

Міністерство освіти і наук України
Луцький національний технічний університет
Факультет архітектури, будівництва та дизайну
Кафедра прикладної математики та механіки

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
ЗА СТУПЕНЕМ ВИЩОЇ ОСВІТИ «МАГІСТР»

ЧИСЕЛЬНИЙ БІФУРКАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ
НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОЛОКАЦІЇ

NUMERICAL BIFURCATION ANALYSIS OF NON-
LINEAR SYSTEMS BY COLLOCATION METHOD

СПЕЦІАЛЬНІСТЬ 113 Прикладна математика

ОСВІТНЯ ПРОГРАМА Прикладна математика

Виконав:
здобувач вищої освіти
групи ПРМм-21
Степанюк Микола
Андрійович

(підпис)

Керівник:
д.т.н., професор
Мікуліч Олена Аркадіївна

(підпис)

Кваліфікаційну роботу
допущено до захисту
«__» _____ 20__ р.
Гарант освітньої програми:
PhD
Самоненко Інга Вікторівна

(підпис)

Луцьк – 2025 рік

ЛУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет будівництва, архітектури та дизайну

Кафедра прикладної математики та механіки

Ступінь вищої освіти: магістр

Галузь знань: 11 Математика та статистика

Спеціальність: 113 Прикладна математика

Освітня програма: Прикладна математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

« ___ » _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ ЗДОБУВАЧУ ВИЩОЇ ОСВІТИ

СТЕПАНІЮКА Миколи Андрійовича

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема кваліфікаційної роботи Чисельний біфуркаційний аналіз нелінійних систем методом колокації

Керівник роботи: д.т.н., проф. Мікуліч О.А.
затверджені наказом закладу вищої освіти від «___» _____ 202__ р.
№ _____

2. Строк подання здобувачем вищої освіти кваліфікаційної роботи
«___» _____ 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи Джерелом розробки є науково-технічна література та публікації в періодичних виданнях з даного питання, опубліковані зарубіжні та вітчизняні роботи в даній області, різні інтернет-ресурси відповідного спрямування.

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, що потрібно розробити):

1. Огляд літератури щодо тематики дипломної магістерської роботи.
2. Методи дискретизації
3. Методи продовження та біфуркація
4. Скінченно-елементна реалізація методу колокації
5. Застосування методу колокації до дослідження різних класів диференціальних рівнянь

5. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:

1. Об'єкт та предмет дослідження. Слайд презентації.
2. Методи дискретизації. Слайди презентації.
3. Методи продовження та біфуркація. Слайди презентації.
4. Скінченно-елементна реалізація методу колокації. Слайди презентації.
5. Застосування методу колокації до дослідження різних класів диференціальних рівнянь. Слайди презентації.
6. Основні висновки. Слайд презентації.

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис	
		Завдання видав	Завдання прийняв
<i>Перший розділ</i>			
<i>Другий розділ</i>			
<i>Третій розділ</i>			
<i>Четвертий розділ</i>			
<i>П'ятий розділ</i>			
<i>Висновки</i>			

7. Дата видачі завдання «__» _____ **202**__ р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	<i>Обґрунтування теми</i>		
2	<i>Огляд літератури із досліджуваної проблеми</i>		
3	<i>Перший розділ</i>		
4	<i>Другий розділ</i>		
5	<i>Третій розділ</i>		
6	<i>Четвертий розділ</i>		
7	<i>П'ятий розділ</i>		
8	Висновки та пропозиції		
9	Формування списку використаних джерел		
10	Формування додатків		
11	Оформлення ілюстративного матеріалу		
12	Нормоконтроль		
13	Інструментальна перевірка на академічний плагіат		Показник запозичень тексту _____ %
14	Попередній захист кваліфікаційної роботи магістра		
15	Представлення кваліфікаційної роботи магістра до захисту		

Здобувач вищої освіти

_____ (підпис) (_____ (прізвище, ініціали))

Керівник кваліфікаційної роботи

_____ (підпис) (_____ (прізвище, ініціали))

АНОТАЦІЯ

СТЕПАНЮК Микола Андрійович. *Чисельний біфуркаційний аналіз нелінійних систем методом колокації.* Рукопис.

Кваліфікаційна робота магістра ОП «Прикладна математика» спеціальності 113 Прикладна математика. Луцький національний технічний університет. Луцьк, 2025.

Кваліфікаційна робота магістра складається з вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел.

У роботі проведено адаптацію методу колокації для дослідження біфуркації у різних динамічних системах, що описуються диференціальними рівняннями та диференціальними рівняннями у частинних похідних з урахуванням особливостей при числових розрахунках. Тестування ефективності запропонованого підходу здійснено спочатку для класу лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Також у роботі проведено узагальнення та модифікація для випадку інших типів крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Крім того, здійснено поширення методу колокації для випадку дослідження диференціальних рівнянь у частинних похідних. Таке формулювання методу колокації, що представлено у роботі, є не тільки повним узагальненням, а і ефективним впровадженням для числового розрахунку.

Ключові слова: *динамічна система, диференціальні рівняння, диференціальні рівняння в частинних похідних, біфуркація, колокація, скінченно-елементна схема, різницева схема.*

ABSTRACT

Mykola STEPANYUK. *Numerical bifurcation analysis of non-linear systems by collocation method.* Manuscript.

Master's qualification work of EP "Applied Mathematics" specialty 113 Applied Mathematics. Lutsk National Technical University. Lutsk, 2025.

The master's qualification work consists of an introduction, five topics, conclusions and a list of referencies.

In the work adapts the collocation method to study bifurcation in various dynamic systems modelled by ordinary and partial differential equations with accounting for the features of numerical calculations. Testing the effectiveness of the proposed approach was initially carried out for the class of linear boundary value problems for ordinary differential equations. The paper also generalizes and modifies it for the case of other types of boundary value problems for ordinary differential equations.

In addition, the collocation method is extended to the case of studying partial differential equations. This formulation of the collocation method, presented in the paper, is not only a complete generalization, but also an effective implementation for numerical calculation.

