log(\beta-\alpha).$$

Приклад 2. Обчислити дисперсію рівномірного розподілення на інтервалі (α, β) .

Розв'язання. На основі визначення дисперсії маємо

$$\sigma_x = \int_\alpha^\beta (x(t)-m(x))^2 W(x)dx = \int_\alpha^\beta (x-\frac{\alpha+\beta}{2})^2 \frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Приклад 3. Аналоговий сигнал з амплітудою 2 В передається по каналу зв'язку, в якому відношення сигнал/шум рівне 20 Дб. Визначити абсолютну похибку телевиміру.

Розвя'язання. Якщо сигнал змішаний з перешкодою, то амплітуда сигналу може бути виміряна з точністю до ефективного значення напруги. При цьому похибка оцінки точного значення амплітуди рівна $\sqrt{P_\theta}$.

З відношення

$$10\lg\frac{P_C}{P_\theta} = 20 \text{ Дб}$$

визначим потужність шуму

$$\lg\frac{P_C}{P_\theta} = 2,\; P_\theta = \frac{P_C}{100} = 1\cdot 10^{-2} \;\; Дб$$

Тоді похибка

$$\delta = \sqrt{P_\theta} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1\; B.$$

Приклад 4. Визначити пропускну здатність каналу зв'язку при умові, що сигнал $C(t) = 5\sin 1000\pi t$ повинен бути відновлений з похибкою не більшою, ніж 1 В.

Розв'язання. З умови задачі відомо, що амплітуда сигналу $u_c = 5\ В,$ а спектр частот $\Delta F_c = 500\ Гц.$ Тоді пропускна здатність

$$C = \Delta F_c \log\left(1 + \frac{P_c}{P_\theta}\right) = \Delta F_{\bar{n}} \log\left(1 + \frac{e_{\ddot{n}}'^2}{\delta^2}\right) = 500\log\left(1 + \frac{25}{1}\right) = 500\log(26) \cong 500 \cdot 4{,}7 = 2350$$

Завдання на лабораторну роботу №6

Завдання 1

Визначити виграш потужності при використанні джерела з гаусовською густиною розподілення в порівнянні з джерелом, яке має в інтервалі (α, β) рівномірну густину розподілення.

Завдання 2

Визначити ентропію випадкової величини, розподіленої по експоненціальному законі:

$$W(X)=\begin{cases} ce^{-cx},\ x\geq 0; \\ 0,\ x\leq 0;\ c>0. \end{cases}$$

Завдання 3

Визначити кількість інформації $I(X,Y)$ для системи (X,Y) гаусовських випадкових величин:

$$W(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\gamma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\gamma^2\right)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\gamma\cdot xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right)$$

Завдання 4

Визначити ε продуктивність джерела, формуючого зі швидкістю $V_\tau=\alpha$ некореляційні відліки стаціонарного нормального випадкового сигналу з дисперсією σ_x^2.

Завдання 5

Визначити об’єм інформації, яка міститься в зображенні з 500 стрічок по 500 елементів в кожній стрічці. Яскравість кожного елемента передається вісьмома квантовими рівнями. Різні градації яскравості рівновірогідні, а яскравості різних елементів не корельовані.

Завдання 6

По неперервному каналі передається сигнал, спектр якого обмежений полосою частот 30 Гц. Визначити пропускну здатність каналу зв’язку таким чином, щоб похибка не перевищувала 1%.

Завдання 7

Відношення сигнал/шум в лінії зв’язку дорівнює 10^{-1}, а спектр пропуску каналу зв’язку 1 кГц. Визначити пропускну здатність каналу зв’язку.

Контрольні питання

1. Чому дорівнює кількість інформації від джерела неперервного сигналу?
2. Чи може диференціальна ентропія набувати від’ємних значень?
3. Чим відрізняється диференціальна ентропія від ентропії дискретного джерела?
4. Дати визначення поняття – відносна ентропія, епсилон-ентропія джерела неперервного сигналу.
5. Дати визначення поняття – епсилон-продуктивність джерела неперервного сигналу.

Лабораторна робота №7

Тема: Методи кодування інформації Шеннона-Фано і Хаффмена

Мета: розглянути алгоритми побудови оптимальних кодів Шеннона-Фано і Хаффмена.

Теоретичні відомості

<u>Код Шеннона-Фано</u>

Повідомлення розбиваються на дві по можливості рівноймовірні підгрупи. Всім повідомленням першої підгрупи присвоюють 1 в якості кодового символу, а всім повідомленням другої підгрупи – 0. Аналогічне ділення на підгрупи робиться до тих пір, доки в кожну підгрупу не попаде одне повідомлення. Знайдений код по Шеннону-Фано дуже близький до оптимального.

<u>Код Хаффммена</u>

Для того, щоб отримати код Хаффмана, дві найменші ймовірності об'єднуються дужкою і одній з них присвоюється символ 1, іншій – 0. Потім ці ймовірності додаються, результат записується в проміжку між найближчими йому ймовірностями. Процес об'єднання повідомлень для найменших ймовірностей продовжується до тих пір, поки сумарна ймовірність повідмлення не стане рівною 1. Код для кожного повідомлення будується при записі двійкового числа справа-наліво шляхом обходу по лініях вверх-направо, починаючи з ймовірності повідомлення, для якого будується код.

Жоден з отриманих кодів не співпав з початком довшого коду. Тобто знайдені коди є префіксними.

Приклади виконання завдань

Приклад_1. Задано 8 повідомлень та ймовірності їх появи. Побудувати код Шеннона-Фано та код Хаффмана. Виконати порівняння характеристик щодо ефективності кодування.

$P(x_1)=0.27$, $P(x_1)=0.23$, $P(x_1)=0.14$, $P(x_1)=0.12$, $P(x_1)=0.09$, $P(x_1)=0.07$, $P(x_1)=0.05$, $P(x_1)=0.03$.

<u>Розв'язання</u>

Код Шеннона-Фано:

Для побудови коду Шеннона-Фано всі повідомлення x_i записуються в порядку спадання їх ймовірностей.

x_i	$P(x_i)$	Поділ повідомлення на підгрупи				Код	μ_i	L_{x_i}
x_1	0.27	1	1			11	2	0.54
x_2	0.23	1	0			10	2	0.46
x_3	0.14	0	1	1		011	3	0.42
x_4	0.12	0	1	0		010	3	0.36
x_5	0.07	0	0	1	1	0011	4	0.28
x_6	0.06	0	0	1	0	0010	4	0.24
x_7	0.06	0	0	0	1	0001	4	0.24
x_8	0.05	0	0	0	0	0000	4	0.20

Код Хаффмена

x_i	$P(x_i)$	Об’єднання повідомлень							Код
x_1	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.46	0.54 1	1	10
x_2	0.23	0.23	0.23	0.23	0.27	0.27 1	0.46 0		00
x_3	0.14	0.14	0.14	0.23	0.23 1	0.27 0			111
x_4	0.12	0.12	0.13	0.14 1	0.23 0				011
x_5	0.07	0.11	0.12 1	0.13 0					1101
x_6	0.06	0.07 1	0.11 0						1100
x_7	0.06 1	0.06 0							0101
x_8	0.05 0								0100

Приклад_2. Задано ймовірності появи символів:

А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*
0,6	*0,2*	*0,1*	*0,04*	*0,025*	*0,015*	*0,01*	*0,01*

Ентропія джерела при цьому буде менше: ***H(X)≈***1,781 (*біт/сим*).

Середнє число символів на одне повідомлення при використовуванні рівномірного тризрядного коду $\overline{L} = \sum_{i=1}^{k} l_i p_i = l \sum_{i=1}^{k} p_i = 3$ (*біт/сим*).

Надлишковість коду $\rho_к = 1 - \frac{H(x)}{\overline{L}} = 1 - \frac{1{,}781}{3} = 0{,}31$, тобто ***має досить велику величину*** (в середньому 3 символи з 10 не несуть ніякої інформації).

Завдання на лабораторну роботу №7

Завдання 1

Для ансамблю повідомлень, заданого таким розподілом ймовірностей: *0,18*; *0,17*; *0,16*; *0,15*; *0,1*; *0,08*; *0,05*; *0,05*; *0,04*; *0,02*, побудувати двійкові коди *Шеннона-Фано* і *Хаффмена*. Визначити основні характеристики кодів.

Завдання 2

Побудувати код *Шеннона-Фано* для ансамблю повідомлень, заданого розподілом ймовірностей: *0,25*; *0,25*; *0,125*; *0,125*; *0,0625*; *0,0625*; *0,0625*; *0,0625*. Визначити середню довжину та ефективність коду.

Завдання 3

Сім рівноімовірних повідомлень кодуються кодом *Шеннона-Фано*. Визначити надлишковість коду.

Завдання 4

Побудувати коди *Шеннона-Фано* і *Хаффмена* для повідомлень джерела, заданого таким розподілом: $P(x_1)=0,3$; $P(x_2)=0,2$; $P(x_3)=0,15$; $P(x_4)=0,12$; $P(x_5)=0,1$; $P(x_6)=0,08$; $P(x_7)=0,03$; $P(x_8)=0,02$. Обчислити середню довжину і надлишковість отриманих кодів.

Завдання 5

Побудувати коди *Шеннона-Фано* і *Хаффмена* для дискретної випадкової величини (д. в. в.) *X*, заданої розподілом ймовірностей:

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
P	*7/18*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/9*

Обчислити середню довжину отриманих кодів та ентропію д. в. в. *X*.

Завдання 6

Побудувати коди *Хаффмена* і обчислити середню довжину кодів для ансамблів повідомлень, заданих такими розподілами ймовірностей:

а) 0,16; 0,2; 0,14; 0,4; 0,02; 0,03; 0,05; *б) 0,16*; *0,11*; *0,04*; *0,12*; *0,07*; *0,07*; *0,09*; *0,03*; *0,1*; *0,02*; *0,02*; *0,01*; *0,06*; *0,04*; *0,01*; *0,05*; *в) 0,15*; *0,35*; *0,2*; *0,03*; *0,02*; *0,05*; *0,1*; *0,04*; *0,06*; *г) 0,07*; *0,1*; *0,03*; *0,05*; *0,05*; *0,16*; *0,08*; *0,14*; *0,1*; *0,1*; *0,04*; *0,01*; *0,03*; *0,02*; *0,02*.

Завдання 7

Побудувати коди *Шеннона-Фано* і *Хаффмена*, обчислити їх середню довжину для ансамблів повідомлень, заданих такими розподілами ймовірностей: *а) 0,06*; *0,25*; *0,1*; *0,05*; *0,2*; *0,04*; *0,3*; *б) 0,5*; *0,3*; *0,1*; *0,025*; *0,025*; *0,02*; *0,015*; *0,015*; *в) 0,15*; *0,1*; *0,05*; *0,25*; *0,02*; *0,03*; *0,4*.

Контрольні питання

1. Що називають оптимальним кодуванням ?
2. Сформулюйте алгоритм кодування за методом Шеннона – Фано.
3. Сформулюйте алгоритм кодування за методом Хаффмена.
4. Яка різниця між алгоритмами Шеннона – Фано і Хаффмена?

Лабораторна робота №8

Тема: Застосування статистичних алгоритмів стиснення до блоків повідомлення

Мета: розглянути алгоритми побудови оптимальних кодів для блокового коду Хаффмена 2-го порядку

Теоретичні відомості

Теоретичні границі стиснення інформації

Стиснення даних не може бути більше деякої теоретичної границі. Сформульована раніше теорема *Шеннона* про кодування каналу без шуму встановлює ***верхню границю стиснення інформації як ентропію джерела H(X).***

Позначимо через ***L(X)*** функцію, що повертає довжину коду повідомлень

$$L(X)=len(code(X)),$$

де ***code(X)*** кожному значенню ***X*** ставить у відповідність деякий бітовий код; ***len( )*** - повертає довжину цього коду.

Оскільки ***L(X)*** - функція від д. в. в. ***X***, тобто також є д. в. в., то її середнє значення обчислюється як математичне сподівання:

$$\overline{L(X)} = \sum_{i=1}^{k} p(x_i)L(X_i)\,. \tag{14.1}$$

Наслідком теореми Шеннона про кодування джерела у відсутності шуму є те, що ***середня кількість бітів коду, що припадає на одне значення д. в. в., не може бути менше її ентропії***, тобто

$$\overline{L(X)} \geq HX \tag{14.2}$$

для будь-якої д. в. в. ***X*** і будь-якого її коду.

Метод блокування повідомлення

На відміну від раніше розглянутих методів кодування ***блокові коди*** належать до так званих ***кодів з пам'яттю***, оскільки при кодуванні поточного символу враховуються значення одного або декількох попередніх символів.

Блоковий код *розділяє вектор даних на блоки певної довжини, і потім кожний блок замінює кодовим словом з префіксної множини кодових слів*. Отриману послідовність кодових слів об'єднують в остаточну двійкову послідовність на виході кодера.

Блоковий код називається ***блоковим кодом k-го порядку***, якщо всі його блоки мають довжину ***k*** символів.

Метод блокування повідомлень полягає в такому.

