

**Міністерство освіти і науки України**

**Луцький національний технічний університет**

(повне найменування вищого навчального закладу)

**Факультет транспорту та механічної інженерії**

(повне найменування факультету)

**Кафедра прикладної механіки та мехатроніки**

(повна найменування кафедри)

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА  
ЗА СТУПЕНЕМ ВИЩОЇ ОСВІТИ «МАГІСТР»  
ПРОГНОЗУВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ПОРОШКОВИХ ЗАГОТОВОК НА  
ЕТАПІ ЇХ ВИГОТОВЛЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ  
СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

спеціальність 131 Прикладна механіка

(шифр і назва спеціальності)

освітня програма «Прикладна механіка»

(назва освітньої програми)

Виконав: здобувач вищої освіти  
групи ІМм-21

Козлов Олександр Васильович

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник:

д.т.н., професор

Повстяной Олександр Юрійович

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Кваліфікаційну роботу

допущено до захисту

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

Гарант освітньої програми:

к.т.н., доцент

Четвержук Тарас Іванович

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Луцьк – 2023 року

# ЛУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет транспорту та механічної інженерії

Кафедра прикладної механіки та мехатроніки

Ступінь вищої освіти: магістр

Галузь знань: 13 Механічна інженерія

Спеціальність: 131 Прикладна механіка

Освітня програма: Прикладна механіка

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

Р.Редько

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2023 р.

## ЗАВДАННЯ

### НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ ЗДОБУВАЧУ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Козлову Олександрю Васильовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема кваліфікаційної роботи: *Прогнозування фізико-механічних характеристик порошкових заготовок на етапі їх виготовлення за допомогою методу скінченних елементів*

Керівник роботи: *Повстяной Олександр Юрійович, д.т.н., професор*, затверджені наказом закладу вищої освіти від «14» січня 2023 р. № 42/01-02

2. Строк подання здобувачем вищої освіти кваліфікаційної роботи: 1.12.2023 р.

3. Вихідні дані до роботи: *оболонки високого тиску, вібровимірювальна апаратура ВІБ – 6ТН, плата ADC-1280, диференційний підсилювач сигналу*

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, що потрібно розробити):

*Анотація. Зміст. Вступ. 1 Теоретичні передумови змішаного варіанту МСЕ для розв'язку задач ущільнення порошків. 2 Побудова розв'язуючих рівнянь МСЕ на основі змішаної варіаційної постановки. 3 Врахування граничних умов умов для осесиметричних задач. 4 Розв'язок конкретних задач Висновки. Список використаних джерел*

5. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:

*Тема, мета, завдання – 1 лист (ф.А1), моделі опису поведінки металічних порошків при ущільненні – 1 лист (ф.А1), побудова дискретних розв'язуючих рівнянь – 1 лист (ф.А1), впливу контактного тертя в рівняннях МСЕ – 1 лист (ф.А1), розв'язок конкретних задач. практичне дослідження збіжності – 1 лист (ф.А1)*

## 6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання

02.09.2023 р.

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	<i>Обґрунтування теми, огляд літератури із досліджуваної проблеми</i>	<i>15.09.23</i>	
2.	<i>Загальні відомості. Характеристика методу скінченних елементів</i>	<i>01.10.23</i>	
3.	<i>Теоретичні передумови змішаного варіанту МСЕ для розв'язку задач ущільнення порошків</i>	<i>15.10.23</i>	
4.	<i>Побудова розв'язуючих рівнянь МСЕ на основі змішаної варіаційної постановки</i>	<i>25.10.23</i>	
5.	<i>Врахування граничних умов умов для осесиметричних задач</i>	<i>01.11.23</i>	
6.	<i>Оформлення ілюстративного матеріалу</i>	<i>20.11.23</i>	
7.	<i>Інструментальна перевірка на академічний плагіат</i>	<i>25.11.23</i>	
8.	<i>Представлення кваліфікаційної роботи магістра до захисту</i>	<i>01.12.23</i>	

Здобувач вищої освіти

\_\_\_\_\_

(підпис)

Козлов О.В.

(прізвище та ініціали)

Керівник кваліфікаційної роботи

\_\_\_\_\_

(підпис)

Повстяной О.Ю.

(прізвище та ініціали)

## АНОТАЦІЯ

Козлов О.В. Прогнозування фізико-механічних характеристик порошкових заготовок на етапі їх виготовлення за допомогою методу скінченних елементів. Рукопис.

Кваліфікаційна робота магістра ОП «Прикладна механіка» спеціальності 131 Прикладна механіка. Луцький національний технічний університет. Луцьк, 2023.

Кваліфікаційна робота магістра складається із вступу, 4 розділів, висновків і пропозицій, списку використаних джерел.

Важливе питання пресування металевих порошків є встановлення якісної і кількісної закономірності деформацій порошкового тіла від напруженого стану при його пресуванні. Це – математичне відображення процесу пресування, що пов'язано з характером розподілу деформацій при певних напружених станах.

Метою кваліфікаційної роботи встановлення та визначення фізико-механічних характеристик порошкових заготовок на етапі їх виготовлення за допомогою методу скінченних елементів.

Предметом дослідження кваліфікаційної роботи є технології та методи прогнозування розподілу фізико-механічних властивостей ряду конструкційних деталей.

Доведено, що для прогнозування фізико-механічних властивостей пористих тіл та технологій їх виготовлення доцільно використовувати змішані методи скінченних елементів (МСЕ). Розроблено методіку визначення зусиль тертя з врахуванням розподілу пористості на контактних поверхнях готових виробів. Розроблено програмно-інформаційний пакет для реалізації методу скінченних елементів. Проведено теоретичні та експериментальні дослідження шляхом співставлення результатів розрахунків з відомими даними.

Ключові слова: метод скінченних елементів, варіаційний функціонал, пористе тіло, конструкційна деталь, пластичність, деформація, напруженість.

## ABSTRACT

Kozlov O.V. Prediction of physical and mechanical characteristics of powder blanks at the stage of their manufacture using the finite element method. Manuscript.

Master's qualification work of OP "Applied Mechanics" specialty 131 Applied Mechanics. Lutsk National Technical University. Lutsk, 2023.

The master's thesis consists of an introduction, 4 chapters, conclusions and proposals, a list of used sources.

An important issue in the pressing of metal powders is the establishment of qualitative and quantitative patterns of deformations of the powder body from the stressed state during its pressing. This is a mathematical representation of the pressing process, which is related to the nature of the distribution of deformations under certain stress states.

The purpose of the qualification work is to establish and determine the physical and mechanical characteristics of powder blanks at the stage of their manufacture using the finite element method.

The subject of the qualification work research is technology and methods of forecasting the distribution of physical and mechanical properties of a number of structural details.

In the qualification work, it was proved that it is advisable to use mixed methods of finite elements to predict the physical and mechanical properties of porous bodies and their manufacturing technologies. A methodology for determining frictional forces has been developed, taking into account the distribution of porosity on the contact surfaces of finished products. A software and information package has been developed for the implementation of the finite element method. Theoretical and experimental studies were carried out by comparing the results of calculations with known data.

Key words: finite element method, variational functional, porous body, structural detail, plasticity, deformation, stress.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ТЕОРЕТИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ЗМІШАНОГО ВАРІАНТУ МСЕ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧ УЩІЛЬНЕННЯ ПОРОШКІВ.....	8
1.1 Моделі опису поведінки металічних порошків при ущільненні.....	8
1.2 Змішаний варіаційний функціонал.....	11
1.3 Варіаційний функціонал і принцип стаціонарності.....	14
1.4 Варіаційна постановка задачі для системи елементів.....	17
2 ПОБУДОВА РОЗВ’ЯЗУЮЧИХ РІВНЯНЬ МСЕ НА ОСНОВІ ЗМІШАНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ ПОСТАНОВКИ.....	20
2.1 Напружено–деформівний стан порошків, що ущільнюються.....	20
2.2 Побудова дискретних розв’язуючих рівнянь.....	22
3 ВРАХУВАННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ УМОВ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ.....	32
3.1 Загальні особливості врахування граничних умов в змішаному МСЕ.....	32
3.2 Опис впливу розподіленого навантаження .....	39
3.3 Опис впливу контактної тертя при ковзанні і спокої.....	41
3.4 Опис впливу контактної тертя в рівняннях МСЕ.....	43
3.5 Опис граничних умов при ковзанні по контактних поверхнях.....	45
4 РОЗВ’ЯЗОК КОНКРЕТНИХ ЗАДАЧ.....	47
4.1 Застосування методів формування систем рівнянь.....	47
4.2 Розв’язок конкретних задач. практичне дослідження збіжності.....	53
ВИСНОВКИ.....	67
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	68

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Ефективність традиційних технологій та підвищення їх якості, шире цільове призначення та контроль параметри структури порошкових матеріалів у процесі їх виготовлення можливо з використанням сучасних засобів моделювання та прогнозування.

Моделльні експерименти займають важливе місце, які і прогнозування властивостей порошкових матеріалів від технологічних параметрів отримання виробів зі застосуванням аналітичних, числових та числово–аналітичних сучасних методів.

Розробка та виробництво порошкових матеріалів є важливим етапом, який тільки виграє від використання сучасних засобів автоматизованого інжинірингу. Багатовимірне комп'ютерне моделювання стає все потужнішим та актуальнішим зі збільшення обчислювальної потужності.

**Метою кваліфікаційної роботи** встановлення та визначення фізико-механічних характеристик порошкових заготовок на етапі їх виготовлення за допомогою методу скінченних елементів.

**Предметом дослідження** кваліфікаційної роботи є технології та методи прогнозування розподілу фізико-механічних властивостей ряду конструкційних деталей.

**Об'єкт дослідження** – порошкові заготовки з порошків конструкційних сталей.

Для досягнення встановленої мети були сформовані наступні задачі:

1. Довести доцільність використання змішаних методів скінченних елементів для прогнозування властивостей порошкових заготовок.
2. Модифікувати варіаційний функціонал методу скінченних елементів.
3. Отримати рівняння, яке б враховувало вплив деформування на нерівномірний розподіл пористості порошкової заготовки.

4. Розробити програмно-інформаційний пакет для реалізації модифікованого МСЕ.

5. Провести теоретичні та експериментальні дослідження збіжності модифікованого МСЕ.

**Наукова новизна** роботи виявляється у поєднанні теоретичних розробок з проведенням експериментальних досліджень з використанням МСЕ.

**Особистий внесок магістранта.** Вступ, основна частина, проведення експериментальних досліджень, висновки належать особисто магістранту. Магістрант розробив програмно-інформаційний пакет для реалізації модифікованого МСЕ для визначення фізико-механічних характеристик порошкових заготовок.



# 1 ТЕОРЕТИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ЗМІЩАНОГО ВАРІАНТУ МСЕ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ УЩІЛЬНЕННЯ ПОРОШКІВ

## 1.1 Моделі опису поведінки металічних порошків при ущільненні

Одним з найбільш важливих питань пресування металічних порошків є встановлення кількісної закономірності деформацій порошкового тіла від напруженого стану. Ця залежність відображає математичне відображення процесу пресування і точно пов'язана з характером розподілу деформацій.

Розвиток даних теорій – це до першого відносять структурні теорії. Вони характеризуються описом фізичних явищ процесу пресування міжчастинкової взаємодії. Другий напрям теорії – континуальний. Він забезпечується гіпотезою суцільності середовища і сучасним підходом встановлення залежності для напружено-деформованого стану.

Аналізуючи контактну взаємодію частинок порошку, отримано рівняння пресування:

$$\ln P_{\max} - \ln P = L(\beta - 1) \quad (1.1)$$

де  $P_{\max}$  – максимальний тиск пресовки, що відповідає 100% густини пресовки;

$P$  – тиск пресування;

$\beta$  - відносний об'єм брикету;

$L$  – фактор пресування.

З врахуванням того, що фактор  $L$  і величина контактного тиску не є постійними, то:

$$\frac{dP}{P} = -id\beta \quad (1.2)$$

До структурних теорій відносять математичну модель композита зернистої структури, структурні моделі ущільнюваних порошків. Загалом же практичне використання структурних теорій обмежене через громіздкі рівняння в яких автори намагаються врахувати теоретичним чином якомога більше факторів, що впливають на ущільнення порошків.

До математичних теорій можна:

$$P = A \times \ln \frac{\theta_0}{\theta} \quad (1.3)$$

де  $A$  – деяка постійна;  $\theta$  - пористість;  $\theta_0$  - початкова пористість.

Вдосконалення моделей дозволили отримати залежності ущільнення виходячи з диференційних рівнянь:

$$K = \frac{dV}{dP_n} = KI^{-\alpha P} \quad (1.4)$$

Ці рівняння припускають відсутність тертя на контактних поверхнях.

Залежності математичних теорій ущільнення порошків можуть бути зведені до рівнянь напружено–деформованого стану. У певних схемах пресування напружений стан  $\epsilon$ , незмінним. Навантаження тут  $\epsilon$  простим, а тому обмежуються застосуванням деформаційної теорії пластичності. Всі функції пористості визначаються для певного інтервалу пористостей, тисків, деформацій. Якщо рівняння використовуються для певних схем ущільнення, то часто використовують спрощені моделі, що не зовсім точно описують залежність напружено–деформованого. Дані рівняння використовуються в МСЕ.

Одна з таких моделей:

$$\sigma_{i,j} = \beta \left( \varphi e_{i,j} + \left( \psi - \frac{1}{3} \varphi \right) e \delta_{i,j} \right) \quad (1.5)$$

Дана модель текучості використовується для пористих тіл, її застосування можливе і для ущільнюваних порошків.

Рівняння (1.5) може бути приведене до скалярного запису поверхні навантаження:

$$\frac{p^2}{\psi} + \frac{\tau^2}{\varphi} = (1 - \theta) \tau_0^2 \quad (1.6)$$

Геометрична інтерпретація цього рівняння зображена на рис 1.1

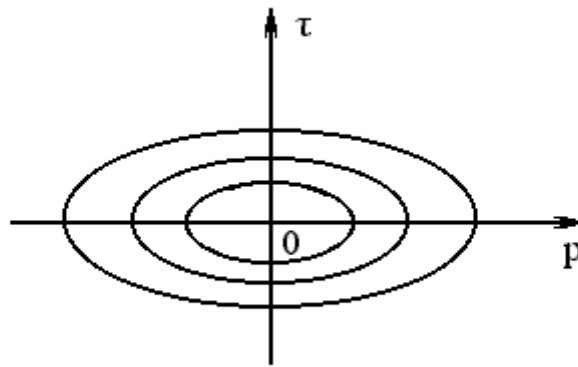


Рисунок 1.1 – Геометрична інтерпретація залежності (1.6)

Більший еліпс відповідає поверхні текучості з меншою пористістю.

Всі існуючі моделі текучості не можуть бути застосовані у МСЕ для розв'язку задач ущільнення порошків тому, що не передбачає наявності опору розтягуючим зусиллям.

Тому для опису напружено-деформованого стану ущільнюваних порошків потрібно використати теорію текучості з поверхнею навантаження з геометричною інтерпретацією, що наведена на рис 1.2:

$$\frac{\tau^2}{\varphi} + \frac{(\sigma_0 - p_0)^2}{\psi} = \tau_0^2 \quad (1.7)$$

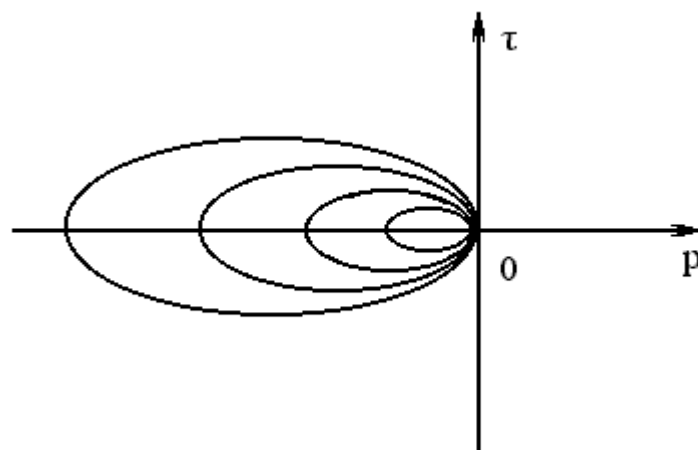


Рисунок 1.2 – Геометрична інтерпретація поверхні навантаження

## 1.2 Змішаний варіаційний функціонал

Метод скінченних елементів для аналізу задач ущільнення порошків використовували Петросян Г.Л., Штерн М.Б. та інших багато вчених. Всі ці методики використовують рівняння МСЕ, які побудовані на основі рівнянь варіаційних принципів

$$u^* = u + \delta u \quad (1.8)$$

або принцип стаціонарності додаткової енергії:

$$\sigma^* = \sigma + \delta \sigma \quad (1.9)$$

Недоліком цих підходів є жорсткий зв'язок між функціями переміщень та деформаціями. Це зменшує точність розрахунків і ставить високі вимоги до гладкості функцій. Тому опис цих матеріальних параметрів жорстко прив'язаний до апроксимаційних функцій переміщень, а їх точність нижча ніж у варіюваних параметрів.