Keywords: *dynamical system, ordinary differential equations, partial differential equations, bifurcation, collocation, finite element scheme, difference scheme.*

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. Аналіз літературних джерел.....	10
1.1. <i>Метод продовження за параметром.....</i>	<i>11</i>
1.2. <i>Метод колокації</i>	<i>14</i>
РОЗДІЛ 2. Методи дискретизації	17
2.1. <i>Метод продовження за параметром.....</i>	<i>17</i>
2.2. <i>Метод скінченних елементів</i>	<i>19</i>
2.3. <i>Метод колокації</i>	<i>20</i>
РОЗДІЛ 3. Методи продовження та біфуркація	24
РОЗДІЛ 4. Скінченно-елементна реалізація методу колокації.....	27
4.1. <i>Скінченно-різницевий підхід</i>	<i>27</i>
4.2. <i>Реалізація для одновимірного випадку.....</i>	<i>29</i>
4.3. <i>Основні етапи у загальному випадку</i>	<i>30</i>
РОЗДІЛ 5. Застосування методу колокації до дослідження різних класів диференціальних рівнянь	33
5.1. <i>Дослідження логістичної моделі.....</i>	<i>33</i>
5.1.1. <i>Аналітичний підхід.....</i>	<i>33</i>
5.1.2. <i>Числовий підхід.....</i>	<i>35</i>
5.2. <i>Реалізація методу для ДРЧП другого порядку.....</i>	<i>38</i>
ВИСНОВКИ.....	42
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	43

ВСТУП

Актуальність теми. Вивчення нелінійних явищ є важливим завданням для різних галузей наукових досліджень: соціології, економіки, біології та ін., де відповідні моделі дозволяють вивчати та прогнозувати поведінку різних систем. Широкий клас нелінійних явищ можна математично моделювати за допомогою диференціальних рівнянь (ДР) та диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП). Для більшості нелінійних ДР та ДРЧП не існує аналітичних розв'язків. Тому необхідно використовувати різні числові методи для побудови розв'язків. Ефективність відповідних методів залежить не тільки від типу нелінійності, а і від характеру функцій, що описують певні процеси.

Серед нових ефективних методів у роботі використано клас числових методів, що ґрунтуються на модифікації методу колокації скінченними елементами із розривними кусково-поліноміальними функціями, які є ефективними для побудови розв'язків різних класів ДР та ДРЧП.

Метою роботи є узагальнення методу колокації для розв'язання різних класів ДР та ДРЧП з використанням ефективних методик, що ґрунтуються на використанні методу вкладених перерізів на основі реалізації скінченно-елементного аналізу для випадку розривних кусково-поліноміальних функцій. Використовуючи модифіковану формулу методу продовження псевдо-довжини дуги, у роботі проведено дослідження продовження та здійснено числовий біфуркаційний аналіз різних класів нелінійних ДР та ДРЧП.

Об'єктом дослідження є основні ідеї та концепції методу колокації для розв'язання різних класів диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Предметом дослідження є біфуркації у моделях, що описуються диференціальними рівняннями та диференціальними рівняннями в

частинних похідних.

Методологія дослідження. У роботі проведено адаптацію методу колокації для різних класів задач з урахуванням особливостей при числових розрахунках. Тестування ефективності запропонованого підходу здійснено спочатку для класу лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Також у роботі проведено узагальнення та модифікація для випадку інших типів крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Крім того, здійснено поширення методу колокації для випадку дослідження різних типів диференціальних рівнянь у частинних похідних. Таке формулювання методу колокації, що представлено у роботі, є не тільки повним узагальненням, а і ефективним впровадженням для числового розрахунку.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в узагальненні єдиного підходу, що ґрунтується на методі колокації, для наближеного розв'язання та аналізу різних класів лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь та ДРЧП.

Практична значущість результатів магістерської дипломної роботи полягає розробці альтернативного підходу до числового аналізу біфуркацій деяких класів диференціальних рівнянь та ДРЧП, що може бути використаний для оцінки зміни поведінки відповідних систем при зміні її параметрів.

Одержані результати можуть бути використані при проведенні наукових досліджень: під час аналізу поведінки та зміни станів різних динамічних систем, що описуються диференціальними рівняннями та ДРЧП.

Особистий внесок здобувача. Магістерська дипломна робота є самостійно виконаним дослідженням. Під час виконання кваліфікаційної роботи магістра було використано інструменти штучного інтелекту для редагування та форматування тексту та частково для генерації контенту виключно як допоміжний засіб для пошуку ідей, уточнення формулювань

та опрацювання літератури. Усі твердження, висновки та результати дослідження належать автору та ґрунтуються на власному аналізі, а отримані результати від генеративного ШІ були перевірені на достовірність та відповідність академічній доброчесності.

Апробація результатів дослідження. Результати, що отримані у магістерській роботі, заслуховувалися при попередньому захисті під час засідання кафедри прикладної математики та механіки 24 грудня 2025 р.

Об'єм та структура роботи. Магістерська робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Об'єм роботи становить 42 сторінки. Робота містить 7 рисунків та 2 таблиць. До списку використаних джерел включено 21 найменування.

РОЗДІЛ 1.

Аналіз літературних джерел

Біфуркаційний аналіз об'єднує методи, що характеризують залежності певних класів розв'язків динамічних систем від змін параметрів задачі. Загальні класи розв'язків, що становлять інтерес, включають дослідження станів рівноваги та періодичні орбіти, кількість та стійкість станів системи, їх зміна зі зміною параметрів. Для дослідження цих задач використовують різні методи, зокрема, методи продовження, що генерують неперервні сімейства розв'язків у комбінованому просторі станів та параметрів. Зокрема, використання таких підходів дозволяє здійснити пошук кривих (гілок) періодичних орбіт або поверхонь рівноваги. Перевагою таких методів у порівнянні з підходами, що ґрунтуються на моделюванні, є можливість відображати такі сімейства незалежно від динамічної стійкості станів рівноваги або періодичних орбіт. Біфуркаційні діаграми відображають сімейства рівноваг та періодичних орбіт у вигляді кривих або поверхонь у відповідних системах координат. Крім того, практичний інтерес становлять спеціальні точки, такі як точки біфуркації, які часто виділяються на таких діаграмах.

Проведення біфуркаційного аналізу вимагає поєднання не тільки теоретичних навиків, а і коректного застосування числових методів [1-21]. Оптимальне поєднання цих підходів продовження один іншого дозволяє значно швидше та більш точно провести біфуркаційний аналіз. Використання тільки теоретичних чи суто числових методів для дослідження динамічних систем дає можливість отримати результат лише для низки класичних задач. Тому правильне та унікальне поєднання теоретичних та числових підходів є хорошим інструментом для кожної конкретної задачі.

З огляду на вище сказане, повна автоматизація аналізу не є показником ефективності кожного з методів у біфуркаційному аналізі динамічних систем. Це пояснюється тим, що використання загальних підходів до різних класів задач не дозволяє виявити особливості розв'язків. Тому основним оптимальним

підходом є часткова автоматизація, коли вона використовується як елемент систематичної стратегії та базується на розуміння того, що можна і не можна отримати.

Чисельний біфуркаційний аналіз нелінійних систем є критично важливим для розуміння того, як якісно змінюється поведінка системи при зміні її параметрів [2, 3, 16, 19]. Метод колокації [1] є одним із потужних підходів для такого аналізу, особливо при роботі з системами із запізненням [20] або просторово-розподіленими системами [21], що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних (ДРЧП).

У цьому розділі розглянемо загальні основи чисельного біфуркаційного аналізу та основні методи, що при цьому використовуються з акцентом на їх особливості та переваги.

