

**Міністерство освіти і науки України  
Луцький національний технічний університет**



## **ТЕОРІЯ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ**

**Конспект лекцій  
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
освітніх програм «Маркетинг» і «Цифровий маркетинг»  
галузі знань D Бізнес, адміністрування та право  
спеціальності D5 Маркетинг  
денної та заочної форм навчання**

Луцьк 2026

УДК 005.311.7(07)  
Т 33

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій ЛНТУ

Директор бібліотеки \_\_\_\_\_ Н.П. Поліщук

Рекомендовано до видання вченою радою факультету бізнесу та права ЛНТУ, протокол № 5 від 14 січня 2026 року.

Голова вченої ради факультету бізнесу та права \_\_\_\_\_ Л.Л. Ковальська

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри обліку і аудиту ЛНТУ, протокол № 6 від 9 січня 2026 року.

Завідувач кафедри обліку і аудиту \_\_\_\_\_ О.А. Нужна

Укладач: \_\_\_\_\_ О.А. Нужна, кандидат економічних наук, доцент, завідувач кафедри обліку і аудиту ЛНТУ.

Рецензент: \_\_\_\_\_ Н.В. Тлущкевич, кандидат економічних наук, доцент кафедри обліку і аудиту ЛНТУ.

Відповідальний за випуск: \_\_\_\_\_ О.А. Нужна, кандидат економічних наук, доцент, завідувач кафедри обліку і аудиту ЛНТУ.

**Т 33**      **Теорія ігор в економіці** [Текст]: конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітніх програм «Маркетинг» і «Цифровий маркетинг» галузі знань D Бізнес, адміністрування та право спеціальності D5 Маркетинг денної та заочної форм навчання / уклад. О.А. Нужна. Луцьк: ВІП ЛНТУ, 2026. 60 с.

Видання складене відповідно до діючої програми курсу «Теорія ігор в економіці» з метою опанування теоретичним знаннями. Наведено мету і завдання вивчення дисципліни, програму дисципліни, теоретичний матеріал до вивчення дисципліни, рекомендовану літературу.

Видання призначене для здобувачів освіти спеціальності D5 Маркетинг освітніх програм «Маркетинг» і «Цифровий маркетинг».

© О.Нужна, 2026

## ЗМІСТ

Вступ	4
Мета і завдання вивчення дисципліни	4
Виклад теоретичного матеріалу	5
Тема 1. Теоретичні основи математичного моделювання економіки	5
Тема 2. Основні поняття теорії ігор	8
Тема 3. Елементи матричної алгебри	15
Тема 4. Матричні ігри	19
Тема 5. Методи розв'язання матричних ігор	23
Тема 6. Сутність економічного ризику	29
Тема 7. Управління ризиком в економіці	37
Тема 8. Аналіз ризику. Методи оцінки ризиків	42
Тема 9. Сучасні основи прийняття рішень в умовах невизначеності	52
Література	70

## ВСТУП

Програма вивчення обов'язкової навчальної дисципліни «Теорія ігор в економіці» складена відповідно до освітніх програм «Маркетинг» і «Цифровий маркетинг» підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань D Бізнес, адміністрування та право спеціальності D5 Маркетинг.

Як навчальна дисципліна, «Теорія ігор в економіці» забезпечує формування у фахівців комплексу знань і практичних навичок застосування методів теорії ігор в економічних ситуаціях.

### МЕТА І ЗАВДАННЯ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

**Мета вивчення дисципліни** – формування системи теоретичних знань з основ методів теорії ігор та практичних навичок їх застосування в економіці.

**Завдання вивчення дисципліни:** знайомство здобувачів вищої освіти з основними концепціями теорії ігор, оволодіння основними поняттями теорії ігор, вміння використовувати їх для розв'язання конкретних задач, набуття вмінь формалізувати реальні економічні задачі та розв'язувати їх з використанням теорії ігор; надання можливості майбутньому фахівцю враховувати рівень ризику і невизначеності при прийнятті рішень.

## **Тема 1. Теоретичні основи математичного моделювання економіки.**

1. Поняття про модель.
2. Економіко-математична модель.
3. Сутність економіко-математичного моделювання та його елементи.
4. Значення економіко-математичних моделей.
5. Класифікація математичних моделей, які використовуються в економіці.
6. Етапи процесу моделювання.

### **1. Поняття про модель.**

*Модель* (від лат. *Modulus*) – зразок, мірило, норма, міра.

*Модель* – це уявний або реальний об'єкт, який у процесі свого вивчення замінює об'єкт-оригінал.

Всі моделі поділяються на два великих класи – *матеріальні* та *ідеальні*.

*Математичні* моделі відносяться до ідеальних моделей, оскільки не мають матеріальної форми і записуються у вигляді аналітичних залежностей, графіків і т.д.

### **2. Економіко-математична модель.**

*Економіко-математична модель* – уявний образ реального економічного об'єкта, записаний у формалізованому вигляді, який відображає основні властивості функціонування і розвитку даного об'єкта.

### **3. Сутність економіко-математичного моделювання та його елементи.**

*Моделювання* в економіці – це процес побудови моделі, за допомогою чого вивчаються різні економічні об'єкти.

Економіко-математичне моделювання включає три *основні елементи*:

- *об'єкт дослідження* (економічний об'єкт на рівні економіки країни, галузі, об'єднання підприємств, підприємства чи його структурного підрозділу);
- *суб'єкт дослідження* – дослідник, який поставив собі за мету вивчити поведінку об'єкта дослідження;
- *економіко-математична модель*, за допомогою якої суб'єкт дослідження вивчає об'єкт дослідження.

### **4. Значення економіко-математичних моделей та їх неповнота.**

*Значення* економіко-математичних моделей полягає в тому, що вони дозволяють виявити особливості функціонування економічного об'єкта і на основі цього прогнозувати майбутню поведінку об'єкта при зміні будь-яких

параметрів.

Будь-яка економіко-математична модель реального економічного об'єкта є *неповною*, оскільки при її побудові беруть до уваги лише певні важливі для дослідника фактори, які впливають на поведінку об'єкта, і абстрагуються від інших, менш важливих для дослідника факторів, які однак можуть мати значний вплив на поведінку об'єкта.

## 5. Класифікація математичних моделей, які використовуються в економіці.

Економіко-математичні моделі поділяються на *класи* за різними *класифікаційними ознаками*:

- 1) за загальним цільовим призначенням моделі поділяють на:
  - *теоретичні* – використовують для вивчення формальних умов;
  - *прикладні* – використовують для того, щоб описати поведінку конкретного економічного об'єкта;
- 2) за рівнем охоплення моделі поділяють на:
  - *макроекономічні* – описують економіку країни як єдине ціле;
  - *мікроекономічні* – описують складові економіки на рівні галузі, підприємства чи його структурного підрозділу;
- 3) за динамікою моделі поділяються на:
  - *статичні* – не враховують чинник часу і описують поведінку об'єкта в конкретний момент часу;
  - *динамічні* – враховують чинник часу і включають зв'язки змінних у часі;
- 4) за врахуванням чинника невизначеності моделі поділяють на:
  - *детерміновані* – передбачають лише функціональні зв'язки між змінними;
  - *стохастичні* – передбачають наявність випадкових змінних;
- 5) за конкретним цільовим призначенням моделі поділяють на:
  - *рівноваги* – описують такий стан об'єкта, коли результат усіх сил, які прагнуть вивести його з рівноваги, дорівнює нулю;
  - *оптимізаційні* – дозволяють вибрати найкращий за певним критерієм варіант з декількох альтернативних;
  - *балансові* – відображають відповідність наявності ресурсів їх використанню;
  - *трендові* – дозволяють вивчити розвиток економічного об'єкта з урахуванням тривалої тенденції його основних параметрів;
  - *імітаційні* – застосовуються у процесі імітації досліджуваних економічних процесів за допомогою технічних засобів;
- 6) за формою математичних залежностей моделі поділяють на:
  - *лінійні* – у яких залежності між змінними мають лінійний вигляд;

- *нелінійні* – у яких залежності між змінними мають нелінійний вигляд;
- *матричні* – у яких співвідношення між змінними мають вигляд матриці.

Особливий клас економіко-математичних моделей утворюють моделі *теорії ігор*, які описують процес ухвалення рішень у конфліктних ситуаціях, а також ситуаціях спільних дій кількох учасників.

## **6. Етапи процесу моделювання.**

Моделювання умовно можна поділити на шість *етапів*:

1. *Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз.* На початковому етапі відбувається попередня орієнтація та аналіз системи, формування основних припущень та гіпотез, розробка перших сценаріїв та нормативних установ;

2. *Побудова математичної (аналітичної) моделі.* На цьому етапі визначають тип моделі: або використовують вже відому модель шляхом її адаптації до умов конкретної задачі, або пропонують нову.

3. *Аналіз моделі.* На цьому етапі вивчають загальні властивості моделі та можливість відшукування її розв'язку. Якщо розв'язок існує, переходять до наступного етапу. Інакше вносять зміни у постановку економічної задачі або її формалізований запис, після чого дослідження починають спочатку.

4. *Підготовка вихідної (початкової) інформації.*

5. *Числовий розв'язок.*

6. *Аналіз числових результатів та їх застосування.* На завершальному етапі подається інтерпретація результатів моделювання, досліджується їх правильність і повнота.

## Тема 2. Основні поняття теорії ігор.

1. Поняття про теорію ігор.
2. Основні поняття теорії ігор.
3. Виникнення теорії ігор. Основоположники теорії ігор.
4. Сфера застосування теорії ігор.
5. Класифікація ігор
6. Основні поняття теорії ігор.
7. Етапи формулювання задачі в ігровій обстановці.
8. Поєднання раціонального та ірраціонального у поведінці гравців

### 1. Поняття про теорію ігор.

Існує багато різних визначень того, що таке є теорія ігор (*game theory*).

«Теорія ігор – теорія раціональної поведінки людей з неспівпадаючими інтересами» (Aumann R.J.)

«Теорія ігор – наука про стратегічне мислення» (Dixit A., Nalebuff B.)

«Теорія ігор – теорія математичних моделей для прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту» (Васильєв В.А.)

«Теорія ігор – розділ прикладної математики, який досліджує моделі прийняття рішень в умовах неспівпадіння інтересів сторін (гравців)» (Губко М.В., Новиков Д.А.)

«Теорія ігор – математичний апарат для моделювання узгодження інтересів сторін».

Для умов економічного застосування: «Суть теорії ігор полягає в тому, щоб допомогти економістам зрозуміти та передбачити те, що буде діятися в економічному інтер'єрі (економічному контексті)» (Губко М.В., Новиков Д.А.)

Отже, теорія ігор досліджує процеси ухвалення рішень у складних ситуаціях.

### 2. Основні поняття теорії ігор.

Для визначення гри потрібно задати **гравців** (хто власне буде ухвалювати рішення), описати їх можливі **дії**, визначити всі можливі **наслідки дій** гравців та задати на них **функцію виграшу**. Власне гра виникає коли виграші одного гравця залежать від дій інших. Важливою, також, є наявна у гравців інформація, оскільки вона впливає на стратегії гравців. **Стратегією** гравця називається правило, яке дозволяє вибрати для кожної позиції гри і наявної в цей момент інформації – дію.

Наприклад, відома всім гра у камінь-ножиці-бумагу є предметом дослідження теорії ігор, оскільки в ній є гравці, відомі їх дії (вибір одного з трьох варіантів) та виграші (які залежать від дій інших). При цьому стратегія може бути фіксована – завжди грати камінь (багато ви нею не виграєте), або

ймовірнісна – вибирати з рівною ймовірністю з усіх варіантів (ця стратегія є рівновагою Неша для даної гри).

Теорія ігор в економіці аналізує прийняття рішень економічними суб'єктами, яких називають, за традицією, гравцями, у ситуаціях, коли на результати цих рішень впливають дії інших економічних суб'єктів. Такі ситуації заведено називати **іграми**.

У свою чергу, **гравець** – це просто термін, який зручний для проведення аналогії ситуації, що вивчається, з салонною грою з чітко описаними правилами.

Кожен гравець має певну свободу вибору дій. Своїми діями гравець впливає не лише на свій результат, а й на результати решти. Результат оцінюється **функцією виграшу**, заданою для кожного гравця. Вважається, що **ціль гравця** – максимізувати свій виграш.

Визначення. **Гра** – математична модель конфліктної ситуації.

Визначення. **Хід у грі** – вибір та здійснення гравцем однієї з передбачених правилами гри дій.

Визначення. **Стратегія** – послідовність усіх ходів до закінчення гри.

Таким чином, якщо ми **визначаємо гравців**, набір їхніх можливих ходів, тобто **стратегії**, і **задаємо певний виграш та умови**, за яких один виграє, а інший – програє, ми **перетворюємо ситуацію на об'єкт дослідження теорії ігор**. Ці **три компоненти** критичні для визначення моделі цієї теорії.

### **3. Виникнення теорії ігор. Основоположники теорії ігор.**

Теорія ігор виникла у 40-50-х роках 20 століття.

Творцем теорії ігор вважається вчений угорського походження Джон фон Нейман.

Фон Нейман придумав *метод мінімаксу*, який дозволяв розв'язувати ігри з нульовою сумою, де один гравець обов'язково виграє, а інший – програє. Класичний приклад – «Камінь, ножиці, папір».

Але ігри з нульовою сумою – це досить обмежений клас ігор, а для інших метод фон Неймана не працював.

І тоді з'явився Джон Неш. Він запропонував ідею *рівноваги Неша* – таку точку в грі (набір стратегій), в якій жоден гравець не може покращити свій виграш, одноосібно змінивши свою стратегію. У ситуації рівноваги при зміні стратегії виграш зменшується, а отже, у гравця немає раціональних причин її змінювати.

Рівновага Неша створювалася для некооперативних ігор. Це однорандові ігри, у яких ви одночасно з іншим гравцем обираєте якусь рішення.

#### **4. Сфера застосування теорії ігор.**

Теорія ігор спочатку застосовувалася в економіці і була спрямована на розв'язок задач щодо прийняття рішень у конкурентній економіці. У наукових працях містились переважно економічні приклади, економічні конфліктні ситуації. Економіка – це гра багатьох гравців, чії стратегії ми приблизно знаємо, і в цій грі, звичайно, є рівновага Неша. Раціональні гравці завжди гратимуть ту стратегію, яка приведе до рівноваги Неша, бо це вигідно. Таким чином, ми можемо передбачити поведінку людей у складних ситуаціях.

З часу другої світової війни теорія ігор серйозно зацікавила військових, які наявний математичний апарат застосували для аналізу військових стратегій.

Згодом теорію ігор почали використовувати і соціальні науки, оскільки вченим було цікаво, як і на основі чого люди приймають рішення. Може йтися не лише про людей, а й про тварин чи комп'ютерні програми, які приймають рішення.

Поступово фокус змістився в біологію. Виявилось, що тварини в різних ситуаціях також грають в ігри. Їхні стратегії – це дії, спрямовані на виживання, а їхня винагорода – це власне виживання в природі. Деякі поведінкові стратегії навіть на генетичному рівні можна описати за допомогою моделей теорії ігор.

В даний час ТІ продовжує інтенсивний розвиток як власне математична теорія, і у сфері докладання у різних областях. Вона застосовується в економіці, фінансах, бізнесі, страхуванні, маркетингу, менеджменті, в теорії інновацій, в управлінні організаційними та еколого-економічними системами, в організації досліджень, у завданнях розпізнавання, у психології та медицині, у військовій справі та флоті, у соціології та політиці.