*За заданим **ε**>0 можемо знайти таке **k**, що якщо розбити повідомлення на блоки завдовжки **k** (всього буде **n/k** блоків), то, використовуючи оптимальне статистичне кодування таких блоків, що розглядаються як одиниці повідомлень, можна досягти середньої довжини коду більше ентропії менш ніж на **ε**.*

Приклади виконання завдань

Приклад_1. Згрупувати по два і по три повідомлення в групі. Побудувати код Хаффмана. Виконати порівняльну характеристику щодо ефективності коду, швидкості передачі та похибки коду. Значення ймовірностей наступні: $x_1 = 0.8$, $x_2 = 0.2$.

Розв'язання

Код Хаффмана для двох повідомлень в групі:

Знайдемо ентропію для заданих повідомлень:

$$H(x) = -\left(0.8 \cdot \log 0.8 + 0.2 \cdot \log 0.2\right) = 0.722 \ \frac{\text{біт}}{\text{повідомл.}}.$$

$x_i x_j$	$P\left(x_i x_j\right)$				Код	μ_i
$x_1 x_1$	0.64	0.64	0.64 1	1	1	1
$x_1 x_2$	0.16	0.20 1	0.36 0		00	2
$x_2 x_1$	0.16 1	0.16 0			011	3
$x_2 x_2$	0.04 0				010	3

Середня довжина кодового слова, яка припадає на одне повідомлення:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot 0.64 + 2 \cdot 0.16 + 3 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.04\right) = 0.780.$$

Швидкість передачі повідомлення:

$$R_t = \frac{H(x)}{\tau} = \frac{0.722}{0.780 \cdot 10^{-6}} = 925641 \frac{\text{біт}}{\text{повідомл.}}.$$

Щоб знайти похибку коду, обчислимо ймовірність появи нулів і одиниць:

$$P(0) = \frac{2 \cdot 0.16 + 1 \cdot 0.16 + 2 \cdot 0.04}{2 \cdot 0.780} = 0.359, \ P(1) = 1 - P(0) = 0.641.$$

Тоді ентропія коду рівна:

$$H_к = -\left(0.359 \cdot \log 0.359 + 0.641 \cdot \log 0.641\right) = 0.942.$$

Похибка коду наступна:

$$R_к = 1 - H_к = 1 - 0.942 = 0.058.$$

Код Хаффмана для трьох повідомлень в групі:

$x_j x_i x_k$	$P(x_j x_i x_k)$								Код	μ_i
$x_1x_1x_1$	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512 1	1	1	1
$x_1x_1x_2$	0.128	0.128	0.128	0.128	0.232	0.256 1	0.488 0		110	3
$x_1x_2x_1$	0.128	0.128	0.128	0.128	0.128 1	0.232 0			111	3
$x_2x_1x_1$	0.128	0.128	0.128	0.128 1	0.128 0				101	3
$x_1x_2x_2$	0.032	0.040	0.064 1	0.104 0					10010	5
$x_2x_1x_2$	0.032	0.032 1	0.040 0						10011	5
$x_2x_2x_1$	0.032 1	0.032 0							10001	5
$x_2x_2x_2$	0.008 0								10000	5

Середня довжина кодового слова, яка припадає на одне повідомлення:

$$L = \frac{1}{3} \cdot (1 \cdot 0.512 + 9 \cdot 0.128 + 15 \cdot 0.032 + 5 \cdot 0.008) = 0.728 .$$

Швидкість передачі повідомлення:

$$R_t = \frac{H(x)}{\tau} = \frac{0.722}{0.728 \cdot 10^{-6}} = 991758 \, \frac{\text{біт}}{\text{повідомл.}} .$$

Щоб знайти похибку коду, обчислимо ймовірність появи нулів і одиниць:

$$P(0) = \frac{0.128 \cdot 2 + 0.032 \cdot 8 + 0.008 \cdot 4}{2 \cdot 0.728} = 0.374 , \; P(1) = 1 - P(0) = 0.626 .$$

Тоді ентропія коду рівна:

$$H_к = -(0.374 \cdot \log 0.374 + 0.626 \cdot \log 0.626) = 0.954 .$$

Похибка коду наступна:

$$R_к = 1 - H_к = 1 - 0.954 = 0.046 .$$

Результати кодування по два і по три повідомлення в групі методом Хаффмана наведені в наступній таблиці:

Обчислювані величини	Число повідомлень в групі		Граничні значення обчислюваних величин
	2	3	
L	0.780	0.728	$H(x)/\log 2 = 0.722$
R_t	925641	991758	$C = 1/\tau = 10^6$
$P(0)$	0.359	0.374	$P(0) = 0.5$
$P(1)$	0.641	0.626	$P(1) = 0.5$
$R_к$, %	5.8	4.6	$R_к = 0$

Приклад_2. Закодувати повідомлення ***ABAAABBA*** за алгоритмом *Хаффмена* і *блоковим* алгоритмом *Хаффмена* 2-го порядку, обчислити довжини отриманих кодів. Приблизний закон розподілу ймовірностей визначити з аналізу повідомлення.

Розв'язання

За частотами символів у повідомленні побудуємо приблизний закон розподілу їх ймовірностей (*табл. 1*).

Таблиця 1

Символ x_i	***A***	***B***
Імовірність p_i	***5/8***	***3/8***

Побудуємо таблицю кодів за алгоритмом *Хаффмена* (*табл. 2)*:

Таблиця 2

Символ x_i	***A***	***B***
Імовірність p_i	*5/8*	*3/8*
Код	**0**	**1**

Скориставшись таблицею кодів (*табл. 2*), закодуємо повідомлення

Code(***ABAAABBA***)=**01000110**.

Довжина коду ***L***(***X***)=8 (*бітів*).

Повідомлення *ABAAABBA* можна розбити на 4 блоки довжиною 2 символи.

Побудуємо приблизний статистичний закон розподілу ймовірностей блоків повідомлення, розглядаючи їх як одиниці повідомлення (*табл. 3*).

Таблиця 3

Блок повідомлення $\vec{X}$	***AB***	***AA***	***BA***
Імовірність p_i	***1/2***	***1/4***	***1/4***

Побудуємо таблицю кодів за алгоритмом *Хаффмена* для блоків повідомлення (*табл. 4*).

Таблиця 4

Блок повідомлення $\vec{X}$	***AB***	***AA***	***BA***
Імовірність p_i	*1/2*	*1/4*	*1/4*
Код	**0**	**10**	**11**

Блоковий код повідомлення

Code(***ABAAABBA***)=**010011**.

Завдання на лабораторну роботу №8

Завдання 1

Дискретна випадкова величина ***X*** задана таким розподілом ймовірностей: ***P***(***X***=***A***)=*1/4*, ***P***(***X***=***B***)=*1/2*, ***P***(***X***=***C***)=*1/4*. Побудувати *блоковий код Хаффмена 2-го порядку*. Обчислити середню довжину отриманого коду.

Завдання 2

Дискретна випадкова величина ***X*** задана таким розподілом ймовірностей: ***P***(***X***=***A***)=*1/3*, ***P***(***X***=***B***)=*1/2*, ***P***(***X***=***C***)=*1/6*. Побудувати код *Хаффмена* і *блоковий код Хаффмена 2-го порядку*. Обчислити середню довжину отриманих кодів.

Завдання 3

Дискретна випадкова величина ***X*** задана таким розподілом ймовірностей: ***P***(***X***=***A***)=*1/3*, ***P***(***X***=***B***)=*7/15*, ***P***(***X***=***C***)=*1/5*. Побудувати блоковий код *Хаффмена 2-го порядку*. Обчислити середню довжину отриманого коду.

Завдання 4

Для кодування двійкового джерела з імовірністю одиниці *0,4* використовується *блоковий код Хаффмена*. Побудувати таблиці кодів для *блокових кодів Хаффмена 2-го* й 3-*го порядків*. Обчислити середню довжину отриманих кодів. Якою буде мінімальна середня довжина коду, необхідного для кодування цього джерела?

Завдання 5

Дискретна випадкова величина ***X*** може набувати два значення ***A*** і ***B*** з такими ймовірностями: ***P***(***X***=***A***)=*2/3*, ***P***(***X***=***B***)=*1/3*. Побудувати *блокові коди Хаффмена 2-го* й *3-го порядків*. Обчислити середню довжину кодів.

Завдання 6

Закодувати повідомлення **0101110110** *блоковим кодом Хаффмена 2-го порядку*. Обчислити довжину коду й швидкість стиснення даних.

Завдання 7

Закодувати повідомлення ***FFAXAXXF*** кодом *Хаффмена* і *блоковим кодом Хаффмена 2-го порядку*. Обчислити довжину отриманих кодів. Приблизний закон розподілу ймовірностей знайти з аналізу повідомлення.

Завдання 8

Дискретна випадкова величина ***X*** задана таким розподілом ймовірностей: ***P***(***X***=***A***)=*1/3*, ***P***(***X***=***B***)=*7/15*, ***P***(***X***=***C***)=*1/5*. Закодувати повідомлення ***BAABCB*** кодом *Хаффмена* і *блоковим* кодом *Хаффмена 2-го порядку*. Обчислити довжину отриманих кодів.

Контрольні питання

1. Чим визначається верхня границя стиснення інформації? Які існують границі стиснення при використанні оптимального кодування *Шеннона-Фано* і *Хаффмена*?
2. Які коди характеризуються «наявністю пам'яті»?
3. Які коди називаються блоковими? Що таке порядок блокового коду?
4. У чому полягає метод блокування повідомлень? Як будується блоковий код *Хаффмена*?

Лабораторна робота №9

Тема: Арифметичне кодування

Мета: розглянути алгоритми побудови арифметичних кодів

Теоретичні відомості

Алгоритми *Шеннона-Фано* і *Хаффмена* в найкращому випадку не можуть кодувати кожний символ повідомлення менш ніж одним бітом інформації. Припустимо, що в повідомленні з 0 та 1 одиниці трапляються в 10 разів частіше. Ентропія такого повідомлення (що визначає верхню границю стиснення даних) ***HX***≈0,469 (*біт/сим*) суттєво менше одиниці, тому кодування таких повідомлень оптимальними алгоритмами буде не достатньо ефективним. У таких випадках бажано використовувати алгоритми, що ***дозволяють кодувати символи повідомлення менш ніж 1 бітом інформації.*** Одним із найкращих таких алгоритмів є алгоритм ***арифметичного кодування***.

За розподілом ймовірностей дискретної випадкової величини (далі д. в. в.) складається таблиця з пересічних в граничних точках відрізків для кожного із значень д. в. в. Об'єднання цих відрізків утворює інтервал **[0; 1]**, а їхні довжини пропорційні ймовірностям значень д. в. в.

Алгоритм кодування полягає в побудові інтервалу, що однозначно визначає конкретну послідовність значень д. в. в. Інтервали повідомлення будуються так. Якщо є відрізок повідомлення завдовжки **n-1** символів, то для побудови відрізка повідомлення завдовжки **n** попередній інтервал розбивається на стільки частин, скільки можливих значень має д. в. в. Для знаходження початку і кінця нового інтервалу повідомлення до початку попереднього інтервалу необхідно додати значення добутків його ширини на відповідні границі відрізка поточного нового символу з таблиці символів і їхніх інтервалів (таблиці кодера). З отриманих інтервалів вибирається той, що відповідає конкретному повідомленню завдовжки **n** символів.

Для побудованого таким чином інтервалу повідомлення знаходиться число, що належить цьому відрізку, як правило, це ціле число, розділене на мінімальний степінь 2. Це дійсне число і буде кодом даного повідомлення. Усі можливі коди - це числа, строго більші 0 і менші 1, тому лідируючий 0 і десяткову крапку можна не враховувати.

У міру надходження символів повідомлення його інтервал звужується, відповідно кількість розрядів, необхідна для подання інтервалу збільшується. Більш імовірні символи меншою мірою звужують інтервал, ніж менш імовірні, і, отже, додають менше розрядів до результату.

Основна відмінність арифметичного кодування від алгоритмів Шеннона-Фано і Хаффмена полягає в його **неперервності**, тобто відсутності необхідності блокування повідомлення. Ефективність арифметичного кодування зростає із зростанням довжини повідомлення, проте й потребує значно більших обчислювальних ресурсів. Пояснимо ідею арифметичного кодування на прикладах.

Приклади виконання завдань

Приклад_1. Закодуємо за арифметичним алгоритмом рядок ***«МАТЕМАТИКА»***.

Алфавіт повідомлення містить такі символи: ***{М, А, Т, Е, И, К}***. Знайдемо частоту кожного з цих символів у повідомленні і призначимо кожному з них відрізок, довжина якого визначається імовірністю відповідного символу (*табл. 2.7*).

Таблиця 2.7

Символ	Імовірність	Інтервал
М	*0,2*	**[0; 0,2)**
А	*0,3*	**[0,2; 0,5)**
Т	*0,2*	**[0,5; 0,7)**
Е	*0,1*	**[0,7; 0,8)**
И	*0,1*	**[0,8; 0,9)**
К	*0,1*	**[0,9; 1,0)**

Символи в таблиці символів і їх інтервалів можна розміщувати у будь-якому порядку: у міру їх появи в тексті, в алфавітному або за збільшенням ймовірностей - це непринципово. Результат кодування може відрізнятися, але ефект буде однаковим.