Ці недоліки відсутні у МСЕ на основі змішаних варіаційних рівнянь, що дозволяє використати функції невисоких порядків і зменшити вимоги до їх гладкості. Такий підхід підвищує точність розв'язку, бо дозволяє при стандартних функціях форми для переміщень використовувати поліноми вищих порядків.

Тому можна підвищити точність розв'язку задачі без збільшення густоти елементної сітки.

Змішані варіаційні функціонали для створення оптимального варіанту розв'язуючих рівнянь МСЕ для ущільнюваних порошків працюють наступним чином: введемо основні залежності теорії напружено-деформованого стану матеріалу у матричній формі.

Напружений стан в точці тіла визначається шістьма компонентами напруг,

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{yz}; \tau_{zx}\}^T \quad (1.10)$$

Рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} + F_x &= 0 \\ \frac{d\tau_{yx}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{yz}}{dz} + F_y &= 0 \\ \frac{d\tau_{zx}}{dx} + \frac{d\tau_{zy}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

які після використання матричного диференційного оператора

$$[R]^T = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 & \frac{d}{dy} & 0 & \frac{d}{dz} \\ 0 & \frac{d}{dy} & 0 & \frac{d}{dx} & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Для опису впливу зовнішніх сил, вектор яких запишеться як

$$\{p\} = \{p_x; p_y; p_z\}^T, \quad (1.13)$$

Якщо  $\{p^*\} = \{p_x^*; p_y^*; p_z^*\}^T$  - відомий вектор поверхневих зусиль, що діють на частину границі тіла  $S - S_2$ , то з умов рівноваги випливає:

$$\{p\} = \{p^*\} \quad \text{на } S_2 \quad (1.14)$$

Звідси, напружений стан тіла визначається шістьма функціями напруг, які при відомих об'ємних і поверхневих силах повинні задовольняти диференціальним і поверхневим умовам рівноваги.

Розглянемо ряд змішаних варіаційних функціоналів і їх особливості:

1, Варіаційний функціонал Вашидзу запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \Pi_W(u; \varepsilon; \sigma; p) &= \int_V \frac{1}{2} ([\varepsilon]^T [D] [\varepsilon] - \{\sigma\} (\{\varepsilon\} - [R] \{u\}) - \{u\}^T \{F\}) dV - \\ &- \int_{S_2} \{u\}^T p^* dS - \int_{S_1} \{p\}^T (\{u\} - \{u^*\}) dS \end{aligned} \quad (1.15)$$

2. Розв'язуючі рівняння на основі модифікованого варіаційного принципу Вашидзу:

$$\begin{aligned} \Pi_W(u; \varepsilon; \sigma) = & \int_V \frac{1}{2} ([\varepsilon]^T [D][\varepsilon] - \{\sigma\}(\{\varepsilon\} - [R]\{u\}) - \{u\}^T \{F\}) dV - \\ & - \int_{S_2} \{u\}^T p^* dS - \int_{S_1} \{p\}^T (\{u\} - \{u^*\}) dS \end{aligned} \quad (1.16)$$

Перевагою даного методу є те, що пористість – це функція деформацій, яка може визначатись з рівняння, а не через математичні перетворення з переміщень і напруг.

3. Варіаційний функціонал фізичних рівнянь запишеться як [46]

$$\Pi_W(\varepsilon; \sigma) = \int_V \frac{1}{2} ([\varepsilon]^T [D][\varepsilon] - \{\sigma\} \{\varepsilon\}) dV - \int_{S_2} \{u\}^T [C]^T \{\sigma\} dS \quad (1.17)$$

який визначений на статичних напругах і геометрично можливих деформаціях і застосовується для визначення густини через деформації.

4. Варіаційне рівняння Рейснера:

$$\Pi_W(u; \sigma) = \int_V \frac{1}{2} ([\sigma]^T [D][u] - \{\sigma\}^T [D]^{-1} - \{u\} \{F\}) dV - \int_{S_1} \{u\}^T \{p\} dS \quad (1.18)$$

За допомогою цих рівнянь можливо знайти переміщення і напруги, а крім цього рівняння на основі даного функціоналу.

- Проте побудова цих рівнянь на основі незалежних варіацій має ряд переваг:
- відсутність жорсткого зв'язку між переміщеннями і деформаціями. Це збільшує точність розв'язку (побудови діаграм розподілу густини);
  - задавати нерівномірний розподіл пористості внаслідок деформування, що значно підвищує точність;
  - наявність жорсткого зв'язку між напругами і деформаціями;
  - наявність симетричної матриці жорсткості від апроксимаційних функцій переміщень і деформацій;
  - відсутність необхідності зберігати додаткові вектори напруг і обслуговуючу для них інформацію.

### 1.3 Варіаційний функціонал і принцип стаціонарності

За допомогою МСЕ для організації обчислень необхідно перейти від постановки задачі у вигляді диференційних рівнянь рівноваги до відповідної варіаційної постановки. При цьому мають задовольнятися наступні тотожності:

$$\int_V (Ru)^T \sigma dV = \int_S u^T (C)^T \sigma - \int_V (u)^T (R)^T \sigma dV \quad (1.19)$$

Нехай статично можливі вектори напруг задовольняють умовам рівноваги:

$$R^T \bar{\sigma} + F = 0 \quad \in V \quad (1.20)$$

Нехай гладкість всіх векторних функцій достатня для забезпечення виконуваних операцій. На підставі теореми одиничності на кожному кроці рівняння пластичності можуть бути зведені до лінійних ітерацій вектори  $\{\sigma\}$ ,  $\{\varepsilon\}$ , и мають лише одне значення.

Для знаходження цих векторів запишемо варіаційне рівняння у вигляді  $\Pi_R(\varepsilon, u)$  для ущільнювального порошку:

$$\sigma = D\varepsilon + \bar{C} \quad (1.21)$$

При цьому надамо довільних варіацій векторам напруг і швидкостей переміщень:

$$\sigma + \delta\sigma \quad u + \delta u \quad (1.22)$$

Даний функціонал представляє інтерес при побудові наближених розв'язків щодо напружено-деформованого стану порошкового тіла. Це підвищує точність, бо зменшує кількість операцій знаходження матеріально-технологічних параметрів.

Проте, якщо для визначення всіх невідомих можна використати інші схеми формування матриці жорсткості, то уникнення появи комплексних чисел можна досягти, застосувавши модифікації методу квадратного.

Така ситуація робить неможливість розв'язку дискретної задачі з мінімізацією певного енергетичного функціоналу. Крім того, при такій ситуації відсутні достатні умови збіжності дискретних рівнянь.

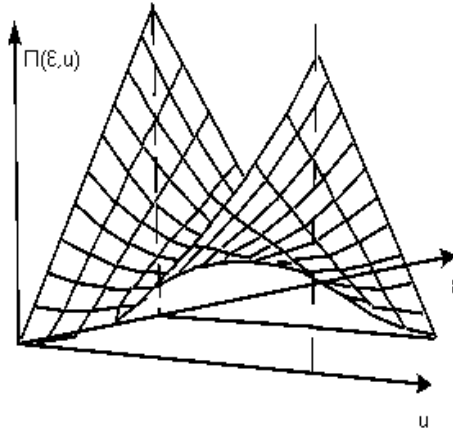


Рисунок 1.3 – Геометрична інтерпретація функціоналу

Для побудови змішаного МСЕ з прогнозованою збіжністю потрібно побудувати таку форму змішаного методу, щоб варіаційна постановка якого базувалася на випуклому функціоналі.

$$\Pi_B(\varepsilon; u) = \Pi_1 + \frac{\alpha}{2} \int_V (\varepsilon - Ru)^T D^{-1} (\varepsilon - Ru) dV \quad (1.23)$$

Очевидно, що при  $\alpha > 0$  функціонал, як і функціонал Лагранжа є випуклим вниз. Оскільки частина нового випуклого функціоналу є функціоналом методу найменших квадратів, то цей варіаційний функціонал є випуклим.

Далі отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \delta u^T C^T (DRu + \bar{C}) dS - \int_V \delta u^T R^T (DRu + \bar{C}) dV - \\ & - \int_V \delta u^T F dV - \int_{S_1} \delta u^T p^* dS + \alpha \int_V \delta \varepsilon^T D^{-1} (\varepsilon - Ru) dV - \\ & - \alpha \int_{S_1} \delta u^T C^T (\varepsilon - Ru) dS + \alpha \int_V \delta u^T R^T (\varepsilon - Ru) dV = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$



Врахувавши довільність варіацій швидкостей переміщень і швидкостей деформацій, перетворення відбудеться наступним чином:

$$\begin{aligned} \delta u^T [\alpha R^T (\varepsilon - Ru) - \alpha R^T (DRu + \bar{C}) - FdV] &= 0 \quad \text{на } V \\ \delta \varepsilon^T D^{-1} (\varepsilon - Ru) &= 0 \quad \text{на } V \\ \delta u^T [C^T (DRu + \bar{C}) - \alpha p^* C^T (\varepsilon - Ru)] &= 0 \quad \text{на } S_1 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Проте ця задача зведена до випуклого рівняння, до якого можуть бути застосовані методи оцінки для випуклих функціоналів (рис.1.4). Дані залежності є дуже громіздкими. В них не виражений безпосередній зв'язок зовнішніх і об'ємних сил з деформаційними параметрами. Це вимагає застосування додаткових рівнянь для встановлення такої відповідності, що негативно позначиться на точності і економічності.

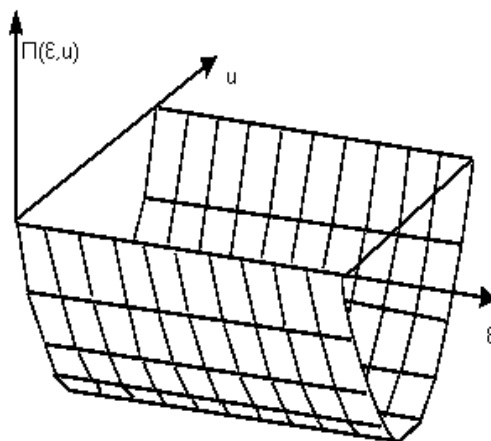


Рисунок 1.4 – Геометрична інтерпретація функціоналу

Тому для побудови розрахункового процесу для дискретних задач оптимальним є використання невивуклого функціоналу. Внаслідок довільності варіацій швидкостей деформацій і переміщень, рівняння для всього об'єму деформованого тіла буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\int_V \delta \varepsilon^T D(Ru - \varepsilon) dV &= 0 \\
\int_V \delta u^T R^T (D\varepsilon + \bar{C}) dV - \int_{S_2} \delta u^T C p^* dS - \int_V \delta u^T F dV - & \quad (1.26) \\
- \int_{S_1} (u - u^*) C^T \delta \varepsilon dS - \int_{S_1} \delta u^T C^T (D\varepsilon + \bar{C}) dS &= 0
\end{aligned}$$

#### 1.4 Варіаційні постановки задач для системи елементів

В межах елемента досліджуваного тіла виконуються рівняння рівноваги і сумісності деформацій. При розв'язку задач деформування наближеними методами виконуються точно при використанні функцій, що мають достатню ступінь гладкості. В МСЕ ступінь гладкості цих функцій невелика і тому спряження між суміжними елементами можуть виконуватись наближено. В зв'язку з цим виникає питання про побудову варіаційних рівнянь

Для цього необхідно розглянути тіло, що займає область  $V$  і поділити його на елементи, щоб суміжні елементи мали спільну границю і були повністю зв'язані між собою. Математичну постановку задачі можна сформулювати так:

$$\begin{aligned}
R^T (D\varepsilon + \bar{C}) + F &= 0 \\
\varepsilon &= Ru \\
\sigma &= D\varepsilon + \bar{C}
\end{aligned} \quad (1.27)$$

На границі всього тіла повинні виконуватись граничні умови

$$\begin{aligned}
C^T (D\varepsilon + \bar{C}) &= p^* \quad \text{на } S_1 \\
u &= u^* \quad \text{на } S_2
\end{aligned} \quad (1.28)$$

На спільній межі суміжних елементів повинні точно виконуватись умови спряження. Вектори поверхневих сил, що діють на границі суміжних елементів запишуться як:

$$\begin{aligned} p^* &= C_\omega \sigma^* \\ p^{**} &= C_\omega \sigma^{**} \end{aligned} \quad (1.29)$$

де  $\sigma^*$  і  $\sigma^{**}$  - вектори напруг на поверхні  $\omega$  для суміжних елементів. В результаті умови спряження на поверхні матимуть вигляд

$$\begin{aligned} u^* &= u^{**} && \text{на } \omega \\ p^* + p^{**} &= 0 && \text{на } \omega \end{aligned} \quad (1.30)$$

В останню умови спряження входять неявні і забезпечені вимогами гладкості функцій. Поділ тіла на елементи і введення умов спряження пов'язане не з фізичною постановкою задачі, а з наближеними методами її розв'язку в МСЕ. При цьому необхідна ступінь гладкості функцій не задається попередньо, а забезпечується самим варіаційним рівнянням.

Основне інтегральне формулювання для системи  $n$  елементів розбите у деформованому тілі. Вважаємо, що елементи зв'язані між собою і запишемо їх як суму інтегралів по всіх елементах:

$$\sum_{r=1}^n \int_{V_r} (Ru)^T (D\varepsilon + \bar{C}) dV \quad (1.31)$$

Застосувавши до кожного елемента основне інтегральне формулювання, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \int_{V_r} (Ru)^T (D\varepsilon + \bar{C}) dV &= \sum_{r=1}^n \int_{\omega_r} (u)^T (C)^T (D\varepsilon + \bar{C}) d\omega + \\ &+ \sum_{r=1}^n \int_S (u)^T (C)^T (D\varepsilon + \bar{C}) dS - \sum_{r=1}^n \int_V (u)^T (R)^T (D\varepsilon + \bar{C}) dV \end{aligned} \quad (1.32)$$

де  $\omega_r$  – поверхня, що обмежує елемент  $r$  і знаходиться в середині тіла.

Для незв'язаних елементів поняття геометрично можливих переміщень і відповідних статично можливим напругам деформацій відносяться не до всього тіла. Тому з'являється інтеграл, що описує роботу поверхневих сил на поверхні

спряження  $\omega$ . Умовою спряження елементів є загальна врівноваженість всіх сил на поверхнях спряження:

$$\int_{\omega} (u^*)^T (C_{\omega})^T (D\varepsilon^* + \bar{C}) - (u^{**})^T (C_{\omega})^T (D\varepsilon^{**} + \bar{C}) d\omega = 0 \quad (1.33)$$

Умова (1.33) є принципом стаціонарності отриманого рівняння. При цьому функціонал має зміст і для незв'язаних елементів. Стаціонарне значення цього функціоналу відповідає системі зв'язаних елементів. Провівши ряд перетворень, отримаємо:

$$\begin{aligned} \Pi_{P.M.\omega}(\varepsilon; u) = & \int_V [(D\varepsilon + \bar{C})^T Ru - \frac{1}{2}(D\varepsilon + \bar{C})^T D^{-1}(D\varepsilon + \bar{C})] dV - \\ & - \int_V u^T F dV - \int_{S_1} u^T p^* dS - \int_{S_2} (u - u^*)^T C^T (D\varepsilon + \bar{C}) dS - \\ & \int_{\omega} u^T CD(\varepsilon^* - \varepsilon^{**}) d\omega \end{aligned} \quad (1.34)$$

Отже, варіаційний функціонал забезпечує гладке спряження параметрів переміщень і деформацій при виконанні умов нерозривності порошкової пресовки. Таким чином, модифікований варіаційний функціонал забезпечує гладкість спряження величини швидкостей переміщень і швидкостей деформацій.

## 2 ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ РІВНЯНЬ МСЕ НА ОСНОВІ ЗМІЩАНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ ПОСТАНОВКИ

### 2.1 Напружено–деформівний стан порошоків, що ущільнюються

Опис пластичних деформацій порошоків вимагає визначення особливостей застосування методів розв'язків задач по їх ущільненню. Для розробки моделі розв'язку задач ущільнення порошоків необхідно зробити припущення, на основі яких будуть виводитись математичні залежності напружено-деформованого стану та рівняння МСЕ.