#### **5. Класифікація ігор.**

Ігри класифікують за різними ознаками:

1. За кількістю ігор:

- *разові*;
- *серійні*.

2. За кількістю гравців:

- *парні* – ігри двох гравців;
- *множинні* – мають понад два гравці.

3. За кількістю ходів:

- *одноходові* – кожен гравець робить тільки один вибір з можливих варіантів і після цього встановлює результат гри;

- *багатоходові (позиційні)* – така гра розвивається в часі, представляючи собою ряд послідовних етапів, кожен з яких настає після ходу одного з гравців і відповідної зміни обстановки.

#### 4. За кількістю стратегій:

- *скінченні* – кожен з гравців має скінченну кількість можливих стратегій;
- *нескінченні* – принаймні один з гравців має безліч можливих стратегій.

#### 5. За інтересами гравців:

- *антагоністичні* – в таких іграх інтереси її учасників прямо протилежні (наприклад, спортивні змагання, військові дії). У цих умовах кожен гравець прагне забезпечити собі максимальний виграш, а супротивникові максимальний програш. Це призводить до того, що виграш одного гравця відповідає програшу іншого, Тому можна вважати, що сумарний виграш обох гравців антагоністичної гри в усіх ситуаціях дорівнює нулю. Звідси ці ігри іноді називають іграми з нульовою сумою або нульовими іграми;
- *неантагоністичні* – в таких іграх гравці переслідують різні, але не прямо протилежні цілі (наприклад, економічні ситуації).

#### 6. За взаємодією (взаємовідносинами) гравців:

- *безкоаліційні* – якщо гравці не мають права укласти угоду;
- *коаліційні* – якщо гравці можуть укладати угоду, вступати до коаліції.

#### 7. За джерелами невизначеності:

- *комбінаторні (шахи)* – коли особливості правил гри викликають таку різноманітність її розвитку, що передбачити результат гри заздалегідь неможливо
- *азартні* (гра в кості, ставка на бік монети, рулетка) – коли результат гри є невизначеним виключно внаслідок випадкових причин
- *стратегічні* – коли відсутня інформація про дії противника, його стратегію.

#### 8. За функцією виграшів: *матричні; біматричні; неперервні; опуклі; статистичні; сепарабельні; типу дуелей.*

#### 9. За кількісним результатом:

- *з нульовою сумою* – коли виграш одного гравця дорівнює програшу другого. Такі ігри об'єктивно не надають перевагу жодній з сторін. Якщо така перевага з'являється у процесі гри у однієї з сторін, то тільки за рахунок занедбання іншої (у спорті);
- *з ненульовою сумою* - конфліктні ситуації з явно об'єктивною перевагою якоїсь з сторін. (наприклад, виробник і споживач при встановленні ціни виробу).

## **6. Етапи формулювання задачі в ігровій обстановці**

Для формулювання задачі в ігровій постановці необхідно реалізувати певні етапи:

Етап 1. Визначення учасників гри (гравців). На цьому етапі слід проаналізувати умову задачі і визначити учасників гри, визначити суть конфлікту, що є між ними.

Етап 2. Визначення стратегій гравців. На цьому етапі слід визначити стратегії гравців. Для цього необхідно сформулювати кінцеві цілі гравців і знайти шляхи їх досягнення.

Етап 3. Визначення вигрантів гравців при використанні кожної стратегії. Вигранті обов'язково повинні мати кількісну форму. Вигранті є показниками ступеня досягнення цілей відповідного гравця. Вигранті визначаються при сполученні різних стратегій гравців.

Етап 4. Зведення матриці вигрантів до нормальної форми. Зведення здійснюється шляхом внесення знайдених значень вигрантів в матрицю.

Оптимальна стратегія – це стратегія, яка при багаторазовому повторенні гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній вигравш або мінімальний програвш.

Кінцевою цілю теорії ігор є розробка рекомендацій гравцям, щоб гравець, що виграв, одержав би максимальний вигравш, а гравець, що програв, - мінімальний програвш, тобто визначення оптимальної стратегії.

## **7. Поєднання раціонального та ірраціонального у поведінці гравців.**

У часи створення теорії ігор комп'ютерних ігор ще не було. Тому такою назвою теорія зобов'язана салонним іграм. Таким, як шахи та карти. Спеціалісти з теорії ігор не дуже люблять цю назву, їм більше подобається «Стратегічна взаємодія раціональних гравців».

«Стратегічна», бо гравці думають наперед, як їм діяти, щоб отримати найбільший вигравш. Раціональність означає, що у кожного гравця задана функція, яку він прагне максимізувати.

Завдання гравця: отримати в кінці гри найкращий результат.

Теорія ігор за замовчуванням вважає, що гравці діють узгоджено зі своєю функцією корисності.

Однак теорія ігор не уникла і критики.

Першим пунктом критики є те, що теорія ігор вважає людей раціональними гравцями. У житті досить часто трапляються ситуації, коли людина не максимізує функцію виграншу. На людину можуть впливати культурні та соціальні особливості, можуть – прості звички. Вона тоді не думає, наскільки її стратегія узгоджена з бажаним результатом, а поводить себе так, як від неї очікує суспільство.

Найцікавіші задачі виникають, коли теорія ігор не збігається з практикою. Це одразу дає поштовх для дослідження.

Гра «ультиматум», у ході якої один гравець пропонує якусь частину загальної суми іншому гравцеві, а той приймає чи відхиляє пропозицію (найпростіший вид переговорів), дала поштовх для розвитку поведінкової економіки.

Якщо другий гравець є раціональним, то він згодиться на поділ 99 доларів іншому гравцеві і 1 долар собі, оскільки 1 долар – це краще, ніж нічого.

В реальності дуже багато хто відхиляє пропозиції, менші за 30%. Це означає, що функція корисності не зводиться лише до грошей, а містить ще й справедливість, наприклад.

Коли гру «ультиматум» вирішили перевірити на диких племенах, то поведінка племені із Перу більш відповідала передбаченню теорії ігор, ніж поведінка студентів Массачусетського технологічного інституту.

Можливо, для них ці гроші були важливішими, і відмовлятися від них, заради якоїсь там справедливості, вони вважали недоцільним.

Є ще узагальнення гри «ультиматум» – «диктатор».

Умови цієї гри відрізняються тим, що у другого гравця відсутнє право затвердження або відхилення пропозиції першого.

Перший гравець ділить суму самостійно і ставить другого перед фактом.

Фактично перші гравці мають право забрати собі усю суму, проте майже усі схильні ділити приблизно 70/30.

Ці 30% люди віддають, щоб почувати себе справедливими, справедливість входить в поняття корисності для них.

З позиції теорії ігор підприємець – це передусім гравець. І саме як гравець він і є підприємцем, тобто людиною, для якої ризик в прагненні отримати чисельно більший виграш стає однією з найважливіших характеристик його специфічною професії. При цьому, якщо розуміти під раціональністю підприємця-гравця прагнення до максимізації прибутку-виграшу, в процесі досягнення результату гравець-підприємець часто буває ірраціональним або об'єктивно, або з позицій індивіда і суспільства, або і те, і інше, і навіть третє.

З позиції теорії ігор розрізняють індивідуальну, групову і суспільну раціональність.

Раціональність індивіда оцінюється тим, як він поводить себе в грі незалежно від інших гравців.

Раціональність групи виражається в тому, наскільки більше може виграти коаліція в цілому порівняно з тим, що може отримати кожний її учасник, діючи індивідуально.

Рациональність суспільства в цілому виражається загальною вигодою, яку воно може отримати.

### Тема 3. Елементи матричної алгебри.

1. Поняття про матрицю.
2. Види матриць.
3. Операції над матрицями.
4. Використання математичних функцій програми *Microsoft Excel* для виконання операцій над матрицями.

#### 1. Поняття про матрицю.

*Матриця* – математичний об’єкт, який записаний у вигляді прямокутної таблиці чисел, який містить рядки і стовпчики, на перетині яких знаходяться елементи.

Матриці позначають великими латинськими літерами (*A, B, C* і т.д.).

Якщо матриця містить *m* рядків і *n* стовпчиків, її розмірність *mхn*.

Елементи матриці обрамляють круглими дужками:

$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
...	...	...	...
$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

Елемент матриці  $a_{ij}$  лежить на перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпчика.

#### 2. Види матриць.

Залежно від розмірності та вмісту матриці поділяють на такі види:

1) *Квадратні* (які мають однакову кількість рядків і стовпчиків) і *прямокутні*.

*A* – квадратна матриця розмірності 3х3:

*A*

2	5	-1
0	4	10
8	-5	7

*B* – прямокутна матриця розмірності 3х5:

*B*

8	4	6	2	7
-3	5	0	12	0
1	19	-9	-4	-1

2) *Діагональна матриця* – квадратна матриця, діагональні елементи якої будь-які числа, а інші елементи – нулі.

*C* – діагональна матриця розмірності 4х4:

C

1	0	0	0
0	5	0	0
0	0	13	0
0	0	0	7

3) *Одинична матриця* – це квадратна матриця, діагональні елементи якої рівні одиниці, а інші елементи – нулі:

D – одинична матриця розмірності 2x2:

D

1	0
0	1

4) *Симетрична матриця* – це матриця, елементи якої симетричні відносно головної діагоналі.

E – симетрична матриця розмірності 4x4:

E

2	10	-5	8
10	-4	12	0
-5	12	3	4
8	0	4	1

Є також інші види матриць, зокрема, верхня трикутна, нижня трикутна, унітрикутна.

### 3. Операції над матрицями.

Основними операціями над матрицями є додавання, віднімання, множення, транспонування, знаходження оберненої матриці.

Сумою (різницею) двох матриць однакової розмірності є матриця цієї ж розмірності, елементи якої дорівнюють сумі (різниці) відповідних елементів цих двох матриць:

<table border="1"><tr><td>0</td><td>4</td><td>-7</td></tr><tr><td>-10</td><td>15</td><td>6</td></tr><tr><td>8</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>6</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	0	4	-7	-10	15	6	8	1	0	6	2	5	+	<table border="1"><tr><td>12</td><td>5</td><td>14</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>11</td><td>-5</td></tr><tr><td>0</td><td>-8</td><td>14</td></tr></table>	12	5	14	0	-2	4	3	11	-5	0	-8	14	=	<table border="1"><tr><td>0+12</td><td>4+5</td><td>-7+14</td></tr><tr><td>-10+0</td><td>15-2</td><td>6+4</td></tr><tr><td>8+3</td><td>1+11</td><td>0+(-5)</td></tr><tr><td>6+0</td><td>2+(-8)</td><td>5+14</td></tr></table>	0+12	4+5	-7+14	-10+0	15-2	6+4	8+3	1+11	0+(-5)	6+0	2+(-8)	5+14	=	<table border="1"><tr><td>12</td><td>9</td><td>7</td></tr><tr><td>-10</td><td>13</td><td>10</td></tr><tr><td>11</td><td>12</td><td>-5</td></tr><tr><td>6</td><td>-6</td><td>19</td></tr></table>	12	9	7	-10	13	10	11	12	-5	6	-6	19
0	4	-7																																																				
-10	15	6																																																				
8	1	0																																																				
6	2	5																																																				
12	5	14																																																				
0	-2	4																																																				
3	11	-5																																																				
0	-8	14																																																				
0+12	4+5	-7+14																																																				
-10+0	15-2	6+4																																																				
8+3	1+11	0+(-5)																																																				
6+0	2+(-8)	5+14																																																				
12	9	7																																																				
-10	13	10																																																				
11	12	-5																																																				
6	-6	19																																																				

<table border="1"><tr><td>0</td><td>4</td><td>-7</td></tr><tr><td>-10</td><td>15</td><td>6</td></tr><tr><td>8</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>6</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	0	4	-7	-10	15	6	8	1	0	6	2	5	-	<table border="1"><tr><td>12</td><td>5</td><td>14</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>11</td><td>-5</td></tr><tr><td>0</td><td>-8</td><td>14</td></tr></table>	12	5	14	0	-2	4	3	11	-5	0	-8	14	=	<table border="1"><tr><td>0-12</td><td>4-5</td><td>-7-14</td></tr><tr><td>-10-0</td><td>15-(-2)</td><td>6-4</td></tr><tr><td>8-3</td><td>1-11</td><td>0-(-5)</td></tr><tr><td>6-0</td><td>2-(-8)</td><td>5-14</td></tr></table>	0-12	4-5	-7-14	-10-0	15-(-2)	6-4	8-3	1-11	0-(-5)	6-0	2-(-8)	5-14	=	<table border="1"><tr><td>-12</td><td>-1</td><td>-21</td></tr><tr><td>-10</td><td>17</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>-10</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>10</td><td>-9</td></tr></table>	-12	-1	-21	-10	17	2	5	-10	5	6	10	-9
0	4	-7																																																				
-10	15	6																																																				
8	1	0																																																				
6	2	5																																																				
12	5	14																																																				
0	-2	4																																																				
3	11	-5																																																				
0	-8	14																																																				
0-12	4-5	-7-14																																																				
-10-0	15-(-2)	6-4																																																				
8-3	1-11	0-(-5)																																																				
6-0	2-(-8)	5-14																																																				
-12	-1	-21																																																				
-10	17	2																																																				
5	-10	5																																																				
6	10	-9																																																				

Матрицю помножити на число означає кожен елемент цієї матриці помножити на це число:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ -10 & 15 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-7) \\ 3 \cdot (-10) & 3 \cdot 15 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -21 \\ -30 & 45 & 18 \end{bmatrix}$$

Дія множення для матриць можлива в тому випадку, коли кількість стовпчиків першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. При цьому елемент  $i$ -го рядка і  $j$ -го стовпчика нової матриці дорівнює скалярному добутку  $i$ -го рядка першої матриці на  $j$ -го стовпчик другої матриці:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ -10 & 15 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 6 \\ -2 & 7 & 0 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -29 & 32 & 87 \\ -37 & 77 & 90 & 36 \end{bmatrix}$$

Як визначити розмірність результату:  $(2 \times 3) \cdot (3 \times 4) = (2 \times 4)$ .

Розрахунок елемента 1-го рядка і 2-го стовпчика нової матриці:

$$0 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + (-7) \cdot 7 = 0 + 20 - 49 = -29.$$

*Транспонована матриця* – це матриця, стовпчики якої є рядками початкової матриці, а рядки – стовпчиками початкової матриці. Тобто, транспонування матриці – це впорядкована заміну рядків матриці стовпчиками і навпаки:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ -10 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 4 & 15 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Якщо розмірність початкової матриці  $m \times n$ , то розмірність транспонованої матриці  $n \times m$ .

*Обернена матриця* – це матриця, при множенні якої на початкову матрицю отримують одиничну матрицю.

#### 4. Використання математичних функцій програми *Microsoft Excel* для виконання операцій над матрицями.

Для виконання операцій над матрицями зручно використовувати вбудовані функції табличного редактора *Microsoft Excel*:

MMULT (МУМНОЖ) – множення матриць.

MINVERSE (МОБР) – знаходження оберненої матриці.

TRANSPOSE (ТРАНСП) – транспонування матриць.

MDETERM (МОПРЕД) – знаходження визначника матриці.

При використанні цих функцій слід виконати такі кроки:

- виділити діапазон відповідної розмірності, в якому буде знаходитись результат (матриця – в перших трьох випадках);
- поставити знак « $\Rightarrow$ »;
- вибрати відповідну функцію;
- ввести у вікні функції відповідні діапазони матриці (матриць);
- натиснути комбінацію клавіш «Ctrl+Shift+Enter».