Після надходження першого символу повідомлення «***М***» кодер звужує початковий інтервал **[0; 1)** до нового **[0; 0,2)**. Отже, після надходження першої букви результат кодування знаходитиметься в інтервалі **[0; 0,2)**.

Наступний символ «***А***» *кодується підінтервалом усередині інтервалу попередньої послідовності символів повідомлення*, звужуючи цей інтервал до **[0,04; 0,1)** *(верхня і нижня границі нового інтервалу знаходяться додаванням до початку попереднього інтервалу добутків його ширини на відповідні границі відрізка, що відповідає поточному символу повідомлення в* ***таблиці кодера*** (*табл. 2.7*)*)*, таким чином, нижня границя інтервалу повідомлення «***МА***» ***low$_i$***=**0**+***0,2*******0,2**=**0,04**; а верхня – ***high$_i$***=**0**+***0,2*******0,5**=**0,1**).

Наступний символ, що надходить на вхід кодера, - це буква «***Т***». Символу «***Т***» відповідає інтервал **[0,5; 0,7)** з таблиці кодера (*табл. 2.7*). Стосовно вже наявного інтервалу послідовності з попередніх букв повідомлення новим інтервалом буде **[0,07; 0,082)** (***low$_i$***=**0,04**+***0,06*******0,5**=**0,07**; ***high$_i$***=**0,04**+***0,06*******0,7**=**0,082**).

Послідовність інтервалів, відповідних процесу кодування повідомлення ***«МАТЕМАТИКА»*** за арифметичним алгоритмом, зручно подати у вигляді такої таблиці (*табл. 2.8*).

Таблиця 2.8

Символ – інтервал	Інтервал повідомлення	Ширина інтервалу
М **- [0; 0,2)**	**[0; 0,2)**	***0,2***
А **- [0,2; 0,5)**	**[0,04; 0,1)**	***0,06***
Т **- [0,5; 0,7)**	**[0,07; 0,082)**	***0,012***
Е **- [0,7; 0,8)**	**[0,0784; 0,0796)**	***0,0012***
М **- [0; 0,2)**	**[0,0784; 0,07864)**	***0,00024***
А **- [0,2; 0,5)**	**[0,078448; 0,07852)**	$0{,}72\cdot10^{-4}$
Т **- [0,5; 0,7)**	**[0,078484; 0,0784984)**	$0{,}144\cdot10^{-4}$
И **- [0,8; 0,9)**	**[0,07849552; 0,07849696)**	$0{,}144\cdot10^{-5}$
К **- [0,9; 1,0)**	**[0,078496816; 0,07849696)**	$0{,}144\cdot10^{-6}$
А **- [0,2; 0,5)**	**[0,0784968448; 0,078496888)**	$0{,}432\cdot10^{-7}$

Остаточний результат кодування повідомлення «***МАТЕМАТИКА***» - це дійсне число, що належить інтервалу **[0,0784968448; 0,078496888)**. Це число знаходиться як частка від ділення цілого числа на мінімальний степінь 2 - це $\boldsymbol{0,07849687 = 1316959 / 2^{24}}$. *Степінь 2 визначає розрядність коду повідомлення*.

Отже, двійковий ***24***-*розрядний* код числа $\boldsymbol{1316259}_{10}$ = =**000101000001100001011111**$_2$ і є арифметичним кодом даного повідомлення:

Code(МАТЕМАТИКА)=**000101000001100001011111**.

Довжина коду **L(X)=**24 (*біт*).

Середня довжина коду $\overline{\boldsymbol{L}(\boldsymbol{X})} = 24/10 = 2{,}4$ (*біт/сим*).

Завдання на лабораторну роботу №9

Завдання 1

Побудувати код а*рифметичний* для повідомлення ***ABAAAB***. Обчислити їх довжину. Приблизний закон розподілу ймовірностей символів визначити з аналізу повідомлення.

Завдання 2

Закодувати за *арифметичним алгоритмом* повідомлення ***BAABC*** дискретної випадкової величини ***X***, заданої таким розподілом ймовірностей: ***P***(***X***=***A***)=***1/3***, ***P***(***X***=***B***)=***7/15***, ***P***(***X***=***C***)=***1/5***. Обчислити довжину коду.

Завдання 3

Побудувати *арифметичний код* для повідомлення ***AFXAFF***. Обчислити його довжину. Приблизний закон розподілу ймовірностей символів визначити з аналізу повідомлення.

Контрольні питання

1. У чому полягає арифметичний алгоритм кодування інформації? Які його переваги в порівнянні з іншими статистичними методами стиснення інформації?
2. Як здійснюється декодування даних за арифметичним алгоритмом?
3. У чому полягає адаптивний алгоритм *Хаффмена*? Що таке упорядковане дерево *Хаффмена*?
4. Як здійснюється кодування/декодування вхідних даних за адаптивним алгоритмом *Хаффмена*?
5. Які переваги і недоліки адаптивного алгоритму *Хаффмена*?

Лабораторна робота №10

Тема: Штрихове кодування

Мета: вивчити визначення штрихового коду. Його призначення. Визначити справжність товарів за допомогою штрих коду.

Теоретичні відомості

Найважливішим видом маркування товару є штрихові коди (ШК), являють собою за зовнішнім виглядом прямокутник з комбінацією темних і світлих смуг і цифрових позначень. ШК стали невід'ємним елементом маркування товарів імпортного та вітчизняного походження. Відповідно до вимог проведення зовнішньоторговельних операцій наявність штрихового коду є обов'язковою умовою експорту. Штриховий код - це товарний знак, який наноситься на товар або його упаковку у вигляді штрихового або цифрового символу, зчитуваного сканером. Штриховий код є одним із засобів системи автоматичної ідентифікації товару, до якої також належать засоби цифрової, магнітної, радіочастотної, звукової та візуальної ідентифікації (магнітних картка, радіочастотна бирка і т. д.). Його головна перевага перед іншими засобами автоматичної ідентифікації полягає в можливості оперативно передавати інформацію про товар за системою електронного зв'язку, тобто ШК є ефективним засобом телекомунікації. Штриховий код призначений:

- ● для оперативної ідентифікації товару і виробника;
- ● проведення торгових операцій «без паперів»: ШК скорочує витрати на діловодство від 15 до 0,5-3% вартості товару;
- ● автоматизованого обліку та контролю товарних запасів;
- ● оперативного управління процесом руху товару: відвантаження, транспортування і складування товарів (продуктивність праці по забезпеченню руху товару підвищується на 30%, у деяких випадках - до 80%);
- ● інформаційного забезпечення маркетингових досліджень. Розглянемо модельну ситуацію управління процесом руху товару з використанням автоматичної ідентифікації товару на основі ШК. Інформація про купівлю товару зі скануючих пристроїв і касових терміналів, встановлених у торговому залі магазину, передається в головний комп'ютер торгового складу, який контролює зміну товарних запасів. При зменшенні їх нижче встановлених нормативів формується заявка на постачання товарів певного асортименту, яка передається по каналах супутникового зв'язку в оптове підприємство. В свою чергу оптовик спрямовує замовлення виробнику. Відповідно до замовлення здійснюється випуск конкретних товарів, що користуються попитом. Виробник відправляє оптовикові попереднє повідомлення про поставку товарів і здійснює відвантаження. Оптовик посилає випереджувальний відвантажувальне повідомлення в магазин і проводить постачання. Штрихові коди застосовуються в промисловому виробництві, оптової та роздрібної торгівлі, складському господарстві, транспорті, банківській справі, митному контролі, страхуванні, охороні здоров'я, видавництві та ін. Кожному виду, різновиду, модифікації товару присвоюється індивідуальний товарний номер (позначається штрих-кодом). При зміні споживчих властивостей товару (складу, розміру, маси, способу упаковки, комплектності і т. д.) його ШК змінюється. тільки ринкове коливання ціни на товар не тягне за собою зміни його товарного номера (коду). Існують декілька видів кодів, серед яких найбільш поширеними є європейські коди типу EAN і американські типу UPC. Коди EAN залежно від числа знаків символів підрозділяють на EAN-8, EAN-13 і EAN-14.

За структурою кодів розрізняють ШК:

- ● дискретні - знаки розділені межзначними інтервалами;
- ● безперервні - знаки-роздільники відсутні;
- ● двонаправлені - можна зчитувати у двох напрямках – зліва направо і справа наліво. Візьмемо, наприклад, цифровий код: 4820024700016. Перші дві цифри (482) означають країну походження (виробника або продавця) продукту, наступні 4 або 5 залежно від довгі коду країни (0024) - підприємство- виробник, ще п'ять (70001) - найменування товару, його споживчі

властивості, розміри, масу , колір. Остання цифра (6) контрольна, що використовується для перевірки правильності зчитування штрихів сканером. EAN - 13:

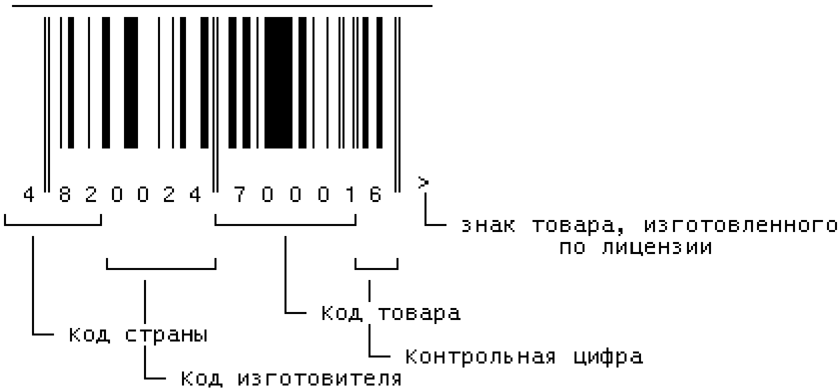

Рис. 1. Зразок штрихового коду в системі EAN-13

Тринадцятизначний номер штрихового коду EAN-13 включає: перші 3 знаки - код банку даних організації, що зареєструвала підприємство-виробник і товар (видала товарний номер). Необхідно враховувати, що він не завжди збігається за місцем походження (країною виготовлення) товару, так як фірма може бути зареєстрована не у вітчизняному банку даних, а в закордонному; 4 знаків - код підприємства, що виробляє або реалізує товар; 5 знаків - код товару. Підприємство самостійно визначає кодовану інформацію (з урахуванням споживчих властивостей товару, упаковки, маси і т. д.) і доводить її до торгового партнера, який повинен отримати інформацію про ШК мінімум за 3 тижні до поставки самого товару (це правило діє і в разі зміни ШК);

1 знак (останній) - контрольна цифра розраховується шляхом найпростіших арифметичних операцій і призначена для перевірки правильності зчитування (сканування) ШК.

Для коду товару:

1 цифра: найменування товару,

2 цифра: споживчі властивості,

3 цифра: розміри, маса,

4 цифра: інгредієнти,

5 цифра: колір.

Часто ШК супроводжується знаком «старт - Стоп», який розташовується на початку і в кінці кодового повідомлення і використовується як обмежувач коду. Такими обмежувачами є подовжені крайові штрихи, що вказують на початок і кінець сканування. Як правило, код країни привласнюється Міжнародною асоціацією EAN. Звертаємо увагу споживачів на те, що код країни ніколи не складається з однієї цифри. Таким чином, незалежний покупець може, навіть користуючись спеціальними класифікаторами, розшифрувати лише перші 7 знаків штрихового коду. Повністю розшифрувати інформацію може торговий партнер фірми-виробника. Нерідко на товарі можна побачити напис, наприклад, «Зроблено в Німеччині», а код, нанесений на етикетку, цій країні не відповідає.

Причин цього може бути декілька:

- Фірма була зареєстрована і отримала код не в своїй країні, а в тій, куди направлений основний експорт продукції;
- Товар був виготовлений на дочірньому підприємстві, розташованому в іншій країні;
- Товар був виготовлений в одній країні, але за ліцензією фірми з іншої країни;

- Засновниками підприємства є кілька фірм з різних держав.

Використовуючи штрих-код, можна з відомим ступенем достовірності, судити про справжність товару або ж встановити наявність фальсифікації продукції. Це може бути зроблено за допомогою наявного в штрих-коді контрольного знака (остання цифра штрих-коду). Розглянемо методику такого аналізу на прикладі штрих-коду типу EAN-13 (рис. 1) (код 4820024700016). Для такого аналізу слід провести наступні обчислення:

1. Скласти цифри, що стоять на парних місцях: 8 +0 +2 +7 +0 +1 = 18
2. Отриману суму помножити на 3: 18·3 = 54
3. Скласти цифри, що стоять на непарних місцях, без контрольної цифри: 4 +2 +0 +4 +0 +0 = 10
4. Скласти числа, зазначені в пунктах 2 і 3: 54 +10 = 64
5. Відкинути десятки: отримаємо 4
6. З 10 відняти отримане в пункті 5: 10-4 = 6

Якщо отримана після розрахунку цифра не співпадає з контрольною цифрою в штрих-коді, це означає, що товар вироблений незаконно, а якщо збігається - товар справжній. Існує ряд правил нанесення штрих-коду, відхилення від яких також може дозволити відрізнити справжні штрихові коди від підроблених.