1.1. Метод продовження за параметром

Основні методи чисельного біфуркаційного аналізу ґрунтуються на продовженні (поширенні) стаціонарних та періодичних розв'язків та виявленні точок біфуркації [1, 9, 13, 16, 19].

Методи продовження дозволяють визначати стани рівноваги, періодичні орбіти в просторі параметрів. Для цього часто застосовують ефективні числові методи [9], зокрема, метод Ньютона, що у випадку розв'язання нелінійних систем рівнянь доповнюється методикою аркової довжини для обходу точок повороту.

Для виявлення біфуркацій необхідно проводити аналіз матриці Якобі - для випадку визначення станів рівноваги, або матриці монохромії - для випадку періодичних орбіт. Біфуркації типу сідло-вузол, транскритична, розгалуження Хопфа, подвоєння періоду можна визначити за зміною власних значень.

Тому для задач нелінійної динаміки [11, 17] необхідно використовувати більш складні чисельні методи для дослідження динамічних систем. Динамічну систему [10, 16] будемо визначати через систему диференціальних рівнянь, що залежать від одного або кількох параметрів $\vec{\mu}$:

$$\dot{x} = f_1(x, y, \vec{\mu})$$

$$\dot{y} = f_2(x, y, \vec{\mu})$$

Фазовий портрет динамічної системи залежить від кількох параметрів, тобто вектора $\vec{\mu}$. Особливий інтерес становлять значення параметрів, у яких відбувається якісна перебудова фазового портрета.

Для дослідження поведінки динамічної системи в залежності від різних значень параметрів припустимо, що нелінійна система двох рівнянь залежить від одного параметра, тобто $\vec{\mu} = \mu$. Дослідимо як поводитиметься портрет динамічної системи при зміні цього параметра у межах $\mu_0 \dots \mu_1$.

Для цього слід розділити діапазон $[\mu_0, \mu_1]$ на деяку кількість відрізків: $\mu_0, \dots, \mu_i, \dots, \mu_1$ і на кожному елементарному кроці μ_i дослідити фазовий портрет динамічної системи. Іншими словами, для пошуку нерухомих точок для кожного μ_i слід розв'язати відповідну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$f_1(x, y, \mu_i) = 0$$

$$f_2(x, y, \mu_i) = 0.$$

Як результат будуть визначені пари особливих точок (x_0, y_0) як функції параметра μ_i . Для оптимізації задачі можна використовувати метод продовження за параметром, який можна застосувати, якщо динамічна система неперервно залежить від параметра μ .

Нехай для початкового значення μ_0 визначено за допомогою певних чисельних методів розв'язання нелінійних рівнянь нерухомі точки динамічної системи. Для наступного значення параметра μ_1 припустимо, що ці особливі точки, що визначають фазовий портрет, зміняться незначно. Тому для запуску чисельного алгоритму розв'язання нелінійних рівнянь як початкову ітерацію використовуємо корені, обчислені на попередньому кроці.

Загалом, для кожного μ_i можна побудувати схему визначення нерухомих точок, виходячи з розв'язків нелінійних алгебраїчних рівнянь за принципом схеми коригування попередньо отриманих значень. Якщо відомі властивості фазового портрета для попередніх μ : μ_{i-1}, μ_{i-2} і т.д., то зручно екстраполювати їх на i -ту точку. Таким чином, для визначення нерухомих точок на кожному i -му кроці слід використовувати двоетапну процедуру:

- на 1-му етапі будується екстраполяція залежності нерухомих точок від

попередніх значень параметра μ ;

- на 2-му етапі ця екстраполяція коригується за допомогою розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x, y, \mu) = 0, \\ f_2(x, y, \mu) = 0. \end{cases}$$

чисельним методом типу, наприклад, методом Ньютона.

При використанні досить хорошого наближення до дійсних розв'язків істотно зменшується об'єм обчислень. Такий підхід до розв'язання систем нелінійних рівнянь називається, *алгоритмом продовження за параметром*. Використання алгоритму продовження за параметром істотно зменшує розрахунки нерухомих точок для динамічних систем, що залежать від параметра. Підкреслимо, що певні спеціальні точки для кожного значення параметра μ і вимагають аналізу їхньої стійкості. На деякому з кроків для певного μ_i точки зі стійких можуть ставати нестійкими, та навпаки. Коли відбувається такий випадок, фазовий портрет перебудовується якісно.

Наприклад, якщо для якихось μ особлива точка була нестійкою, а для певного μ_i вона стала стійкою, то фазовий портрет змінюється кардинально. У цьому випадку відбувається біфуркація зміни стійкості.

Часто дуже важливо визначити моменти, коли ті чи інші нерухомі точки змінюють тип стійкості. Тому необхідно уточнити значення того параметра μ , вираховавши замість μ_i більш точне значення μ^* , що відповідає моменту біфуркації. Таку задачу можна розв'язати за допомогою алгоритму продовження за параметром. Тільки в цьому випадку розв'язувана система рівнянь буде іншою. Біфуркація відповідатиме зміні знака дійсної частини одного зі власних значень характеристичного рівняння матриці A . Позначимо цю дійсну частину власного значення функцією наступних аргументів:

$$Re(\lambda_k) \equiv F(\mu, x, y).$$

Біфуркація визначається переходом цієї функції через 0. Для точного визначення моменту біфуркації необхідно розв'язати відповідне нелінійне, задане алгоритмічно, рівняння з невідомим параметром μ . В результаті, для визначення моменту біфуркації слід розв'язувати алгоритмом продовження

наступне рівняння:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) \equiv F(\mu, x, y) = 0.$$

Попередньо було зроблено припущення, що динамічна система та фазовий портрет її розв'язків залежать від параметра μ . Ми не припускали, що для якихось параметрів μ можуть народжуватися інші розв'язки, вважаючи, що певні на нульовому кроці нерухомі точки (x_0, y_0) для параметра μ_0 , зберігаються так до кінця. Насправді ж, десь усередині інтервалу можуть з'являтися інші розв'язки системи нелінійних рівнянь, що визначають нерухомі точки. У цьому випадку говорять про більш складні біфуркації.

1.2. Метод колокації

Метод колокації [1, 19] відноситься до методу зважених залишків, що використовується для апроксимації розв'язків диференціальних (як звичайних, так і з частинними похідними) та інтегральних рівнянь.

Ідея пошуку розв'язку ґрунтується на апроксимації лінійною комбінацією базисних функцій [15, 19], наприклад, поліномів, кусково-поліноміальних функцій, функцій Чебишева чи сплайнів. Рівняння, які задовольняються точно, мають залишок рівний нулю. Це досягається лише у вибраних точках, які називаються *точками колокації*.

Перевагами цього методу є висока точність [18], особливо при використанні псевдоспектральної колокації, наприклад, поліномами Чебишева або Лежандра, що дозволяє досягти експоненціальної збіжності для гладких розв'язків.