#### Тема 4. Матричні ігри.

1. Антагоністичні ігри або ігри з нульовою сумою.
2. Матричні ігри. Матрична парна гра. Платіжна функція гри.
3. Принцип мінімаксу (максиміну). Нижня ціна гри. Верхня ціна гри. Мінімаксна та максимінна стратегії.
4. Сідлова точка. Ціна гри.
5. Спрощення платіжної матриці.

##### 1. Антагоністичні ігри або ігри з нульовою сумою.

Математичне визначення поняття *антагоністичності* означає рівність за величиною і протилежність за знаком функцій виграшу гравців.

*Антагоністичні ігри* – це гри з двома гравцями, які мають прямо протилежні інтереси.

*Прикладами* таких ігор є деякі (але не всі) військові операції, спортивні і салонні ігри, а в економіці – прийняття ділових рішень в умовах конкуренції.

В антагоністичних іграх, за визначенням, неможливі будь-які переговори і угоди між гравцями. Дійсно, якщо в результаті будь-яких переговорів або домовленостей один із гравців зумів би збільшити свій виграш на деяку величину, то виграш іншого гравця зменшився б на таку ж величину, тобто для нього такі домовленості були б не вигідними.

Сума виграшів обох гравців в антагоністичних іграх стала в будь-якій ситуації і зазвичай можна вважати, що вона рівна НУЛЮ.

Тому *антагоністичні ігри* також називають *іграми двох осіб з нульовою сумою* (іноді – нульовими іграми).

*Гра з нульовою сумою* – це гра, в якій виграш одного гравця дорівнює програту іншого гравця.

##### 2. Матричні ігри. Матрична парна гра. Платіжна функція гри.

Розглянемо антагоністичну парну скінченну матричну гру з нульовою сумою, в якій два гравці  $A$  і  $B$ . Інтереси гравців  $A$  і  $B$  прямо протилежні: один гравець виграє те, що програв другий. Такий підхід дозволяє вказувати тільки виграш одного гравця.

Домовимося, що гравець  $A$  прагне збільшити свій виграш, а гравець  $B$  – зменшити свій програт.

Нехай гравець  $A$  має  $m$  стратегій  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ , а гравець  $B$  має  $n$  стратегій  $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ .

В результаті застосування гравцем  $A$  стратегії  $A_i$  і гравцем  $B$  стратегії  $B_j$  однозначно визначається результат гри – це сума, яку виграє гравець  $A$  і програв гравець  $B$ .

Гру вважають заданою, якщо відомі всі значення  $a_{ij}$ , які записують у вигляді матриці, яку називають *платіжною матрицею*, і яку представлено в табл. 1. Це матрична гра, яка має розмірність  $m \times n$ .

Таблиця 1. Платіжна матриця гри розмірності  $m \times n$

	<b>V<sub>1</sub></b>	<b>V<sub>2</sub></b>	...	<b>V<sub>n</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	...	a <sub>1n</sub>
<b>A<sub>2</sub></b>	a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	...	a <sub>2n</sub>
...	...	...	...	...
<b>A<sub>m</sub></b>	a <sub>m1</sub>	a <sub>m2</sub>	...	a <sub>mn</sub>

Рядки таблиці відповідають стратегія гравця **A**, а стовпчики – стратегіям гравця **B**.

Платіжну матрицю гри також можна представити у вигляді матриці:

a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	...	a <sub>1n</sub>
a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	...	a <sub>2n</sub>
...	...	...	...
a <sub>m1</sub>	a <sub>m2</sub>	...	a <sub>mn</sub>

*Платіжна матриця* – це табличний запис функції виграшу матричної гри.

Партія в матричній грі реалізується так: гравець **A** вибирає один з рядків платіжної матриці (одну зі своїх стратегій). Гравець **B**, не знаючи вибору гравця **A**, вибирає один зі стовпчиків платіжної матриці (одну зі своїх стратегій). Елемент матриці, який стоїть на перетині вибраних рядка і стовпця, визначає водночас виграш гравця **A** і програш гравця **B**.

*Ціль гравців* полягає у виборі таких стратегій, при застосуванні яких гравець **A** має максимальний виграш, а гравець **B** мінімальний програш.

В теорії ігор виходять з того, що кожний гравець вважає свого протника розумним (раціональним) і таким, що прагне завадити йому отримати найкращий результат.

Гра називається *зведеною до нормальної форми*, якщо вона записана у вигляді матриці. Будь-яка скінченна гра може бути зведена до нормальної форми.

Щоб *розв'язати гру*, потрібно вказати оптимальні стратегії для кожного гравця.

### **3. Принцип мінімаксу (максиміну). Нижня ціна гри. Верхня ціна гри. Мінімаксна та максимінна стратегії.**

Визначимо найкращу стратегію гравця **A** з урахуванням всіх можливих відповідей на неї гравця **B**. При цьому слід розраховувати на те, що на будь-яку стратегію  $A_i$  гравця **A** гравець **B** відповідь стратегією  $B_j$ , для якої виграш гравця **A** виявиться мінімальним, оскільки гравець **B** прямує зашкодити гравцю **A**.

*Алгоритм знаходження максиміну (мінімаксу):*

*Крок 1.*

В рядку платіжної матриці, що відповідає стратегії  $A_i$ , знайти мінімальне з чисел  $a_{ij}$ :

$$a_i = \min_j a_{ij} \quad j=1, n$$

Це гарантований виграш гравця  $A$  при застосуванні стратегії  $A_i$ . Причому найменший з виграшів.

Очевидно, що гравцю  $A$  вигідно вибрати таку стратегію  $A_i$ , для якої значення гарантованого виграшу було б найбільшим.

*Крок 2.*

Серед всіх чисел  $a_i$  вибрати найбільше число  $\alpha$

$$\alpha = \max_i a_i = \max_i \min_j a_{ij} \quad j=1, n \quad i=1, m.$$

яке називається *НИЖНЬОЮ ціною гри* або *максиміном*  $V_{\text{ни}}$ .

*Максимін* – це максимальний виграш, який гравець  $A$  може собі гарантувати у грі проти розумного (раціонального) противника.

Якщо гравець  $A$  буде дотримуватись максимінної стратегії, то йому для будь-якої розумної (раціональної) поведінки гравця  $B$  гарантовано виграш, не менший ніж  $\alpha$ .

*Стратегія*, яка відповідає максиміну, називається *максимінною*.

*Крок 3.*

В стовпчику платіжної матриці, що відповідає стратегії  $B_j$ , знайти макс. з чисел  $a_{ij}$ :

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad i=1, m.$$

Це гарантований програш гравця  $B$  при застосуванні стратегії  $B_j$ . Причому найгірший з програшів.

Очевидно, що гравець  $B$  намагатиметься мінімізувати виграш гравця  $A$ , тобто він буде вибрати стратегію, яка дає йому найменший програш.

*Крок 4.*

Серед всіх чисел  $\beta_j$  вибрати найменше число  $\beta$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} \quad j=1, n \quad i=1, m.$$

яке називається *ВЕРХНЬОЮ ціною гри* або *мінімаксом*  $V_{\text{ви}}$ .

*Мінімакс* – це мінімальний програш, який гравець  $B$  може собі дозволити у грі проти розумного (раціонального) противника.

Якщо гравець  $A$  буде дотримуватись найбільш обережної з усіх стратегій – мінімаксної - то йому в будь-якому випадку забезпечено програш, не більший ніж  $\beta$ .

*Стратегія*, яка відповідає мінімаксу, називається *мінімаксною*.

*Принцип мінімаксу.* В теорії ігор принцип обережності, який рекомендує

гравцям дотримання максимінної і мінімаксної стратегій, називається принцип мінімаксу. Він впливає з припущення про обережність гравців, тобто з бажання розв'язати конфліктну ситуацію найкращим чином для всіх учасників конфлікту.

#### **4. Сідлова точка. Ціна гри.**

Якщо верхня і нижня ціни гри співпадають, то загальне значення  $V_{нц} = V_{вц} = V$  називається *чистою ціною гри або ціною гри*, а така *гра називається грою з сідловою точкою*.

*Ціна гри  $V$  дорівнює елементу платіжної матриці  $(a_{ij})$ .*

Елемент  $(a_{ij})$  є одночасно *мінімальним у рядку  $i$  платіжної матриці, максимальним в стовпці  $j$  платіжної матриці і називається сідловою точкою*.

#### **5. Спрощення платіжної матриці.**

*Правила спрощення (скорочення розмірності) платіжної матриці:*

- виключення однакових рядків чи стовпчиків – якщо в платіжній матриці є дублюючі стратегії, тобто однакові рядки (стовпчики), то всі однакові (крім одного) рядки (стовпчики) викреслюються;

- виключення більших стовпчиків – викреслюються стовпчики, всі елементи яких *не менше відповідних* елементів будь-якого іншого стовпчика, тобто позбавляємось стовпчиків, які відповідають стратегіям другого гравця, які заздалегідь дають не менші програші при будь-якій відповіді першого гравця, ніж будь-яка інша стратегія;

- виключення менших рядків – викреслюються рядки, всі елементи яких *не перевищують відповідних* елементів будь-якого іншого рядка, тобто позбавляємось рядків, які відповідають стратегіям першого гравця, які заздалегідь дають не більші виграші при будь-якій відповіді другого гравця, ніж будь-яка інша стратегія.

## Тема 5. Методи розв'язання матричних ігор.

1. Оптимальні стратегії.
2. Ігри з сідловою точкою. Чиста стратегія гравця.
3. Розв'язок матричної гри в чистих стратегіях.
4. Мішана стратегія гравця.
5. Розв'язок матричної гри в мішаних стратегіях.
6. Геометричний метод розв'язання матричної гри. Матрична гра порядку  $2 \times 2$ .

### 1. Оптимальні стратегії.

Щоб *розв'язати гру*, слід для кожного гравця обрати стратегію, яка задовольняє умову *оптимальності*, тобто:

- перший гравець повинен отримувати максимальний ВИГРАШ, коли другий дотримується своєї стратегії;
- в той же час другий гравець повинен мати мінімальний ПРОГРАШ, якщо перший дотримується своєї стратегії.

Такі стратегії називаються *оптимальними*.

Оптимальні стратегії повинні також задовольняти умову *стійкості*, тобто будь-якому з гравців має бути не вигідно відмовитися від своєї стратегії в цій грі.

*Метою теорії ігор* є визначення *оптимальної* стратегії для кожного гравця. При виборі оптимальної стратегії природно припускати, що обидва гравці поведуться розумно (раціонально) з точки зору своїх інтересів, що не завжди виконується у реальному житті.

### 2. Ігри з сідловою точкою. Чиста стратегія гравця.

Якщо гра має сідлову точку  $(a_{ij})$ , яка задає певні стратегії гравців (стратегію  $A_i$  гравця  $A$  і стратегію  $B_j$  гравця  $B$ ), то ці стратегії і є оптимальними і розв'язком гри є набір таких стратегій  $(A_i; B_j)$ .

*Чистою стратегією  $A_i$  гравця  $A$*  називається можливий хід, який гравець  $A$  обрав з ймовірністю 1. Це задані стратегії  $A_1, A_2, \dots, A_m$  гравця  $A$ .

### 3. Розв'язок матричної гри в чистих стратегіях.

Нагадаємо, що ми розглядаємо:

- парні ігри з двома гравцями, причому  $A$  – гравець, який завжди *виграє*, а  $B$  – гравець, який завжди *програє*;
- ігри з *нульовою сумою*, тобто антагоністичні.

Оскільки матрична гра фактично вимагає шукати рішення в *умовах невизначеності*, то основною розв'язку має стати певного критерію.

При виборі оптимальної стратегії для кожного гравця керуються принципом *«обережності»*, тобто обирають *найкращий* результат з *найгірших*.

Для першого гравця ( $A$ ) – це **МАКСИМІННИЙ** критерій (вибір мінімального числа в кожному рядку, і далі вибирає з цих чисел максимальне – тобто *максимум з мінімумів*):

$$\alpha = V_{nc} \text{ нижня ціна гри}$$

Для другого гравця ( $B$ ) – це **МІНІМАКСНИЙ** критерій (вибір максимального числа в кожному стовпці, і далі вибирає з цих чисел мінімальне – тобто *мінімум з максимумів*):

$$\beta = V_{vc} \text{ верхня ціна гри}$$

Якщо гра має сідлову точку, то  $V_{nc} = V_{vc} = V$  (або  $\alpha = \beta = V$ ) *ціна гри*.

Якщо гра має сідлову точку, то  $(a_{ij})$ , яка задає певні стратегії гравців (стратегію  $A_i$  гравця  $A$  і стратегію  $B_j$  гравця  $B$ ), то ці стратегії і є оптимальними і розв'язком гри є набір таких стратегій  $(A_i; B_j)$ . Це чисті стратегії гравців – ті, які були задані в умові.

#### 4. Мішана стратегія гравця.

Якщо  $\alpha \neq \beta$ , а точніше  $\alpha < \beta$ , то це означає, що не існує єдиних стратегій для першого і другого гравців для отримання оптимального результату. Тоді логіка гри вимагає «змішувати» стратегії при повторенні однакових ігор з ймовірнісними «ваговими» коефіцієнтами з метою отримати оптимальну ціну гри  $\alpha < V < \beta$ , тобто підвищити виграш і знизити програш, зводячи їх значення до ціни гри. Зміст ймовірнісних «вагових» коефіцієнтів полягає у знаходженні ймовірностей вибору тієї або іншої стратегії, які утворюють вектори мішаних стратегій для кожного гравця.

Для першого гравця вектор мішаних стратегій:

$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ , де  $p_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) – ймовірність вибору першим гравцем стратегії  $A_i$ .

Для другого гравця вектор мішаних стратегій:

$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , де  $q_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) – ймовірність вибору другим гравцем стратегії  $B_j$ .

Оскільки якісь стратегії будуть обов'язково використані, вектору мішаних стратегій притаманна властивість:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1 \quad \text{і} \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1.$$

#### 5. Розв'язок матричної гри в мішаних стратегіях.

Якщо матрична гра  $m \times n$  не має сідлової точки, то знаходження розв'язків є досить складною задачею, особливо при великих  $m$  та  $n$ .

Іноколи задачу вдається спростити, зменшуючи кількість стратегій, тобто закреслюючи заздалегідь невігідні.

Найбільш простими випадками скінчених ігор, які можна завжди розв'язати елементарними способами, є ігри  $2 \times 2$ ,  $2 \times n$ ,  $m \times 2$ .

Розглянемо гру  $2 \times 2$ , тобто гру двох гравців, кожен з яких має дві стратегії.

Платіжна матриця гри має розмірність  $2 \times 2$ :

$A$	$a_{11}$	$a_{12}$
$2 \times 2$	$a_{21}$	$a_{22}$

Одним із способів розв'язання такої гри є *аналітичний метод*.

Позначимо оптимальні мішані стратегії гравців, які є розв'язком задачі і які ми маємо знайти:

для гравця  $A$ :

$p = (p_1^*, p_2^*)$ , де

$p_1^*$  - ймовірність, з якою гравець  $A$  вибере стратегію  $A_1$

$p_2^*$  - ймовірність, з якою гравець  $A$  вибере стратегію  $A_2$

$$p_1^* + p_2^* = 1.$$

для гравця  $B$ :

$q = (q_1^*, q_2^*)$ , де

$q_1^*$  - ймовірність, з якою гравець  $B$  вибере стратегію  $B_1$

$q_2^*$  - ймовірність, з якою гравець  $B$  вибере стратегію  $B_2$

$$q_1^* + q_2^* = 1.$$

Для знаходження оптимальної мішаної стратегії  $p = (p_1^*, p_2^*)$  гравця  $A$  і відповідної ціни гри  $V$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1):

$$\begin{cases} a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 = V & \text{перше рівняння пов'язане з виграшем гравця } A \text{ проти стратегії } B_1 \\ a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 = V & \text{друге рівняння пов'язане з виграшем гравця } A \text{ проти стратегії } B_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Оскільки праві частини перших двох рівнянь однакові, то прирівняємо ліві частини цих рівнянь і підставимо туди вираз для  $p_2$  з третього рівняння.

Отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 = a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 \\ p_2 = 1 - p_1 \end{cases}$$

$$a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot (1 - p_1) = a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot (1 - p_1)$$

розкриваємо дужки:

$$a_{11} \cdot p_1 + a_{21} - a_{21} \cdot p_1 = a_{12} \cdot p_1 + a_{22} - a_{22} \cdot p_1$$

Доданки з  $p_1$  перенесемо у ліву частину, а вільні члени – у праву частину:

$$a_{11} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_1 - a_{21} \cdot p_1 - a_{12} \cdot p_1 = a_{22} - a_{21}$$

винесемо  $p_1$  за дужки:

$$p_1 \cdot (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}) = a_{22} - a_{21}$$

звідки маємо розв'язки системи рівнянь (оптимальні мішані стратегії гравця  $A$ ):

$$p_1^* = (a_{22} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}) \quad (2)$$

$$p_2^* = 1 - p_1 = (a_{11} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}) \quad (3)$$

і ціну гри:

$$V = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}) \quad (4)$$

Аналогічно для знаходження оптимальної мішаної стратегії  $q = (q_1^*, q_2^*)$  гравця  $B$  і відповідної ціни гри  $V$  необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot q_1 + a_{12} \cdot q_2 = V \text{ перше рівняння пов'язане з програвшем гравця } B \text{ проти стратегії } A_1 \\ a_{21} \cdot q_1 + a_{22} \cdot q_2 = V \text{ перше рівняння пов'язане з програвшем гравця } B \text{ проти стратегії } A_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$q_1^* = (a_{22} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}) \quad (5)$$

$$q_2^* = 1 - q_1 = (a_{11} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}) \quad (6)$$

Ціна гри  $V$  є спільною для обох гравців.

## 6. Геометричний метод розв'язання матричної гри. Матрична гра порядку $2 \times 2$ .

Розглянемо гру  $2 \times 2$ .

Для знаходження ймовірностей  $(p_1, p_2)$  і ціни гри  $V$  в прямокутній системі координат в точках  $x = 0, x = 1$  осі  $OX$  відбудуємо перпендикуляри і позначимо їх  $A_1$  і  $A_2$  – відповідно до стратегій гравця  $A$ .

На перпендикулярах  $A_1$  і  $A_2$  будемо відкладати виграші гравця  $A$ , які відповідають цим чистим стратегіям.

Зобразимо стратегію  $B_1$ : на прямій  $A_1$  відкладемо  $a_{11}$ , а на прямій  $A_2$  відкладемо  $a_{21}$ . З'єднаємо ці точки і отримаємо пряму  $B_1 B_1$  (рис. 5.1).

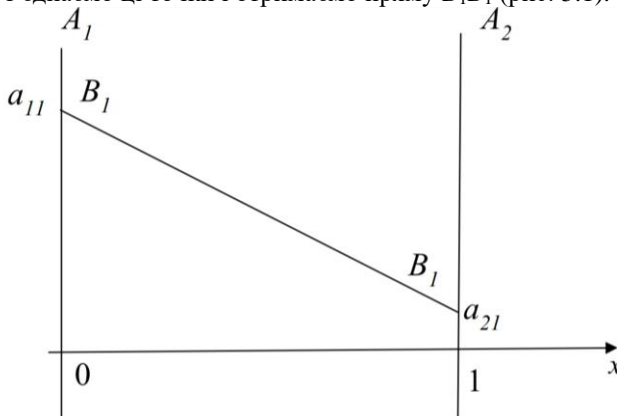


Рис. 5.1. Графічна інтерпретація стратегії  $B_1$

Аналогічно зобразимо стратегію  $B_2$ , відклавши на прямій  $A_1$  значення  $a_{12}$ , а на прямій  $A_2$  – значення  $a_{22}$ , отримаємо пряму  $B_2B_2$  (рис. 5.2).

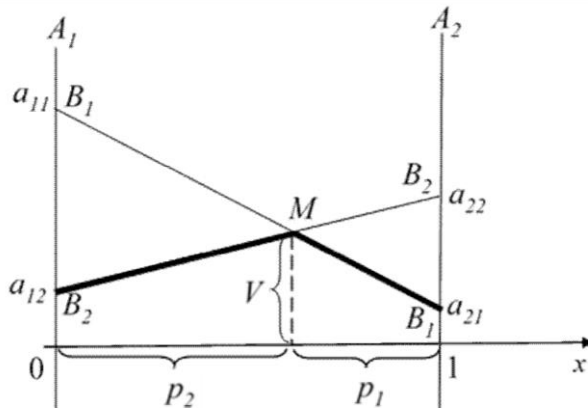


Рис. 5.2. Графічна інтерпретація гри  $2 \times 2$  для гравця  $A$

Кожній точці на відрізку  $[0; 1]$  відповідає мішана стратегія гравця  $A$ , причому  $p_2$  – відстань від цієї точки до нуля, а  $p_1$  – відстань від цієї точки до точки 1 (рис. 5.2).

При  $p_1 = 0$  гравець  $A$  застосовує свою другу чисту стратегію ( $A_2$ ). Якщо при цьому гравець  $B$  застосовує свою першу чисту стратегію, то виграш гравця  $A$  дорівнює  $a_{21}$ , а якщо гравець  $B$  застосовує свою другу чисту стратегію, то виграш гравця  $A$  дорівнює  $a_{22}$ .

При  $p_1 = 1$  гравець  $A$  застосовує свою першу чисту стратегію ( $A_1$ ). Якщо при цьому гравець  $B$  застосовує свою першу чисту стратегію, то виграш гравця  $A$  дорівнює  $a_{11}$ , а при застосуванні гравцем  $B$  другої чистої стратегії –  $a_{12}$ .

Відповідно до максимінного критерію, гравець  $A$  повинен вибрати таку мішану стратегію, яка гарантує йому максимальний гарантований виграш при будь-яких діях гравця  $B$ .

Точка  $M$  перетину відрізків прямих  $B_1B_1$  і  $B_2B_2$  і визначає як оптимальну ціну гри  $V$ , так і оптимальні ймовірності  $p_1$  і  $p_2 = 1 - p_1$ , які відповідають оптимальній мішаній стратегії гравця  $A$ , тобто дає розв'язок системи рівнянь (1). Ламана  $B_2MB_1$  (на рис. 5.2 виділено напівжирним) визначає мінімальні можливі середні виграші гравця  $A$  при використанні ним своїх мішаних стратегій. Найвища точка  $M(x; y)$  ламаної  $B_2MB_1$  – визначає найкращий середній виграш гравця  $A$  з усіх мінімальних, вона відповідає оптимальній мішаній стратегії гравця  $A$ , при цьому:

$$p_1^* = 1 - x, p_2^* = x, V = y.$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження координат точки  $M(x;y)$ , яка є точкою перетину прямих  $B_1B_1$  і  $B_2B_2$ . Для знаходження рівнянь цих прямих у загальне рівняння прямої  $y=ax+b$  слід підставити координати точок, через які вона проходить.

Пряму  $B_1B_1$  визначають точки  $B_1(0;a_{11})$  і  $B_1(1;a_{12})$ , а пряму  $B_2B_2$  – точки  $B_2(0;a_{21})$  і  $B_2(1;a_{22})$ .

Для гравця  $B$  оптимальна мішана стратегія знаходиться аналогічно, але точка  $M$  визначається як найнижча точка верхньої ламаної  $A_1MA_2$  – напівжирна ламана на рис. 5.3.

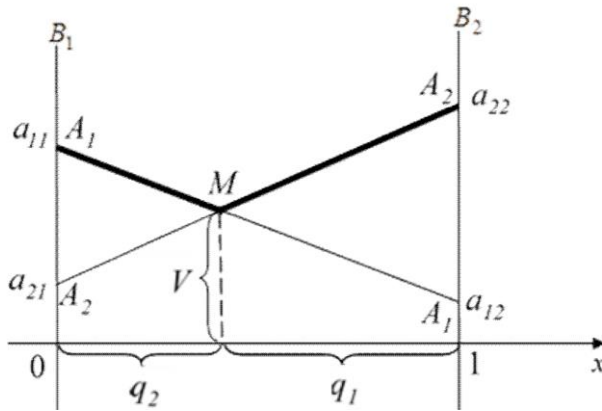


Рис. 5.3. Графічна інтерпретація гри 2x2 для гравця  $B$

Координати точки  $M(x;y)$  знаходимо, як координати точки перетину прямих  $A_1A_1$  і  $A_2A_2$ , компоненти оптимальної мішаної стратегії  $q = (q_1^*, q_2^*)$  гравця  $B$  і ціну гри  $V$  можна знайти за такими формулами:

$$q_1^* = 1 - x, \quad q_2^* = x, \quad V = y.$$

## Тема 6. Сутність економічного ризику.

1. Зміст економічного ризику. Негативні і позитивні наслідки ризику.
2. Основні компоненти і детермінанти ризику.
3. Класифікація економічних ризиків.
4. Функції та джерела економічного ризику.
5. Причини виникнення ризику.

### 1. Зміст економічного ризику. Негативні і позитивні наслідки ризику.

Економічна наука дає *три підходи до трактування ризику*:

- *по-перше*, ризик постає у вигляді можливої невдачі, небезпеки, матеріальних та інших втрат, які можуть настати у результаті прийняття рішення;

- *по-друге*, ризик трактують як спосіб дій у невизначених обставинах;

- *третьій підхід* до трактування ризику пропонується американським економістом Френком Найтом, який визначає ризик як можливість позитивного (шанс) і негативного (збиток) відхилення від очікуваних рішень у процесі господарської діяльності.

У більш широкому сенсі, коли мова йде про ризик, розуміють і його потенційні позитивні можливості, пов'язані з отриманням прибутків, вищих від наперед запланованого рівня.

Отже, *ризик* – це загроза втрати підприємством частини своїх ресурсів, недоотримання доходів або появи додаткових витрат у результаті здійснення конкретних видів діяльності.

Ризик має місце тільки там, де може бути як мінімум *два* сценарії розвитку подій, відповідно – два і більше можливих альтернативних результатів. У ситуації, коли можливий тільки один результат, незалежно від того чи йде мова про втрати чи придбання, ризику немає, оскільки альтернатив немає. Наприклад, якщо точно відомо, що при прийнятті певного єдино можливого в конкретній ринковій ситуації рішення підприємство понесе збитки, то ризик у цьому випадку відсутній, оскільки прийнятих альтернативних рішень просто немає.

Невизначеність і породжений нею ризик є невід'ємною частиною практично всіх прийнятих рішень в економіці та бізнесі. Вони існують об'єктивно, незалежно від того, приймають їх до уваги, чи ігнорують. Більшість господарських (підприємницьких) рішень, наслідки яких проявляться в майбутньому, мають невизначений результат. Особливо значний ризик властивий інноваційній діяльності.

Наприклад, новий (модернізований) товар вже в ході виробництва може виявитися непотрібним, тоді як на момент рішення про його розробку і виробництво, що спиралося на результати аналізу кон'юнктури ринку,

потреб і запитів споживачів, напрямків і темпів розвитку НТП тощо, уявлялося, що попит на нього буде стійким. Ризик може виявлятися й у тому, що на даному ринку або його частині новий товар може бути і нереалізований у тих обсягах, які були розраховані за результатами маркетингових досліджень. Приймаючи рішення про проведення великої рекламної кампанії нової продукції, як правило, не можна бути цілком упевненим у її ефективності. Так само, як і вибираючи варіанти цінової стратегії для проникнення на нові ринки, не можна з повною впевненістю стверджувати, що підприємство очікує успіх, оскільки конкуренти можуть відповісти адекватними діями. Як наслідок цих ситуацій – можливість понесення збитків або недоодержання доходу.

Однак, ризик варто розглядати і як рушійну силу підприємництва, можливість досягнення успіху тими, хто здатний ризикнути. Як показує вітчизняний і зарубіжний досвід, більшість з успішно працюючих підприємств зобов'язані своїми успіхами розробці і виведенню на ринок нових товарів, впровадженню нових методів виробництва і збуту, проникненню на нові ринки, хоча це і пов'язано з ризиком. Бездіяльність же в сфері бізнесу пов'язана з ризиком невикористаних можливостей.

## **2. Основні компоненти і детермінанти ризику.**

Проблема ризику займає важливе місце в обґрунтуванні варіантів господарських рішень, як пов'язаних з активною діяльністю, так і з пасивною поведінкою. Розумність поведінки при прийнятті тих чи інших господарських рішень полягає в тому, щоб не ігнорувати невизначеність і ризик, діючи за принципом фіктивного зниження невизначеності (чим більша невизначеність, тим більшою мірою формулюється однозначність висновку про наслідки рішення), а належним чином їх враховувати й обґрунтовано розробляти заходи, спрямовані на їхнє запобігання, зниження чи компенсацію. Тому виникає об'єктивна необхідність у кількісній оцінці величини ризику і пов'язаних з ним втрат, оцінці частки кожного з факторів ризику в загальній сумі втрат.

*Ризик – об'єктивно-суб'єктивна категорія, яка:*

- пов'язана з подоланням невизначеності та конфліктності;
- проявляється у ситуації неминучого вибору;
- відображає міру (ступінь) досягнення сподіваного результату, невдачі та відхилення від цілей
- настає з урахуванням впливу контрольованих та неконтрольованих чинників;
- настає за наявності прямих та зворотних зв'язків.

Для кожної ризикованої дії характерний певний рівень ризику.

*Рівень ризику визначається залежно від значення основних компонент*

ризик:

1. Розмір можливих втрат.
2. Імовірність втрат.
3. Незахищеність від втрат.

Під незахищеністю розуміють неможливість страхування, розподілу ризику або інших заходів щодо його зниження.

Графічно залежність рівня ризику від його компонент подано на рис. 6.1.

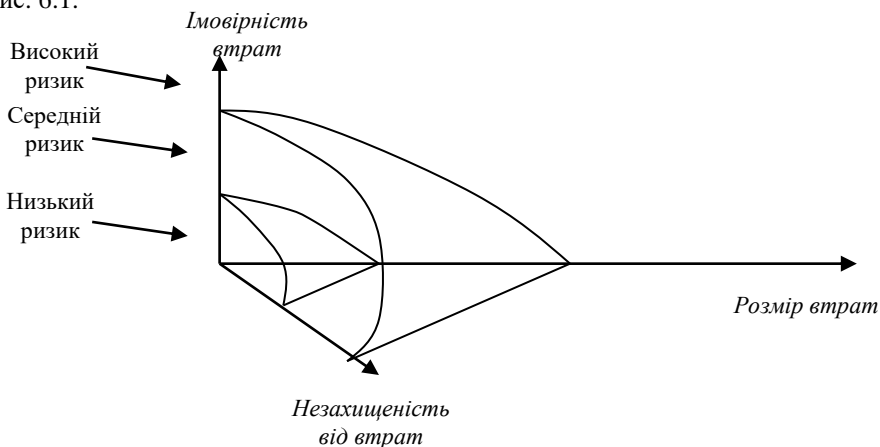


Рис. 6.1. Залежність рівня ризику від основних компонент

Крім компонент, розглядають також *детермінанти ризику*, тобто причини виникнення невизначеності:

1. Нестача часу.
2. Нестача інформації.
3. Нестача контролю або засобів впливу на ситуацію.