Спочатку необхідно визначити чи прийняті припущення відповідають тим властивостям, які проявляються при прийнятих схемах навантаження і деформування.

Всі суцільні тіла володіють пружними і пластичними властивостями. Найпростішою моделлю ущільнювальних середовищ є модель жорсткопластичного тіла.

Під жорсткопластичним тілом розуміємо таке тіло, деформації в якому виникають лише при досягненні деякою комбінацією напруг граничного значення. Решта властивостей не залежать від швидкості навантаження, температури.

Одним з основних властивостей ідеально-жорсткопластичного матеріалу є відсутність зміцнення, тоді як в реальних тілах воно має місце. При цьому для спрощення математичної моделі тіла вважають початково-ізотропними. Даний факт реалізується лише для реальних порошоків, де хаотичний характер форм і розміщення частинок обумовлюють ізотропію. На регулярних порошкових упаковках з частинок правильних форм деформаційна анізотропія яскраво виражена.

Для опису напружено-деформованого стану металічного порошку необхідно врахувати відсутність розтягуючих зусиль. Тому всі поверхні

текучості в координатах  $\sigma_0$ - $\tau$  розміщуються в півплощині з від'ємними  $\sigma_0$ . При цьому співвідношення напруг виражають через величину початку текучості суцільного матеріалу-основи і поточну пористість:

$$\sigma_{np} = f(\theta; \tau_m) \quad (2.1)$$

Зазначимо, що залежність (3.1) з експериментальних даних враховує в кожному випадку характер впливу кількісного і якісного гранулометричного складу. Це обумовлює нехтування пружними деформаціями як незначними у порівнянні з пластичними.

Схеми пресування порошкових тіл вибираємо лише ті, що здійснюються лише при активному навантаженні по  $\sigma_{np}$ , при зростаючому значенні гідростатичної складової тензора напруг в межах стійкого стану порошкового тіла. Напружений стан при цьому не тільки обумовлює появу лінійних деформацій з від'ємним знаком, але обумовлює зменшення об'єму порошкової пресовки. Тому необхідно визначити поверхню граничних навантажень, що обмежує типи напружених станів.

Реальна картина зміни поверхні текучості, що викликана ущільненням порошку, представлена на рис.2.1.

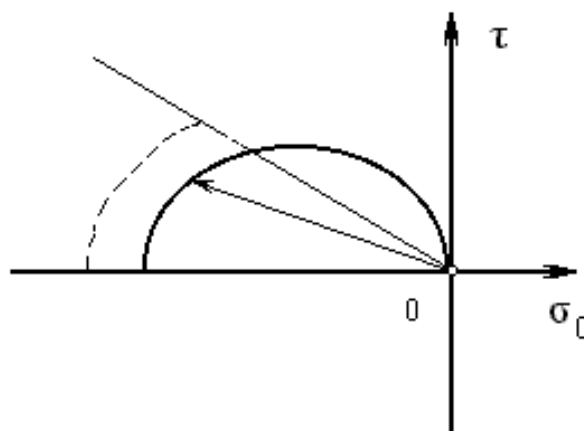


Рисунок 2.1 – Геометрична інтерпретація зміцнення порошкового тіла при пресуванні

Зазначимо, що порошкові пресовки не здатні витримувати значних розтягуючих зусиль, тому збільшення розмірів поверхні текучості буде відбуватись у напрямках зростання від'ємного значення першого інваріанту тензора напруг (рис. 3.2). При цьому напружені стани будуть знаходитись в секторі між від'ємним напрямком гідростатичної осі і кривою, що відмежовує стійкий стани в залежності від пористості і напруженого стану. Наявність активного навантаження обумовлюватиме відсутність впливу ефекту Баушингера.

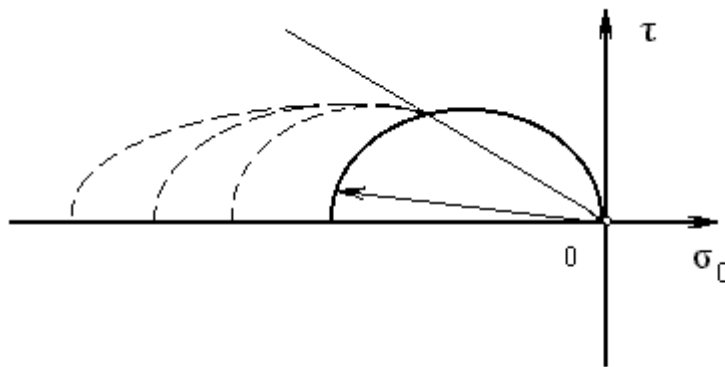


Рисунок 2.2 - Геометрична інтерпретація рівняння

## 2.2 Побудова дискретних розв'язуючих рівнянь

Для ущільнювальних металічних порошоків можливим є застосування рівняння для ізотропного зміцнення:

$$F(\sigma_0; \tau) = f(\varepsilon) \quad (2.2)$$

де  $\varepsilon$  - об'ємна деформація матеріалу.

При цьому вплив зміцнення матеріалу основи буде врахований при умові отримання залежності з експериментальних даних типу:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v(\sigma_0; \theta) \quad (2.3)$$

Характер залежностей (2.3) для різних пористостей, представлений на рис. 3.3, вимагає використання моделей, що відмінні від жорстко-пластичних.

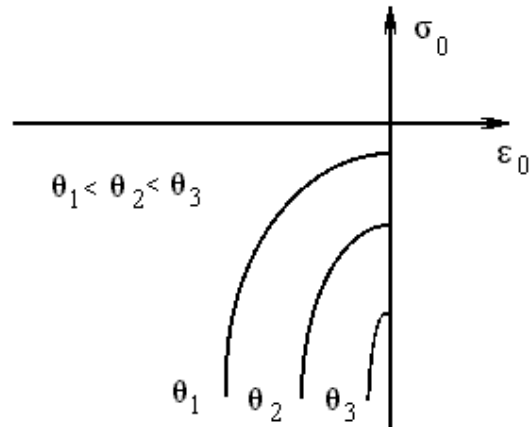


Рисунок 2.3 – Якісний характер залежностей ущільнення порошків

Поверхня текучості  $\Phi$  буде визначати межу, за якою при подальшому зростанні напруг відбуватимуться пластичні деформації. Згідно з асоціативним законом текучості напрям швидкостей (приростів) деформацій визначатиметься виглядом напруженого стану (це буде нормаль до поверхні текучості в точці перетину останньої з траєкторією навантаження), а величину швидкостей деформації визначатиме різниця приведеної напруги даного навантаження і приведеної напруги початку пластичних деформацій (рисунок 2.4).

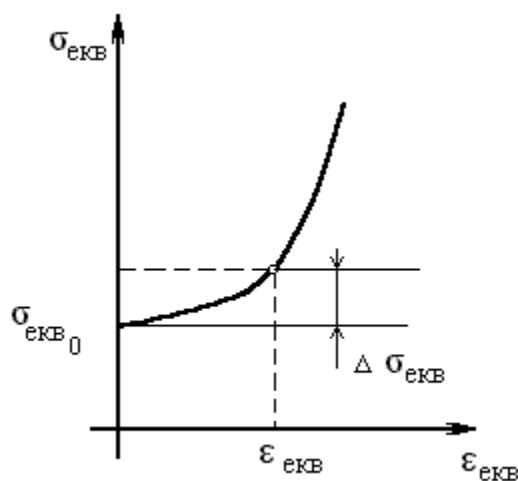


Рисунок 2.4 – Геометрична інтерпретація залежності (2.3)



На основі розглянутих особливостей опису напружено-деформованого стану ущільнювальних порошків проводимо на основі таких припущень (положень):

1. Поверхню текучості вибираємо такою, що враховує відсутність опору розтягуючим зусиллям.
2. Величину еквівалентних напруг початку пластичних деформацій виразимо як функцію напруг початку текучості матеріалу-основи і поточної пористості.
3. Незворотні деформації є лише пластичними, а навантаження проводиться з швидкостями, що дозволяє уникнути ізоляції повітря в закритих порах
4. Схеми пресування вибираємо лише ті, які забезпечують активне навантаження зі гідростатичною складовою.
5. Навантаження проводити лише для траєкторій, при яких порошковий матеріал залишається стійким.
6. Зміцнення приймаємо лише ізотропне.

Для початку встановимо характер поверхні пластичності і методику її визначення. При цьому прийнявши її незалежно від третього інваріанту тензора напруг вона запишеться:

$$\frac{\tau^2}{\varphi} + \frac{(\sigma_0 + c)^2}{\psi} = \tau_m^2 \quad (2.4)$$

де  $\varphi$  - деякі функції пористості,

$\nu$  - коефіцієнт поперечних деформацій.

Для порошків пластичних металів, сталей і сплавів, де вплив зміцнення незначний можна визначити, виходячи з припущення про те, що навантаження на зсув несе лише матеріал-основа:

$$\varphi = (1 - \theta)^2 \quad (2.5)$$

Аналогічно і коефіцієнт поперечних деформацій визначається:

$$\nu = \frac{2 - 3\theta}{4 - 3\theta} \quad (2.6)$$

Однак ці залежності повинні бути визначені не з гіпотез, а згідно реальних експериментальних даних, що дозволить враховувати вплив контактних явищ між частинками порошку, вплив домішок, оксидних і інших плівок на поверхнях частинок порошку.

Для більш точного визначення коефіцієнта поперечних деформацій можна скористатися методикою наведеною в [2]. Після визначення в певному інтервалі пористостей і апроксимації слід перейти до визначення функції  $\varphi$ . Для цього необхідно провести пресування порошку по схемі, що забезпечує просте і приблизно однорідне навантаження.

Для безпосереднього визначення  $\varphi$  запишемо:

$$\frac{\tau^2}{\varphi} + \frac{\sigma_0^2}{\psi} = -\frac{2\sigma_0\tau_m}{\sqrt{\psi}} \quad (2.7)$$

де величини  $\tau$  і  $\sigma_0$  як функції коефіцієнта поперечних деформацій і величини навантаження (МПа).

При цьому для визначення пористості слід витримувати на кожному кроці навантаження 1,5 хв для заліза, а для міді, латуні та інших пластичних металів - 5 хв. Для їх визначення необхідно скористатись залежністю для логарифмічних деформацій.

Для пресування в жорсткій матриці:

$$Q = 1 - (1 - Q_0)(1 + \varepsilon_z) \quad (2.8)$$

а для гідростату пористість визначається згідно з робочим об'ємом поршня для даної установки:

$$(1 + \tilde{\varepsilon}_z)(1 - Q_0) = 1 - \varepsilon \quad (2.9)$$

В даному випадку  $\tilde{\varepsilon}_z$  відносне переміщення поршня гідростата, при умові вираження об'єму пресовки як циліндр діаметром рівний діаметру поршня.

Знайшовши таким чином залежність  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi(\theta) \quad (2.10)$$

можливо виразити рівняння поверхні текучості через пористість і межу текучості матеріалу - основи як (2.10), де величина  $\tau_m$  є величиною  $\sigma_{np}$  для граничного випадку.

Зазначимо, що крива (рис.2.5):

$$P_N = f(\theta) \text{ або } \theta = f(P_N) \quad (2.11)$$

отримана в результаті експериментів, є початковою залежністю для визначення величини пористості в залежності від навантаження пресування.

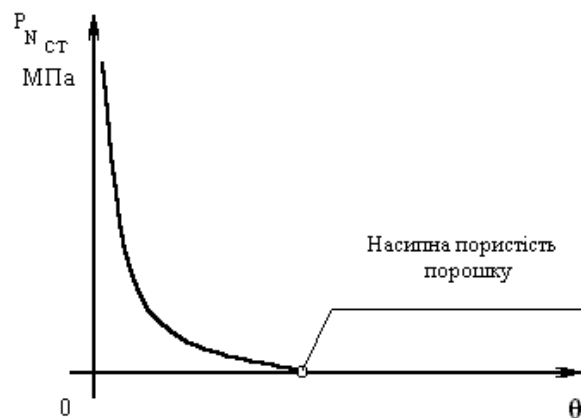


Рисунок 2.5 – Залежність зусилля пресування від отриманої пористості

Дану залежність слід привести до вигляду:

$$\sigma_{np} = f_1(\varepsilon_{np}) \text{ або } \varepsilon_{np} = f_2(\sigma_{np}) \quad (2.12)$$

Але для побудови даної залежності необхідно визначити певну “єдину” криву деформування, з якої, матеріалу-основи і функції, що описують властивості порошку. Для цього запишемо залежність (2.12) для випадку простого навантаження і встановлюємо значення  $\tau$  і  $\sigma_0$  для постійної початкової пористості  $\theta_0$ .

Однак в залежності від початкової пористості дана крива має відмінні кількісні характеристики. Характер розподілу кривих по пористостях приведений на рис.2.6.

Враховавши, що  $\sigma_{np}$  для певної пористості може відповідати і напруженому стану, тоді приведена залежність середньої нормальної напруги від об’ємної деформації визначається:

$$\sigma_0 = -\sqrt{\psi}(\sigma_{np} - \tau_m) \quad (2.13)$$

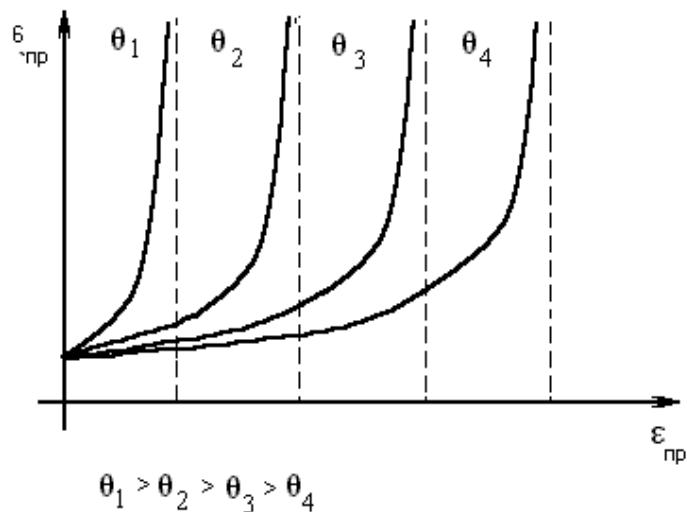


Рисунок 2.6 – Залежність еквівалентної напруги від еквівалентної деформації

Після чого отримаємо криву

$$\sigma_0 = f(\varepsilon_0) \quad (2.14)$$

тоді отримаємо

$$\theta = f(\sigma_0) \quad (2.15)$$

Геометрична інтерпретація якої представлена на рис.2.7.

Дане рівняння визначає напруги, які необхідно викликати в порошковій пресовці, щоб досягти необхідної пористості, а також величину середньої напруги. Дана залежність і буде тією приведеною кривою.



Рисунок 2.7 – Геометрична інтерпретація залежності (2.14)

Для визначення характеру функцій  $\Omega$  і  $V$  проаналізуємо поведінку металічного порошку при ущільненні. При температурах, рівних з кімнатними, в'язкі деформації і деформації повзучості незначні і ними нехтують. Таким чином рух інструмента припиняється, коли внаслідок ущільнення досягається пористість, яка є межею текучості для напруг викликаних даним навантаженням. Залежності  $\Omega$  і  $V$  матимуть вигляд представлений на рисунку 2.8. При цьому, очевидно, що для металічних порошоків функція  $\Omega$  визначається як:

$$\Omega(t) = L \left( 1 - \frac{1}{e^{kt}} \right) \quad (2.16)$$

де  $L$  – величина, що рівна деформації, яка буде отримана при встановленні рівноваги за тривалий проміжок часу.