Для пошуку та продовження періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь метод колокації є одним із найпоширеніших. Періодичний розв'язок $x(t)$ з невідомим періодом T апроксимується на проміжку $[0, T]$. Використовуючи колокацію, диференціальне рівняння перетворюється на велику систему алгебраїчних рівнянь.

У якості базисних функцій [15] часто використовуються кусково-поліноміальні функції, наприклад, кубічні сплайни або псевдоспектральні методи, наприклад, колокація Чебишева або Фур'є. Останні ефективні для систем, де динаміка не вимагає високої просторової та часової локалізації.

Перевагою такого підходу, на відміну від чистого часового інтегрування, є можливість одночасного розв'язання рівнянь для всього періоду, що є необхідним для ефективного продовження [15].

РОЗДІЛ 2.

Методи дискретизації

Дискретизація [9, 16, 19], як процес заміни нескінченновимірної математичної задачі її скінченновимірним наближенням, широко використовується при дослідженні динамічних систем.

Швидкий розвиток та широке застосування цифрових технологій змусила змінити підходи до моделювання та аналізу динамічних систем. Зокрема, розвиток в цифровій мікропроцесорній техніці показали значні переваги при застосуванні цифрових комп'ютерних систем для дослідження поведінки нелінійних динамічних систем. Перевагами є відносно низькі експлуатаційні витрати, гнучка реалізація та проста і функціональна взаємодія. Тому розвиток методів дискретизації має великі перспективи.

У сучасній практиці для вивчення динамічних систем використовуються підходи, що дозволяють враховувати вплив наборів динамічних характеристик на зміну поведінки системи [17, 20]. Ці алгоритми розробляються лише в дискретній області часу. При використанні теорії лінійних систем, задача часової дискретизації динамічної системи з неперервним часом за припущення нульового порядку, може бути повністю розв'язана. На основі отриманих результатів у вигляді вибіркового даних можна отримати розв'язки вихідної задачі.

Однак числові підходи вимагають малого кроку за часом для забезпечення точності розрахунків. Для деяких класів задач, що описуються швидкозмінними функціями це призводить до збільшення об'ємів обчислень, а разом з тим і до фізичних та технічних обмежень.

Оптимальні підходи щодо вибору періоду дискретизації ґрунтуються на аналітичних методах дослідження відповідних систем, що дозволить розглядати лише ті області де відбиватиметься зміна стану системи [2, 3, 8]. На продуктивність такого підходу суттєво впливає як метод дискретизації, так і обрані інтервали дискретизації.

Більшість числових методів були розроблені на потребу розв'язання різних класів фізичних задач, для проведення технічних та наукових досліджень. Зокрема, методи розроблялися для задач, для які не можна побудувати аналітичні розв'язки [3, 15].

Ефективними є деякі класи числових методів, які можна використовувати для розв'язання диференціальних рівнянь (ДР) та диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП). До цих методів відносять: метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод граничних елементів та метод колокації [1]. Ці методи показали свою ефективність під час застосування для розв'язання певних класів задач у науці та техніці. Нижче наведено особливості використання цих методів для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та ДРЧП.

2.1. Метод скінченних різниць

Метод скінченних різниць є класичним методом розв'язання диференціальних рівнянь (ДР). Загальна теорія різницевого методу для крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь описана у [1]. Побудова узагальнених методів скінченних різниць розглядалася в [5]. Базові апроксимації скінченними різницями можна отримати для звичайних ДР, так і для ДРЧП.

Розглянемо оператор ДРЧП, що діє на функцію $u(x)$, визначену в області Ω , з заданими граничними умовами. Щоб визначити наближення розв'язку $u(x)$, області Ω її необхідно замінити відповідною сіткою. Записавши ДРЧП у кожному вузлі сітки та замінивши кожен член ДРЧП, що містить функцію u або її похідні членом апроксимації скінченними різницями, який містить значення цієї функції у цій точці та у сусідніх вузлах сітки, ми отримаємо різницево-рівняння. У випадку залежних від часу ДРЧП апроксимацію скінченними різницями можна використовувати для часової змінної або для обох, просторових та часової змінних [15].

Нехай $u(x)$ є функцією однієї змінної. Припустимо, що $u(x)$ є достатньо гладкою, тому її можна диференціювати кілька разів, і кожна похідна є

визначеною та неперервною функцією в інтервалі, що містить певну точку x_0 . Похідна функції u' може бути апроксимована наступним чином, використовуючи значення функції u у точках та x_1 (точка x_1 вибирається поблизу точки x_0 на відстані h) [16]:

$$u'(x_0) \approx u'(x_0)_+ = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}.$$

$$u(x_0 + h) = a_0 + a_1(x_0 + h) + a_2(x_0 + h)^2,$$

$$u(x_0 + 2h) = a_0 + a_1(x_0 + 2h) + a_2(x_0 + 2h)^2,$$

або

$$\begin{pmatrix} u(x_0) \\ u(x_0 + h) \\ u(x_0 + 2h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_0 + h & (x_0 + h)^2 \\ 1 & x_0 + 2h & (x_0 + 2h)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Виразимо сталі a_0 , a_1 , a_2 через значення функції u у точці x_0 та її околі: $u(x_0)$, $u(x_0+h)$, $u(x_0+2h)$:

$$a_0 = \frac{1}{2} \frac{(x_0^2 + 3x_0h + 2h^2)u_0}{h^2} - \frac{x_0(x_0 + 2h)u_1}{h^2} + \frac{x_0(x_0 + h)u_2}{2h^2},$$

$$a_1 = -\frac{1}{2} \frac{(2x_0 + 3h)u_0}{h^2} + \frac{2(x_0 + h)u_1}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{(2x_0 + h)u_2}{h^2},$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{u_0}{h^2} - \frac{u_1}{h^2} + \frac{u_2}{2h^2}.$$

Обчислюючи $p'(x_0)$, отримаємо:

$$p'(x_0) = a_1 + 2a_2x_0,$$

$$p'(x_0) = -\frac{1}{2} \frac{(2x_0 + 3h)u_0}{h^2} + \frac{2(x_0 + h)u_1}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{(2x_0 + h)u_2}{h^2} + 2\left(\frac{1}{2} \frac{u_0}{h^2} - \frac{u_1}{h^2} + \frac{u_2}{2h^2}\right)x_0,$$

$$p'(x_0) = -\frac{3}{2h}u_0 + \frac{2}{h}u_1 - \frac{1}{2h}u_2.$$

Такий підхід показує ідею зв'язку між методом скінченних різниць та методом колокації. Другі похідні можуть бути апроксимовані аналогічно. Центральна апроксимація має порядок $O(h^2)$ та задається формулою:

$$u''(x_0) \approx \frac{u(x_0 - h) - 2u(x_0) + u(x_0 + h)}{h^2}.$$

2.2. Метод скінченних елементів

Метод скінченних елементів (МСЕ) є найбільш широко використовуваним чисельним методом для розв'язання ДРЧП. Це підтверджує велика кількість публікацій, що демонструє використання цього методу до розв'язання різних інженерних задач [1]. Використання методу скінченних елементів у наукових обчисленнях дуже широке та впроваджено у багатьох програмних комплексах: Lira, SolidWorks, Abacus та ін.