У таблиці 6.1 представлено зв'язок між компонентами й детермінантами ризику.

Таблиця 6.1

Зв'язок між компонентами й детермінантами ризику

Детермінанти ризику	Компоненти ризику			Рекомендації
	Розмір можливих втрат	Імовірність втрат	Незахищеність від втрат	
Нестача часу	Немає часу, щоб оцінити або знизити			Відкласти рішення
Нестача інформації	Немає інформації, щоб оцінити			Зібрати інформацію
Нестача контролю	Неможливо зменшити			Знайти способи впливу

*Об'єкт ризику* – система, умови функціонування та ефективність якої наперед точно невідомі.

*Суб'єкт ризику* – особа (індивід або колектив), яка зацікавлена в наслідках управління об'єктом ризику і має компетенції для прийняття рішень щодо об'єкта ризику.

### **3. Класифікація економічних ризиків.**

Найзагальніші принципи класифікації дають змогу виділити:

- ризики, пов'язані з господарською діяльністю;
- ризики, пов'язані з особистими якостями підприємця;
- ризики, пов'язані з браком інформації про стан зовнішнього середовища.

Далі слід виділити різноманітні принципи класифікації, в основу яких покладено цілі, що їх мають на меті при вивченні ризиків, незалежно від видів діяльності. Виділяють такі групи ризиків:

- *щодо масштабів вирішуваних завдань* розрізняють ризик глобальний (наприклад, на рівні держави чи регіону) і локальний (наприклад, на рівні підприємства чи компанії).

- *за сферою виникнення*: зовнішні і внутрішні; обидва види ризиків мають власну велику класифікацію.

- *за рівнем прийняття рішень*: макроекономічні (глобальні) і мікроекономічні (локальні).

- *щодо аспекту прояву*: психологічні, соціальні, медико-біологічні, юридичні і т. п.

- *за типом*: раціональні (обґрунтовані), нераціональні (необґрунтовані), авантюрні (азартні).

- *щодо кількості людей, що приймають рішення*: індивідуальні, групові, масові.

- *щодо ситуації*: стохастичні (на умовах ймовірності виникнення), невизначені (на умовах невизначеності) і конкурентні (на умовах конфлікту чи конкуренції).

- *за тривалістю дії*: короткочасні й постійні.

- *за рівнем втрат*: мінімальні, середні, оптимальні, максимальні або припустимі, критичні, катастрофічні.

- *за ступенем правомірності*: правомірні (виправдані) і неправомірні (невиправдані).

- *за можливістю страхування*: ризики, від яких можна страхуватися й ризики, від яких не можна страхуватися.

- *за основними факторами виникнення* (геополітичні, соціально-політичні, адміністративно-законодавчі, економічні, демографічні, соціально-культурні, технологічні, природно-екологічні, споживацькі, конкурентні,

постачальницькі, посередницькі, виробничі, комерційні, маркетингові тощо);  
- за сферою прояву конкретного ризику (валютні, процентні, кредитні, проектні, портфельні, маркетингові тощо).

- щодо об'єктивності: з об'єктивною ймовірністю, суб'єктивною ймовірністю та з суб'єктивно-об'єктивною ймовірністю.

- щодо часу прийняття рішень: випереджувальні, своєчасні і запізниті.

- щодо можливого фінансового результату: чисті і спекулятивні.

Чисті ризики передбачають можливість одержання збитку чи нульового результату. Спекулятивні ризики передбачають можливість одержання як доходу, так і збитку. Звідси випливає, що всякий підприємницький ризик є спекулятивним.

- щодо врахування тимчасового фактора: статичні і динамічні.

Статичні – це ризики втрати реальних активів унаслідок завдання шкоди власності, а також втрати доходу через недієздатність організації. Такі ризики практично завжди пов'язані з втратами для економічної діяльності (стихійні лиха, злочинні дії, прийняття несприятливого законодавства, недієздатність ключових фахівців і т. д.). Динамічні – це ризики непередбачуваних (недетермінованих) змін вартості основного капіталу внаслідок прийняття управлінських рішень або непередбачуваних обставин. Такі ризики, залежно від обставин, що склалися, можуть нести в собі або прибуток, або втрати.

#### **4. Функції та джерела економічного ризику.**

Зміст ризику як економічної категорії зумовлює його основні *функції*, що виконуються в процесі підприємницької діяльності:

- 1) інноваційну;
- 2) регулятивну;
- 3) захисну;
- 4) аналітичну.

*Інноваційна функція* ризику стимулює пошук нетрадиційних рішень проблем, що стоять перед підприємцем. Ризикові рішення, ризиковий тип господарювання приводять до більш ефективного виробництва, від якого виграють і підприємці, і споживачі, і суспільство в цілому.

*Регулятивна функція* має суперечливий характер і виступає в двох формах: конструктивній і деструктивній. У першому випадку – коли властивість ризикувати – один зі шляхів успішної діяльності. Однак ризик може стати проявом авантюризму, суб'єктивізму, якщо рішення приймається в умовах неповної інформації, без належного врахування закономірностей розвитку явища. У цьому випадку ризик виступає як дестабілізуючий фактор.

*Захисна функція* полягає в наступному. Якщо для підприємця ризик – природний стан, то нормальним повинне бути і терпиме відношення до

невдач. Ініціативним, заповзятливим підприємцям потрібний спеціальний захист, правові, політичні й економічні гарантії, що виключають покарання і стимулюють виправданий ризик.

*Аналітична функція* ризику зв'язана з тим, що наявність ризику передбачає необхідність вибору одного з можливих варіантів рішення, у зв'язку з чим підприємець у процесі прийняття рішення аналізує всі можливі альтернативи, вибираючи найбільш рентабельні (прибуткові) і найменш ризиковані.

Існують різні точки зору з приводу об'єктивної і суб'єктивної природи економічного ризику. Розглядають три *сторони ризику*:

- суб'єктивна;
- об'єктивна;
- суб'єктивно-об'єктивна.

*Суб'єктивна сторона (природа ризику)* проявляється в тому, що підприємці неоднаково сприймають одну й ту саму величину економічного ризику в силу розходження психологічних, моральних, ідеологічних принципів орієнтації, установок. Крім того, економічний ризик завжди пов'язаний з вибором певних альтернатив, розрахунком ймовірностей їх результату.

*Об'єктивна сторона* проявляється в тому, що це поняття відображує реально існуючі явища, процеси, сторони діяльності, причому економічний ризик існує незалежно від того, усвідомлює підприємець його наявність чи ні, враховує чи ігнорує його.

*Суб'єктивно-об'єктивна сторона* визначається тим, що економічний ризик породжується як суб'єктивними процесами, так і тими, які не залежать від волі чи свідомості підприємця.

Виходячи з вищесказаного, виділимо основні *джерела економічного ризику*, до яких відносяться:

- спонтанність природних процесів і явищ, стихійні лиха;
- випадковість подій;
- наявність різних тенденцій, зіткнення суперечливих інтересів (наприклад, конкуренція);
- імовірний характер науково-технічного прогресу;
- неповнота і невірогідність інформації про об'єкт, явище;
- обмеженість і недостатність ресурсів;
- неможливість однозначного пізнання об'єкта, процесу, явища;
- відносна обмеженість свідомості діяльності підприємця, розбіжності в соціально-психологічних установках, оцінках, стереотипах поведінки;
- незбалансованість основних компонентів господарського механізму.

## 5. Причини виникнення ризику.

Відповідно до джерел ризику варто виокремити *причини (фактори) виникнення економічного ризику:*

1) *Зовнішні фактори* – це ті умови, які не можна змінити, але треба брати до уваги, їх можна розділити на дві групи: фактори прямого і непрямого впливу.

*Фактори прямого впливу:*

- зміна законодавства, що регулює економічні відносини партнерів;
- непередбачувані дії органів державного управління і самоврядування;
- рекламації і штрафи за браковану продукцію;
- витік конфіденційної інформації;
- необґрунтовані чутки;
- порушення зобов'язань за угодами;
- інфляція;
- зміна податкової політики;
- зміна цін;
- конкуренція;
- корупція;
- форс-мажорні обставини (стихійні лиха, аварії, смерть керівника або провідних спеціалістів, раптова поява сильних конкурентів, вороже ставлення уряду і преси).

*Фактори непрямого впливу:*

- політична ситуація;
  - міжнародна ситуація;
  - економічна нестійкість країни діяльності;
  - інфляційні процеси в країні діяльності;
  - стихійні лиха;
  - науково-технічний прогрес.
- 2) *Внутрішні фактори* – це фактори, зумовлені діяльністю фірми, їх поділяють на:

- стратегію фірми;
- принципи діяльності фірми;
- ресурси і їх використання;
- якість і рівень використання маркетингу.

Серед *конкретних внутрішніх факторів* виділяють:

- некомпетентність співробітників;
- несумлінність;
- недбайливість;
- витік конфіденційної інформації;
- якість продукції і послуг,

- прорахунки в організації виробничого процесу;
- аварії на підприємстві й поломки устаткування;
- помилки у визначенні попиту;
- взаємини з партнерами.

В умовах України є своя *специфіка причин економічного ризику*. Тут на перший план виступають:

- необов'язковість і безвідповідальність суб'єктів господарювання усіх видів;
- суперечливість законодавства;
- високий рівень інфляції;
- відсутність реального господарського права;
- недієздатність правоохоронних органів;
- перевага політичних інтересів над економічними; роздутий управлінський апарат;
- нестійке податкове законодавство.

## Тема 7. Управління ризиком в економіці.

1. Етапи процесу управління ризиком.
2. Основні принципи управління ризиком.
3. Методи опрацювання (нейтралізації) ризику.
4. План управління ризиком для організації.

### 1. Етапи процесу управління ризиком.

Етапи процесу управління ризиками, відповідно до Національного стандарту України «Керування ризиком. Методи загального оцінювання ризику (IES/ISO 31010:2009, IDT) ДСТУ IES/ISO 31010:2013», подано на рис. 7.1.

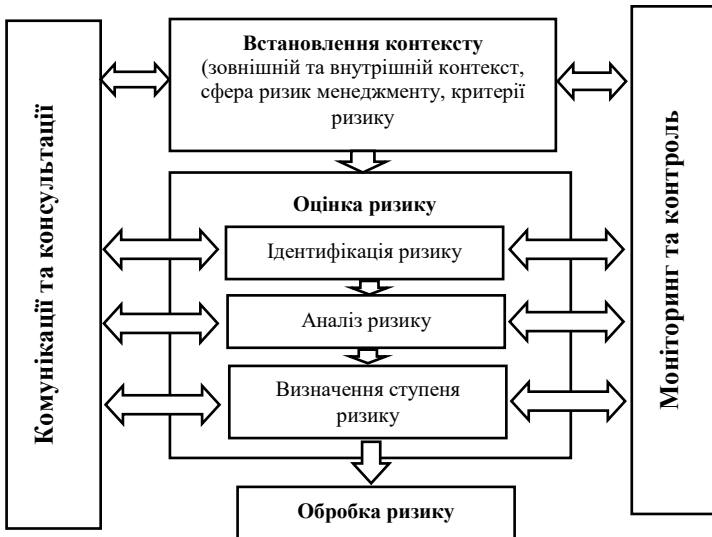


Рис. 7.1. Етапи процесу управління ризиками

*Комунікації та консультації* – постійний процес, яким управляє підприємство, щоб надати, поділитися або придбати інформацію, а також щоб вступити в діалог із заінтересованими сторонами відносно управління ризиками; гарантує отримання максимального обсягу інформації, врахування інтересів усіх сторін і усвідомлення ними необхідності відповідних дій щодо управління ризиками.

*Встановлення контексту* – визначення зовнішніх і внутрішніх параметрів, на які слід зважати при управлінні ризиками, а також сфери ризик-менеджменту та критеріїв ризику. Зокрема, при встановленні зовнішнього контексту враховують фактори макро- і мікросередовища підприємства, а також ставлення зовнішніх заінтересованих сторін,

аналізують організаційну структуру управління, посадові обов'язки; цілі та стратегії; ресурси та знання; інформаційні системи, процеси прийняття рішень; відносини з внутрішніми заінтересованими сторонами; культуру підприємства; стандарти і моделі поведінки, які прийняті на підприємстві. Сфера ризик-менеджменту визначається з урахуванням: цілей і завдань ризик-менеджменту; розподілу відповідальності; ідентифікації основних ризиків і необхідних для цього досліджень та ресурсів; методології оцінки ризиків; заходів ризик-менеджменту; методів оцінки ефективності управління ризиком. Критерії ризику призначено для встановлення ступеня ризику; вони мають відображати цінності, цілі і ресурси організації. Критерії можуть впливати з юридичних або нормативних вимог, а також враховувати точку зору певних заінтересованих сторін («чого в жодному разі не можна допустити?»). За допомогою критеріїв з'ясовують, який ризик вважати допустимим, критичним чи катастрофічним.

*Оцінка ризику* – це процес, який, у свою чергу, складається з трьох етапів: ідентифікації, аналізу та встановлення ступеня ризику. Методи оцінки ризику визначає Міжнародний стандарт ISO/IEC 31010:2009.

*Ідентифікація* – це процес виявлення, розпізнавання та описування ризику; вона передбачає визначення джерел ризику, подій та їх можливих наслідків. Мета ідентифікації – скласти вичерпний список ризиків, які можуть зашкодити досягненню цілей. Це важливо, оскільки ризик, не виявлений на даній стадії, не буде включений до подальшого аналізу.

*Аналіз ризику* являє собою процес розуміння природи ризику і встановлення його рівня (тобто величини та імовірності втрат, незахищеності від них). Він створює основу для визначення ступеня ризику і прийняття рішення про його обробку.

Аналіз ризику може бути якісним, напівкількісним чи кількісним.

Визначення ступеня ризику – це процес порівняння результатів аналізу ризику з критеріями ризику для з'ясування: чи можна прийняти величину ризику, чи необхідна додаткова обробка; також виявляється пріоритетність обробки окремих ризиків.

*Обробка ризику* являє собою циклічний процес: прийняття рішення, чи є існуючий ризик припустимим; якщо ризик є неприпустимим, то відбувається генерація можливого способу його нейтралізації; оцінка ефективності нейтралізації ризику. Обробка ризику може модифікувати існуючі ризики, а також створювати нові ризики замість наявних.

*Моніторинг і контроль* мають охоплювати всі розглянуті етапи ризик-менеджменту, оскільки моніторинг – це постійні перевірка, нагляд, критичне спостереження з метою ідентифікувати зміни показників та очікуваних результатів, а контроль – дії щодо визначення прийнятності, адекватності та ефективності заходів, які вжиті для досягнення встановлених цілей.

## 2. Основні принципи управління ризиком.

Обираючи стратегію і тактику управління ризиком, притаманним певній діяльності, суб'єкт прийняття рішення повинен керуватись такими міркуваннями:

- недоцільно ризикувати більшим заради меншого;
- недоцільно ризикувати більше, ніж це дозволяють власні кошти (капітал тощо);
- необхідно заздалегідь піклуватися про можливі (ймовірні) наслідки ризику.