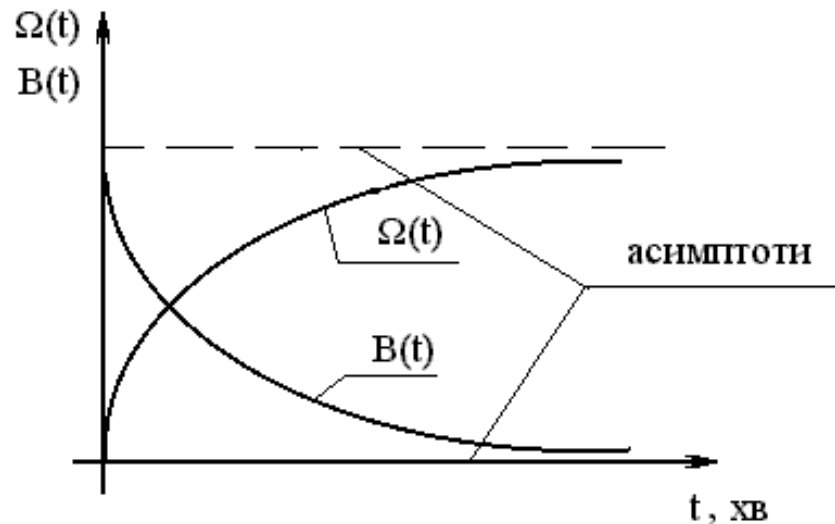


Рисунок 2.8 – Характер функцій  $\Omega(t)$  і  $B(t)$  для металічних порошків

Величина швидкості еквівалентної деформації через  $\Omega(t)$ :

$$\varepsilon = (\sigma_{екв} - \sigma_{екв0})^{\frac{1}{B}} L (1 - e^{-kt}) \quad (2.17)$$

Тоді для швидкості об'ємної деформації рівняння матиме вигляд:

$$\xi = (\sigma_{екв} - \sigma_{екв0})^{\frac{1}{B}} L k e^{-kt} \quad (2.18)$$

Значення  $L$  і  $k$  визначається з експериментальних графіків пресування металічного порошку в матриці. В першому випадку на контактних поверхнях слід використовувати змащення, щоб уникнути спотворення даних через зусилля контактного тертя. В процесі деформування порошкова пресовка ущільнюється, а отже зменшується швидкість деформації. Тому процес

повинен бути покроковий. Умовою завершення ітераційного процесу буде досягнення величини пористості, що відрізняється від граничної на величину, що менше граничної точності. Така побудова моделі дозволяє адекватно описувати, як одноразове навантаження, так і допресовку. Дана модель обумовлює проведення ітераційного процесу як до повного врівноваження, так і при досягненні відповідних геометричних розмірів без врівноваження. Єдиною умовою є активне навантаження з зростаючим від'ємним значенням першого інваріанту тензора напруг і в межах інтервалу напружених станів.

Отже, рівняння напружено-деформованого стану для ущільнюваних порошків доповнені залежностями, що враховують зміцнення. Для кожного металічного порошку всі функції визначатимуться з приведених рівнянь пресування.

Пористість визначатиметься як:

$$\theta = (\theta_0; \sigma_0) \quad (2.19)$$

а функції часу:

$$B(t) = \frac{Lk}{e^{kt}} \quad (2.20)$$

Швидкості деформацій визначаються диференціюванням рівняння. Визначення деформацій проводимо покроковим методом:

$$\varepsilon = \int_0^{\Delta t} \varepsilon'(t) dt \quad (2.21)$$

Тривалість кроку вибирається, щоб деформації в межах кроку були достатньо малі для виконання залежностей Коші і приблизної рівності

логарифмічних деформацій звичайним. Покрокове визначення деформацій проводиться доти, доки завдяки деформуванням порошкова пресовка не досягне пористості, для якої даний напружений стан і величини напруг задовольняють умові текучості. Дане положення і є основою для подальшої побудови алгоритмів розв'язку задач холодного ущільнення порошків.



### 3 ВРАХУВАННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ УМОВ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

#### 3.1 Загальні особливості врахування граничних умов в змішаному МСЕ

Отримані залежності для розв'язку задачі ущільнення описують зміщення всього тіла як жорсткого цілого при умові прикладання навантаження. Для опису деформованого стану тіла необхідно врахувати граничні умови, щодо визначення заданого переміщення на певній частині поверхні.

Для визначення характеру граничних умов звернемося до постановки задачі. Розв'язки рівнянь належать не всім кінематично можливим швидкостям переміщень, а лише тим, що задовольняють певній умові. Це дозволяє задавати граничні умови по швидкостях переміщень і в нашому випадку граничні умови на частині поверхні, де задані переміщення виконуються точно. Приблизне виконання умови вимагає оцінки точності наближеного інтегрування розподіленого за певним законом навантаження. Необхідно ще враховувати точність визначення граничних умов і для контактних поверхонь.

Для врахування впливу розподілених на поверхнях сил необхідно зводити їх до вузлових сил. Це спростить побудову загальних розв'язуючих рівнянь. Скористаємося наступним підходом: введемо до розгляду нематеріальні елементи (плоскі, для плоских і осесиметричних - лінійні) (рис.3.1).

Даний підхід дозволяє уникнути складних процедур встановлення відповідності між зовнішніми зусиллями і вузловими силами, а також нерівномірним розподілом пористості. Це є наближеним інтегруванням по поверхні дії розподіленого навантаження. Кожен крок інтегрування буде подібний до формування матриці жорсткості елемента. Результатом будуть не компоненти загальної матриці жорсткості, а додаткові компоненти вектора вузлових сил. Це раціонально використовувати через можливість

автоматичного генерування поверхневих елементів за допомогою відомих сіткових генераторів.

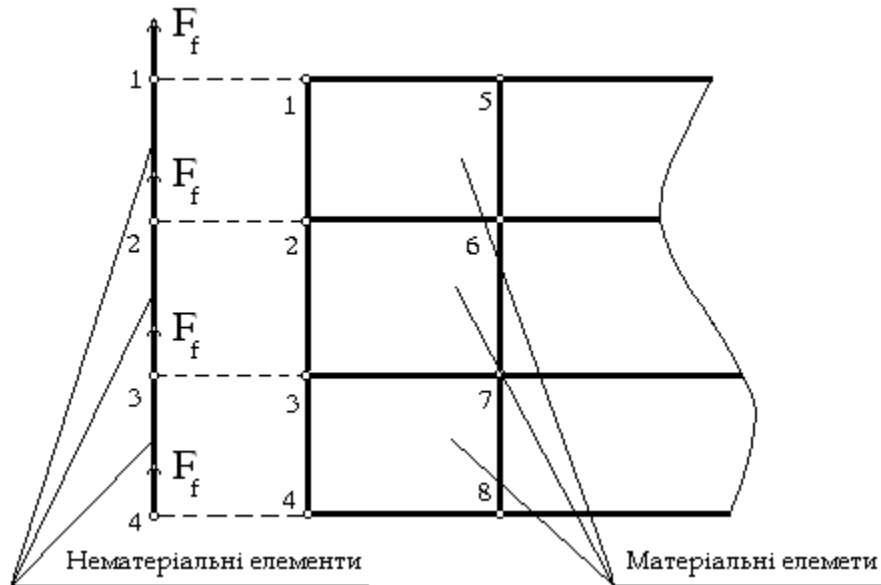


Рисунок 3.1 – Застосування нематеріальних елементів при опису граничних умов

Для оцінки точності представлення вузлових сил використовують точне інтегрування по площі поверхні навантаження. При цьому різниця між точним значенням і сумарним по елементам внаслідок чисельного інтегрування і буде похибка.

При визначенні граничних умов щодо переміщень потреби оцінки точності їх представлення немає. Тому зведення умов щодо швидкостей переміщень до вузлових швидкостей переміщень проводиться без похибки. Необхідність дотримання граничних умов вимагає врахування деяких особливостей в стандартних процедурах таких як конденсація або метод економізації.

1. Конденсація передбачає зменшення розмірності системи за допомогою зменшення ступенів вільності. Приведена система повинна бути

виражена в ступенях свободи, які необхідно залишити через додаткові ступені свободи. Вихідна система має вигляд:

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bc} \\ K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_b \\ F_c \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

і повинна бути зведена до

$$[K_{cc}]\{\Delta_c\} = \{F_c\} \quad (3.2)$$

Підхід, де конденсація основана на перетворенні координат. При цьому задача полягає у побудові співвідношень:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = [T]\{\Delta_c\} \quad (3.3)$$

Після певних перетворень отримаємо:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{bb}^{-1} K_{bc} \\ I \end{bmatrix} \{\Delta_c\} \quad (3.4)$$

Хоча дані перетворення і змінюють значення енергії деформування, проте ці рівняння справджуються при умові стаціонарності енергії деформування на випуклих функціоналах. У випадку МСЕ на основі варіаційних функціоналів така постановка задачі використовується у випадку жорсткого закріплення.

2. Економізація ступенів вільності базується лише на перетворенні координат без додаткових умов набуття стаціонарного значення базовим варіаційним функціоналом. При цьому всі координати зводимо до двомірної задачі інтегрування по площині r-z (рис.3.2).

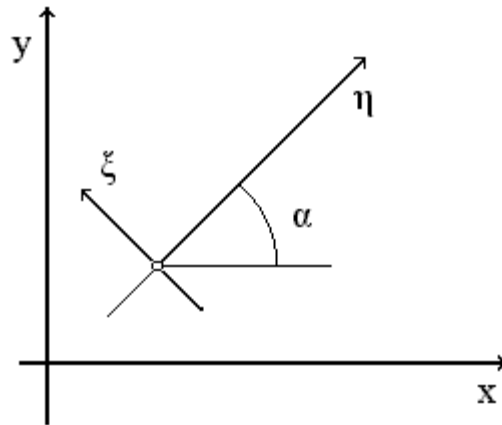


Рисунок 3.2 – Перетворення координат

Вектор перетворення координат вузла маємо:

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  - напрямні косинуси осей  $\eta$  і  $\xi$ , а  $\eta$  і  $\xi$  компоненти вектора в локальній системі координат. Тому замість звичайного вектора вузлових переміщень  $\{r_1, z_1, r_2, z_2, r_3, z_3\}$  в загальних розв'язуючих рівняннях використовується новий  $x^1 \{r_1, z_1, \eta, \xi, r_3, z_3\}$  тоді для всіх вузлів:

$$x = R x^1 \quad (3.6)$$

де  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- матриця координатних перетворень.

Матриця  $R$  також ортогональна. Вона може бути як група вузлів, де задані прямі і криві лінії. Тоді у матриці  $R$  буде група блоків з розмірами  $2 \times 2$  для осесиметричних випадків. Розв'язуючі рівняння матимуть вигляд:

$$[R^T AR] \{x\}^1 = [R]^T \{b\} \quad (3.7)$$

де  $\{b\}$  – вектор вузлових сил. Далі дана система розв'язується звичайним для МСЕ. Після цього визначаються реальні швидкості переміщень:

$$\{x\} = [R]^T \{x\}^1 \quad (3.8)$$

Для спрощення розрахункових процедур добуток матриць  $R^T A$  і  $R^T AR$  можна представити:

$$\begin{aligned} [R^T A_i] &= [R_i][A_{i,j}] \\ [R^T AR_i] &= [A_{j,i}][R_i] \end{aligned} \quad (3.9)$$

На практиці дана процедура може бути:

- для випадку  $[R_i]=[I]$  ніяких операцій (4.10) не проводиться;
- для випадку

$$[R] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad [R] = \begin{bmatrix} 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

При цьому значна частина матриці  $[A]$  не змінюється і дані операції перемноження на одиничну матрицю не проводяться. Це значно зменшує машинний час і прискорює розв'язок.

Для визначення граничних умов на нелінійних проекціях профілю обертання в координатах  $r$ - $z$  вибирають функцію  $z(r)$ . Після чого визначаються функції перетворення координат у вузлові точці (рис. 3.3)

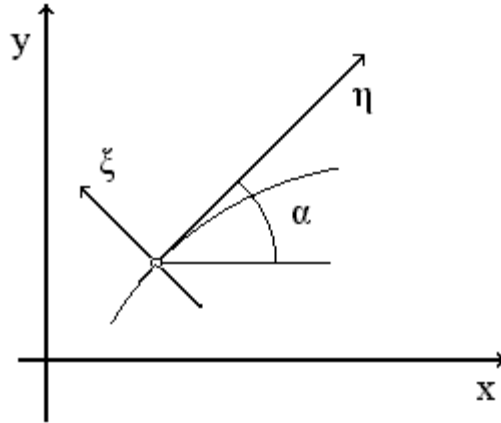


Рисунок 3.3 – Перетворення координат при нелінійних поверхнях

Перетворення координат, запишемо як:

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+(z'(z))^2} & -\frac{z'(z)}{1+(z'(z))^2} \\ \frac{z'(z)}{1+(z'(z))^2} & \frac{1}{1+(z'(z))^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

де  $z'(r)$  – похідна функції поверхні в вузловій точці  $i$ . При розв'язку задачі переміщення вузлів здійснюються по дотичній до початкової точки знаходження вузла (рис.3.4)

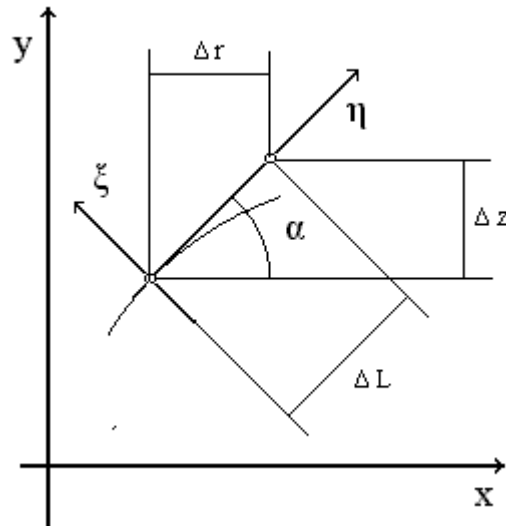


Рисунок 3.4 – Інтегрування по переміщенням на поверхні, що проектується на площину  $r - z$  як крива лінія.

Для знаходження реальних переміщень необхідно знайти переміщення по кривій. Для цього визначивши довжину дуги, відкласти її по кривій. Координати нового положення вузла  $r_f$  визначаємо як:

$$\Delta L = \int_{r_0}^{r_f} \sqrt{1 + (z'(r))^2} dr \quad (3.11)$$

Такий підхід необхідний для точного інтегрування по переміщеннях. Пряме проектування паралельно початковим локальним координатним осям можливе лише для кривих малої кривини або дуже густої елементної сітки.

На основі цих залежностей можливий опис граничних умов по швидкостях переміщень на поверхнях, що на площину  $r-z$  проектуються як прямі чи криві лінії при умові відсутності прикладених сил в цих вузлах.

### 3.2 Опис впливу розподіленого навантаження

При застосуванні у змішаному МСЕ зосереджених у вузлах сил граничні умови по напругах виконуються правильно. При розв'язку задач з розподіленим навантаженням необхідна дискретизація неперервного навантаження і зведення його до вузлових сил з необхідною точністю. Необхідно забезпечити точне виконання умов однорідності по напруженнях для однорідних задач.

Запишемо функцію поверхні як  $r(z)$ . При інтегруванні по цій площі отримаємо:

$$P = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} Q(z) * r(z) \sqrt{1 + (r'(z))^2} dz \quad (3.12)$$

Інтеграл (3.12) визначає значення зусилля, що викликане дією розподіленого навантаження. Для застосування в МСЕ необхідна дискретизація впливу зовнішніх розподілених навантажень зі застосуванням наближеного інтегрування по площі елемента. Для максимального її зменшення необхідно визначити залежності для її оцінки. Також необхідно застосувати апроксимаційні поліноми того ж порядку, що і для апроксимації переміщення. Тому для визначення вузлових зусиль скористаємося методом трапецій. Врахуємо, що для задач обробки тиском вплив масових сил незначний і навантаження постійне.

Рівняння прикладеного до елемента зусилля визначається:

$$P_e = \pi Q \sqrt{(r_2 + r_1)^2 + (z_2 + z_1)^2} (r_2 + r_1) \quad (3.13)$$



Дана залежність дозволяє встановити загальне значення зусилля, що діє на окремий елемент. Для встановлення вузлових сил розглянемо площу трапеції з висотою, що рівна довжині лінійного елемента. Припустивши, що приведена сила прикладена в точці навпроти центра отримаємо:

$$\begin{aligned} P_{e1} &= \frac{1}{3} \pi Q \sqrt{(r_2 + r_1)^2 + (z_2 + z_1)^2} (r_2 + 2r_1) \\ P_{e2} &= \frac{1}{3} \pi Q \sqrt{(r_2 + r_1)^2 + (z_2 + z_1)^2} (2r_2 + r_1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для визначення похибки зведення розподіленого навантаження до вузлових сил скористаємося залежністю:

$$\Delta \geq \frac{h^2 (z_2 - z_1)}{12} \max_{x \in z_1 \dots z_2} (K''(z)) \quad (3.15)$$

Таким чином, можливо оцінити абсолютну похибку приведення розподілених зусиль до вузлових сил шляхом чисельного інтегрування.