Розглянемо ДРЧП, що включає функцію $u(x)$, визначену для всіх x у області з заданими граничними умовами. Метою МСЕ є отримання наближення функції $u(x)$. Як і метод скінченних різниць, МСЕ потребує дискретизації області, а саме, область розділяється на підобласті або комірки, що називаються елементами. Як приклад, двовимірну область можна розділити на множину трикутних або чотирикутних елементів. Функція $u(x)$ апроксимується на кожному елементі. Наприклад, функція $u(x)$ може бути апроксимована лінійною функцією на кожному трикутнику чи прямокутнику.

Формулювання МСЕ полягає у проектуванні варіаційної форми диференціального рівняння у скінченновимірний функціональний простір. Розглянемо наступне еліптичне ДРЧП [17]:

$$Lu = -\nabla \cdot (a\nabla u) + bu + c = 0, \quad a, b, c, u \in \Omega,$$

де Ω є обмеженою областю, а a, b, c є достатньо гладкими функціями.

Розглянемо наступні граничні умови:

1) Умова Діріхле:

$$u = e \text{ на границі } \delta\Omega,$$

2) Узагальнена умова Неймана:

$$\vec{n} \cdot (a\nabla u) + du = e \text{ на } \delta\Omega,$$

3) Змішана умова: умова Діріхле на $\delta\Omega_1$ та узагальнена умова Неймана на $\delta\Omega_2$:

$$\delta\Omega_1 \cup \delta\Omega_2 = \delta\Omega,$$

де \vec{n} – зовнішня одинична нормаль, а a, e — гладкі функції на границі $\delta\Omega$.

Припустимо, що функція u є розв'язком диференціального рівняння. Побудуємо слабку форму, помноживши рівняння на довільну функцію v та проінтегрувавши по Ω :

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (a \nabla u) v + buv + cv \, dx = 0.$$

Інтегруючи частинами (використовуючи формулу Гріна), отримаємо:

$$\int_{\Omega} \langle a \nabla u \rangle \cdot \nabla v + buv \, dx - \int_{\delta\Omega} \vec{n} \cdot (a \nabla u) v \, ds + \int_{\Omega} cv \, dx = 0.$$

Граничний інтеграл можна замінити, використовуючи граничну умову. Для випадку узагальненої умови Неймана отримаємо:

$$\int_{\Omega} (a \nabla u) \cdot \nabla v + buv \, dx - \int_{\delta\Omega} (-du + e)v \, ds + \int_{\Omega} cv \, dx = 0.$$

Вихідну задачу можна замінити наступною задачею: знайти таку функцію u , що

$$\int_{\Omega} (a \nabla u) \cdot \nabla v + buv + cv \, dx - \int_{\delta\Omega} (-du + e)v \, ds = 0 \quad \forall v.$$

Це рівняння називається варіаційною або слабкою формою диференціального рівняння. Будь-який розв'язок диференціального рівняння також є розв'язком варіаційної задачі. Розв'язок варіаційної задачі також називається слабким розв'язком диференціального рівняння.

Припустимо, що розв'язок задачі – функція u та тестова функція v належать деякому функціональному простору V . При чисельному розв'язанні вибирається N -вимірний підпростір $V_N \subset V$. Проекція варіаційної форми диференціального рівняння на скінченновимірний функціональний простір означає знаходження функцій u та v у V_N замість V . Якщо простір V_N прямує до при N прямує до ∞ , то наближений розв'язок буде збігатися до точного розв'язку. Тому розв'язок можна представити у вигляді:

$$u(x) = \sum_{j=1}^N U_j \Phi_j(x),$$

де U_j — невідомі вузлові значення, $\Phi_j(x)$ — базисні функції.

Інтерполяція розв'язку всередині кожного елемента виконується через вузлові значення. Є декілька способів вибору простору тест-функцій, і вибір

відповідного простору є важливим завданням. Простір неперервних поліномів є найпоширенішим простором тест-функцій (V_N). Звичайним базисом для V_N є множина функцій Φ_i , які є лінійними на кожному елементі та приймають значення 0 у всіх вузлах x_j , крім одного - x_i .

Розв'язання задачі зводиться до системи рівнянь для кожного елемента.

Ці рівняння збираються у глобальну систему:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} U_j = F_i, \quad i = 1, \dots, N$$

або в матричній формі:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F},$$

де \mathbf{K} — глобальна матриця жорсткості, елементи якої визначаються інтегруванням по елементах:

$$K_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i)$$

\mathbf{U} — вектор невідомих вузлових значень, \mathbf{F} — вектор правої частини (навантаження).

Після розв'язання глобальної системи МСЕ отримуємо вузлові значення наближеного розв'язку. Після знаходження елементарних матриць, їх компоненти додаються до відповідних у глобальних матрицях або векторах, використовуючи дані з'єднання сітки. Знаходження вузлових значень шуканого розв'язку відбувається з врахуванням граничних умов.

2.3. Метод колокації

Розглянемо загальне лінійне однорідне еліптичне диференціальне рівняння:

$$L(u) = 0$$

з граничною умовою

$$S(u) = 0,$$

де $\delta\Omega$ є границею області Ω . У глобальному методі колокації припускається, що розв'язок u приблизно дорівнює лінійній комбінації певних лінійно незалежних базисних функцій ϕ_i , ($i=1, 2, \dots, N$):

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x)$$

де $\alpha_i, i=1, 2, \dots, N$ - невідомі коефіцієнтами, які визначаються шляхом задоволення диференціального рівняння в M точках колокації по області,

$$L(u_j) = L\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x_j)\right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

і, додатково, граничні умови повинні бути задоволені в дискретній множині точок на границі.

У методі колокації на скінченних елементах проводиться дискретизація області Ω на елементи [1]. На кожному елементі припускається, що змінна u приблизно дорівнює лінійній комбінації певних лінійно незалежних базисних функцій ψ_{ij} , ($j=1, 2, \dots, n$), які локально задовольняють певним вимогам неперервності між суміжними елементами. Для i -го елемента справедливі залежності:

$$u_i \simeq \beta_{i1}\psi_{i1} + \beta_{i2}\psi_{i2} + \beta_{i3}\psi_{i3} + \dots + \beta_{in}\psi_{in},$$

де $\beta_{ij}, j=1, 2, \dots, n$ - невідомі коефіцієнти i -го елемента. У методі на кусково-поліноміальних функціях) невідомі коефіцієнти $\beta_{ij}, i=1, 2, \dots, N_E, j=1, 2, \dots, n$ визначаються шляхом задоволення диференціального рівняння в m локальних точках колокації для кожного елемента. Тут N_E - кількість елементів. В результаті таких перетворень отримується система рівнянь виду:

$$L(u_{ik}) = L\left(\sum_{j=1}^n \beta_{ij}\psi_{ij}(x_{ik})\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_E, k = 1, 2, \dots, m.$$

Щоб отримати квадратну систему з однаковою кількістю рівнянь та невідомих слід додати граничні умови у області та вимоги неперервності між суміжними елементами.