Є чотири основні принципи, яких необхідно дотримуватись при виборі тієї чи іншої стратегії менеджменту в конкретній ситуації:

- передавати ризик третій стороні (страхуйте) в тих ситуаціях, коли можливі збитки внаслідок несприятливих подій значимі, а ймовірність їх настання низька;
- уникати ризику в ситуаціях, коли збитки внаслідок несприятливих подій значимі, а ймовірність їх настання висока;
- контролювати ризик в тих ситуаціях, коли величина збитків внаслідок настання несприятливих подій незначна, а ймовірність настання висока;
- ризикувати в тих випадках, коли збитки внаслідок настання несприятливих подій незначні і низькою є ймовірність їх настання.

Схематично зазначені принципи подано в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

Збитки	Ймовірність	
	Висока	Низька
Значні	уникати	страхувати
Незначні	контролювати	ризикувати

## 3. Методи опрацювання (нейтралізації) ризику.

Методи опрацювання, або нейтралізації, ризику можуть передбачати:

- уникнення ризику (не розпочинати або не продовжувати діяльність, яка призвела до ризику);
- прийняття на себе ризику або підвищення його рівня, щоб вивчити ситуацію та скористатися можливістю;
- видалення джерела ризику;
- зміна ймовірності;
- зміна наслідків;
- поділ ризику з іншою стороною або сторонами;
- збереження ризику за наявності повної інформації.

Методи нейтралізації ризику формують дві групи:

1) *профілактика* (зменшення негативних наслідків випадкових подій до їх настання);

2) *страхування* (коригування наслідків після настання випадкових подій).

*До заходів профілактики ризиків належать:*

- відмова від ризику;  
- мінімізація ризику (величини або ймовірності втрат; наприклад, впровадження автоматизованої системи обліку зменшує ймовірність крадіжок товарів);

- диверсифікація (розширення переліку напрямів діяльності; наприклад, диверсифікація асортименту торговельного підприємства, постачальників товарів тощо);

- лімітування (встановлення різного роду нормативів; наприклад, мінімального розміру страхових запасів товарів);

- трансферт ризику (передання ризику іншим особам або організаціям; наприклад, передання підприємством проведення маркетингових досліджень або розробки рекламної кампанії спеціалізованим агентством);

- хеджування (будь-яка схема, що дозволяє виключити або зменшити ризик операцій купівлі-продажу за рахунок фіксації певного рівня цін);

- засіб зниження ризику шляхом укладання протилежної угоди – в Україні здійснюється тільки на валютних ринках.

*Страхування ризиків*, у свою чергу, може бути *зовнішнім* (у страхових компаніях) або *внутрішнім* (за рахунок передбачення штрафних санкцій при укладанні договорів; за рахунок «премії за ризик», тобто участі лише в тих проектах, де співвідношення доходу і ризику є прийнятним з точки зору керівників підприємства; за рахунок формування фінансових резервів).

Вибір найдоцільнішого способу обробки ризику передбачає порівняння витрат і вигід, а також урахування юридичних, нормативних та інших вимог, таких як соціальна відповідальність та захист навколишнього природного середовища. Потрібно також взяти до уваги інтереси всіх осіб: за однакової ефективності одні способи можуть бути більш прийнятними для деяких сторін, ніж інші.

#### **4. План управління ризиком.**

У практиці багатьох організацій заходи щодо управління ризиком систематизують у спеціальному документі з назвою «план управління ризиком» («risk management plan»), який містить такі розділи:

- вступ – розкриває мету та зміст програми управління ризиком, обов'язки персоналу, необхідний бюджет;

- аналіз ризику – містить огляд видів і джерел виникнення ризику, оцінку розмірів й імовірності втрат, а також можливостей захисту від ризику;

- управління ризиком – містить обґрунтування заходів щодо зниження ризику та опис процедур моніторингу;
- додаток – містить розрахунки й допоміжні дані.

## **Тема 8. Аналіз ризику. Методи оцінки ризиків.**

1. Загальні принципи аналізу ризику.
2. Якісні методи оцінки ризику.
3. Кількісні методи оцінки ризику.
4. Кількісні показники оцінки ступеня ризику.

### **1. Загальні принципи аналізу ризику.**

*Аналіз ризику* – це систематичне використання інформації для визначення джерел (небезпек) і кількісної оцінки ризику. Аналіз ризику забезпечує базу для оцінювання ризику для подальших заходів з управління ризиком (з мінімізації ризику). При цьому використовується інформація, яка може включати в себе різні ретроспективні дані, результати теоретичних і експериментальних досліджень. В цілому аналіз ризику передбачає дослідження, спрямовані на виявлення небезпек і кількісне визначення ризику при здійсненні різних видів діяльності, будь-яких господарських проєктів і т.п.

Підприємець, приймаючи рішення, в першу чергу повинен оцінити масштаби ризику, які загрожують його фірмі в разі вибору саме такого напрямку дій. Логічно розглядати оцінку ризику як інтегрований етап процесу управління ризиком, що включає якісний і кількісний аналіз ризику, а також співвіднесення отриманого об'єктивного уявлення про ступінь ризику із суб'єктивним його сприйняттям особою, що приймає рішення.

У загальному вигляді аналіз ризиків здійснюється в такій послідовності:

*1 етап.* Виявлення невизначеності у поведінці господарської системи.

*2 етап.* Визначення показників, що характеризують невизначеність.

*3 етап.* Виявлення ризикових факторів невизначеності.

*4 етап.* Оцінка ризиків на основі методів вимірювання ризиків.

*5 етап.* Використання якісних методів.

*6 етап.* Використання кількісних методів.

*7 етап.* Прогнозування рівня ризиків.

*8 етап.* Управління ризиками: використання методів запобігання ризиків.

*Ступінь ризику* визначає ймовірність того чи іншого сценарію розвитку подій. Кількісно ступінь ризику визначається суб'єктивною оцінкою ймовірної або очікуваної величини максимального і мінімального доходу (збитку) від вкладеного капіталу. При цьому чим більше діапазон між максимальним і мінімальним доходом (збитком) при рівній ймовірності їхнього одержання, тим вище ступінь ризику.

Невизначеність ситуації визначає фактор випадковості.

*Випадковість* –це те, що в подібних умовах відбувається неоднаково, тому її заздалегідь не можна передбачати й прогнозувати. Однак при великій кількості спостережень за випадками можна знайти, що у світі випадків діють

певні закономірності. Математичний апарат для їхнього вивчення дає теорія ймовірності. Ризик має математично виражену ймовірність того, що відбудуться втрати. Спираючись на статистичні дані, можна з високим ступенем точності кількісно визначити величину ризику, всі можливі наслідки якої-небудь окремої дії та ймовірність самих наслідків.

*Ймовірність* – це можливість одержання визначеного результату:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (8.1)$$

де  $P(A)$  – ймовірність настання події  $A$ ;

$m$  – кількість можливих ситуацій, при яких настає подія  $A$ ;

$n$  – загальна кількість ситуацій.

При використанні ймовірності для вимірювання ризику дану формулу можна трактувати як відношення кількості випадків, при яких настає негативний результат (отримується збиток) до загальної кількості можливих результатів. При вимірюванні економічного ризику залишаються справедливими правила складання та множення ймовірностей, коли необхідно оцінити ризик при настанні однієї з переліку подій, або при одночасному настанні кількох подій відповідно.

## **2. Якісні методи оцінки ризику.**

Більшість сучасних вітчизняних та зарубіжних науковців розглядають *дві групи методів* оцінки підприємницького та маркетингового ризиків:

- *кількісні* (математичні, статистичні та ймовірнісні, аналітичні);
- *якісні* (моделювання, оптимізація та теорія гри, методи стохастичного програмування, аналогів).

Якісний аналіз ризиків передбачає також кількісний його результат, тобто процес проведення якісного аналізу повинен включати не тільки опис конкретних видів ризиків маркетингової діяльності, виявлення можливих причин їх виникнення, аналізу непередбачуваних наслідків їх реалізації і пропозицій щодо мінімізації виявлених ризиків, але й вартісну оцінку можливих збитків та всіх заходів, що будуть мінімізувати ризики у сфері маркетингу.

Найпоширенішим методом, який використовується в процесі якісного аналізу, є *метод експертних оцінок*, який дає змогу визначити ступінь ризику у випадках відсутності повної й вірогідної інформації, достатньої для застосування статистичних методів. Основою методу є результати оброблення думок досвідчених підприємців або фахівців. На практиці застосовуються індивідуальні та групові (колективні) експертні оцінки, переваги й недоліки яких зведено в таблицю 8.1.

У свою чергу для колективного обговорення найчастіше використовується *метод колективної генерації ідей* (метод «мозкової

атаки»), зміст та спрямованість якого саме на отримання великої кількості ідей. Згаданий метод дозволяє виявити джерела та причини ризику, встановлення можливих ризиків; визначення напрямів і шляхів зниження ризиків; формування і оцінка варіантів з різними засобами зниження ризику тощо.

Таблиця 8.1

Переваги й недоліки методу експертних оцінок в процесі якісного аналізу ризиків підприємства

Індивідуальна експертиза		Колективна (групова) експертиза	
Переваги	Недоліки	Переваги	Недоліки
Оперативність отримання інформації для прийняття рішень і невеликі витрати	Відсутність упевненості в достовірності оцінок, зумовленої високим рівнем суб'єктивності	Менш суб'єктивні і, як наслідок, більш достовірні	Відсутність гарантій вірогідності отриманих оцінок, труднощі в проведенні опитування експертів, обробці одержаних даних

Якісна оцінка ризику є складною, оскільки необхідні ґрунтовні знання теорії економіки, бізнесу, фінансів; знання спеціальних предметів, необхідних для підготовки фахівця певного напрямку; наявність певного практичного досвіду, інтуїції в певній сфері економічної діяльності. Підсумкові результати якісного аналізу ризику є вихідною інформацією для проведення кількісного аналізу.

### 3. Кількісні методи оцінки ризику.

Методи кількісної оцінки ризику дають змогу виявити чисельне визначення розмірів окремих ризиків і ризику конкретного виду діяльності в цілому. При кількісній оцінці ризиків підприємства застосовують різноманітні методи. Обирання того чи іншого з них буде залежати від виду і джерел ризику, характеристик сфери і виду діяльності, фінансового стану, величини підприємства тощо.

Загалом такі методи поділяються на:

1) об'єктивні (ті, що використовують характеристики випадкових процесів, отримані на основі даних, що не залежать від думки конкретно особи);

2) суб'єктивні (які ґрунтуються на експертних оцінках ризику).

Основними методами кількісної оцінки ступеню ризику є: статистичний метод, метод експертних оцінок, метод використання аналогів, метод критичних значень, метод оцінки ризику за допомогою «дерева рішень», аналіз чутливості, аналіз сценаріїв, імітаційне моделювання.

В таблиці 8.2 зведено переваги й недоліки основних методів кількісної оцінки ступеню ризику.

Таблиця 8.2

## Кількісні методи оцінки ризику

Метод	Переваги	Недоліки
Статистичний	Можливість моделювання сценаріїв, висока точність розрахунків, часткова стандартизація, нескладність математичних розрахунків	Необхідність великої кількості спостережень; ризик відповідності обраної моделі; високі витрати на інформатизацію та аналіз інформації
Розрахунково-аналітичний	Широке застосування, можливість об'єктивної оцінки за невисоких витрат	Суб'єктивізм оцінок, відсутність стандартів
Метод експертних оцінок	Невисока вартість; відсутність необхідності в точних початкових даних і дорогих програмних засобах, можливість здійснювати оцінку до розрахунку ефективності проекту, простота розрахунку	Складність з отриманням фінансової оцінки ризику, висока залежність від суб'єктивної думки експертів; складність залучення незалежних експертів
«Дерево рішень»	Висока точність оцінки; детальний облік факторів ризику; можливість різних сценаріїв розвитку подій	Потребує багато часу на дослідження; високі витрати при великій кількості варіантів
Аналіз чутливості	Можливість за його допомогою вирішити проблему зіставлення впливу різних (натуральних, вартісних) характеристик проекту, що варіюються.	Враховання одного чинника проекту, що приводить до нестачі можливостей зв'язків між окремими чинниками або недообліку їхньої кореляції.
Аналіз сценаріїв	Можливий для різноманітних варіантів реалізації проекту; застосування програмних засобів (можливість збільшити кількість можливих сценаріїв і таким чином значно підвищиться ефективність оцінки ризику)	Для високої цінності сценарію з метою прогнозування необхідний великий об'єм вихідної інформації; низька можливість реалізації точного прогнозування при кожному сценарію; потребує масштабних підготовчих робіт
Метод Монте-Карло	Дозволяє реалізувати моделі складних систем; можливість використання будь-яких розподілів; моделювання складної поведінки ринку.	Складність методу; необхідна велика кількість експериментальних даних необхідність потужних розрахунків; складність презентації.
Метод аналогій	Невисока вартість; простота розрахунку.	Невисока точність; проблематичність підбору аналогів; не враховується розвиток певного виду діяльності.

**Статистичний метод** оцінки ризику ґрунтується на принципі екстраполяції на майбутнє тенденції зміни деякого досліджуваного показника за певний проміжок часу в минулому. Застосовується для оцінки економічних ризиків у тих випадках, коли підприємство має значний обсяг аналітико-статистичної інформації за певний час щодо результативності здійснення господарських угод та ін. Сутність статистичного методу оцінки

ступеня ризику базується на теорії ймовірностей розподілу випадкових величин. Це означає, що, маючи достатню інформацію про реалізацію певних ризиків у минулих періодах конкретних видів господарської діяльності, будь-який суб'єкт господарювання може оцінити ймовірність їх реалізації у майбутньому. За допомогою статистичного методу можна оцінити ризик не тільки конкретної угоди, але й підприємства в цілому, коли проаналізувати динаміку його прибутків за певний час.

**Розрахунково-аналітичний метод** базується на методології дисконтування грошових потоків.

**Норма дисконтування** – норма складного відсотка, яка застосовується при перерахунку вартості грошових потоків на визначений проміжок часу

Передбачає використання традиційних показників, які частіше за все застосовуються при оцінці ефективності інвестиційних та інноваційних проектів:

- чиста теперішня вартість (NPV – net present value);
- індекс дохідності (PI – profitability index);
- період окупності інвестицій (PP – payback period);
- внутрішня норма рентабельності (IRR – internal rate of return).

Про рівень ризику судять за величиною відхилення розрахункових величин цих показників від граничних або рекомендованих значень, а також від значень цих показників за альтернативними проектами.

**Чиста теперішня вартість** – це сума дисконтованих фінансових підсумків за всі роки реалізації проекту, починаючи з дати початку інвестування.

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1+r)^t}, \quad (8.2)$$

де  $CF_t$  – грошові надходження від інвестицій у період  $t$ ;

$I_t$  – грошові інвестиційні потоки в період  $t$ ;

$r$  – норма дисконту (необхідна ставка прибутковості інвестицій);

$t$  – період часу;

$n$  – тривалість інвестиційного проекту.

Чим ближче до нуля значення чистої теперішньої вартості проекту, тим вищий ризик проекту.

**Індекс дохідності** – це співвідношення дисконтованих доходів до дисконтованих інвестиційних витрат:

$$PI = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t} / \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1+r)^t}, \quad (8.3)$$

Чим менше різниця між значенням індексу рентабельності і одиницею (за умови, що індекс рентабельності перевищує одиницю), тим вищий ризик проекту.

**Період окупності** визначає кількість періодів часу, протягом яких буде повернуто вкладені інвестиції.

$$PP = \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1+r)^t}, \quad (8.4)$$

Але цей показник має один істотний недолік – він не може слугувати в якості міри прибутковості, оскільки не враховує грошові потоки, які надходять після строку окупності, а також вартість капіталу проекту, тому при використанні цього показника перевага надається короткостроковим проектам.