Відносна похибка визначатиметься як:

$$\varepsilon = \frac{P - \sum P_e}{P} \quad (3.16)$$

Для визначення цих проєкцій отримано залежності:

$$\begin{aligned} P_{i,x} &= \left| \frac{\Delta Y}{Le} \right| \text{sign}(X_c - X_p) \text{direction} \\ P_{i,y} &= \left| \frac{\Delta X}{Le} \right| \text{sign}(Y_c - Y_p) \text{direction} \end{aligned} \quad (3.17)$$

де  $L_e$  – довжина лінійного елемента;

$\Delta R, \Delta Z$  – довжини проекцій лінійного елемента на координатні осі;

$x_c, y_c$  – координати середини  $C$  лінійного елемента;

$x_p, y_p$  – координати точки полюса  $PP$ ;

$direction$  – напрям. Остання набуває значення  $+1$  коли напрям дії розподіленого навантаження співпадає з напрямом від точки полюса до елемента, і  $-1$  – якщо навпаки.

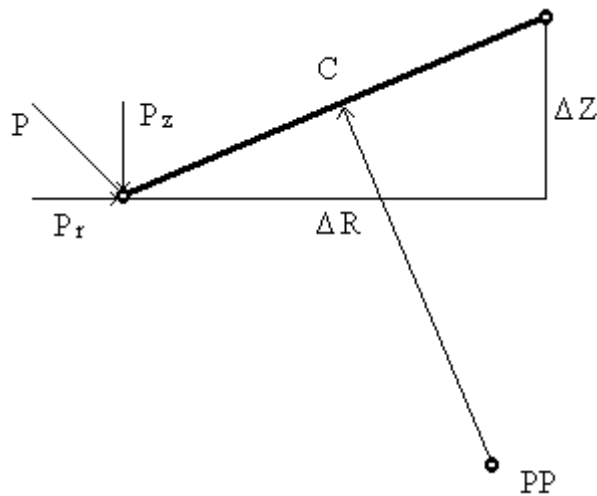


Рисунок 3.5 – Визначення проекцій вузлових сил

Зазначимо, що для задач в яких по граничній поверхні є лише розподілене навантаження без закріплення, алгоритм реалізується лише додаванням до вектора вузлових сил результатів. Для випадку контактного тертя необхідні більш складніші перетворення з застосуванням методу економізації.

### 3.3 Опис впливу контактної тертя при ковзанні і спокої

Для побудови розв'язуючих рівнянь в МСЕ необхідно задати граничні умови на контактних поверхнях. Для вибору коректної форми запису закону тертя необхідно проаналізувати переваги і недоліки для найкращого опису контактної тертя в МСЕ.

Найбільш поширеним є закон Амонтона – Кулона:

$$\tau_r = \mu\sigma_r \quad (3.18)$$

Використання даного закону можливо проводити лише для випадку, коли переважають напруги на розтяг. Для даного закону екстремальні теореми не мають смислу, тому його застосування в МСЕ і в інших чисельних методах недоцільне.

Для даних умов найкраще підходить закон тертя:

$$\tau_s = \mu\sigma_0 \quad (3.19)$$

Коефіцієнт тертя закону Зібеля повинен відображати той факт, що при відносному проковзуванні порошкової пресовки площа реального контакту набагато менше номінальної. Тому коефіцієнт тертя можна виразити через поточну пористість:

$$\mu = \mu_0(1 - \theta)^a \quad (3.20)$$

де  $\mu_0$  – коефіцієнт тертя для суцільного матеріалу;

$a$  – деякий коефіцієнт, що характеризує конкретний матеріал.

Для визначення межі текучості на гідростатичний тиск скористаємося рівнянням поверхні текучості:

$$\frac{(\sigma_0 + c)^2}{c^2} = 1 \quad (3.21)$$

Значення межі текучості на гідростатичний тиск визначимо як геометричне місце точок перетину поверхонь текучості для різних пористостей і лінії гідростатичного тиску.

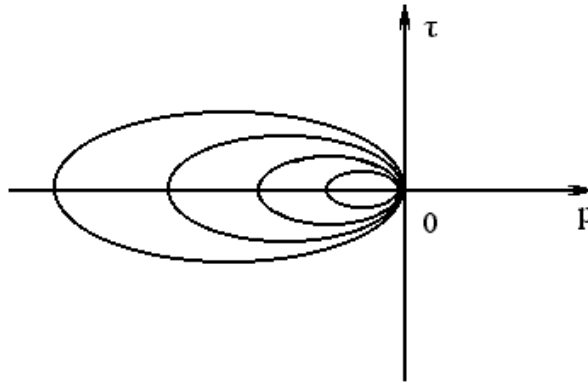


Рисунок 3.6 – До вибору функції пористості для закону Зібеля

Закон Зібеля для пористого матеріалу запишемо у вигляді:

$$\tau_s = 2\mu_0(1-\theta)^\alpha \tau_m \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}} \quad (3.22)$$

Зазначимо, що параметр  $\alpha$  визначається експериментально, а  $\tau_m$  і  $\mu_0$  – стандартні значення межі текучості і коефіцієнт тертя, що також визначаються експериментально.

Дані залежності придатні для використання в МСЕ. Вони дозволяють враховувати вплив нерівномірного розподілу пористості по всьому об'єму пресовки і отримати залежності для врахування впливу контактного тертя.

### 3.4 Опис впливу контактного тертя в рівняннях МСЕ

Для опису впливу тертя на контактних поверхнях застосовуємо підхід на основі нематеріальних елементів. Для опису нерівномірного розподілу пористості на контактних поверхнях застосовуємо рівняння розподілу лінійного нематеріального елемента. Він не представлений в загальній матриці жорсткості, проте його застосування дасть змогу уникнути необхідності

використовувати складні процедури встановлення відповідності між пористістю всередині тіла і на його контактних поверхнях.

Можливо добитися спрощення алгоритму врахування граничних умов на контактних поверхнях, застосовуючи при цьому незначно модифіковані стандартні процедури генерації розв'язуючих рівнянь.

Для лінійного двохвузлового елемента апроксимаційні поліноми матимуть вигляд:

Для переміщень:

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} & 0 & -\frac{r_1 - r}{r_2 - r_1} & 0 \\ 0 & \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} & 0 & -\frac{r_1 - r}{r_2 - r_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{z1} \\ u_{r2} \\ u_{z2} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Для деформацій

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \begin{bmatrix} \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} & -\frac{r_1 - r}{r_2 - r_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r1} \\ \varepsilon_{r2} \end{Bmatrix} \\ \varepsilon_t &= \begin{bmatrix} \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} & -\frac{r_1 - r}{r_2 - r_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{t1} \\ \varepsilon_{t2} \end{Bmatrix} \\ \varepsilon_z &= \begin{bmatrix} \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} & -\frac{r_1 - r}{r_2 - r_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z1} \\ \varepsilon_{z2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Для визначення дотичних напруг на контактній поверхні в залежності від розподілу пористості запишемо наступну рівність:

$$\theta_i = 1 - (1 - \theta_0) e^{(-)(\sum_{k=1}^{i-1} a_k + r \sum_{k=1}^{i-1} b_k)} \quad (3.35)$$

Для визначення значення сил скористаємося інтегруванням по площі контактної поверхні:

$$P = \int_S \tau dS, \quad (3.36)$$

Врахувавши те, що розподіл сил тертя буде нерівномірний по всій контактній поверхні, сили тертя також будуть нерівномірні.

Для отримання точнішого значення приведених вузлових сил на кожному нематеріальному елементі необхідно використати методикку, наведену в п. 2.2. і скористатися методикою заміни криволінійної трапеції прямолінійною. Інтегрування буде проводитись на густій елементній сітці, що значно підвищить точність представлення зусиль контактного тертя вузловими силами. Для лінійних поверхонь всі сили тертя діють по одній прямій, що значно зменшує похибку від неточного розподілення сил по вузлах нематеріального елемента.

Для визначення похибки наближеного інтегрування скористаємося залежністю, де зусилля по всій поверхні і по поверхні окремого елемента тепер будуть викликані тертям. Похибка чисельного інтегрування при знаходженні точного значення не повинна перевищувати похибки визначення зусилля.

Запропонований підхід дозволяє використати процедуру формування розв'язуючих рівнянь. Це дозволяє використати процедуру генерації компонентів загальної матриці жорсткості зі змінами.

### 3.5 Опис граничних умов при ковзанні по контактних поверхнях

Для опису зусиль на контактних поверхнях в рівняннях МСЕ окрім визначення величин вузлових зусиль необхідно описати вплив цих сил і визначити залежності: ковзання чи спокою та організувати розрахунковий процес за допомогою МСЕ.

Для опису дії сил тертя необхідно скористатися методикою інтегрування по площі контактної поверхні. При цьому переміщення відбуваються на контактній поверхні, а дії зусиль відбуваються по дотичній до лінії (рис.3.7)

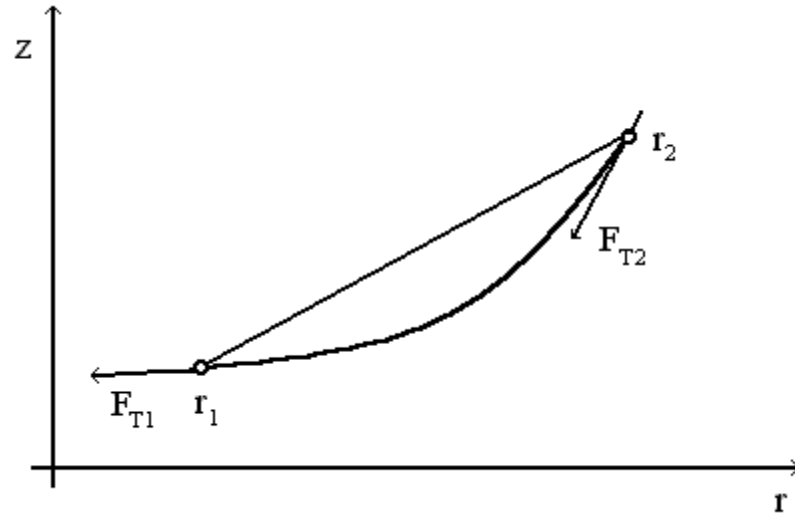


Рисунок 3.7 – Характер граничних умов на контактних поверхнях

Для визначення граничних умов на контактних поверхнях у загальному випадку визначається як:

$$\begin{Bmatrix} F'_{i,r} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(r_i) & \lambda_2(r_i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{i,r} \\ F_{i,z} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

для першого випадку

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F'_{i,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu_1(r_i) & \mu_2(r_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{i,r} \\ F_{i,z} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

для другого.

У багатьох задачах ущільнення порошків вони є очевидними і можуть бути визначені на етапі постановки задачі МСЕ. Для тіл складної форми застосовано наступний підхід. На першій ітерації кожного кроку всі вузли, що описують сили тертя, закріплюють, щоб унеможливити переміщення на лінії дії сили тертя. Напрямок дії реакцій опор співпадатиме з дією сил тертя. Зазначені процедури дозволяють враховувати вплив нерівномірного розподілу пористості через деформування на контактне тертя і зводити зусилля тертя до вузлових сил.

## 4 РОЗВ'ЯЗОК КОНКРЕТНИХ ЗАДАЧ

### 4.1 Застосування методів формування систем рівнянь

Для практичної реалізації отриманого варіанту МСЕ необхідно використовувати прямі економічні методи. Тому для розв'язку і матричних перетворень використаємо методи для симетричних матриць. Для розв'язку систем лінійних рівнянь, а також для обернення матриць використаємо метод  $LDL^T$  розкладання при розв'язку системи рівнянь з симетричною не додатньо визначеною матрицею.

Перешкодою для застосування економічних методів є наявність в перетвореннях оберненої матриці  $V^{-1}$ , яка буде симетричною. Для суцільного порошкового тіла економічні методи використовуємо на етапах формування загальної матриці жорсткості.

Зазначимо, що матриця  $L$  з  $LDL^T$  розкладу зберігає стрічкову структуру:

$$L = \begin{bmatrix} x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

В той же час обернена матриця буде симетричною, але повністю заповненою. Для її зберігання слід використати двомірний масив стандартної структури. Для матриць  $W$  і  $V$  можливо скористатись стандартною адресацією, а не економічною для стрічкових, бо можливо організувати матрицю вказівників, що використовує значно менше пам'яті. Це дозволить зберегти стандартну адресацію елементів масиву не вдаючись до стрічкових методів. Для зменшення ширини стрічки матриці слід скористатися нумерацією вузлів.



Існує можливість отримати загальну матрицю жорсткості стрічкової структури. Для цього суцільну порошкову пресовку необхідно розбити на кілька окремих тіл, що згідно з умовою задачі з'єднані між собою (рис.4.1).

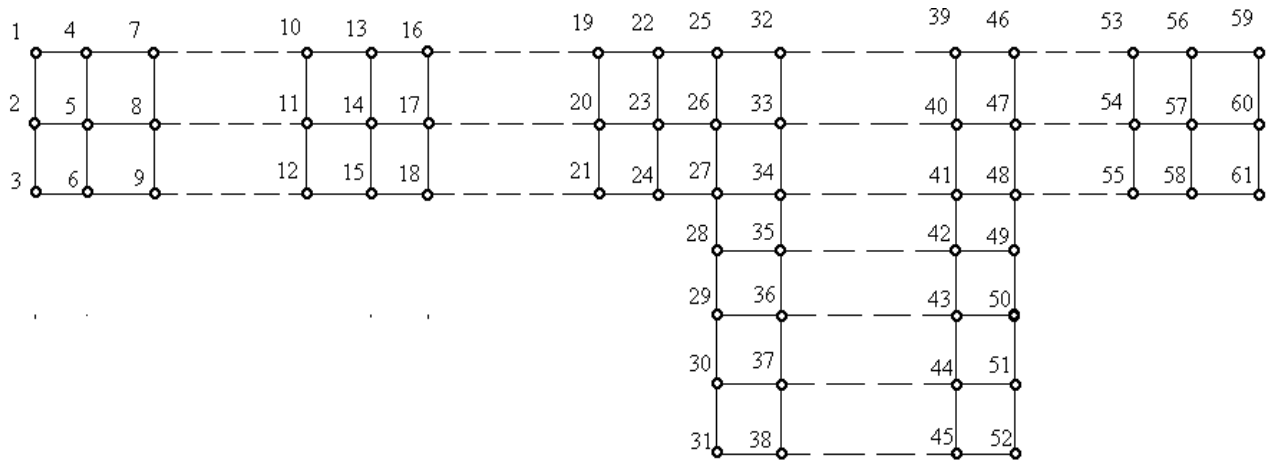


Рисунок 4.1 – Перетворення зв'язаності для зменшення ширини стрічки загальної матриці жорсткості

В основі цих операцій лежать перетворення зв'язаності, на основі топологічних операцій з'єднання і роз'єднання тіл. Ці операції базуються на матричних перетвореннях, що обумовлює застосування в МСЕ. Перетворення жорсткості дозволяє за допомогою МСЕ розв'язувати крайові задачі з врахуванням граничних умов.

Для розв'язку МСЕ кожна засипка задається як окреме тіло, що поділене на скінченні елементи (рис.5.2). Для побудови загальної матриці жорсткості необхідно використати граничні умови на поверхнях з'єднання, далі визначаємо алгоритм формування дискретних задач для матеріалів з різними шарами. (рис.5.2)

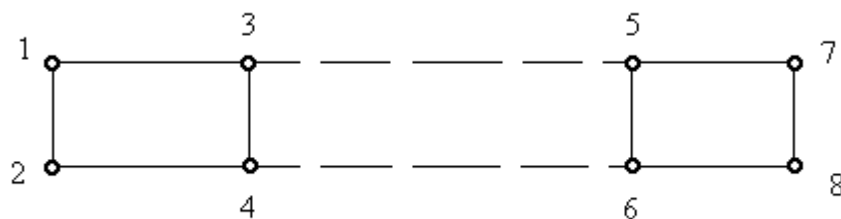


Рисунок 4.2 – Перетворення зв'язаності



Для випадку багат шарового поділу (рис.4.3) матриця перетворення матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & I \quad *** \\ & & & & & * & & & \\ & & & & & * & & & \\ & & & & & * & & & \end{bmatrix}$$

Рисунок 4.3 – Матриця перетворення для багат шарового поділу

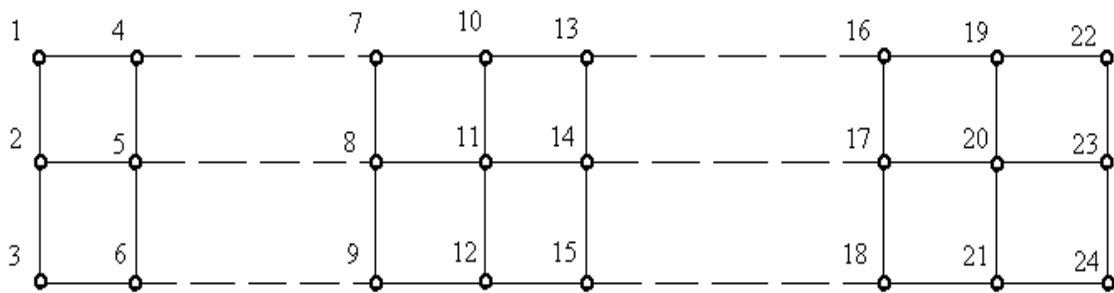


Рисунок 4.4 – Перетворення зв'язаності багатозв'язного тіла

Значно спрощується алгоритм формування даної матриці перетворення. Для початкових номерів вузлів стрічки одиничної матриці залишаються без змін. До стрічки з меншими значеннями вузлів додаються стрічки з номерами спряжених до них вузлів, які після цього обнуляються. Потім замість нульових стрічок підставляються стрічки з номерами вузлів, що не є спряженими з іншими вузлами. При наявності ще одної аналогічної границі, так само проводять визначення стрічок для наступних границь.