Розглянемо одновимірну область $[a, b]$, розділену на N_E інтервалів:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_E} = b.$$

Для кожного інтервалу $[x_{i-1}, x_i]$ маємо m точок колокації:

$$x_{ik} = \frac{1}{2}((x_{i-1} + x_i) + (x_i - x_{i-1})\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

де ξ_k – різні значення в інтервалі $(-1,1)$. Кількість точок колокації в кожному елементі, яка зазвичай однакова для всіх елементів, вибирається так, щоб вона відповідала кількості невідомих, а також враховуючи умови неперервності на границях елемента.

РОЗДІЛ 3.

Методи продовження та біфуркація

Методи числового продовження та біфуркації [2, 8] можуть бути використані для дослідження множини стаціонарних та періодичних у часі розв'язків [21] параметрично залежних нелінійних диференціальних рівнянь (ДР) та диференціальних рівнянь у частинних похідних [11, 17]. Для диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) основна ідея використання методу продовження полягає перетворенні ДРЧП на систему алгебраїчних рівнянь або звичайних ДР за допомогою просторової дискретизації.

Однак великий клас можливих задач біфуркації ДРЧП ускладнює розробку загального, зручного та універсального підходу при використанні методу продовження, оскільки при цьому необхідно забезпечити велику кількість ступенів свободи [15]. Крім того, великий набір розв'язків часто вимагає використання різних адаптованих методів.

Дослідження нелінійних явищ та процесів є важливим у багатьох галузях, зокрема, для вивчення поведінки різних технічних систем. Наприклад, у фізиці, хімії, біології, техніці, соціальних науках та навіть у повсякденному житті ми стикаємося з нелінійною поведінкою. Деякі з цих явищ можуть бути змодельовані математично у вигляді нелінійного рівняння

$$G(u, \lambda) = 0,$$

де G є гладкою функцією, а λ - параметри системи. Наприклад, λ може бути числом Рейнольдса, температурою або густиною в задачі течії рідини. При зміні параметра можна знайти неперервну криву розв'язку, що їй відповідає. Таку криву називають гілкою розв'язку або сімейством розв'язків.

Однак іноді природа розв'язку змінюється різко, коли параметр проходить через деяке критичне значення. Наприклад, стрижень під дією стискаючого навантаження зігнеться і відбудеться втрата стійкості системи у зв'язку з перевищенням навантаження критичного значення. Таке явище називається

біфуркацією. Коли відбувається біфуркація, лінійна теорія стійкості не працює і не дає нам інформації про поведінку нашої нелінійної системи. Тому нам потрібен аналіз біфуркацій і загальніша теорія стійкості.

У чисельному аналізі біфуркацій зазвичай використовують метод продовження і досліджують поведінку розв'язків, їх стійкість і зміну інших властивостей при зміні одного або кількох параметрів системи.

Точки згину (або точки складки) (рис. 2.1, а), точки біфуркації (або точки розгалуження) (рис. 2.1, б) можуть бути виявлені під час чисельного аналізу біфуркацій системи. Вони призводять до якісної зміни поведінки розв'язків. Такі точки можна виявити методом продовження розв'язків.

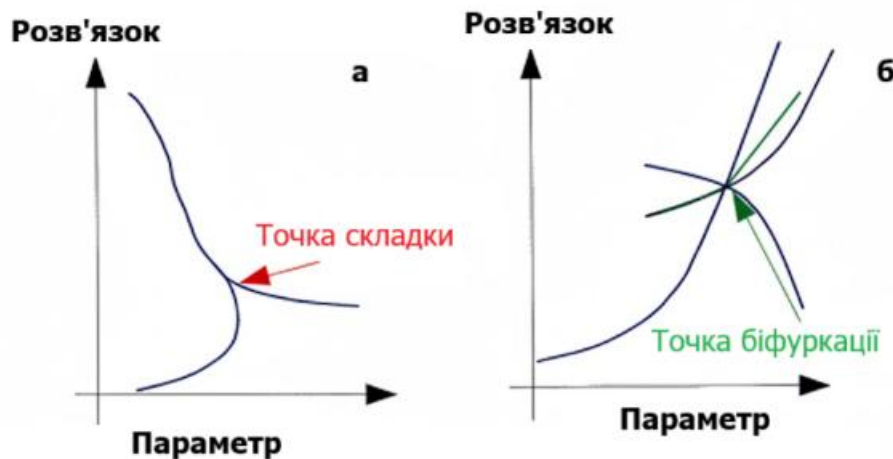


Рис. 2.1. Графічне представлення зміни якісної поведінки динамічної системи

Чисельне продовження сімейств розв'язків, або прослідковування шляху, є достатньо відомим та ефективним методом [9, 13, 16]. Принцип методів продовження полягає в обчисленні розв'язків поблизу відомого розв'язку, потім додаванні нового розв'язку до відомої множини розв'язків і повторенні цього процесу. Як наслідок, ми повинні обрати метод обчислення нового розв'язку поблизу відомого. У цьому відношенні методи продовження можна розділити на дві категорії, а саме симплексні методи продовження та методи предиктор-коректор.

У симплексних методах продовження ми прослідковуємо кусково-лінійну

криву, яка апроксимує гілку розв'язків. Якщо G відображає з R^n у R^{n-k} , ми загалом очікуємо, що функція u лежатиме на $n-k$ -вимірному лінійному підпросторі або на $n-k$ -вимірній грані симплекса в R^n [12]. Іншими словами, у симплексному продовженні ми представляємо значення функції u у точці x_i u_i як перетин многовиду з $n-k$ -вимірним симплексом σ_i . У [12] використовуються симплексні методи продовження для апроксимації нерухомих точок та розв'язків для систем рівнянь. У [15] використовували цей метод для відстеження кривої, яка представлена як контур функції.

Методи предиктор-коректор складаються з двох кроків:

Крок предиктора: обчислюється наближена точка вздовж кривої, зазвичай у напрямку дотичної у відомій точці кривої розв'язку:

$$(u_{pred}, \lambda_{pred}) = (u_0, \lambda_0) + \tau (\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0),$$

де τ — розмір кроку, а $(\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0)$ — вектор дотичної.

Крок коректора: полягає у зведенні передбаченої точки до кривої розв'язку за допомогою однієї або більше ітерацій.

У випадку використання методу Ньютона для ітераційного уточнення передбаченої точки для повернення на криву розв'язків, тобто задоволення умови:

$$G(u, \lambda) = 0$$

на кожній ітерації розв'язується вирішується система:

$$\begin{bmatrix} G_u & G_\lambda \\ \dot{u}_0^T & \dot{\lambda}_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G(u, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix},$$

де G_u — матриця Якобі, що визначається як похідна від G по u , G_λ — похідна по λ . Друге рівняння забезпечує умову псевдо-довжини дуги, що фіксує положення на кривій.