*Внутрішня норма рентабельності* – це розрахункова ставка відсотка, за якої проект є безризиковим і безприбутковим:

$$IRR = \frac{NPV_{r_1} + NPV_{r_2}}{NPV_{r_1}} (r_2 - r_1) \quad (8.5)$$

Чим менша різниця між значенням внутрішньої норми рентабельності і ставкою дисконту (середньозваженою ціною капіталу, необхідною нормою прибутковості), тим ризик проекту вищий/

*Метод експертних оцінок* дає можливість використовувати досвід експертів для аналізу маркетингової діяльності та обліку впливу різноманітних якісних чинників. Частіше за все використовуються наступні експертні методики:

1) SWOT-аналіз;

2) «зірка (троянда) ризиків» (зіставлення різних чинників, побудова «спіралі ризиків», що відображає ранжування чинників ризику);

3) метод Дельфі (виключення взаємного впливу експертів один на одного, отже, знімається можливість психологічного дискомфорту, пов'язаного з персоніфікацією кожної оцінки).

Метод оцінки ризику за допомогою «*дерев рішень*» передбачає побудування гілок, слідуючи вздовж яких оцінюють кожен шлях і обирають менш ризикований з них, використовуючи спеціальні методики розрахунку ймовірності.

Відстежити варіацію ключових припущень під час прогнозування грошових потоків з метою визначення впливу, який вони можуть чинити на проєктовану вигоду дає змогу *аналіз чутливості*. При застосуванні аналізу чутливості розраховується еластичність (відносна величина, яка відображає зміну величини критеріального показника при одиничній зміні ризик-змінної). Результатом проведення розрахунків за даного методу є виявлення найчутливіших змінних, які потребують додаткових досліджень.

Проведення аналізу чутливості передбачає наступну послідовність операцій:

1. Визначається математичний взаємозв'язок між вихідними і результирующим показниками.

2. Визначаються найбільш імовірні значення для вихідних показників і можливі діапазони їх змін.

3. Розраховується найбільш ймовірне значення результуючого показника.

4. Кожен з досліджуваних вихідних параметрів змінюється на певну величину в допустимому діапазоні, в результаті чого визначається нове значення результуючого критерію (для коректності обчислень рекомендують змінювати вихідні параметри на один і той же відсоток).

5. Всі вихідні параметри ранжуються залежно від впливу на зміну величини зміни результуючого критерію, що дозволяє згрупувати їх залежно від ступеня ризику.

За результатами проведених розрахунків здійснюється експертне ранжування змінних за ступенем їх важливості та прогнозованості.

Далі будується матриця чутливості, яка дозволяє виділити найменш та найбільш ризикові для проекту змінні (рис. 8.1).

Передбачуваність змін	Чутливість змін		
	Висока	Середня	Низька
Низька	I	I	II
Середня	I	II	III
Висока	II	III	III

Рис. 8.1. Матриця чутливості

Перша зона – лівий верхній кут матриці – зона подальшого аналізу чинників, що потрапили в неї, оскільки до їх зміни найбільш чутлива NPV проекту, і вони мають найменшу прогнозованість.

Друга зона співпадає з елементами головної діагоналі матриці і вимагає пильної уваги до змін розташованих в ній чинників (для цього робився розрахунок критичних значень кожного чинника).

Третя зона – зона “найбільшого благополуччя”: ті чинники, які при усіх інших зроблених нами припущеннях і розрахунках потрапили в правий нижній кут таблиці, є найменш ризикованими і не підлягають подальшому розгляду.

При використанні *аналізу сценаріїв* відхилення параметрів розраховуються з урахуванням їхніх взаємозалежностей (кореляції), що є перевагою методу. За цим методом найчастіше розраховуються три можливі сценарії – песимістичний, оптимістичний і найімовірніший.

Для кожного сценарію розвитку розраховуються середні значення результативних показників (з урахуванням ймовірності здійснення кожного сценарію) та визначається розмах їх варіації або середньоквадратичне відхилення. Із двох порівнюваних проектів більш ризиковим є той, в якого розмах варіації критеріального показника більший або більше значення середньоквадратичного відхилення.

Практичне застосування даного методу досить розповсюджене, найбільш яскравим прикладом сценарного аналізу є стрес-тестування.

*Стрес-тестування* широко використовується для оцінки кредитного ризику, ризику ліквідності, валютного ризику, ризику зміни процентної ставки та вартості активів. Метою стрес-тестування є оцінка ризиків та визначення спроможності протистояти потрясінням на фінансовому та інших ринках.

Найбільш поширеними об'єктами стрес-тестування банку є: різка зміна відсоткових ставок за внутрішніми чи зовнішніми запозиченнями, кредитами, цінними паперами тощо; суттєві коливання валютних курсів; кредитний ризик у кредитних портфелях; різкі зміни в обсягах і структурі капіталу фінансової установи, вартості застави при іпотечі; зниження ліквідності та можливість дефолту банку; ймовірність виникнення системного ризику на основі різкого зниження ліквідності чи втрати капіталу тощо.

**Метод Монте-Карло** (метод статистичних випробувань, метод імітаційного моделювання) використовується в тих випадках, коли виникає необхідність в обліку великої сукупності факторів ризику, що проявляються в різних областях підприємницької діяльності.

Для здійснення процесу моделювання заздалегідь фіксується сукупність врахованих параметрів, визначаються діапазони зміни їх значень і кожному параметру присвоюється певна ймовірність. Потім із заданого діапазону довільним чином вибираються значення параметрів і розраховується інтегральний показник ризику.

Імітаційне моделювання уможливорює створення випадкових сценаріїв. Результат виражається у вигляді ймовірнісного розподілу всіх можливих передбачуваних значень результативних показників. Цей метод використовується в найбільш складних для прогнозування випадках. Багато аналітиків відзначають, що він часто дає більш оптимістичні оцінки, ніж сценарний метод, що пояснюється перебором більшого числа проміжних варіантів.

В межах методу Монте-Карло аналіз ризику виконується за допомогою моделей можливих результатів. При створенні таких моделей будь-який фактор, якому властива невизначеність, замінюється діапазоном значень – розподілом ймовірностей. Потім виконуються багаторазові розрахунки результатів, причому кожен раз використовується інший набір випадкових значень функцій ймовірності. Часом для завершення моделювання буває необхідно провести тисячі і навіть десятки тисяч розрахункових операцій – залежно від кількості невизначеностей і встановлених для них діапазонів. Моделювання за методом Монте-Карло дозволяє отримати розподіл значень можливих наслідків.

При використанні розподілів ймовірностей змінні можуть мати різні ймовірності настання різних наслідків. *Розподіл ймовірностей* являє собою більш реалістичний спосіб опису невизначеності змінних в процесі аналізу

ризик. Нижче наведено найбільш розповсюджені типи розподілу ймовірностей.

*Нормальний розподіл (або «крива Гауса»)*. Щоб описати відхилення від середнього значення, дослідник визначає середнє або очікуване значення та стандартне відхилення. Значення, розташовані посередині, поруч із середнім, характеризуються найбільш високою ймовірністю. Нормальний розподіл симетричний і описує безліч звичайних явищ – наприклад, розподіл населення певного віку за розміром взуття, одягу, масою тіла, тощо. До прикладів змінних, які описуються нормальними розподілами, належать темпи інфляції та ціни на енергоносії.

*Логнормальний розподіл*. Значення мають позитивну асиметрію і на відміну від нормального розподілу несиметричні. Такий розподіл використовується для відображення величин, які не опускаються нижче нуля, але можуть мати необмежені додатні значення. Приклади змінних, що описуються логнормальним розподілом, включають вартість нерухомого майна, ціни на акції та нафтові запаси.

*Рівномірний розподіл*. Всі величини можуть з однаковою ймовірністю приймати ті чи інші значення, аналітик просто визначає мінімум і максимум. До прикладів змінних, які можуть мати рівномірний розподіл, належать виробничі витрати або доходи від майбутніх продажів нового продукту.

*Трикутний розподіл*. Аналітик визначає мінімальне, найбільш ймовірне і максимальне значення. Найбільшу ймовірність мають значення, розташовані біля точки максимальної ймовірності. В число змінних, які можуть бути описані трикутним розподілом, входять обсяги продажу за минулий період в одиницю часу і рівні запасів матеріальних оборотних коштів.

*PERT-розподіл*. Аналітик визначає мінімальне, найбільш ймовірне і максимальне значення – так само, як при трикутному розподілі. Найбільшу ймовірність мають значення, розташовані біля точки максимальної ймовірності. Однак величини в діапазоні між найбільш ймовірним і граничними значеннями проявляються з більшою ймовірністю, ніж при трикутному розподілі, тобто відсутній акцент на граничних значеннях. Приклад використання PERT-розподілу – опис тривалості виконання завдання в рамках моделі управління проектом.

*Дискретний розподіл*. Користувач визначає конкретні значення з числа можливих, а також ймовірність отримання кожного з них.

Таким чином, моделювання за методом Монте-Карло дає більш повне уявлення про можливі події. Воно дозволяє судити не тільки про те, що може статися, але і про те, яка ймовірність такого результату.

*Метод аналогій* дає можливість побудувати так звану криву ризику за допомогою зіставлення даних, що були раніше, тобто застосовуються бази даних та знань про ризик аналогічних об'єктів або угод. Даний метод

доцільний у випадку, коли інші методи оцінки ризику неприйнятні [7]. Часто аналогом виступають підприємства іншої потужності і необхідно перерахувати вартість підприємства однієї потужності на вартість підприємства іншої потужності. Те саме стосується і характеристик ризиків. При перерахунку з однієї потужності на іншу слід враховувати ефект концентрації виробництва, тобто вплив потужності підприємства на його питому капіталомісткість.

#### 4. Кількісні показники оцінки ступеня ризику.

Кількісні показники оцінки ступеня ризику обчислюють у абсолютних або відносних величинах.

Кількісна оцінка ступеня ризику має *абсолютне вираження*, якщо вона вимірюється в тих самих одиницях, що й економічний показник, на підставі якого вона була розрахована (наприклад, у грошових).

Система кількісних оцінок ризику в абсолютному вираженні складається з таких:

1) У випадку, коли рішення є альтернативним (можливі лише два наслідки його реалізації), показник ризику розраховують як добуток величини можливих збитків на ймовірність їх понесення:

$$R = x_{зб} \cdot p_{зб}, \quad (8.6)$$

де  $R$  – кількісна оцінка ризику в абсолютному вираженні;

$x_{зб}$  – величина збитків, спричинених прийняттям певного рішення;

$p_{зб}$  – ймовірність понесення цих збитків.

2) У випадку, коли рішення мають декілька (безліч) наслідків реалізації, для оцінки ризику використовують, зокрема, такий показник, як *математичне сподівання*.

Математичне сподівання дискретної величини  $x$  є сумою добутоків всіх можливих варіантів цієї величини  $x_i$  на їх ймовірність  $p_i$  :

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \dots + p_n \cdot x_n, \quad \text{де } \sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (8.7)$$

3) У випадку, коли величина  $x$  має асиметричний розподіл ймовірностей, як оцінку ступеня ризику можна використовувати *модальне значення*  $Mo(x)$  цієї випадкової величини:

$$R = Mo(x). \quad (8.8)$$

Для дискретної випадкової величини *мода* - це найбільш ймовірне значення цієї випадкової величини.

## **Тема 9. Сучасні основи прийняття рішень в умовах невизначеності.**

1. Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності.
2. Статистичні ігри або ігри з природою (середовищем).
3. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності (Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца, домінуючого результату).

### **1. Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності.**

Рішення приймаються в різних обставинах по відношенню до ризику, які можна класифікувати як умови *певності*, *ризик*у і *невизначеності*.

Рішення приймаються в *умовах певності*, якщо відносно кожної альтернативи відомо, що вона неодмінно приведе до деякого конкретного результату.

Рішення приймаються в *умовах ризику*, якщо результати не є певними, але відома ймовірність кожного результату.

Рішення приймаються в *умовах невизначеності*, коли неможливо оцінити ймовірність потенційних результатів.

Отже, *ризик* – це оцінена будь-яким способом ймовірність, а *невизначеність* – це те, що не піддається оцінці.

### **2. Статистичні ігри або ігри з природою (середовищем).**

У теорії стратегічних ігор передбачалося, що в них беруть участь два гравці, інтереси яких протилежні. Тому дії гравців спрямовані на збільшення виграшу одного гравця і зменшення програшу другого.

Однак у багатьох задачах, що прирівнюються до ігрових, невизначеність викликана відсутністю інформації про умови, у яких відбувається дія. Ці умови залежать не від свідомих дій одного гравця, а від об'єктивної дійсності, що прийнято називати природою. Такі ігри називають *статистичними*.

*Статистичні ігри (моделі)* – це гра двох осіб – людини і природи – з використанням людиною додаткової статистичної інформації про стани природи.

Прийняття рішення в умовах невизначеності ґрунтується на відсутності інформації у людини, що приймає рішення, щодо ймовірностей настання різних варіантів настання подій. В даному випадку застосування традиційних підходів є недоречним, оскільки відсутність даних про ймовірність настання альтернативних варіантів розвитку подій не дає змогу сформулювати об'єктивного висновку щодо вибору однієї з альтернатив.

В таких завданнях вибір рішення залежить від стану об'єктивної дійсності, так званої «природи», а математичні моделі називаються «ігри з природою».

Гра, в якій усвідомлено діє лише один з гравців, називається *грою з природою*.

«Природа» – це узагальнене поняття противника, який не має власних цілей в даному конфлікті, хоча таку ситуацію конфліктом можна назвати лише умовно.

Природа може приймати одне зі своїх можливих станів і не має на меті одержання виграшу. Гра з природою представляється у вигляді платіжної матриці (матриці рішень).

*Матриця рішень (функція рішень)* – це таблиця, де традиційно зазначаються всі можливі альтернативи розвитку подій (рядки) та можливі результати їх настання (стовпці, рядки).

### **3. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності.**

Для вибору альтернатив розвитку доцільно використовувати критерії прийняття рішень, які допомагають приймати рішення в умовах невизначеності.

*Критерій прийняття рішення* – це функція, яка виражає переваги людини, яка приймає рішення, щодо вибору конкретного рішення з сукупності існуючих альтернатив, а також дозволяє сформулювати механізм вибору найбільш прийняттого та оптимального варіанта рішення.

До основних критеріїв, які використовуються при прийнятті рішення в умовах невизначеності, відносять наступні:

- критерій Вальда (критерій песимізму, критерій найбільшої обережності, «максимінний» і «мінімакний» критерій);
- критерій домінуючого результату («максимакний» критерій);
- критерій Севіджа (критерій мінімального жалю або критерій втрат від «мінімаксу»);
- критерій Лапласа;
- критерій Гурвіца («альфа-критерій» або критерій «оптимізму песимізму»).

Найкращий результат має забезпечувати **НАЙБІЛЬШИЙ** виграш / **НАЙМЕНШИЙ** програш. Якщо розглядати виграш (дохід, прибуток), то його слід максимізувати. Якщо розглядати програш (витрати, збиток), то його слід мінімізувати

### **ЗАДАЧА.**

**ДАНО.**

Торговельне підприємство планує продаж сезонних товарів на ринках, враховуючи можливі варіанти купівельного попиту ( $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$ ) – дуже низький, низький, середній, високий та дуже високий. На підприємстві розроблено чотири господарських стратегії продажу товарів ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ). Товарообіг (дохід, грош. од.), що залежить від стратегій підприємства й

купівельного попиту, представлено у вигляді платіжної матриці (таблиця).