Для визначення системи загальних дискретних рівнянь необхідно всі вузлові переміщення звести до кількості вузлів з'єднаного тіла. При врахуванні того факту, що в спряжених вузлах переміщення повинні бути однаковими, зворотне перетворення матиме вигляд:

$$\{u\} = [R]^T \{u'\} \quad (4.6)$$

Перетворення зв'язаності є ортогональним, а тому всі методи розв'язку можуть бути використані без змін.

При цьому неможливо застосовувати перетворення типу:

$$\{\varepsilon\} = [\mathcal{A}] \{u'\} \quad (4.7)$$

оскільки дані підходи розроблені для МСЕ у формі методу переміщень, то має місце в даному варіанті МСЕ і не може бути застосоване у змішаному МСЕ.

При розв'язку задач на першому етапі кожного кроку для градієнтних матеріалів додаються перетворення, знаходяться швидкості переміщення для зв'язаної порошкової пресовки. Далі визначаються такі ж для роз'єднаного тіла.

Всі дії проводимо згідно з наведеними вище алгоритмами з додатковим зведенням сил і переміщень до кількості. Для визначення розподілу матеріальних параметрів, напруг і деформацій всі вузлові сили зводяться до кількості, що відповідає кількості вузлів роз'єднаної на шари пресовки.

Матриця  $V$  буде блочної структури (рис.4.5), де незаштриховані блоки є нульовими. Обернена матриця блочної структури з ненульовими квадратними блоками на головній діагоналі зберігатиме таку ж структуру. Матриця  $W$  при цьому матиме аналогічну структуру, але по меншій стороні ширина. Матриця  $WTV-1$  зберігатиме структуру матриці  $WT$ , а матриці  $WTV-1W$  структуру матриці  $V$ , але з шириною ненульових блоків, що відповідають ширині блоків.

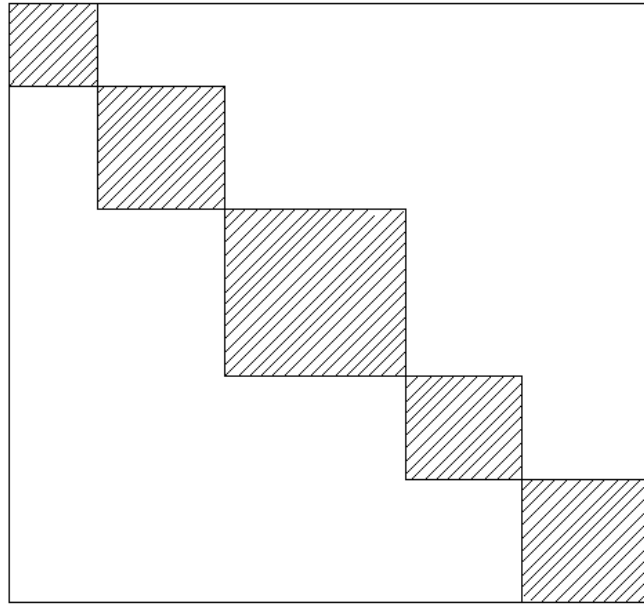


Рисунок 4.5 – Наповненість загальної матриці жорсткості для незв'язаних систем елементів

Дана матриця жорсткості для задачі вимагає перетворення жорсткості для з'єднання частинок. Геометрична інтерпретація етапів  $RKR^T$  – це перетворення загальної матриці жорсткості (рис.4.6). При цьому матриця зберігає максимальну величину ширини стрічки, що рівна ширині найбільшого ненульового блоку.

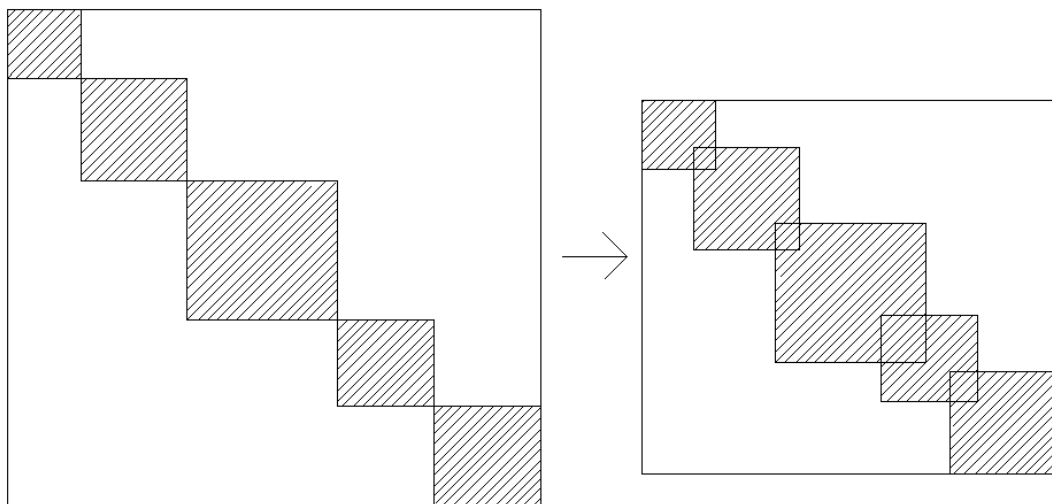


Рисунок 4.6 – Геометрична інтерпретація перетворення зв'язаності для систем елементів

Даному розподіленню можна піддавати і деталі з профілем складної структури. Границя між засипками з різними властивостями повинна проходити лише по лінії розриву. В цьому випадку можливо застосувати алгоритми, що наведені в п. 3.5 і економічні методи розв'язку систем лінійних рівнянь зі стрічковими матрицями без змін.

Дана методика є деяким аналогом методу суперелементів, що наведений в [33]. Але при цьому перетворення загальної матриці жорсткості здійснюється для підсистеми елементів з використанням граничних умов між підсистемами елементів.

#### 4.2 Розв'язок конкретних задач. Практичне дослідження збіжності

Для підтвердження адекватності проведено порівняння як з теоретичними розв'язками задач, так і з експериментальними даними по пресуванню виробів з металічних порошків. Дослідження проводились для схем пресування як з однорідним, так і неоднорідним напруженим станом.

Було проведено визначення похибки, до якої приводить заміна змінної у від'ємному степені. Для цього було використано теоретичний розв'язок задач. Схеми навантаження наведені на рис.4.7. та 4.8.

Згідно з результатами скінченноелементного аналізу для схеми з горизонтальним навантаженням спостерігається розбіжність між теоретичними і розрахунковими значеннями напруг  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\theta$ .

Похибка визначення  $\sigma_t$ ,  $\tau_{rz}$  складає всього лише 0,5-0,7% від значення похибки  $\sigma_r$ . Тому точність значення  $\sigma_r$  вибираємо як показник точності розв'язку. Значення напруг знаходяться опосередковано, а тому точність їх визначення буде значно нижчою. Значення розподілу пористості вибираємо для визначення точності через те, що остання є одним з основних технологічних параметрів.

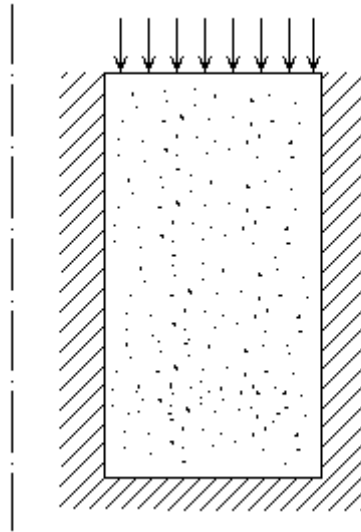


Рисунок 4.7 - Задача з однорідними напруженим станом з вертикальним навантаженням

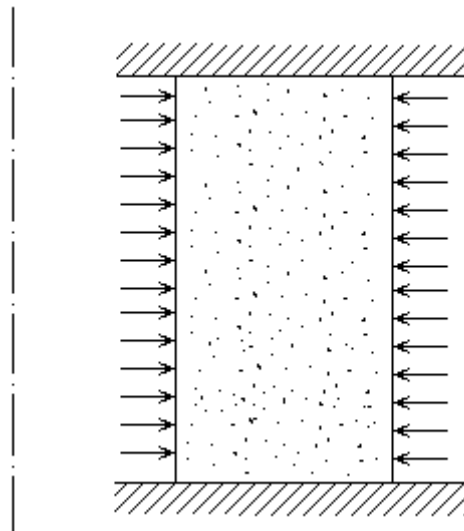


Рисунок 4.8 - Задача з однорідними напруженим станом з радіальне навантаженням

Аналізуючи результати розрахунку радіальних задач з різними розмірами і співвідношенням висоти до товщини стінки, отримано графік залежності відносної похибки по величинах і поточної пористості. Графіки даних залежностей наведені на рисунках 4.9 і 4.10.

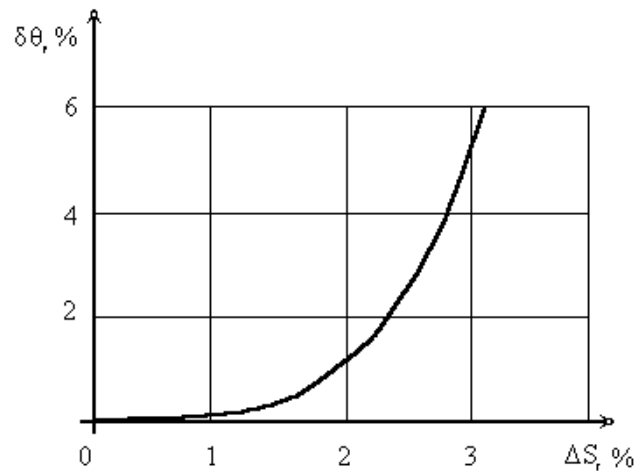


Рисунок 4.9 – Величина відносної похибки значення пористості в залежності від середнього значення величини площі елемента від загальної площі профілю

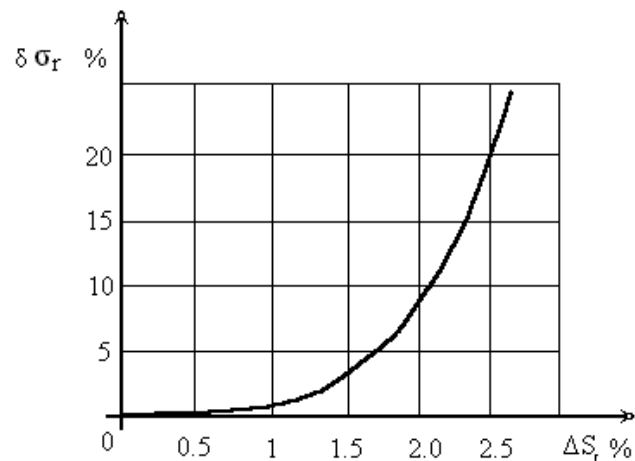


Рисунок 4.10 – Величина відносної похибки значення пористості в залежності від середнього значення величини площі елемента від загальної площі профілю

Дане спрощення при середньому значенні елемента 1% від загальної площі профілю обертання, не перевищує 1%.

Для подальшої практичної перевірки збіжності даного МСЕ необхідно порівняти значення розрахунків з результатами теоретично розв'язаних задач.

Одна з таких задач описує стиск з різними величинами деформації (рис.4.11).



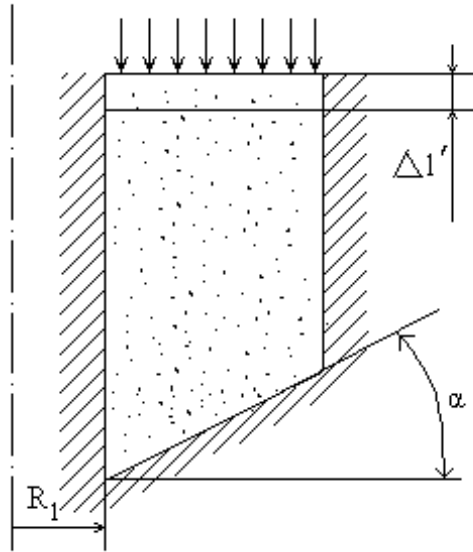


Рисунок 4.11 – Ущільнення у матриці з осьовим навантаженням

При цьому значення швидкості переміщення верхнього пуансону задається з умови виконання залежностей Коші. Величини швидкостей деформацій визначаються:

$$\begin{aligned}
 l_{0r}(r) &= l_{0r1} - tg\alpha(r - r_1) \\
 \varepsilon_z &= \frac{\Delta l}{l_{0r}(r)} \quad \varepsilon_r = \varepsilon_t = 0 \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Величина поточної пористості визначається згідно з (4.8), а напружений стан згідно з (4.5).

Іншою неоднорідною задачею по ущільненню порошків є задачі з радіальним навантаженням (рис.4.12).

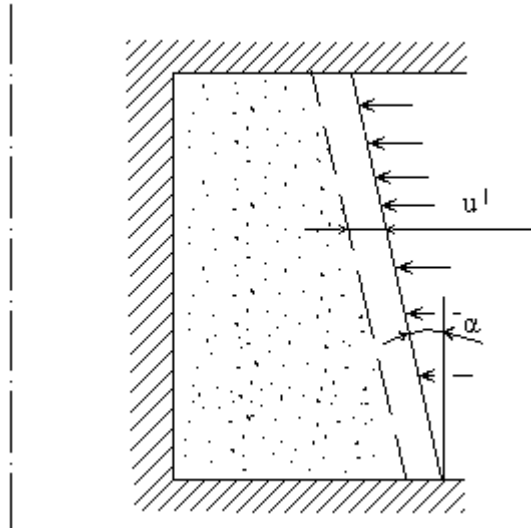


Рисунок 4.12 Ущільнення у матриці з радіальним навантаженням

Швидкості переміщень і деформацій:

$$\begin{aligned}
 u^l &= A(z)(r - r_1) \\
 A(z) &= (R_{z0} + Z * \operatorname{tg} \alpha) \\
 \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = A(z) \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} = A(z) \left(1 - \frac{r_1}{r}\right) \quad \varepsilon_z = 0 \\
 \varepsilon &= \varepsilon_r + \varepsilon_t
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

а поточна пористість і напружений стан як і у попередній задачі.

Точність розв'язку оцінювалась за теоретичними значеннями пористості і напруги  $\sigma_r$ . В задачах з радіальним навантаженням враховувалась похибка спрощення. Провівши розрахунки для даних типів задач, отримано графіки збіжності (рис.4.13 і 4.14) даного методу а також проведено розрахунки за допомогою МСЕ у формі методу переміщень.