Метод продовження дозволяє проходити по кривій розв'язків, навіть через точки складки, де стандартний параметр λ перестає бути монотонним. Точка біфуркації визначається умовою виродження матриці Якобі G_u , оскільки у цій точці вона має власне значення, рівне нулю). Точка біфуркації Хопфа — це точка, де при зміні параметра λ у пари комплексно-спряжених власних значень матриці Якобі дійсна частина перетнула нуль, що призводить до

народження періодичних коливань.

РОЗДІЛ 4.

Скінченно-елементна реалізація методу колокації

Відповідно до мети дослідження у роботі планується провести біфуркаційний аналіз для систем диференціальних рівнянь (ДР) та диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП). Для досягнення цієї мети вибрано скінченно-елементну реалізацію методу колокації з кусково-поліноміальними функціями. Перевагою даного методу є його універсальність при використанні для широкого класу задач.

Розглянемо скінченно-елементну реалізацію методу колокації з кусково-поліноміальними функціями для крайових задач звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Застосування методу буде реалізовано для випадку колокації з розривними кусково-поліноміальними функціями для рівнянь у частинних похідних. Основними характеристиками методу колокації для звичайних диференціальних рівнянь можливість високого порядку точності за рахунок збільшення кількості точок колокації. Крім того, кусково-поліноміальний розв'язок є глобально неперервним та гладким для випадку звичайних диференціальних рівнянь та розривним для ДРЧП. Лінійні системи, що утворюються після дискретизації, можна ефективно розв'язати чисельно. Крім того, перевагою такої реалізації є висока точність, що дозволяє його використання для чисельного дослідження біфуркацій динамічних систем.

4.1. Скінченно-різницевий підхід

Розглянемо наступне лінійне ДР другого порядку:

$$Lu = u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x), 0 \leq x \leq 1.$$

де $a(x), b(x), f(x), u(x)$ — достатньо гладкі у R функції. Граничні умови задачі запишемо у вигляді:

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Розглянемо область Ω - відрізок прямої $0 \leq x \leq 1$ (рис. 3.1). Генерацію сітки побудуємо наступним чином: спочатку область поділимо на дві

підобласті. Кожна підобласть ділиться на дві менші підобласті. Ця процедура продовжується рекурсивно, доки не буде досягнуто бажаного рівня деталізації.

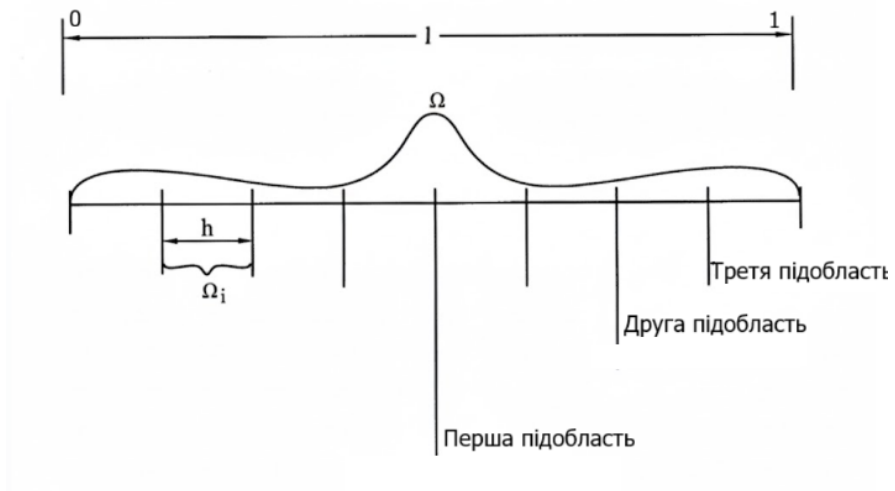


Рис. 4.1. Дискретизація області

Найменші області є скінченними елементами. Ці елементи відповідають вузлам. Важливо відмітити, що кінцева сітка не обов'язково повинна бути рівномірною, тобто розміри інтервалів сітки можуть бути різними.

Розглянемо формулювання через скінченні різниці, що є особливо зручним у процедурі вкладених перерізів. Розглянемо довільний скінченний елемент Ω_i . Якщо функція $u(x)$ є відомою на границі області Ω_i та якщо Ω_i достатньо мала, то за певних умов розв'язок $u(x)$ визначений у області Ω_i . Вихідне рівняння можна записати як наступну систему першого порядку:

$$u'(x) = v(x)$$

$$v'(x) = f(x) - a(x)v(x) - b(x)u(x),$$

де $0 \leq x \leq 1$. Як апроксимацію скінченними різницями використаємо схему з центральною різницею:

$$(u_i - u_{i-1})/h_i = \frac{1}{2}(v_i + v_{i-1}),$$

$$(v_i - v_{i-1})/h_i = \frac{1}{2}(f_i + f_{i-1}) - \frac{1}{2}a_{i-1/2}(v_i + v_{i-1}) - \frac{1}{2}b_{i-1/2}(u_i + u_{i-1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

$$u_0 = u_N = 0.$$

тут N - кількість скінченних елементів, u_i - наближений розв'язок у граничній точці скінченного елемента, тобто

$$u_i \approx u(x_i).$$

Аналогічно, v_i - це похідну функції u у точці x_i :

$$v_i \approx u'(x_i),$$

$$h_i = |x_i - x_{i-1}|.$$

Точки x_i , $i=1, \dots, N-1$ є точками спряження. Використовуючи розклад у ряд Тейлора, можна показати, що ця апроксимація має порядок $O(h_i^2)$.

Для будь-якого скінченного елемента Ω_i використаємо наступну дискретизацію вихідного рівняння:

$$\begin{aligned} v_{i-1} &= \alpha_{11}^i u_{i-1} + \alpha_{12}^i u_i + \sum_{j=1}^m \beta_{1j}^i f(z_{ij}), \\ v_i &= \alpha_{21}^i u_{i-1} + \alpha_{22}^i u_i + \sum_{j=1}^m \beta_{2j}^i f(z_{ij}), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

де m — кількість точок колокації z_{ij} всередині області Ω_i . Коефіцієнти α_{ij} , β_{ij} можна визначити шляхом задоволення цих рівнянь.

Якщо позначити

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \dots & \beta_{2m} \end{pmatrix}$$

то рівняння у матричному формулюванні матиме вигляд:

$$v = Au + Bf$$

Для того, щоб апроксимація скінченними різницями була коректно визначена, матриці повинні бути не виродженими.

Якщо коефіцієнтні функції $a(x)$ та $b(x)$ у вихідному рівнянні є сталими та якщо всі скінченні елементи однакові, то матричне рівняння потрібно розв'язати лише один раз.