Господарські стратегії продажу товарів	Варіанти купівельного попиту				
	П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	П <sub>3</sub>	П <sub>4</sub>	П <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	180	140	1	241	232
A <sub>2</sub>	420	130	140	220	100
A <sub>3</sub>	33	315	35	49	180
A <sub>4</sub>	280	1	9	10	201

**ЗАВДАННЯ:** Знайти оптимальну стратегію поведінки торговельного підприємства за різними критеріями..

а. **Критерій Вальда** (критерій песимізму, критерій найбільшої обережності, «максимінний» і «мінімаксний» критерії) – базується на принципі вибору такої стратегії, яка забезпечує **НАЙКРАЩИЙ** з **НАЙГРШИХ** результатів:

- для виграшу (вигода, доходи) – найбільшого з найменших (максимін).

Даний критерій простий і чіткий, але консервативний у тому розумінні, що орієнтує того, хто приймає рішення, на край обережну лінію поведінки.

Застосування даного критерію доцільне за наступних умов:

- *по-перше*, якщо існує висока ймовірність прояву зовнішніх шоків (наприклад, нестабільна економіко-політична ситуація в країні, можливість появи нормативно-правових обмежень щодо даної діяльності тощо), які можуть напряму вплинути на погіршення результату розвитку подій;

- *по-друге*, якщо рішення можна прийняти лише один раз і людина, яка приймає рішення, не має зацікавленості в отриманні великого виграшу;

- *по-третє*, якщо необхідно виключити один із ризиків, тобто застрахувати себе від неочікуваних програшів і забезпечити успіх за будь-яких умов.

**Задача. Критерій 1 (критерій Вальда, правило максиміну).**

В кожному рядку платіжної матриці знаходимо **MIN** значенням показника і з них вибираємо **MAX**

	П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	П <sub>3</sub>	П <sub>4</sub>	П <sub>5</sub>	<i>min</i>
A <sub>1</sub>	180	140	1	241	232	1
A <sub>2</sub>	420	130	140	220	<b>100</b>	<b>100 max</b>
A <sub>3</sub>	33	315	35	49	180	33
A <sub>4</sub>	280	1	9	10	201	1

**ВИСНОВОК.** За критерієм песимізму (критерієм Вальда) оптимальна стратегія поведінки торговельного підприємства – це господарська стратегія продажу товарів A<sub>2</sub> і варіант купівельного попиту П<sub>5</sub>, за яких товарообіг складає 100 грошових одиниць.

**б. Критерій домінуючого результату** (критерій оптимізму, правило максимаксу) – базується на принципі вибору такої стратегії, яка забезпечує **НАЙКРАЩИЙ** з **НАЙКРАЩИХ** результатів:

- для виграшу (вигода, доходи) – найбільшого з найбільших (максимакс) – максимізується максимальний виграш;
- для програшу (збиток) – найменшого з найменших (мінімін) – мінімізується мінімальний програш.

**Задача. Критерій 2 (правило максимаксу).**

В кожному рядку платіжної матриці знаходимо **MAX** значенням показника і з них вибираємо **MAX**

	П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	П <sub>3</sub>	П <sub>4</sub>	П <sub>5</sub>	<i>max</i>
A <sub>1</sub>	180	140	1	241	232	241
A <sub>2</sub>	<b>420</b>	130	140	220	100	<b>420 max</b>
A <sub>3</sub>	33	315	35	49	180	315
A <sub>4</sub>	280	1	9	10	201	280

**ВИСНОВОК.** За критерієм максимаксу оптимальна стратегія поведінки торговельного підприємства – це господарська стратегія продажу товарів A<sub>2</sub> і варіант купівельного попиту П<sub>1</sub>, за яких товарообіг складає 420 грошових одиниць.

**с. Критерій Севіджа** (критерій оптимізму, найбільшої обережності, критерій найменших ВТРАТ, правило мінімаксу) – на відміну від максиміну мінімакс спрямований на мінімізацію не стільки втрат, скільки недоотримого прибутку.

Використовується тоді, коли необхідно обрати стратегію захисту об'єкта від занадто великих втрат. Його застосування доцільне лише за умови достатньої фінансової стабільності підприємства, коли є впевненість, що випадковий збиток не приведе до повного краху.

Розрахунок мінімаксу складається з 4 етапів:

1. Шукають максимальне значення в кожному стовпчику.
2. Шукають різницю між знайденим максимальним значенням і кожним значенням у стовпчику (отримують матрицю відхилень, елементи якої - недоотриманий прибуток від невдало прийнятих рішень, допущених через помилку оцінку можливої реакції ринку 0 середовища).

3. В кожному РЯДКУ матриці відхилень шукають **МАКСИМАЛЬНЕ** значення – найгірший варіант, тобто найбільший недоотриманий прибуток.

4.3 отриманих значень на попередньому кроці вибираємо **МІНІМАЛЬНЕ** – найкращий з найгірших варіантів.

### Задача. Критерій 3 (критерій Севіджа, правило мінімаксу).

	П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	П <sub>3</sub>	П <sub>4</sub>	П <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	180	140	1	241	232
A <sub>2</sub>	420	130	140	220	100
A <sub>3</sub>	33	315	35	49	180
A <sub>4</sub>	280	1	9	10	201
<b>max</b>	<b>420</b>	<b>315</b>	<b>140</b>	<b>241</b>	<b>232</b>

Матриця відхилень – її елементи показують недоотриманий прибуток від невдало прийнятих рішень, допущених через помилкової оцінки можливостей реакції ринку.

	П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	П <sub>3</sub>	П <sub>4</sub>	П <sub>5</sub>	max
A <sub>1</sub>	240	175	139	0	0	240
A <sub>2</sub>	0	<b>185</b>	0	21	132	<b>185 min</b>
A <sub>3</sub>	387	0	105	192	52	387
A <sub>4</sub>	140	314	131	231	31	314

**ВИСНОВОК.** За критерієм оптимізму (критерієм Севіджа) оптимальна стратегія поведінки торговельного підприємства – це господарська стратегія продажу товарів A<sub>2</sub> і варіант купівельного попиту П<sub>2</sub>, за яких товарообіг складає 185 грошових одиниць.

d. **Критерій Лапласа** – характеризується невідомим розподілом ймовірностей на множині станів середовища та базується на принципі «недостатнього обґрунтування», який означає: коли немає даних для того, щоб вважати один із станів середовища більш ймовірним, то ймовірності станів середовища слід вважати РІВНИМИ.

### Задача. Критерій 4 (критерій Лапласа).

	П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	П <sub>3</sub>	П <sub>4</sub>	П <sub>5</sub>	Середнє значення (математичне сподівання)
A <sub>1</sub>	180	140	1	241	232	$(180+140+1+241+232)/5 = 794/5 = 158,8$
A <sub>2</sub>	420	130	140	220	100	$(420+130+140+220+100)/5 = 1010/5 = \mathbf{202}$
A <sub>3</sub>	33	315	35	49	180	$(33+315+35+49+180)/5 = 612/5 = 122,4$
A <sub>4</sub>	280	1	9	10	201	$(280+1+9+10+201)/5 = 501/5 = 100,2$
<b>max</b>						

**ВИСНОВОК.** За критерієм Лапласа оптимальна стратегія поведінки A<sub>2</sub>, за якої середній товарообіг складає 202 грощ. од.

e. **Критерій Гурвіца** («альфа-критерій») або критерій «оптимізму песимізму» – встановлює баланс між випадками крайнього оптимізму та крайнього песимізму за допомогою коефіцієнта оптимізму  $\alpha$ . Цей коефіцієнт

набуває значення від 0 до 1 і показує ступінь схильності особи, яка приймає рішення, до оптимізму чи песимізму. Якщо  $\alpha = 1$ , це свідчить про крайній оптимізм, якщо  $\alpha = 0$ , це свідчить про крайній песимізм. За умови задачі  $\alpha = 0,6$ . Тоді  $(1 - \alpha) = 0,4$ .

**Задача. Критерій 5 (критерій Гурвіца).**

	П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	П <sub>3</sub>	П <sub>4</sub>	П <sub>5</sub>	<i>max</i>	<i>min</i>	$\alpha * max + (1 - \alpha) * min$
A <sub>1</sub>	180	140	1	241	232	<b>241</b>	<b>1</b>	$0,6 * 241 + 0,4 * 1 = 145$
A <sub>2</sub>	420	130	140	220	100	<b>420</b>	<b>100</b>	$0,6 * 400 + 0,4 * 100 = \mathbf{280 max}$
A <sub>3</sub>	33	315	35	49	180	<b>315</b>	<b>33</b>	$0,6 * 315 + 0,4 * 33 = 202,2$
A <sub>4</sub>	280	1	9	10	201	<b>280</b>	<b>1</b>	$0,6 * 280 + 0,4 * 1 = 168,4$

**ВИСНОВОК.** За критерієм Гурвіца оптимальна стратегія поведінки A<sub>2</sub>, за якої товарообіг з урахуванням коефіцієнта оптимізму складає 280 грош. од.

**ЗАГАЛЬНИЙ ВИСНОВОК.** За всіма критеріями найкраща стратегія поведінки торговельного підприємства A<sub>2</sub>.

## ЛІТЕРАТУРА

### Базова

1. Барановська Л.В. Теорія ігор: курс лекцій: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 245 с. URL: [https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/49092/1/Teoriia\\_igor.pdf](https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/49092/1/Teoriia_igor.pdf).
2. Гавриленко О.В., Онищенко В.В. Задачі аналізу даних в теорії прийняття рішень. Практикум. Частина 1. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 110 с. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/d47e0af0-c86e-4356-bcd3-a06ee3050743/content>
3. Козицький В.А. Математична теорія некооперативних ігор. Ігри в нормальній формі: концепції розв'язання. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2021. 220 с.
4. Нужна О.А. Теорія ігор в економіці: електр. навч. посіб., 2025. Довідка № 25-02. Протокол засідання навчально-методичної ради ЛНТУ № 10 від 24 квітня 2025 р. URL: [https://elib.lntu.edu.ua/sites/default/files/elib\\_upload/%D0%9D%D1%83%D0%B6%D0%BD%D0%B0%202025/index.html](https://elib.lntu.edu.ua/sites/default/files/elib_upload/%D0%9D%D1%83%D0%B6%D0%BD%D0%B0%202025/index.html).
5. Chikrii A.A. Conflict-Controlled Processes. Springer Science & Business Media, 2013.
6. Mazalov V. Mathematical Game Theory and Applications. John Wiley & Sons Ltd, UK, 2014.

### Допоміжна

7. Галушка З.І. Невизначеність як економічна категорія та як середовище функціонування бізнесу. *Економіка: реалії часу*. 2023. №1(65). С.26-32. Національний університет «Одеська політехніка» Економічний науковий портал. URL: <https://economics.net.ua/files/archive/2023/No1/26.pdf>.
8. Керування ризиком. Методи загального оцінювання ризику (IES/ISO 31010:2009, IDT) ДСТУ IES/ISO 31010:2013: Національний стандарт України. Офіційне видання. Київ, Мінекономрозвитку України, 2015. 80 с. URL: <https://khoda.gov.ua/image/catalog/files/dstu%2031010.pdf>.
9. Коломієць Г.Б. Застосування теорії ігор в оподаткуванні як сфері узгодження суспільних і приватних інтересів. *Вісник Хмельницького національного університету. Сер.: Економічні науки*. 2020. № 4. Т. 3. С. 202-205. URL: <https://journals.khnu.km.ua/vestnik/wp-content/uploads/2021/11/2020-4t3-35.pdf>.
10. Марціпака В.М. Теоретико-ігровий підхід до оцінки стратегічної взаємодії в інноваційно-транспортному кластері. *Проблеми сучасних трансформацій. Сер.: Економіка та управління*. 2025. № 18. С. URL: <https://reicst.com.ua/pmt/article/view/2025-18-04-03>.

11. Нужна О.А. Економічний ризик як невід’ємна складова здійснення господарської діяльності: загрози та можливості. *Економіко-правові та управлінсько-технологічні виміри сьогодення: молодіжний погляд*: матеріали Міжнар. наук.-практ. конф.: у 3 т. Т. 3 (м. Дніпро, 04 листопада 2022 р.). Дніпро: Університет митної справи та фінансів, 2022. 269 с. С. 38-40. URL:

<https://docs.google.com/document/d/1CUybJuPdcTYUudKoqwbA8C1ytNj8NBbVEOtjbxLCznk/edit?usp=sharing>.

12. Нужна О.А. Оптимізаційні методи та моделі: навч. посіб. Луцьк, 2016. 232 с.

13. Нужна О.А., Тлукевич Н.В. Писаренко Т.М. Оцінка економічних ризиків на підприємствах України: управлінський аспект. *Економічний форум*. 2023. №1. С. 87-93. URL: [http://e-forum.lntu.edu.ua/index.php/ekonomichnyy\\_forum/article/view/382/369](http://e-forum.lntu.edu.ua/index.php/ekonomichnyy_forum/article/view/382/369).

14. Черненко Н.І. Теорія ігор в управлінні персоналом. *Таврійський науковий вісник. Сер.: Економіка*. 2022. № 14. С. 58-66. URL: <http://tnv-econom.ksauniv.ks.ua/index.php/journal/article/view/309>.

15. Tluchkevych N., Nuzhna O., Pisarenko T. Management aspect of tax planning in conditions of uncertainty. *Економічний форум*. 2023. №2. С. 66-71. URL: [http://e-forum.lntu.edu.ua/index.php/ekonomichnyy\\_forum/issue/view/40/57](http://e-forum.lntu.edu.ua/index.php/ekonomichnyy_forum/issue/view/40/57).

16. Нужна О.А. Теорія ігор в економіці: теоретичні та практичні аспекти. *Економічні науки : збірник наукових праць Луцького національного технічного університету. Серія «Регіональна економіка»*. Випуск 22(87). Редкол. : відп. ред. д.е.н., професор Л.Л. Ковальська. Луцьк : ВІП ЛНТУ, 2025. 667 с. С. 368-376.

17. Нужна О.А., Садовська І.Б., Тлукевич Н.В. Практичні аспекти застосування теорії ігор в оптимізації оподаткування діяльності суб’єктів господарювання. *Галицький економічний вісник*. 2025. Том 95. № 4. С. 60-65. URL: <https://galicianvisnyk.tntu.edu.ua/?art=1465>.

#### ***Інформаційні ресурси***

18. Головне управління статистики у Волинській області. URL: <http://www.lutsk.ukrstat.gov.ua>.

19. Державна служба статистики України. URL: <http://www.ukrstat.gov.ua/>.

## НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

**Теорія ігор в економіці** [Текст]: конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітніх програм «Маркетинг» і «Цифровий маркетинг» галузі знань D Бізнес, адміністрування та право спеціальності D5 Маркетинг денної та заочної форм навчання / уклад. О.А. Нужна. Луцьк: ВІП ЛНТУ, 2026. 60 с.

Комп'ютерний набір та верстка: О. Нужна.

Редактор: О.А. Нужна.

Підп. до друку \_\_\_\_\_.\_\_\_\_.2026.Формат 60x84/16.Папір офс.  
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. \_\_\_\_\_. Обл.-вид. арк. 3,75.  
Тираж прим. Зам. № \_\_\_\_\_

Відділ іміджу та промоції ЛНТУ  
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75  
Друк – ВІП ЛНТУ