По-перше, встановлені вимоги до розміру ШК:

- Мінімально можливі розміри коду - 21,0 ¸ 30,0 мм;
- Максимальні - 52,5 ¸ 74,6 мм.

Кольорове виконання повинно бути наступним:

- Колір штрихів може бути чорним, синім, темно-зеленим або темно- коричневим;
- В якості фону рекомендується застосовувати білий колір, але можна також використовувати жовтий, помаранчевий та світло-коричневий. червоний і жовтий тони для друкування штрихів застосовувати не можна, оскільки де вони розрізняються сканером.

Розміщують ШК, як правило, на задній стінці упаковки в правому нижньому кутку, на відстані не менше 20 мм від країв. поверхня упаковки при цьому повинна бути абсолютно рівна, без перфорації, малюнків і т. д. При використанні м'яких упаковок (пакетів з полімерних матеріалів) для нанесення ШК вибирають таке місце, на якому штрихи будуть паралельні днищу упаковки. На кожній упаковці розміщують лише один код EAN або UPC, однак, якщо товар зареєстрований у двох асоціаціях, в протилежних кінцях упаковки наносять два коди. Таким чином, навіть знання цих найпростіших правил іноді може захистити споживача від підробки ШК. Існує 2 варіанти нанесення ШК на товар або його упаковку:

1) поліграфічним способом: висока якість друку забезпечують оригінал-макети, виготовляються спеціалізованими фірмами;

2) у вигляді самоклеючих етикеток, ярликів і т. д. Для зчитування ШК застосовують:

- Стаціонарні і портативні лазерні сканери, що дозволяють зчитувати ШК на різних відстанях від товару: від 60 см до 5-6 м;
- Касові термінали, оснащені системами зчитування ШК;
- Оптичні контактні зчитувачі у вигляді ручок, олівців, лазерних пістолетів та ін.

Єдиною організацією в країнах СНД, що має право реєструвати підприємства в Міжнародній системі EAN і надавати унікальні штрихові коди EAN і американські коди UPC, є Зовнішньоекономічна асоціація в області автоматичної ідентифікації «UNISCAN» («ЮНІСКАН»). Будь-яке підприємство може стати повноправним членом- користувачем Міжнародної асоціації EAN і отримати товарний номер (штриховий код) на свою продукцію.

Завдання на лабораторну роботу №10

Розглянути штрих-коди і визначити:

1) справжність товарів, розрахувавши контрольний знак штрих-кодів.

Завдання 1.

№ п/п варіант	штрих-код	№ п/п варіант	штрих-код
1	4606319002009	16	4810148000772
2	4012982037093	17	*3059943016576*
3	8410179800127	18	4607039084603
4	2220071000565	19	5029053541969
5	4003583121229	20	8934901730037
6	5060040302231	21	2220066000402
7	4605996001787	22	3274870264313
8	2220071000794	23	5050136424183
9	7322540157185	24	8002470001275
10	5000111040921	25	4600660001063
11	8436024293043	26	7640123861299
12	4607011660177	27	5901828000959
13	4751007733007	28	8850450218003
14	8410599091556	29	6922012704315
15	4601498001720	30	2220066000921

Завдання 2.

№ варі-анта	Країна	Код товаро-виробника	Код товару
1	Японія	04734	22029
2	Китай	1144	03220
3	Україна	3539	11027
4	Білорусія	2535	45391
5	Польща	4335	67820
6	Туреччина	7390	22029
7	Угорщина	0897	77194
8	Італія	44900	10272
9	Португалія	12491	23479
10	Великобрита ній	78013	05537
11	Німеччина	34650	77112
12	Бразилія	9945	00202
13	Румунія	8750	55339

14	Чехія	1521	70027
15	Словаччина	0033	12020
16	США	1007	20122
17	США	2190	81076
18	США	0733	56520
19	Канада	7688	31327
20	Канада	0457	90142
21	США	2880	00110
22	США	1100	34541
23	США	3155	55120
24	Канада	4410	87807
25	Канада	9191	03225

Контрольні питання

1. Десятковий числовий код, двійковий числовий і штриховий коди.
2. Десяткові цифрові коди EAN-8, EAN-13 одиниць споживання.
3. Правила побудови двійкового цифрового коду та штрихового коду десяткових кодів EAN-8 та EAN-13 одиниць споживання.
4. Десяткові цифрові коди DUN-14, DUN-16 одиниць поставки та їх структура.
5. Правила побудови двійкового цифрового коду десяткових кодів DUN-14, DUN-16 одиниць поставки. Правила друкування штрихових кодів одиниць постачання по ITF (International Тип формування).
6. Формат КОДА DUN-14 одиниці поставки на основі коду EAN-13.
7. Формат КОДА DUN-14 одиниці поставки на основі коду EAN-8.
8. Формат КОДА DUN-16 одиниці поставки на основі коду EAN-13.
9. Формати кодів одиниць постачання на основі кодів EAN-8, EAN-13 з додатковим кодом (ДК).

Лабораторна робота №11

Тема: Двійкові коди, що виправляють однократні помилки

Мета: вивчити визначення штрихового коду. Його призначення. Визначити справжність товарів за допомогою штрих коду.

Теоретичні відомості

Коди, що виправляють одну помилку, повинні мати мінімальну кодову відстань $d_{min} \geq 3$. Збільшення кодової відстані досягається збільшенням числа розрядів коду n при незмінній кількості дозволених кодових комбінацій або зменшенням числа дозволених кодових комбінацій, що використовуються для передачі повідомлень, тобто збільшенням надмірності коду.

Найбільшого поширення серед двійкових кодів, що виправляють однократні помилки, одержали систематичні (лінійні, групові) блокові коди: Хеммінга, ітеративний (Елайеса), з багатократним повторенням, інверсний, та несистематичний код Бергера .

Систематичний код з $d_{min} = 3$, який називають кодом Хеммінга, використовується для виправлення однієї або виявлення двох помилок.

Систематичний (груповий, лінійний) код довжиною n з кількістю інформаційних символів k позначають як (n, k) - код. Для систематичного (n, k) - коду з $d_{min} = 3$ кількість перевірочних символів вибирають як найменше ціле r, що відповідає умовам

$$2^r \geq n + 1 = k + r + 1. \qquad (17.1)$$

Як відомо, у систематичних кодах перевірочні елементи можна одержати шляхом додавання за модулем 2 визначених інформаційних елементів.

Систематичний код можна задавати *твірною* (*породжуваль-ною*) *матрицею*, якій притаманні такі особливості:

– матриця має k рядків та n стовпців ;

– кожний елемент матриці є або “0”, або “1”;

– кожний рядок матриці являє собою кодову комбінацію коду, що цією матрицею задається, і повинен мати не менше трьох одиниць ;

– всі рядки матриці повинні бути лінійно незалежними ;

– поелементна сума за модулем 2 будь - якої кількості рядків матриці (яка, до речі, завжди буде комбінацією коду) повинна мати не менше трьох одиниць.

Підібрані за даних умов вихідні комбінації, які називають *базисними*, записуються у вигляді матриці:

$$G_{n,k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kr} \end{bmatrix}, \qquad (17.2)$$

де a_{ji} та b_{jm} – відповідно i - ий інформаційний та m - ий перевірочний елементи j - ої базисної кодової комбінацій.

Твірну матрицю (15.2) можна подати у вигляді двох підматриць: інформаційної (E_k) та перевірочної ($C_{r,k}$).

Інформаційну підматрицю зручно подати у канонічній формі як одиничну підматрицю розміром $k \times k$:

$$E_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Перевірочна підматриця $C_{r,k}$ будується підбором r - розрядних двійкових послідовностей з числом одиниць у кожному рядку не менше за $d_{min} - 1 = 2$. При цьому необхідно враховувати, що сума за модулем 2 будь-яких рядків цієї підматриці не повинна мати менше за $d_{min} - 2 = 1$ одиниць, тобо однакові набори є неприпустимими.

Рядки у перевірочній підматриці можна міняти місцями. При цьому можна одержати декілька варіантів твірних матриць.

Твірна матриця дозволяє одержати всі кодові комбінації систематичного групового коду. Це досягається послідовним додаванням за модулем 2 рядків матриці у всіх можливих сполученнях (тобто першого і другого рядків матриці; першого і третього; першого і четвертого; . . . ; другого і третього; другого і четвертого; . . .; першого, другого і третього; першого, другого і четвертого; . . . , нарешті усіх k рядків). Нульова комбінація дописується окремо.

Опираючись на твірну, матрицю можна побудувати *перевірочну матрицю* $H_{n,r}$, яка налічує r рядків та n стовпців. Перевірочна матриця складається з двох підматриць: підматриці $D_{k,r}$, яка має k стовпців та r рядків, кожний рядок якої відповідає транспонованому стовпцю перевірочної підматриці $C_{r,k}$ твірної матриці $G_{n,k}$, та одиничної підматриці E_r розміром $r \times r$:

$$H_{n,r} = [\,D_{k,r}; E_r\,] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{k1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{k2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \dots & b_{kr} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (17.3)$$

Перевірочна матриця (15.3) дозволяє спростити операції кодування і декодування.

Запишемо довільну кодову комбінацію коду у вигляді

$$V = [\,a_1 a_2 a_3 \dots a_k b_1 b_2 b_3 \dots b_r\,],$$

де a_i та b_m – відповідно інформаційні та перевірочні елементи.

Позиції, які зайняті одиницями у i-ому рядку підматриці $D_{k,r}$, визначають ті інформаційні елементи, які повинні брати участь у формуванні i-ого перевірочного елемента b_i:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_{11} a_1 \oplus b_{21} a_2 \oplus \dots \oplus b_{k\,1} a_k, \\ b_2 &= b_{12} a_1 \oplus b_{22} a_2 \oplus \dots \oplus b_{k\,2} a_k, \\ &\vdots \\ b_r &= b_{1r} a_1 \oplus b_{2\,r} a_2 \oplus \dots \oplus b_{k\,r} a_k. \end{aligned} \qquad (17.4)$$

Існування співвідношень (15.4), що пов’язують інформаційні та перевірочні елементи кодової комбінації, дає можливість при деко-дуванні виявляти та виправляти помилки в кодових комбінаціях, які можуть з’являтися через спотворення елементів у двійковому каналі під час їх передачі.

Аналізуючи результати перевірки цих співвідношень у прийнятій кодовій комбінації, можна отримати певну ін-формацію про помилки.

Позначимо кодову комбінацію, яка пройшла через двійковий канал та підлягає декодуванню,

$$V^* = [\,\overset{*}{a}{}^1 \overset{*}{a}{}^2 \overset{*}{a}{}^3 \dots \overset{*}{a}{}^k \overset{*}{b}{}^1 \overset{*}{b}{}^2 \overset{*}{b}{}^3 \dots \overset{*}{b}{}^r\,],$$

де $\overset{*}{a}{}^i$ та $\overset{*}{b}{}^m$ – відповідно інформаційні та перевірочні елементи кодової комбінації на виході каналу.

Для з’ясування питання, чи відповідає кодова комбінація V^* правилам побудови коду, отримаємо набір s_j, $j = 1,2,3,\dots,r$:

$$s_j = b_{1j} \overset{*}{a}{}^1 \oplus b_{2j} \overset{*}{a}{}^2 \oplus b_{3j} \overset{*}{a}{}^3 \oplus \dots \oplus b_{kj} \overset{*}{a}{}^k \oplus \overset{*}{b}{}^j.$$

Кожний елемент s_j дає інформацію про те, задовольняють чи ні символи кодової кобінації V^* відповідному рівнянню системи (8.4).

Набір елементів ($s_1, \dots, s_r$) називається кодовим *синдромом* або пізнавачем помилок .

Якщо синдром складається з одних нулів, кодова комбінація V^* є *дозволеною*, тобто задовольняє правилам побудови коду.Такий результат буде мати місце, якщо в кодовій комбінації немає помилок або конфігурація помилок є такою, що вона не може бути виявлена цим кодом. Присутність хоча б одного ненульового елемента в комбінації синдрому вказує на спотворення хоча б одного елемента у прийнятій кодовій комбінації.

Значення синдрому при однократній помилці у прийнятій кодовій комбінації збігаються із стовпцями перевірочної матриці. Порівнюючи кодовий синдром з стовпцями матриці $H_{n,r}$, можна знайти місце помилки у комбінації по їх збігу. У разі помилки виправляється той розряд кодової комбінації, який відповідає порядковому номеру стовпця матриці, що збігається з синдромом.

Приклади виконання завдань

Приклад_1.

Побудувати твірну матрицю і визначити всі комбінації двійкового систематичного (групового) коду, здатного виправляти поодинокі помилки для $N_0 = 8$ повідомлень.

Розв'язання. Кількість інформаційних розрядів коду $k = log_2 8 = 3$. Кількість перевірочних розрядів визначається як найменше ціле r, яке задовольняє нерівності $2^r = k + r + 1$; таким значенням буде $r = 3$. Довжина коду $n = k + r = 6$. Таким чином, твірна матриця $G_{n,k}$ має 6 стовпців та 3 рядка, а перевірочна підматриця $C_{r,k}$ має 3 стовпця та 3 рядка.