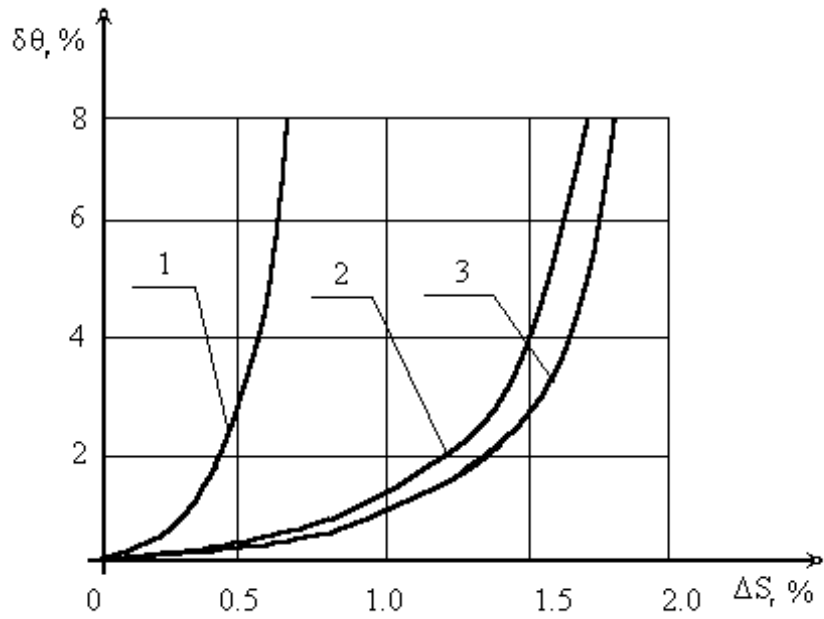


Рисунок 4.13 – Практичне визначення збіжності по величині поточної пористості

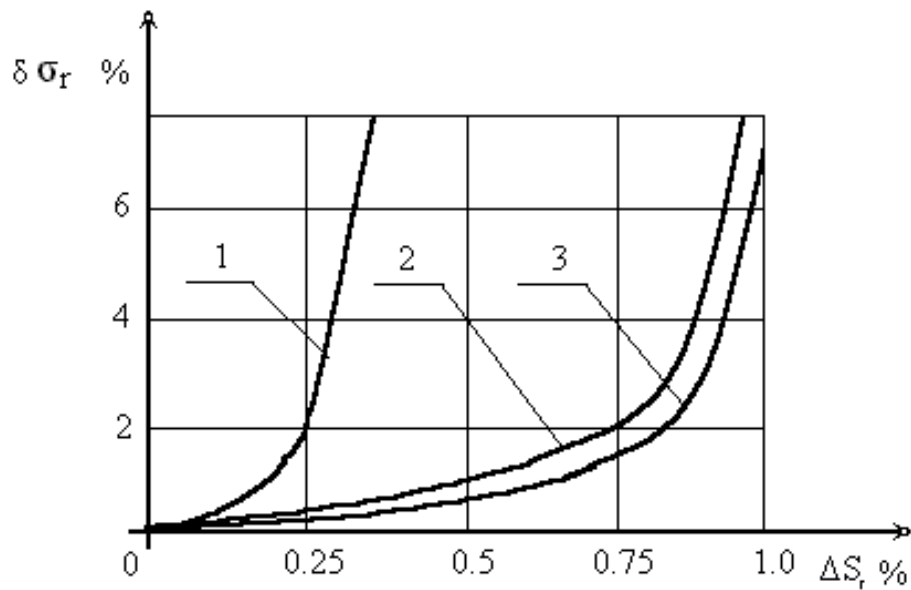


Рисунок 4.14 – Практичне визначення збіжності по величині радіальної напруги

Для подальшої перевірки адекватності отриманих рівнянь було проведено порівняння з результатами скінченноелементних розв'язків інших методик. Був розрахований процес отримання втулки з буртиком (рис.4.15). При цьому залежність  $\sigma_{\text{екв}} = \text{const}$  замінювалось наближеною двоеланковою ламаною. Розподіл втулки на скінченні елементи і розрахунковий розподіл пористості по об'єму наведений на рис. 4.16.

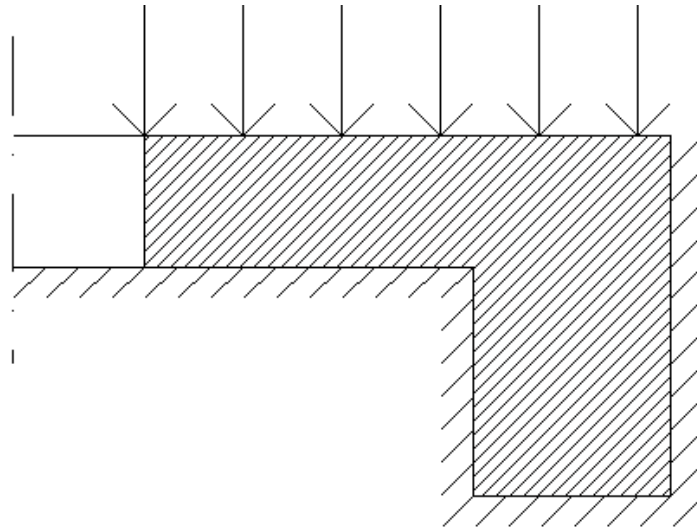


Рисунок 4.15 – Одностороння схема пресування втулки з буртиком

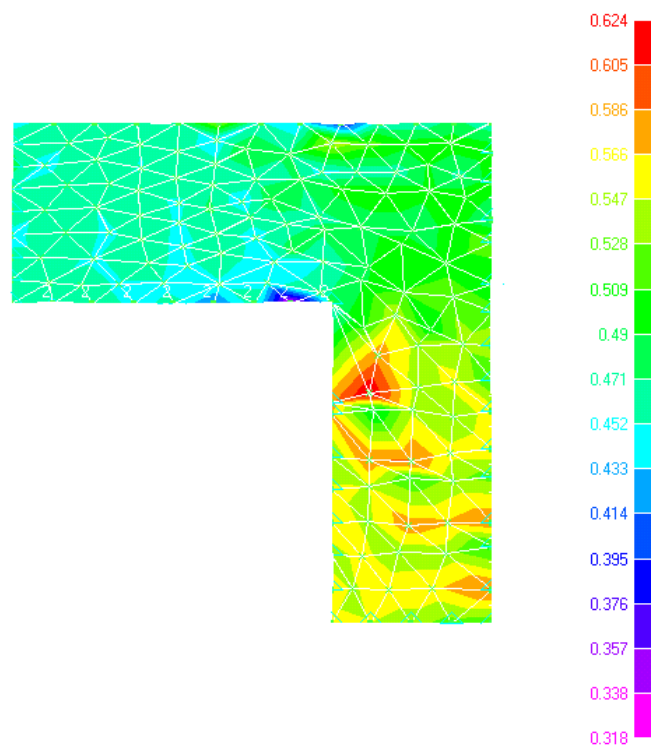


Рисунок 4.16 – Розподіл пористості в спресованій втулці з буртиком

Деяка кількісна відмінність обумовлена застосуванням усереднених даних межі текучості і коефіцієнта тертя на контактних поверхнях. Якщо прийняти похибку, що викликана усередненим значенням за систематичну, то характер розподілу повністю відповідатиме нашій методиці. При площі елемента, рівній 2 % від загальною площі профілю обертаня і менше, характер розподілу залишається практично незмінним.

Також було проведено розрахунок процесу гідростатичного формування одношарових втулок на оправці з порівнянням результатів розрахунку з експериментальними даними. Для цього всі зусилля були зведені до таких, які вказані на рисунку 4.17. Коефіцієнт тертя і межі текучості для даних металічних порошоків вибирались рівними таким як для сталі.

Розрахунок проводився для порошоків ПЖР-3 навантажених гідростатичним тиском 150, 200 МПа. Порівняння з експериментальними даними проводилось лише для переміщень, які досягались за певний проміжок часу.

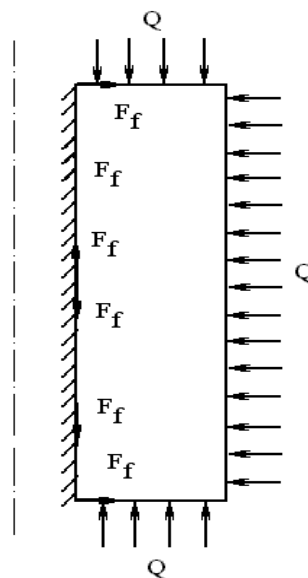


Рисунок 4.17 – Схема навантаження при пресуванні в гідростаті на оправці

Характер розподілу пористості і спотворення циліндричного профілю, що викликаний силами тертя і гідростатичним тиском наведений на рис. 4.18. Тут штриховою лінією вказаний профіль заготовки, що відповідає експериментальним даним.

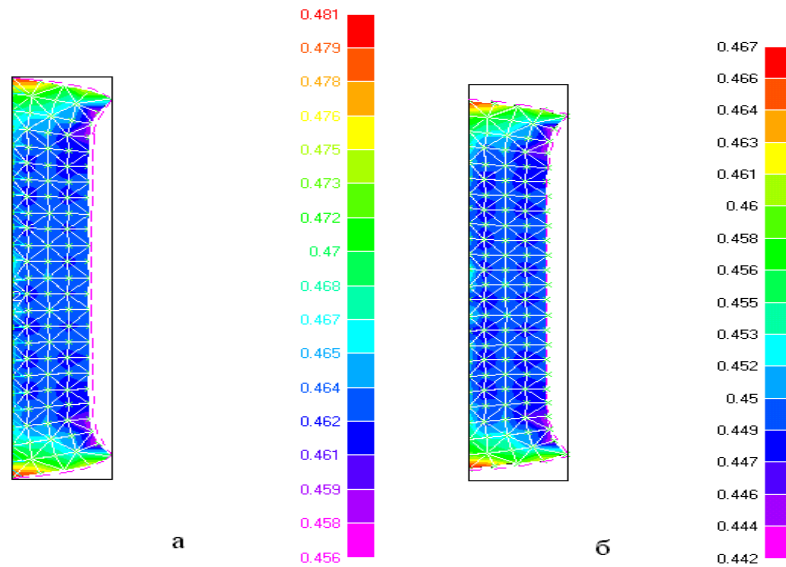


Рисунок 4.18 – Розподіл пористості при пресуванні залізного порошку ПЖР-3 при гідростатичному тиску 1500 (а) і 2000 (б) атмосфер

При цьому похибка обчислення по переміщенню складала 8-15%. Таке зниження точності пояснюється наближеним вибором величини межі пружності і коефіцієнту тертя для матеріалу-основи металічного порошку. При зменшенні площі елемента до 2% і менше від загальної площі профілю обертання картина розподілу пористості практично перестає змінюватись.

Подальше проведення розрахунків для деталі типу втулки з буртиком з урахуванням сил тертя показало нерівномірний розподіл пористості з значним розрихленням буртиків. Дана картина розподілу обумовлена одностороннім пресуванням зі сторони основи (рис.4.19), що обумовлює її ущільнення. При цьому застосування двохсторонньої схеми пресування обумовлює меншу нерівномірність розподілу пористості. При цьому одночасно ущільнюються і основа і буртики, а нерівномірність розподілу пористості значно зменшена.

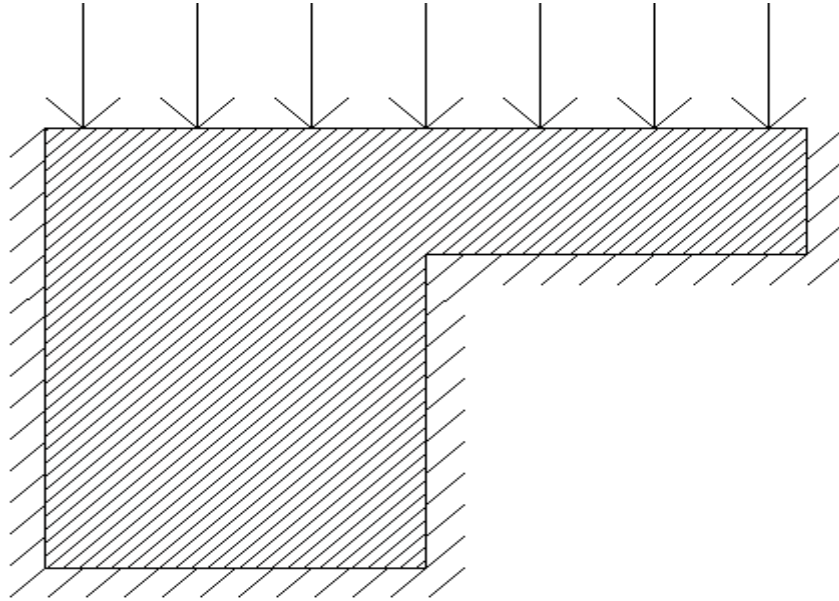


Рисунок 4.19 – Одностороння схема пресування втулки з буртиком

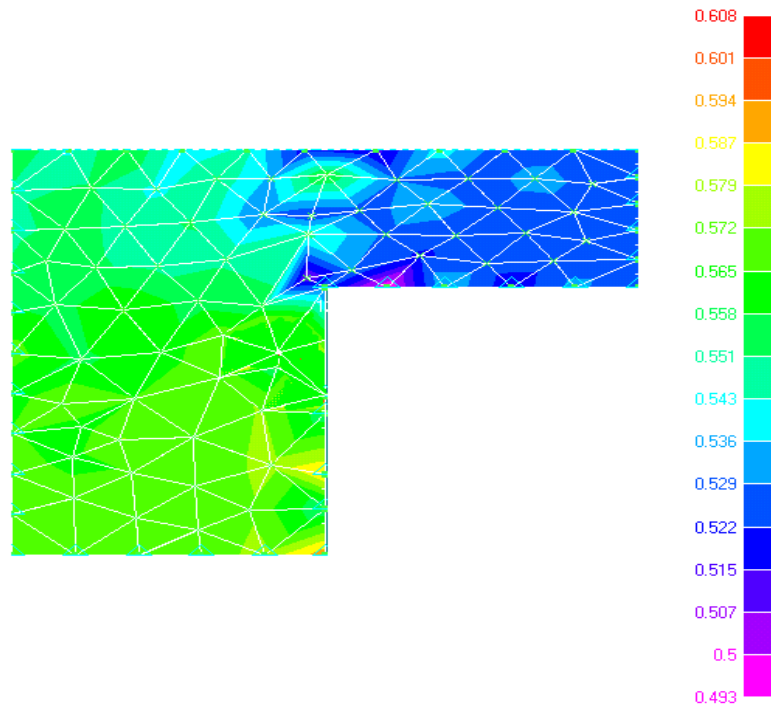


Рисунок 4.20 – Розподіл пористості при односторонньому пресуванні

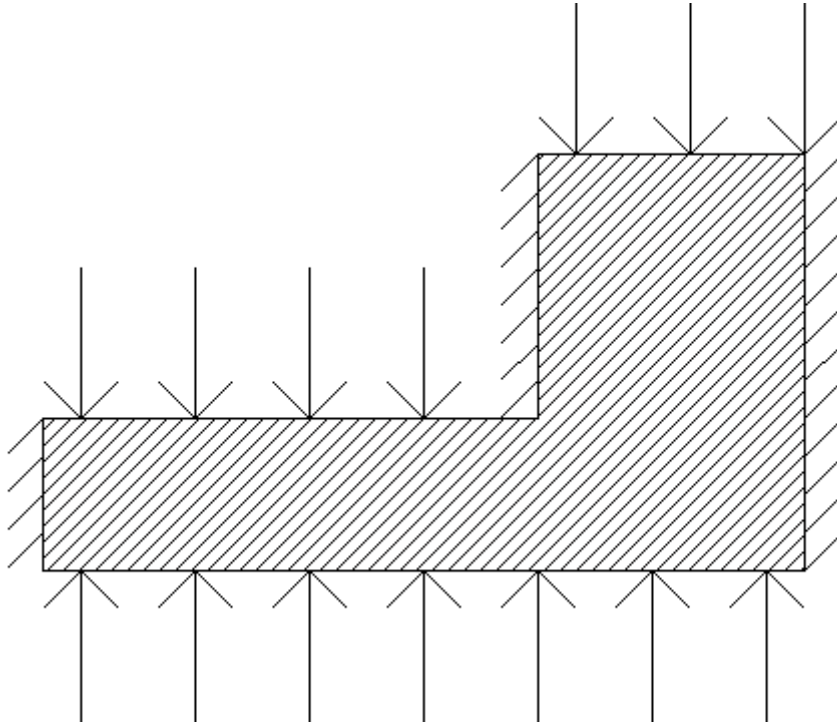


Рисунок 4.21 – Схема двохстороннього пресування

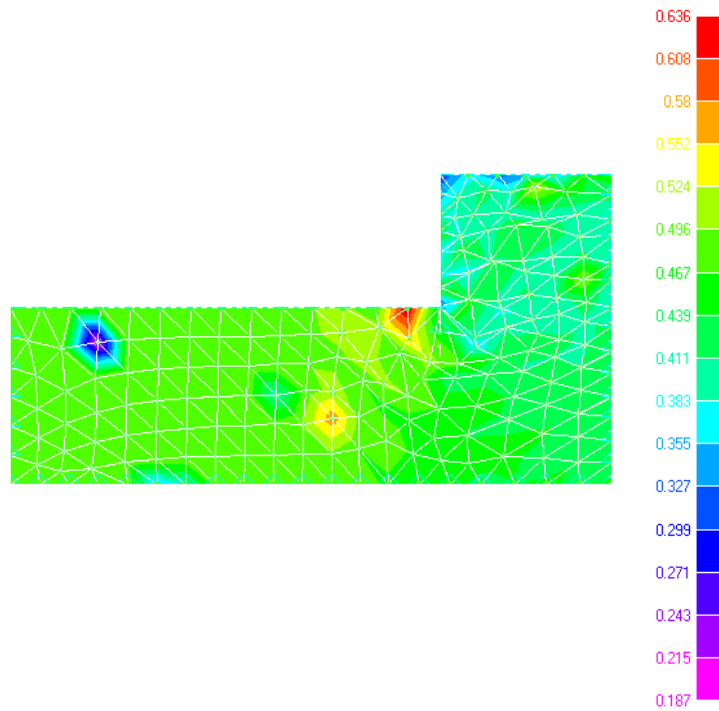


Рисунок 4.22 – Розподіл пористості при двохсторонньому пресуванні



Скінченноелементний аналіз був проведений для деталі, що зображена на рис.4,20, яка отримана холодним пресуванням з подальшим спіканням.