Згідно з правилом побудови підматриці $C_{r,k}$ кількість одиниць у кожному рядку цієї підматриці повинно бути не менша за $d_{min} - 1 = = 3 - 1 = 2$, а кодова відстань між окремими рядками цієї підматриці – не менша за $d_{min} - 2 = 3 - 2 = 1$. Тому, з триелементних комбінацій для підматриці $C_{3,3}$ вибираємо тільки ті, які задовольняють цим умовам, тобто 110, 101, 011.

За інформаційну підматрицю E_k твірної матриці обирають одиничну підматрицю. Дописавши до неї перевірочну підматрицю, одержимо твірну матрицю систематичного коду, здатного виправляти однократні помилки,

$$G_{6,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

За допомогою одержаної твірної матриці $G_{6,3}$ визначимо всі 8 кодових комбінацій, які належать до цього систематичного коду: $1 - 000000$; $2 - 100110$; $3 - 010101$; $4 - 001011$; $5 - 110011\ (2 \oplus 3)$; $6 - 101101\ (2 \oplus 4)$; $7 - 011110\ (3 \oplus 4)$; $8 - 111000\ (2 \oplus 3 \oplus 4)$.

Приклад_2.

Побудувати перевірочну матрицю двійкового систематичного коду, здатного виправляти однократні помилки з $d_{min} = 3$. Закодувати за допомогою одержаної перевірочної матриці комбінації первинного двійкового коду 111 та 011.

Розв'язання. Для побудови перевірочної матриці систематичного коду, здатного виправляти однократні помилки, скористуємось твірною матрицею, побудованою для одержання 8 комбінацій систематичного коду в задачі 8.2.1.

Перевірочна матриця $H_{n,r}$ повинна мати $r = 3$ рядки та $n = 6$ стовпців. Вона утворюється з двох підматриць: $D_{3,3}$, яка містить три стовпці і три рядки, кожний рядок якої відповідає стовпцю пере-вірочної підматриці $C_{3,3}$ твірної матриці $G_{6,3}$, та одиничної під-матриці E_3. Таким чином,

$$H_{6,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перевірочні елементи, згідно матриці $H_{6,3}$, можна визначити так: $b_1 = a_1 \oplus a_2$; $b_2 = a_1 \oplus a_3$; $b_3 = a_2 \oplus a_3$.

За допомогою одержаної перевірочної матриці $H_{6,3}$ виконуємо кодування систематичним (груповим) кодом комбінацій первинного коду 111 та 011, для чого визначаємо перевірочні елементи для заданих комбінацій. Для комбінації 111:

$b_1 = 1 \oplus 1 = 0$; $b_2 = 1 \oplus 1 = 0$; $b_3 = 1 \oplus 1 = 0$,
а для комбінації 011:

$b_1 = 0 \oplus 1 = 1$; $b_2 = 0 \oplus 1 = 1$; $b_3 = 1 \oplus 1 = 0$.

Таким чином, кодові комбінації систематичного (групового) коду будуть мати вигляд: 111000 та 011110.

Приклад_3.

Для групового (7, 4) - коду, що виправляє однократні помилки, побудувати перевірочну матрицю $H_{7,3}$ і закодувати за її допомогою комбінацію двійкового простого коду 1101, якщо твірна матриця має вигляд

$$G_{7,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Визначити синдром для виправлення однократних помилок в комбінаціях цього коду. Показати на прикладі виправлення однократної помилки.

Розв'язання. Згідно з (8.3) перевірочна матриця $H_{7,3}$ для (7, 4) - коду буде складатись з двох підматриць: $D_{4,3}$, кожний рядок якої відповідає транспонованому стовпцю перевірочної підматриці $C_{3,4}$ твірної матриці $G_{7,4}$, та одиничної підматриці E_3. Отже, перевірочна матриця $H_{7,3}$ буде мати вигляд:

$$H_{7,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перевірочні елементи, згідно матриці $H_{7,3}$, будуть визначатись за такими виразами:

$b_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$; $b_2 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4$; $b_3 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4$.

Користуючись ними, закодуємо комбінацію $[\, a_1 a_2 a_3 a_4 \,] = = 1101$, тобто визначимо перевірочні елементи:

$b_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$; $b_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$; $b_3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$; таким чином, комбінація групового коду буде мати вигляд 1101010 .

У декодері для виявлення і виправлення однократної помилки у прийнятій кодовій комбінації систематичного групового коду викону- ють перевірку – визначають синдром помилки. Для одержаної пе- ревірочної матриці елементи синдрому помилки визначаються таким чином : $s_1 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_3^* \oplus b_1^*$; $s_2 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* \oplus b_2^*$; $s_3 = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_3^*$.

Знайдемо і виправимо однократну помилку, наприклад, у ком-бінації $[\, a_1^* a_2^* a_3^* a_4^* b_1^* b_2^* b_3^* \,] = 1001010$. Для цього визначимо кодовий синдром помилки: $s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$; $s_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$; $s_3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$, тобто синдром має вигляд 110, що відповідає другому стовпцю перевірочної матриці $H_{7,3}$. Синдром показує, що помилка знаходиться у другому розряді прийнятої кодової комбінації. Для виправлення помилки інвертуємо значення даного розряду, тобто замість " 0 " записуємо " 1 ". Виправлена кодова комбінація групового коду буде мати вигляд 1101010 .

Приклад_4.

Закодувати традиційним двійковим кодом Хеммінга комбінацію двійкового простого коду 10110 і показати на прикладі процес виправлення будь-якої однократної помилки. Визначити надмірність коду.

Розв'язання. Згідно із співвідношенням (8.1) при $k = 5$ кількість перевірочних елементів $r = 4$; довжина коду $n = k + r = 5 + 4 = 9$. Перевірочні елементи будуть розташовані на позиціях 1, 2, 4, і 8 (див. правила побудови перевірочної матриці коду Хеммінга). Побудуємо перевірочну матрицю коду Хеммінга розмірами $r = 4$ рядків та $n = 9$ стовпців:

$$H_{9,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$b_1\, b_2\;\; a_1 b_3\;\; a_2\, a_3\, a_4\;\; b_4\, a_5$

Під матрицею для полегшення процесу кодування записана у загальному вигляді кодова комбінація, де через a_i та b_j позначені інформаційні та перевірочні елементи відповідно. Користуючись побудо-ваною перевірочною матрицею $H_{9,4}$, визначимо значення перевіроч-них елементів для $[\,a_1 a_2 a_3 a_4 a_5\,] = 10110$:

$b_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$;

$b_2 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$;

$b_3 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$;

$b_4 = a_5 = 0$.

Кодова комбінація традиційного коду Хеммінга буде мати вигляд: 011001100.

Виконаємо декодування одержаної кодової комбінації з виправленням однократної помилки. Припустимо, що при передачі сталося спотворення і замість 011001100 була прийнята кодова комбінація 011001000.

Для виявлення і виправлення помилки у декодері виконують перевірки на парність з урахуванням перевірочних елементів, тобто знаходять синдром помилки згідно перевірочній матриці $H_{9,4}$:

$s_1 = b_1 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$;

$s_2 = b_2 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$;

$s_3 = b_3 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$;

$s_4 = b_4 \oplus a_5 = 0 \oplus 0 = 0$.

Маємо синдром 0111. Таким чином , визначаємо, що спотворено елемент із порядковим номером $0111_2 = 7_{10}$, тобто елемент a_4. Виправляємо його за допомогою інверсії та одержуємо правильну кодову комбінацію – 011001100.

Надмірність коду $R = 1 - k/n = 1 - k/(k+r) = r/n = 4/9$.

Завдання на лабораторну роботу №11

Завдання 1.

Побудувати твірну матрицю двійкового систематичного (групового) коду, який має N_0 дозволених кодових комбінацій та здатен виправляти всі однократні помилки (згідно з варіантом таблиці 1). Навести приклад кодування за допомогою твірної матриці.

Таблиця 1

№ варіанта	Кількість дозволених комбінацій N_0
1	8
2	16
3	32
4	64
5	128
6	8
7	16
8	32
9	64
10	128
11	8
12	16
13	32
14	64
15	128
16	8
17	16
18	32
19	64
20	128

Завдання 2.

Визначити, які з наведених комбінацій двійкового групового (7,4) - коду (згідно з варіантом таблиці 8.3.2), містять помилку, якщо відомо, що код побудований за твірною матрицею:

$$G_{7,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таблиця 2

№ варіанта	Комбінації двійкового групового коду
1	1010110, 1110010, 0001111
2	0101010, 1111111, 0011011
3	0011101, 0010110, 1101110
4	1100000, 1100110, 1010101

5	0100010, 0100101, 1001011
6	1110000, 0000101, 0100000
7	1010110, 1110010, 0001111
8	0101010, 1111111, 0011011
9	0011101, 0010110, 1101110
10	1100000, 1100110, 1010101
11	0100010, 0100101, 1001011
12	1010110, 1110010, 0001111
13	0101010, 1111111, 0011011
14	0011101, 0010110, 1101110
15	1100000, 1100110, 1010101
16	0100010, 0100101, 1001011
17	1010110, 1110010, 0001111
18	0101010, 1111111, 0011011
19	0011101, 0010110, 1101110
20	1100000, 1100110, 1010101

Завдання 3.

Визначити, які з комбінацій двійкового групового (7,4)-коду містять помилку (згідно з варіантом таблиці 3), якщо відомо, що перевірочна матриця коду має вигляд:

$$H_{7,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таблиця 3

№ варіанта	Комбінації двійкового групвого коду
1	0010110, 1110010, 1001111
2	0101110, 1111111, 1011001
3	1011111, 0010110, 1101110
4	0100011, 1100110, 0010101
5	0100011, 0100101, 1101011
6	0010110, 1110010, 1001111
7	0101110, 1111111, 1011001
8	1011111, 0010110, 1101110
9	0100011, 1100110, 0010101
10	0100011, 0100101, 1101011
11	0010110, 1110010, 1001111
12	0101110, 1111111, 1011001
13	1011111, 0010110, 1101110
14	0100011, 1100110, 0010101
15	0100011, 0100101, 1101011
16	0010110, 1110010, 1001111
17	0101110, 1111111, 1011001
18	1011111, 0010110, 1101110

19	0100011, 1100110, 0010101
20	0100011, 0100101, 1101011

Завдання 4.

Побудувати перевірочну матрицю традиційного двійкового коду Хеммінга з заданими d_{min} та k (згідно з варіантом таблиці 4). За допомогою одержаної матриці закодувати кодом Хеммінга комбінації двійкового простого коду A_1 та A_2.

Показати на прикладі виправлення будь-якої однократної помилки (для коду з $d_{min} = 3$) або виявлення будь-якої трикратної помилки (для коду з $d_{min} = 4$) в отриманих кодових комбінаціях коду Хеммінга і визначити надмірність коду.

Таблиця 4

№ варіанта	d_{min}	k	A_1	A_2
1	3	4	0011	1010
2	3	5	11001	00110
3	3	7	0101010	1110000
4	3	11	01110001010	00011100011
5	3	12	001100110010	111000111000
6	3	14	00010001000100	10010010010010
7	4	4	1110	0011
8	4	7	0100101	1110001
9	4	11	01110111000	11001100111
10	4	15	100011100101011	010100010100001
11	3	4	0011	1010
12	3	5	11001	00110
13	3	7	0101010	1110000
14	3	11	01110001010	00011100011
15	3	12	001100110010	111000111000
16	3	14	00010001000100	10010010010010
17	4	4	1110	0011
18	4	7	0100101	1110001
19	4	11	01110111000	11001100111
20	4	15	100011100101011	010100010100001

Контрольні питання

1. Що таке завадостійке кодування і які коди використовують при цьому?
2. Який код називають кодом Хеммінга?
3. Сформулюйте алгоритм визначення значень синдрому при виправленні помилки кодом Хеммінга.
4. Дайте визначення циклічного коду.
5. Що таке твірна і перевірна матриці коду і для яких цілей їх використовують ?
6. Що називають кодовим синдромом і для яких цілей він використовується ?
7. Сформулюйте кроки алгоритму алгебраїчного методу побудови циклічного коду.
8. Сформулюйте алгоритм визначення помилки в циклічному коді, який ґрунтується на методі гіпотез.
9. Сформулюйте алгоритм визначення значень синдрому для виправлення помилки в коді Хеммінга.

Лабораторна робота №12

Тема: Двійкові циклічні коди

Мета: вивчити визначення штрихового коду. Його призначення. Визначити справжність товарів за допомогою штрих коду.

Теоретичні відомості

Подання кодових комбінацій у циклічних кодах виконують у вигляді поліномів від формальної змінної x, що дозволяє звести дії над кодовими комбінаціями до дій над поліномами. Так, сума двох двій-кових поліномів виконується додаванням за модулем 2 коефіцієнтів за рівних степенів змінної x. Наприклад, отримаємо суму за модулем 2 двох поліномів: $(x^4 \oplus x^3 \oplus x \oplus 1) \oplus (x^3 \oplus x^2 \oplus x) = x^4 \oplus x^2 \oplus 1$. Множення виконується за звичайними правилами множення степеневих функцій, але коефіцієнти однакових степенів додаються за модулем 2. Так, $(x^4 \oplus x^3 \oplus x \oplus 1)(x \oplus 1) = x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \oplus x \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x \oplus 1 = = x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus 1$.