Згідно з результатами розрахунків буртики матимуть велику пористість, а отже – малу міцність. Дані розрахунків підтверджуються на практиці, де міцність буртиків кришки була низькою.

Було також розраховано і двохсторонню схему пресування для кришки водолічильника (рис.4.23, 4.24), в якій рух пуансона відбувається і у напрямку основи, і у напрямку буртиків. При цьому ущільнюються як основа, так і буртики. Результати розрахунків наведені на рис.4.25. При цьому пористість є рівною, що і необхідно було досягти.

На рис.4.26 - 4.27 наведено розподіл напруг по всьому профілю пресовки. Даний розподіл напруг слід використовувати при проектуванні інструменту по обробці тиском.

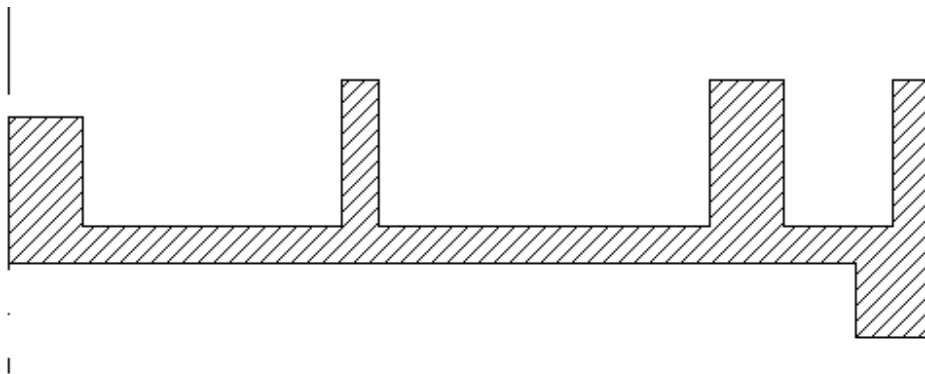


Рисунок 4.22 – Деталь.

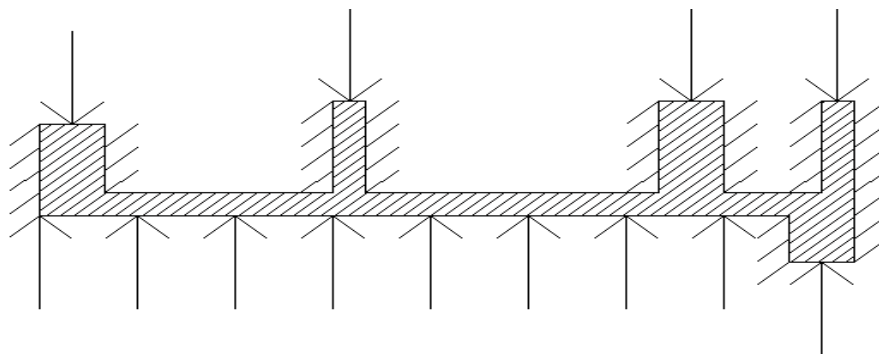


Рисунок 4.24 – Схема навантаження процесу пресування деталі

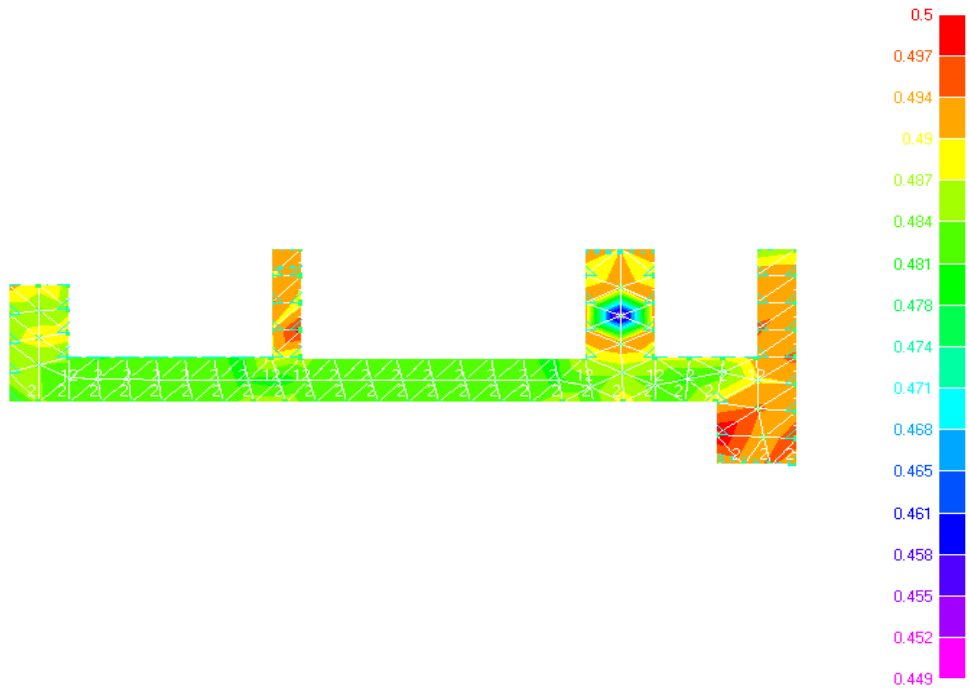


Рисунок 4.25 – Розподіл пористості при двохсторонньому пресуванні вибраної деталі

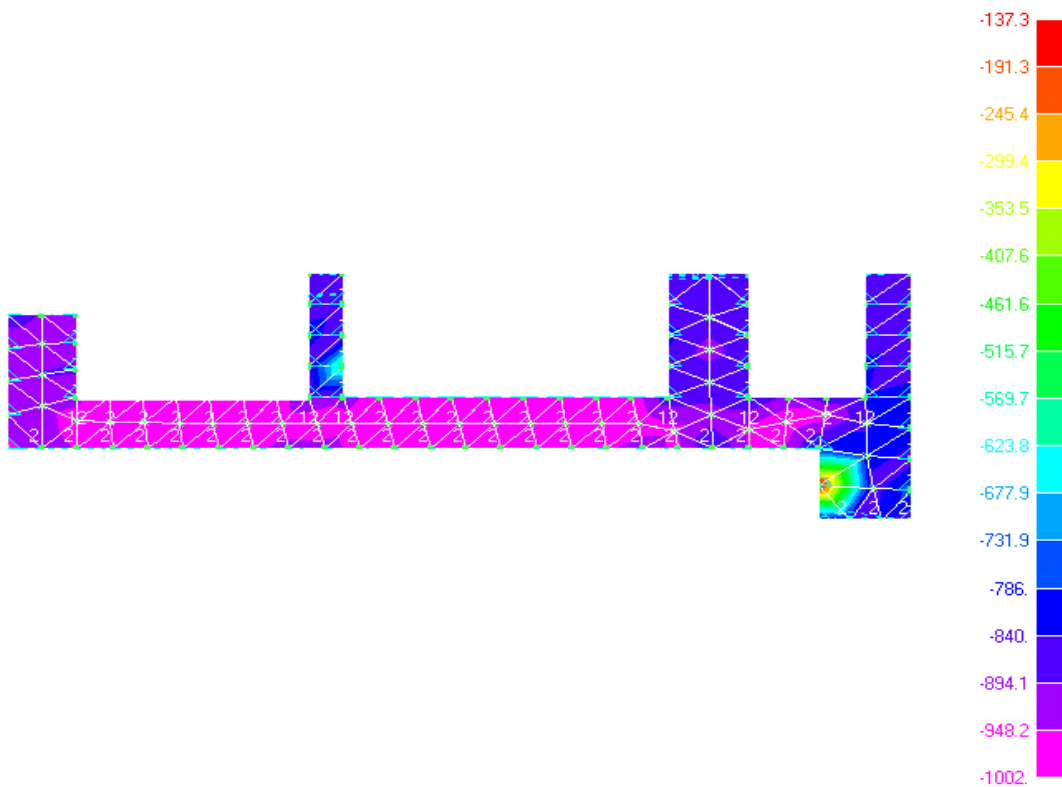


Рисунок 4.26 – Розподіл осьової напруги при двохсторонньому пресуванні вибраної деталі

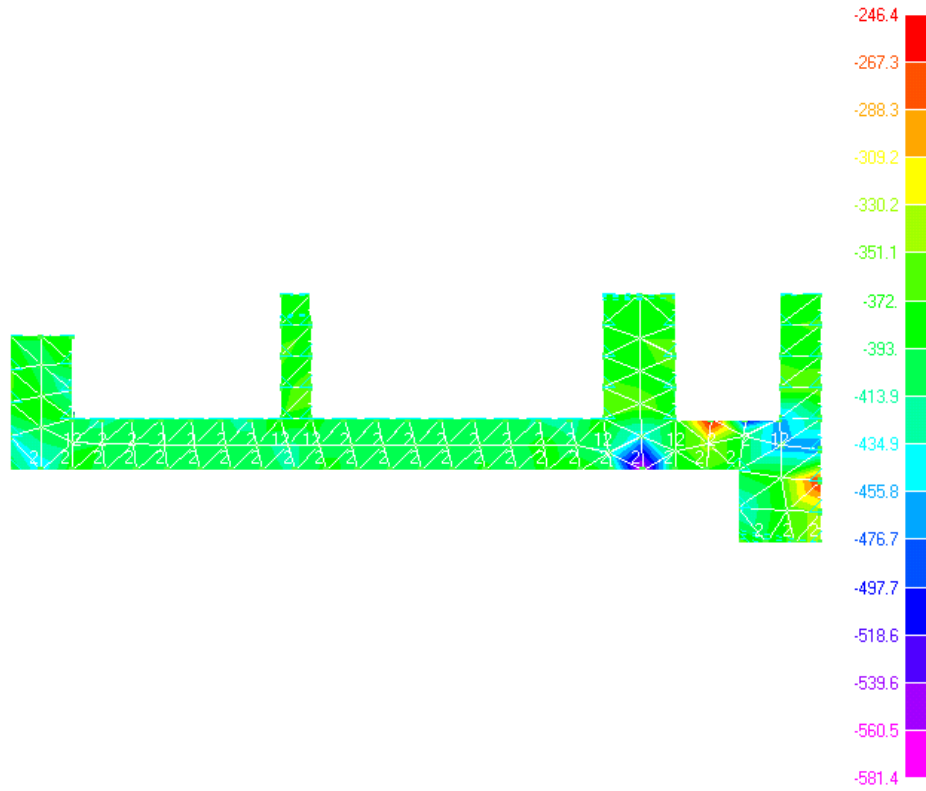


Рисунок 4.27 – Розподіл радіальної напруги при двохсторонньому пресуванні  
вибраної деталі

Наведені результати добре узгоджуються з загальновідомим положеннями.

## ВИСНОВКИ

1. Показано, що для розробки технологічних процесів ущільнення порошків та прогнозування технологічних властивостей пористих тіл доцільно використовувати змішані МСЕ.

2. Підтверджено, що гладкість спряження функцій на границях елементів для порошкових матеріалів забезпечується модифікованим функціоналом.

3. Відому жорсткопластичну модель ущільнення порошкових матеріалів доповнено рівняннями, що враховують зміцнення.

4. Розроблено методику визначення приведення зусиль тертя до вузлових сил з врахуванням розподілу пористості на контактних поверхнях.

5. Розроблено програмний пакет для реалізації модифікованого МСЕ.

6. Проведено дослідження збіжності модифікованого МСЕ шляхом співставлення результатів розрахунків з відомими теоретичними та експериментальними даними. Здійснено аналіз технологій та прогнозування розподілу технологічних властивостей ряду конструкційних деталей.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Мартынова И.Ф., Штерн М.Б. Уравнение пластичности пористого тела, учитывающее истинные деформации материала – основы // Порошковая металлургия .- 2015.- №3.- С.23-29.
2. Geindreau C., Bauvard D., Doremus P. An unified viscoplastic constitutive equation for modeling hot isostatic pressing. // Proc/ of Internatonal workshop on modeling of metal powder forming processes. Grenoble, 21-23 july, France, 2017. - P.95-104.
3. Pian T.H.H., Tong P. Relation between incompatible displacement model and hybrid stress models//Internation Journal of Numerical Methods in Engineering .- 2016.-V.- 22.- N 1.- p. 173-181.
4. Mirza F.A., Olson M.D. The mixed finite element method in plane inelasticity // Internation Journal of Numerical Methods in Engineering .- 2014.-V.-15.- N 5.- P. 273-289.
5. Spilker R.L., Pian T.H.H. Hybrid –stress models for elastic-plastic analysis by initial stress approach // Internation Journal of Numerical Methods in Engineering. - 2019.-V.-14.- N3.- P.359-378.
6. Дубинка О.М., Рудь В.Д. Методика представлення впливу контактного тертя у скінченноелементному аналізі задач ущільнення порошків у матриці // Трибофатика Матеріали IV Міжнародного симпозіуму. – Тернопіль, Видавництво ТДТУ ім. І. Пулюя. 2012. - Т.2. – С. 719-723.
7. Бодун В.Н. Технологія отримання дослідних зразків з порошкових матеріалів для дослідження механічних властивостей // Збірн. наук. праць: Наукові нотатки, Вип. 13. – Луцьк: ЛДТУ, 2013. – С. 9-15.
8. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності: Навч. посіб., том 1. – Львів: Світ, 2009. – 532 с.
9. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності: Навч. посіб., том 2. – Львів: Світ, 2009. – 418 с.

10. Рудь В.Д., Повстяной О.Ю., Заболотний О.В., Богінський Л.С. «Технології, структура, властивості пористих проникних матеріалів»: монографія. Луцьк, 2016. – 200 с.
11. Матвійкова О.М., Штерн М.Б., Михайлов О.В. «Численное моделирование процесов пресования порошковых изделий сложной формы в жестких матрицах: влияние схемы пресования на распределение плотности». Порошковая металлургия. 2012. № 11. – С.29-36.
12. Заболотний О.В. «Підвищення ефективності процесів пресування і використання пористих порошкових матеріалів»: дис.канд.техн.наук. 05.16.06. Київ, 2003. 170с.
13. Залета Ольга, Повстяной Олександр, Залета Андрій. Моделювання роботи технологічного обладнання з використанням методу мереж Петрі // *Materials and Technologies in Engineering (MTE-2023)*, 16-18 May, Lutsk, Ukraine, 2023. P.124-126.
- 14.5. Четвержук Т.І., Повстяной О.Ю., Редько Р.Г., Полінкевич Р.М., Залета О.М. Проектування малого вертикально-фрезерного верстата з ЧПУ на модульній основі за допомогою CAD/CAM систем // *Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем (КЗЯТПС – 2023): матеріали тез доповідей XIII Міжнародної науково-практичної конференції (м. Чернігів, 25–26 травня 2023 р.)*. С.53-54.
15. Zaleta O. M., Povstyanou O. Yu., Ribeiro L. F., Redko R. G., Bozhko T. Ye., Chetverzhuk T. I. (2023). Automation of optimization synthesis for modular technological equipment. *Journal of Engineering Sciences*, Vol. 10(1), pp. A6-A14, doi: 10.21272/jes.2023.10(1).a2
16. Halchuk T. N., Povstyanou O. Yu., Bembenek M., Redko R. G., Chetverzhuk T. I., Polinkevych R. M. (2023). Impact of technological system's characteristics on the machining accuracy of bearing rings. *Journal of Engineering Sciences*, Vol. 10(1), pp. A22-A30, doi:10.21272/jes.2023.10(1).a4.