Ділення також виконується як звичайне ділення поліномів, при цьому операція віднімання співпадає з операцією додавання $\oplus$. Наприклад, $(x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus 1) / (x \oplus 1) = x^4 \oplus x^3 \oplus x \oplus 1$.

До циклічних належать лінійні блокові (n, k) - коди, у яких циклічний зсув елементів будь-якої дозволеної комбінації призводить до виникнення також дозволеної комбінації, що належить до даного коду. Така циклічна перестановка з'являється завдяки помноженню полінома даної комбінації на x. Щоб степінь полінома не перевищував $n - 1$, член x^n замінюється одиницею.

Особливу роль в теорії циклічних кодів відіграють твірні поліноми, у якості яких звичайно використовуються незвідні поліноми та їх добутки.

Циклічні коди з $d_{min} = 3$. Розрізняють алгебраїчні та матричні способи побудови циклічних кодів. Існують три алгебраїчні способи побудови кодових комбінацій циклічного коду, які випливають з виразу

$$\frac{x^r Q(x)}{P(x)} = C(x) \oplus \frac{R(x)}{P(x)}, \qquad (9.1)$$

де r – кількість перевірочних розрядів у комбінації циклічного коду; $Q(x)$ – поліном первинної кодової комбінації; $P(x)$ – твірний полі-ном; $C(x)$ – частка від ділення того степеня, що і $Q(x)$; $R(x)$ – остача від ділення, яка має степінь, не більший за $r - 1$. З виразу (9.1) можна одержати три способи побудови циклічного коду:

$$F_1(x) = x^r Q(x) \oplus R(x);$$
$$F_2(x) = C(x) P(x);$$
$$F_3(x) = Q(x) P(x),$$

де $F(x)$ – комбінація циклічного коду.

Перші два способи дають один і той же роздільний циклічний код, тобто $F_1(x) = F_2(x)$, у якому розташування інформаційних і перевірочних елементів буде підпорядковано правилу: k старших роз-рядів комбінації – інформаційні, решта $n - k = r$ розрядів – пере-вірочні. Третій спосіб використовується для побудови нероздільного циклічного коду, де інформаційні і перевірочні елементи в комбінаціях не відокремлені одні від одних, що ускладнює процес декодування.

Деякі твірні поліноми для циклічних кодів наведені у табл. 19.1.

Таблиця 19.1

Кількість перевірочних елементів r	Твірний поліном $P(x)$	Двійковий запис полінома
3	$x^3 \oplus x \oplus 1$	1011
3	$x^3 \oplus x^2 \oplus 1$	1101
4	$x^4 \oplus x \oplus 1$	10011

4	$x^4 \oplus x^3 \oplus 1$	11001
5	$x^5 \oplus x^2 \oplus 1$	100101
5	$x^5 \oplus x^3 \oplus 1$	101001
5	$x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$	101111
5	$x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$	110111
6	$x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus 1$	1110001
8	$x^8 \oplus x^7 \oplus x^6 \oplus x^5 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$	111100111
9	$x^9 \oplus x^5 \oplus x^3 \oplus 1$	1000101001

Очевидно, що $F(x)$ повинен ділитися на $P(x)$ без остачі. На цьому і грунтується перевірка кодової комбінації на наявність помилок при прийомі. Якщо прийнята комбінація $F^*(x)$ ділиться на $P(x)$ без остачі, вона визнається безпомилковою. Якщо після ділення залишається ненульова остача, це свідчить про наявність помилки у прийнятій комбінації циклічного коду.

Для виправлення помилки можна скористатися методом гіпотез. Цей метод грунтується на послідовній побудові гіпотез про помилки у молодшому розряді прийнятої кодової комбінації, потім, якщо гіпотеза не підтверджується, у другому розряді і так далі, поки гіпотеза не підтвердиться і остача від ділення $F^*(x) \oplus E(x)$, де $E(x)$ – поліном помилки, на $P(x)$ не дасть нульовий результат. Це означає, що $F(x) = F^*(x) \oplus E(x)$ і помилка виправлена.

Розрізняють три матричні способи одержання циклічного коду, два з яких грунтуються на побудові твірної матриці, і один – перевірочної.

За першим способом будується твірна матриця

$$G = \begin{bmatrix} x^0 \cdot P(x) \\ x^1 \cdot P(x) \\ x^2 \cdot P(x) \\ \vdots \\ x^{k-1} \cdot P(x) \end{bmatrix} .$$

За другим способом також будується твірна матриця циклічного коду, але на відміну від першого, у якості рядків такої матриці використовують усі можливі комбінації коду, що мають тільки одну одиницю в інформаційній частині; перевірочні елементи для таких комбінацій можна визначити за допомогою першого алгебраїчного способу побудови коду.

Третій матричний спосіб побудови циклічного коду грунтується на одержанні перевірочної матриці за допомогою використання перевірочного полінома, який визначається за формулою:

$$H(x) = (x^n \oplus 1)/P(x),$$

де $n = 2^r - 1$. При цьому, перевірочна матриця має вигляд:

$$H = \begin{bmatrix} x^0 \cdot H(x) \\ x^1 \cdot H(x) \\ x^2 \cdot H(x) \\ \vdots \\ x^{r-1} \cdot H(x) \end{bmatrix} .$$

Процес кодування і декодування за допомогою твірної або перевірочної матриць циклічного коду провадиться аналогічно даному процесу у двійковому груповому коді, викладеному в розділі 8.

Циклічні коди з $\boldsymbol{d_{min} = 4}$ можуть виявляти одно-, дво- і трикратні помилки. Для збільшення кодової відстані до $d_{min} = 4$ кількість перевірочних елементів у кодовій комбінації такого коду має бути на один більшою, ніж у коді з $d_{min} = 3$. Твірний поліном $P(x)_{(d=4)}$ такого коду визначається як добуток твірного поліному $P(x)_{(d=3)}$ циклічного коду, який має $d_{min} = 3$, на поліном $(x \oplus 1)$, тобто:

$$P(x)_{(d=4)} = P(x)_{(d=3)}(x \oplus 1).$$

Процедура кодування і декодування залишається такою ж, як і для циклічного коду з $d_{min} = 3$.

Вкорочені циклічні коди будуються за аналогією з двійковими груповими кодами на основі побудови твірної або перевірочної матриць (див. розділ 8).

Коди Боуза-Чоудхурі-Хоквінгема (БЧХ) є різновидом циклічних кодів з кодовою відстанню $d_{min} \geq 3$. Коди БЧХ дозволяють виявляти і виправляти будь-яку кількість помилок у залежності від мінімальної кодової відстані. При кодуванні задаються кількістю помилок, яку слід виправити, або кодовою відстанню і загальною кількістю елементів у кодовій комбінації n. Кількість інформаційних елементів k та перевірочних елементів r визначається при побудові коду.

Так довжина кодової комбінації n у кодах БЧХ визначається з виразів [24]:

$$n = 2^h - 1, \quad \text{або} \quad n = (2^h - 1)/g, \qquad (19.2)$$

де h – ціле число; g – непарне додатне число, при діленні на яке одержуємо n цілим непарним числом. Таким чином, n може бути тільки непарним числом. Тобто, керуючись виразом (9.2), визначаємо, що кількість елементів у комбінаціях коду БЧХ може дорівнювати 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023 тощо.

Кількість перевірочних елементів коду відповідає співвідношенню

$$r \leq h(d_{min} - 1)/2, \qquad (19.3)$$

звідки кількість інформаційних елементів

$$k \geq (2^h - 1) - h(d_{min} - 1)/2. \qquad (19.4)$$

Твірний поліном коду БЧХ визначається як добуток так званих мінімальних поліномів $M_i(x)$, із непарними індексами:

$$P(x) = M_1(x) M_3(x) \ldots M_V(x), \qquad (19.5)$$

де $V = d_{min} - 2$. Можна пересвідчитись, що кількість мінімальних поліномів у добутку (19.5) дорівнює максимальній кількості s помилок, які гарантовано виправляються кодом.

У таблиці 19.2 наведені основні параметри деяких кодів БЧХ.

Таблиця 19.2

n	k	r	d_{min}	Твірний поліном P_8
7	4	3	3	13
15	11	4	3	23
	7	8	5	721
	5	10	7	2467
31	26	5	3	45
	21	10	5	3551
	16	15	7	107657
	11	20	11	5423325
	6	25	15	313365047
63	57	6	3	103
	51	12	5	12471
	45	18	7	1701317
	39	24	9	166623567
	36	27	11	1033500423
	30	33	13	1574641656547
	24	39	15	17323260404441
	18	45	21	1363026512351725

Подані в таблиці параметри були визначені у відповідності з викладеною вище методикою. Для зручності запису твірні поліноми $P(x)$ подані у вісімковій системі числення (P_8). Щоб одержати твірний поліном у звичайному вигляді, тобто у тій формі, яка використовується для побудови кодів БЧХ, треба перевести кожну вісімкову цифру у двійковий трибіт. Так, наприклад, $P_8 = 45$ запишеться двійковими числами: 4 – 100 та 5 – 101. Таким чином одержуємо двійкове число 100101, яке записується поліномом $P(x) = x^5 \square x^2 \square 1$.

Як було показано вище, коди БЧХ мають непарне значення мінімальної кодової відстані d_{min}. Для того, щоб збільшити d_{min} на одиницю, досить помножити твірний поліном коду БЧХ на двочлен $(x \square 1)$.

Кодування у кодах БЧХ виконується так само, як і у звичайних циклічних кодах, у тому числі і за допомогою матричних способів (див. вище). Декодування кодів БЧХ (виявлення та виправлення помилок) також може виконуватися з використанням методики, викладеної для циклічних кодів з $d_{min} < 5$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад_1.

Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє однократні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду 1110 та показати процес виправлення будь-якої однократної помилки в одержаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

Розв'язання. Для того, щоб закодувати комбінацію простого коду циклічним кодом, необхідно вибрати твірний поліном. Степінь твірного поліному $P(x)$ визначається кількістю перевірочних елемен-тів r у комбінації циклічного коду, а величина r при $d_{min} = 3$ визна-чається з виразу $2^r - 1 \geq n$. Тобто, при $k = 4$ маємо $r = 3$. Таким чином з табл. 9.1 вибираємо поліном степені 3: $P(x) = x^3 \square x \square 1$.

Виконуємо кодування комбінації двійкового простого коду 1110. Для цього

– записуємо її у вигляді полінома: $Q(x) = x^3 \square x^2 \square x$;

– помножимо $Q(x)$ на x^r; оскільки $r = 3$, то $Q(x)x^3 = (x^3 \square x^2 \square x)x^3 = x^6 \square x^5 \square x^4$;

– поділимо $Q(x)x^3$ на $P(x)$ з метою визначення остачі $R(x)$, коефіцієнти при степенях x якого є перевірочними елементами комбінації циклічного коду:

$$
\begin{array}{rr|l}
\oplus & x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\
 & x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & x^3 \oplus x^2 \\
\hline
 & x^5 \oplus x^3 & \\
\oplus & x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\
\hline
 & x^2 & .
\end{array}
$$

Одержуємо остачу $R(x) = x^2$, якій відповідає трирозрядний вектор $(r = 3)$ – 100; додаємо остачу $R(x)$ до $Q(x)x^3$ і отримуємо кодову комбінацію двійкового циклічного коду $F(x) = = Q(x)x^3 \oplus R(x) = x^6 \square x^5 \square x^4 \square x^2 \rightarrow F = 1110100$.

Покажемо процес виправлення однократної помилки. Для цього припустимо, що при передачі виникла однократна помилка, поліном та вектор якої відповідно $E(x) = x^3$ та 0001000. Тоді поліном $F^*(x)$ прийнятої комбінації $F^*(x) = F(x) \oplus E(x) = x^6 \square x^5 \square x^4 \square \oplus x^3 \square x^2 \rightarrow$ 1111100.

Декодер виконує перевірочне ділення $F^*(x)$ на той же твірний поліном $P(x)$, який був використаний при кодуванні:

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\ \cline{2-2}
\oplus \quad x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & x^3 \oplus x^2 \oplus 1 \\ \cline{1-1}
x^5 \oplus x^2 & \\
\oplus \quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\ \cline{1-1}
x^3 & \\
\oplus \quad x^3 \oplus x \oplus 1 & \\ \cline{1-1}
x \oplus 1 & .
\end{array}
$$

Отже, остача $R(x) = x \square 1$ або $R = 011$.

Оскільки остача від ділення не дорівнює нулю, робимо висновок про наявність помилки у прийнятій комбінації $F^*(x)$.

Для визначення місця помилки скористуємося методом гіпотез.

Крок 1. Висуваємо гіпотезу про помилку у молодшому розряді комбінації циклічного коду $F^*(x)$, тобто вважаємо, що поліном та вектор помилки відповідно $E_1(x) = 1$ та $E_1 = 0000001$. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x) \oplus E_1(x)$:

$F^*(x) \oplus E_1(x) = (x^6 \square x^5 \square \mathrm{x}^4 \square x^3 \square x^2) \oplus 1 = x^6 \square x^5 \square \mathrm{x}^4 \square x^3 \square x^2 \square 1;$

ділимо отриману суму на $P(x)$ з метою підтвердження (у разі нульової остачі) або спростування (у разі ненульової остачі) висунутої гіпотези:

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus 1 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\ \cline{2-2}
\oplus \quad x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & x^3 \oplus x^2 \oplus 1 \\ \cline{1-1}
x^5 \oplus x^2 \oplus 1 & \\
\oplus \quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\ \cline{1-1}
x^3 \oplus 1 & \\
\oplus \quad x^3 \oplus x \oplus 1 & \\ \cline{1-1}
x & .
\end{array}
$$

Остача $R(x) = x$, тобто $R(x) \neq 0$, і гіпотеза відхиляється.

Крок 2 . Висуваємо гіпотезу про помилку у другому розряді $F^*(x)$, тобто вважаємо, що $E_2(x) = x \to E_2 = 0000010$. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x) \oplus E_2(x)$:

$F^*(x) E_2(x) = (x^6 \square x^5 \square x^4 \square x^3 \square x^2) \oplus x = x^6 \square x^5 \square x^4 \square x^3 \square x^2 \square x;$

ділимо цю суму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гі-потези:

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x & x^3 \oplus x \oplus 1 \\ \cline{2-2}
\oplus \quad x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & x^3 \oplus x^2 \oplus 1 \\ \cline{1-1}
x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
\oplus \quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\ \cline{1-1}
x^3 \oplus x &
\end{array}
$$

$$x^3 \oplus x \oplus$$
$$\oplus \quad 1$$

$$1 \quad .$$

Остача $R(x) = 1$, тобто $R(x) \neq 0$, і гіпотеза відхиляється.

Крок 3. Висуваємо гіпотезу про помилку у третьому розряді $F^*(x)$, тобто вважаємо, що $E_3(x) = x^2 \to E_3 =$ 0000100. Беремо суму
му за модулем 2 $F^*(x) \oplus E_3(x)$:

$F^*(x) \oplus E_3(x) = (x^6 \square x^5 \square x^4 \square x^3 \square x^2) \oplus x^2 = x^6 \square x^5 \square x^4 \square x^3$;

ділимо цю сумму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$\begin{array}{r|l} x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\ \oplus \quad x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & \hline x^3 \oplus x^2 \oplus 1 \\ \hline x^5 & \\ \oplus \quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\ \hline x^3 \oplus x^2 & \\ \oplus \quad x^3 \oplus x \oplus 1 & \\ \hline x^2 \oplus x \oplus 1 & \end{array} \quad .$$

Остача $R(x) = x^2 \square x \oplus 1$, тобто $R(x) \neq 0$, і гіпотеза відхиляється.

Крок 4. Висуваємо гіпотезу про помилку у четвертому розряді $F^*(x)$, тобто вважаємо, що $E_4(x) = x^3 \to E_4 =$ 0001000. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x) \oplus E_4(x)$:

$F^*(x) \oplus E_4(x) = (x^6 \square x^5 \square x^4 \square x^3 \square x^2) x^3 = x^6 \square x^5 \square x^4 \square x^2$;

ділимо отриману суму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$\begin{array}{r|l} x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\ \oplus \quad x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & \hline x^3 \oplus x^2 \\ \hline x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\ \oplus \quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad .$$

Остача $R(x) = 0$, тобто помилка дійсно була у четвертому розряді, а вихідна комбінація циклічного коду має вигляд:

$F(x) = F^*(x) \oplus E_4(x) = x^6 \square x^5 \square x^4 \square x^2 \to F =$ 1110100.

Надмірність коду $R = r / n = 3 / 7$.

Приклад_2.

Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє однократні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду $Q(x) = x^5 \oplus x^2$ і виправити будь-яку однократну помилку в одержаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

Розв'язання. Щоб закодувати задану кодову комбінацію $Q(x) = x^5 \oplus x^2$ ($Q = 100100$) циклічним кодом, що виправляє однократні помилки ($d_{min} = 3$) необхідно вибрати твірний поліном. Степінь твірного поліному $P(x)$ визначається кількістю перевірочних елементів *r*, яку визначаємо з виразу $2^r - 1 \geq n$ (для $d_{min} = 3$). При $k = 6$ одержуємо $r = 4$ та вибираємо з таблиці 9.1 поліном четвертого степеня: $P(x) = x^4 \square x \square 1$.

Виконаємо кодування первинної кодової комбінації $Q(x) = = x^5 \square x^2$, для чого знайдемо остачу $C(x)$ від ділення $Q(x)x^4$ на $P(x)$, а потім помножимо її на $P(x)$. Маємо

$$Q(x)x^4 = (x^5 \square x^2)x^4 = x^9 \square x^6.$$

Поділимо отриманий добуток на $P(x)$ з метою визначення частки $C(x)$ від ділення:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^9 \oplus x^6 & x^4 \oplus x \oplus 1 \\ \cline{3-3}
\oplus & x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 & x^5 \oplus x \\ \cline{2-2}
 & x^5 & \\
\oplus & x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\ \cline{2-2}
 & x^2 \oplus x & .
\end{array}$$

Тобто $C(x) = x^5 \square x$. Помножимо $C(x)$ на $P(x)$ і одержимо ко-дову комбінацію циклічного коду:

$$F(x)=C(x)P(x)=(x^5 \square x)(x^4 \square x \square 1)=x^9 \square x^6 \square x^2 \square x,$$

або у двійковому вигляді $F = 1001000110$.

Виправляємо однократну помилку.

Припустимо, що при передачі по каналу зв'язку виникла однократна помилка, поліном якої $E(x) = 1$. Тоді поліном прийнятої кодової комбінації циклічного коду $F^*(x) = x^9 \square x^6 \square x^2 \square x \square 1$.

Декодер виконує перевірочне ділення $F^*(x)$ на твірний поліном $P(x)$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^9 \oplus x^5 \oplus x^2 \oplus x \oplus & x^4 \oplus x \oplus 1 \\
\oplus & \text{і} & \\ \cline{3-3}
 & x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 & x^5 \oplus x \\ \cline{2-2}
 & x^5 \oplus x^2 \oplus x \oplus & \\
\oplus & 1 & \\
 & x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\ \cline{2-2}
 & 1 & .
\end{array}$$

Тобто $R(x) = 1 \neq 0$. Це вказує на наявність помилки у прийнятій кодовій комбінації.

Для визначення місця помилки скористуємося методом гіпотез, першим кроком якої є гіпотеза про наявність помилки у молодшому розряді прийнятої кодової комбінації $F^*(x)$, тобто вважаємо, що поліном та вектор помилки відповідно $E_1(x) = 1$ та $E_1 = 0000000001$. Визначаємо суму за модулем 2 $F^*(x)E_1(x)$ та ділимо цю суму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$F^*(x)E_1(x) = (x^9 \square x^6 \square x^2 \square x \square 1) \oplus 1 = x^9 \square x^6 \square x^2 \square x;$$

$$\begin{array}{rl|l}
\oplus & x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x & x^4 \oplus x \oplus 1 \\ \cline{3-3}
 & x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 & x^5 \oplus x \\ \cline{2-2}
 & x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
\oplus & x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\ \cline{2-2}
 & 0 & .
\end{array}$$

Тобто $R(x) = 0$, що вказує на те, що помилка дійсно була у першому розряді.

Таким чином, вихідна комбінація циклічного коду $F(x) = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \quad \rightarrow \quad F =$ 1001000110.

Надмірність коду $R = r / n = 4 / 10 = 2 / 5$.

Приклад_3.

Знайти твірний поліном $P(x)$ двійкового коду БЧХ, здатного виправляти трикратні помилки та призначеного для передачі символів деякого алфавіту, потужність якого дорівнює 32.

Розв’язання. Мінімальна кодова відстань для коду БЧХ, здатного виправляти трикратні помилки, $d_{min} = 2s + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$. Для передачі символів алфавіту потужністю 32 повідомлень достатньо мати $k = 5$ двійкових інформаційних символів ($2^5 = 32$).

Для визначення твірного полінома $P(x)$ коду БЧХ, що має $d_{min} = 7$ та $k = 5$, скористаємося таблицею 9.2. Бачимо, що мінімальна довжина коду БЧХ з заданими параметрами $n = 15$ ($k = 5$, $r = 10$, $d_{min} = 7$), для якого твірний поліном у вісімковій системі числення $P_8 = 2467$, або у двійковій системі числення $P_2 = 010100110111$. Таким чином твірний поліном коду БЧХ буде мати вигляд $P(x) = x^{10} \oplus x^8 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$.

Приклад_4.

Закодувати двійковим кодом БЧХ , що виявляє до шести помилок та має п’ять інформаційних символів, кодову комбінацію двійкового простого коду 10101. Показати процес виявлення шести помилок. Визначити надмірність коду.

Розв’язання. Поліном, який відповідає комбінації 10101 первинного коду, має вигляд $Q(x) = x^4 \oplus x^2 \oplus 1$. Для того, щоб код БЧХ міг виявляти шість помилок, він повинен мати $d_{min} = s + 1 = 6 + 1 = 7$. Тому, користуючись таблицею 9.2, визначаємо параметри коду БЧХ, який має здатність виявляти шість помилок: $n = 15$, $k = 5$, $r = 10$, $P_8 = 2467$. Переводимо значення твірного поліному, що записане у вісімковій системі числення, у двійкову $P_2 =$ 010100110111, і далі за-писуємо його у вигляді поліному: $P(x) = x^{10} \oplus x^8 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$.

Закодуємо задану комбінацію двійкового простого коду кодом БЧХ , для чого :

– помножимо $Q(x)$ на x^r: $(x^4 \oplus x^2 \oplus 1)\, x^{10} = x^{14} \oplus x^{12} \oplus x^{10}$;

– поділимо $Q(x)\, x^{10}$ на $P(x)$ і визначимо остачу $R(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^{14}\oplus x^{12}\oplus x^{10} & x^{10}\oplus x^8\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^2\oplus x\oplus 1 \\ \cline{3-3}
\oplus & x^{14}\oplus x^{12}\oplus x^9\oplus x^8\oplus x^6\oplus x^5\oplus x^4 & x^4\oplus 1 \\ \cline{2-2}
 & x^{10}\oplus x^9\oplus x^8\oplus x^6\oplus x^5\oplus x^4 & \\
\oplus & x^{10}\oplus x^8\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^2\oplus x\oplus 1 & \\ \cline{2-2}
 & x^9\oplus x^6\oplus x^2\oplus x\oplus 1 & ;
\end{array}
$$

тобто остача $R(x) = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$;

– визначаємо суму $Q(x)x^{10} \oplus R(x)$ і одержуємо поліном кодової комбінаціє коду БЧХ: $F(x) = x^{14} \oplus x^{12} \oplus x^{10} \oplus x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$; йому відповідає комбінація 101011001000111.

Покажемо процес виявлення шести помилок. Припустимо, що при передачі виникли 6 помилок. Нехай поліном шестикратної помилки $E(x) = x^{12} \oplus x^{10} \oplus x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 \oplus x^2$. Тоді поліном прийнятої комбінації коду БЧХ: $F^*(x) = x^{14} \oplus x^5 \oplus x \oplus 1$.

Для виявлення помилок декодер виконує перевірочне ділення прийнятої комбінації $F^*(x)$ коду БЧХ на той же твірний поліном $P(x)$, який був використаний при кодуванні:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^{14}\oplus x^5\oplus x\oplus 1 & x^{10}\oplus x^8\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^2\oplus x\oplus 1 \\ \cline{3-3}
\oplus & & \\
 & \underline{x^{14}\oplus x^{12}\oplus x^9\oplus x^8\oplus x^6\oplus x^5\oplus x^4} & x^4\oplus \mathrm{x}^2\oplus 1 \\
 & x^{12}\oplus x^9\oplus x^8\oplus x^6\oplus x^4\oplus x\oplus 1 & \\
\oplus & \underline{x^{12}\oplus x^{10}\oplus x^7\oplus x^6\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2} & \\
 & x^{10}\oplus x^9\oplus x^8\mathrm{x}^7\oplus \mathrm{x}^3\oplus x^2\oplus x\oplus 1 & \\
\oplus & \underline{x^{10}\oplus x^8\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^2\oplus x\oplus 1} & \\
 & x^9\oplus x^7\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3 & .
\end{array}
$$

Остача від ділення $R(x) \neq 0$, що вказує на наявність помилок у прийнятій кодовій комбінації $F^*(x)$. Здатність побудованого коду БЧХ виправляти помилки ($d_{min} = 7$) не дозволяє виправити ці шість помилок.

Надмірність коду $R = r / n = 10 / 15 = 2 / 3$.

Завдання на лабораторну роботу №12

<u>Завдання 1.</u>
Закодувати двійковим циклічним кодом з $d_{min} = 3$, що виправляє однократні помилки, комбінацію двійкового простого коду $Q(x)$ довжиною k інформаційних елементів згідно з варіантом, поданим в таблиці 19.3.1. Твірний поліном $P(x)$ визначити з таблиці 19.1. Показати процес виправлення будь-якої однократної помилки і визначити надмірність коду.

Таблиця 19.3.1

№ варіанта	k	Поліном комбінації двійкового простого коду $Q(x)$
1	4	$x^2 \square x \square 1$
2	5	$x^4 \square x^2 \square x$
3	6	$x^5 \square x^2 \square 1$
4	7	$x^6 \square x \square 1$
5	8	$x^7 \square x^6 \square x^4 \square x$
6	9	$x^7 \square x^5 \square x^3 \square 1$
7	10	$x^9 \square x^6 \square x^2 \square x \square 1$
8	11	$x^{10} \square x^9 \square x^8 \square x^4 \square x$
9	12	$x^{11} \square x^{10} \square x^7 \square x^6 \square x^3 \square 1$
10	14	$x^{13} \square x^{12} \square x^{10} \square x^9 \square x^3 \square x^2$
11	4	$x^2 \square x \square 1$
12	5	$x^4 \square x^2 \square x$
13	6	$x^5 \square x^2 \square 1$
14	7	$x^6 \square x \square 1$
15	8	$x^7 \square x^6 \square x^4 \square x$
16	9	$x^7 \square x^5 \square x^3 \square 1$
17	10	$x^9 \square x^6 \square x^2 \square x \square 1$
18	11	$x^{10} \square x^9 \square x^8 \square x^4 \square x$
19	12	$x^{11} \square x^{10} \square x^7 \square x^6 \square x^3 \square 1$
20	14	$x^{13} \square x^{12} \square x^{10} \square x^9 \square x^3 \square x^2$

<u>Завдання 2.</u>
Закодувати двійковим циклічним кодом, що виявляє трикратні помилки ($d_{min} = 4$), кодову комбінацію двійкового простого коду $Q(x)$ довжиною k інформаційних елементів згідно з варіантом, поданим в таблиці 19.3.2. Твірний поліном $P(x)$ визначити з таблиці 19.1. Показати процес виявлення будь-якої трикратної помилки і визначити надмірність коду.

Таблиця 19.3.2

№ варіанта	k	Поліном комбінації двійкового простого коду $Q(x)$
1	4	$x^2 \square x \square 1$
2	5	$x^4 \square x^2 \square x$
3	6	$x^5 \square x^4 \square x^2 \square 1$
4	7	$x^6 \square x^4 \square x \square 1$
5	8	$x^7 \square x^6 \square x^3 \square x$

6	9	$x^8 \square x^3 \square x \square 1$
7	10	$x^9 \square x^6 \square x^2 \square x \square 1$
8	11	$x^{10} \square x^9 \square x^5 \square x^2 \square 1$
9	12	$x^{11} \square x^8 \square x^7 \square x^3 \square x^2$
10	14	$x^{13} \square x^{11} \square x^{10} \square x^7 \square x^3 \square x$
11	4	$x^2 \square x \square 1$
12	5	$x^4 \square x^2 \square x$
13	6	$x^5 \square x^4 \square x^2 \square 1$
14	7	$x^6 \square x^4 \square x \square 1$
15	8	$x^7 \square x^6 \square x^3 \square x$
16	9	$x^8 \square x^3 \square x \square 1$
17	10	$x^9 \square x^6 \square x^2 \square x \square 1$
18	11	$x^{10} \square x^9 \square x^5 \square x^2 \square 1$
19	12	$x^{11} \square x^8 \square x^7 \square x^3 \square x^2$
20	14	$x^{13} \square x^{11} \square x^{10} \square x^7 \square x^3 \square x$

Завдання 3.

Побудувати твірну матрицю двійкового циклічного коду з мінімальною кодовою відстанню $d_{min} = 3$ (здатного виправляти однократні помилки), твірний поліном $P(x)$ якого та довжина n вибираються згідно з варіантом, поданим в таблиці 19.3.3.

Таблиця 19.3.3

№ варіанта	Довжина коду n	Твірний поліном циклічного коду $P(x)$
1	7	$x^3 \square x^2 \square 1$
2	9	$x^4 \square x \square 1$
3	15	$x^4 \square x^3 \square 1$
4	16	$x^5 \square x^2 \square 1$
5	17	$x^5 \square x^3 \square x^2 \square x \square 1$
6	7	$x^3 \square x^2 \square 1$
7	9	$x^4 \square x \square 1$
8	15	$x^4 \square x^3 \square 1$
9	16	$x^5 \square x^2 \square 1$
10	17	$x^5 \square x^3 \square x^2 \square x \square 1$
11	7	$x^3 \square x^2 \square 1$
12	9	$x^4 \square x \square 1$
13	15	$x^4 \square x^3 \square 1$
14	16	$x^5 \square x^2 \square 1$
15	17	$x^5 \square x^3 \square x^2 \square x \square 1$
16	7	$x^3 \square x^2 \square 1$
17	9	$x^4 \square x \square 1$
18	15	$x^4 \square x^3 \square 1$
19	16	$x^5 \square x^2 \square 1$

20	17	$x^5 \square x^3 \square x^2 \square x \square 1$

Завдання 4.

Побудувати перевірочну матрицю двійкового циклічного коду з мінімальною кодовою відстанню $d_{min} = 3$ (здатного виправляти однократні помилки), твірний поліном $P(x)$ якого та довжина n вибираються згідно з варіантом, поданим в таблиці 19.3.4.

Таблиця 19.3.4

№ варіанта	Довжина коду n	Твірний поліном циклічного коду $P(x)$
1	7	$x^3 \square x \square 1$
2	10	$x^4 \square x \square 1$
3	12	$x^4 \square x^3 \square 1$
4	18	$x^5 \square x^3 \square 1$
5	20	$x^5 \square x^4 \square x^2 \square x \square 1$
6	7	$x^3 \square x \square 1$
7	10	$x^4 \square x \square 1$
8	12	$x^4 \square x^3 \square 1$
9	18	$x^5 \square x^3 \square 1$
10	20	$x^5 \square x^4 \square x^2 \square x \square 1$
11	7	$x^3 \square x \square 1$
12	10	$x^4 \square x \square 1$
13	12	$x^4 \square x^3 \square 1$
14	18	$x^5 \square x^3 \square 1$
15	20	$x^5 \square x^4 \square x^2 \square x \square 1$
16	7	$x^3 \square x \square 1$
17	10	$x^4 \square x \square 1$
18	12	$x^4 \square x^3 \square 1$
19	18	$x^5 \square x^3 \square 1$
20	20	$x^5 \square x^4 \square x^2 \square x \square 1$

Завдання 5.

Згідно з варіантом, поданим в таблиці 19.3.5, знайти твірний поліном $P(x)$ двійкового коду БЧХ, який має N_0 дозволених кодових комбінацій та здатен виправляти помилки кратності s. Визначити надмірність коду.

Таблиця 19.3.5

№ варіанта	Кратність помилки , s	N_0
1	2	128
2	2	100
3	3	32
4	5	2048
5	7	64
6	2	128
7	2	100
8	3	32

9	5	2048
10	7	64
11	2	128
12	2	100
13	3	32
14	5	2048
15	7	64
16	2	128
17	2	100
18	3	32
19	5	2048
20	7	64

Завдання 6.

Згідно з варіантом, поданим в таблиці 19.3.6, закодувати кодову комбінацію двійкового простого коду, якій відповідає поліном $Q(x)$, двійковим кодом БЧХ, що виявляє s помилок. Показати процес виявлення будь-якої помилки кратності s і визначити надмірність коду.

Таблиця 19.3.6

№ варіанта	Кратність s помилок, що виявляються	Поліном комбінації двійкового простого коду $Q(x)$
1	4	$x^6 \square x \square 1$
2	6	$x^4 \square x^2 \square x$
3	4	$x^{20} \square x^4 \square x^2 \square 1$
4	6	$x^{15} \square x^8 \square x \square 1$
5	10	$x^{10} \square x^6 \square x^3 \square x$
6	4	$x^6 \square x \square 1$
7	6	$x^4 \square x^2 \square x$
8	4	$x^{20} \square x^4 \square x^2 \square 1$
9	6	$x^{15} \square x^8 \square x \square 1$
10	10	$x^{10} \square x^6 \square x^3 \square x$
11	4	$x^6 \square x \square 1$
12	6	$x^4 \square x^2 \square x$
13	4	$x^{20} \square x^4 \square x^2 \square 1$
14	6	$x^{15} \square x^8 \square x \square 1$
15	10	$x^{10} \square x^6 \square x^3 \square x$
16	4	$x^6 \square x \square 1$
17	6	$x^4 \square x^2 \square x$
18	4	$x^{20} \square x^4 \square x^2 \square 1$
19	6	$x^{15} \square x^8 \square x \square 1$
20	10	$x^{10} \square x^6 \square x^3 \square x$

Контрольні питання

1. Що розуміють під стисненням інформації ?
2. Як класифікують способи стиснення інформації ?
3. Що розуміють під лінійними способами стиснення інформації?

4. Що розуміють під матричними способами стиснення інформації?
5. Що розуміють під комбінованими та каскадними способами стиснення інформації?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Івашко А. В. Теорія інформації та кодування в прикладах і задачах : навч. посібник / А. В. Івашко, В. А. Крилова ; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». Харків : НТУ «ХПІ», 2022. 317 с. URL: електронний ресурс (дата звернення: 19.06.2026).
2. Майданюк В. П. Основи теорії інформації та кодування : навчальний посібник / В. П. Майданюк, О. Н. Романюк, С. Є. Тужанський. Вінниця : ВНТУ, 2022. 133 с. URL: електронний ресурс (дата звернення: 19.06.2026).
3. Прокопишин І. А. Основи теорії інформації та кодування : навч. посібник / І. А. Прокопишин, Р. Є. Рикалюк, В. Ф. Чекурін, К. А. Червінка. Електрон. вид. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2023. 156 с. URL: електронний ресурс (дата звернення: 19.06.2026).
4. Гнусов Ю. В. Теорія інформації та кодування : навчальний посібник / Ю. В. Гнусов, В. В. Носов. Харків : ХНУВС, 2023. 212 с.
5. Гайдур Г. І. Теорія інформації та кодування : навчальний посібник для підготовки до практичних занять / Г. І. Гайдур, З. З. Бондаренко. Київ : ДУІКТ, 2024. 43 с. URL: електронний ресурс (дата звернення: 19.06.2026).
6. Polyanskiy Y. Information Theory: From Coding to Learning / Y. Polyanskiy, Y. Wu. Cambridge : Cambridge University Press, 2025. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
7. Guruswami V. Essential Coding Theory / V. Guruswami, A. Rudra, M. Sudan. Draft version. 2026. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
8. Vinck A. J. H. Coding Concepts and Reed-Solomon Codes. 2022. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
9. Kadir W. K. Efficient Interpolation-Based Decoding of Reed-Solomon Codes / W. K. Kadir, H.-Y. Lin, E. Rosnes. 2023. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
10. Alrabiah O. Randomly punctured Reed-Solomon codes achieve list-decoding capacity over linear-sized fields / O. Alrabiah, V. Guruswami, R. Li. 2023. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
11. ISO/IEC 18004:2024. Information technology — Automatic identification and data capture techniques — QR Code bar code symbology specification. Geneva : International Organization for Standardization, 2024. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
12. GS1 General Specifications Standard. Release 25.0. GS1, 2025. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
13. Collet Y. Zstandard Compression and the “application/zstd” Media Type / Y. Collet, M. Kucherawy. RFC 8878. IETF, 2021. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
14. Pavlov I. LZMA SDK : software development kit. Version 26.01. 7-Zip, 2026. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
15. 7-Zip : file archiver with LZMA and LZMA2 compression. 2026. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
16. Linear Error-Correcting Codes : lecture notes. MIT OpenCourseWare, 2024. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
17. Blackledge J. Coding Theory — Advances and Applications in Informatics. IntechOpen, 2025. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
18. Mouloua E. M. Foundations of Information Theory for Coding Theory / E. M. Mouloua, E. Mohamed. 2025. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).

19. Niu K. A Mathematical Theory of Semantic Communication / K. Niu, P. Zhang. 2024. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).
20. Noever D. Dueling QR Codes: The Hyding of Dr. Jeckyl / D. Noever, F. McKee. 2025. URL: electronic resource (date of access: 19.06.2026).

Т 33 **Системне програмування**: конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньої програми «Комп'ютерна інженерія» спеціальності 123 (F7) Комп'ютерна інженерія знань 12 Інформаційні технології денної та заочної форм навчання / уклад. С.В. Гринюк, О.І. Міскевич. Луцьк : ЛНТУ, 2025. 74 с.

Комп'ютерний набір: С.В. Гринюк
Редактор: С.В. Гринюк

Підп. до друку ______ 2026 р.
Формат 60х84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.
Ум. друк. арк.____Тираж ___ прим. Зам._____

Відділ іміджу та промоції
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75