4.2. Реалізація для одновимірного випадку

Розглянемо простий лінійний оператор

$$L = \frac{d}{dx^2}.$$

Розглянемо елемент у вигляді відрізка прямої (рис. 3.2).

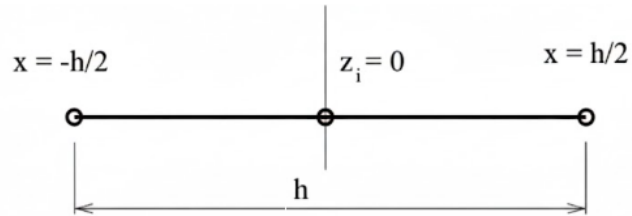


Рис. 4.2. 1D елемент

Припустимо, що розглядуваний елемент центрований у $x = 0$ та має довжину h . Нехай $m = 1$. Візьмемо точку колокації z_1 у центрі відрізка. Відповідно до точок спряження $x_{-h/2}$, $x_{h/2}$ апроксимація скінченними різницями, відповідні рівняння набувають вигляду:

$$\begin{aligned} v_{-h/2} &= \alpha_{11}u_{-h/2} + \alpha_{12}u_{h/2} + \beta_1 f(z_1), \\ v_{h/2} &= \alpha_{21}u_{-h/2} + \alpha_{22}u_{h/2} + \beta_2 f(z_1). \end{aligned}$$

У якості базису виберемо поліноми $\{1, x, x^2\}$. З врахуванням вище сказаного після розв'язання відповідних рівнянь представлення скінченних різниць можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} v_{-h/2} &= (u_{h/2} - u_{-h/2})/h - hf(z_1)/2, \\ v_{h/2} &= (u_{h/2} - u_{-h/2})/h + hf(z_1)/2. \end{aligned}$$

4.3. Основні етапи у загальному випадку

До основних етапів у загальному випадку слід віднести наступні:

1-й етап - *побудова сітки та локальна апроксимація*. Розглядувана область розбивається на N під областей. На кожній області розв'язок $u(x)$ апроксимується поліномом високого степеня:

$$p_i(x) \in P_{m+2}$$

де m - кількість точок колокації всередині області.

2-й етап – *умови колокації та склеювання*. Для кожного елемента мають виконуватися такі умови:

1) Рівняння в точках колокації:

$$Lp_i(z_{ij}) = f(z_{ij}), \quad j = 1, \dots, m$$

де z_{ij} — задані точки всередині елемента.

2) Неперервність на границях елементів – склеювання:

$$p_i(x_i) = p_{i+1}(x_i), \quad p'_i(x_i) = p'_{i+1}(x_i)$$

Це забезпечує глобальну C^1 неперервність розв'язку.

3) Граничні умови:

$$p_1(0) = 0, \quad p_N(1) = 0$$

3-й етап – *еквівалентне формулювання через скінченні різниці*. Метод колокації еквівалентний такій дискретизації: для кожного елемента існує матричне співвідношення між значеннями функції та її похідної на кінцях елемента:

$$(u_{i-1}, u_i, v_{i-1}, v_i)$$

Значеннями правої частини f у точках колокації всередині елемента визначається з рівняння:

$$\begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v_i \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} f(z_1) \\ \vdots \\ f(z_m) \end{pmatrix}$$

При цьому матриці A та B визначаються з умови, що формула точно виконується для базисних поліномів:

$$\phi_k \in P_{m+2}.$$

Для пошуку матриць A та B слід розглянути базис $\{\phi_1, \dots, \phi_{m+2}\}$ простору P_{m+2} та використати формули:

$$(\Phi \quad L_\Phi) \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} = R_\Phi$$

де $\Phi_{kj} = \phi_k(x_j)$ — значення базисних функцій на границях, $[L_\Phi]_{kj} = L\phi_k(z_j)$ — значення оператора на базисних функціях у точках колокації, $R_{\phi_{kj}} = \phi'_k(x_j)$ — значення похідних базисних функцій на границях.

Для ефективного розв'язання системи слід вибрати спеціальний лагранжів базис, який спеціально розділяють на дві групи: ϕ_1, ϕ_2 приймають рівними 1 на лівому та правому кінці елемента відповідно та 0 в усіх точках колокації; ψ_1, \dots, ψ_m приймають рівними 1 у відповідній точці колокації та 0 в усіх інших точках.

Такий підхід дозволяє значно спростити систему

$$\begin{pmatrix} I & L_{\bar{\Phi}} \\ 0 & L_{\Psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{\bar{\Phi}} \\ R_{\Psi} \end{pmatrix}$$

та розв'язати її у два кроки:

$$L_{\Psi} B^T = R_{\Psi} \quad A^T = R_{\bar{\Phi}} - L_{\bar{\Phi}} B^T$$

При цьому матриця L_{Ψ} має бути не виродженою. Об'єднавши локальні рівняння для всіх елементів з умовами неперервності, отримуємо велику розріджену лінійну систему, для розв'язання якої використаємо метод вкладених перетинів. Основний алгоритм зазначеного методу полягає у рекурсивному виключенні внутрішніх невідомих на спільних границях суміжних під областей. Така процедура продовжується до тих пір, поки у системі залишаться тільки рівняння для глобальних граничних точок. Після застосування граничних умов виконується зворотна підстановка для відновлення розв'язку в усіх точках.

Для двох суміжних елементів виключення спільної змінної u_{12} відбувається наступним чином:

$$u_{12} = -E^{-1}(A_{21}^1 u_1 - A_{21}^2 u_2 + g_{12} - g_{21})$$

де

$$E = A_{22}^1 - A_{22}^2$$

має бути невиродженою.

Основними перевагами такого підходу є висока точність при правильному виборі точок колокації порядку $O(h^{m+2})$, гнучкість реалізації завдяки ефективному застосуванню на нерівномірних сітках.

РОЗДІЛ 5.

Застосування методу колокації до дослідження різних класів диференціальних рівнянь

У якості аналізу ефективності запропонованого у розділі 4 скінченно-елементної реалізації методу колокації проведемо дослідження та аналіз біфуркації у моделях, у яких визначення точок біфуркації може бути проведено на основі аналітичних формул.

5.1. Дослідження логістичної моделі

5.1.1. Аналітичний підхід

Розглянемо приклад для демонстрації біфуркаційного аналізу у багатовимірному випадку. Розглянемо логістичну двопараметричну модель [13], що використовується для дослідження популяцій, що підлягають вилову:

$$\dot{x} = \mu_1 x - x^2 - \mu_2.$$

Швидкість зростання популяції описується параметром μ_1 , а другий параметр μ_2 моделює вилучення з популяції певної кількості особин за одиницю часу.

Положення атракторів динамічної системи визначається з квадратного алгебраїчного рівняння:

$$\mu_1 x - x^2 - \mu_2 = 0, \quad (5.1)$$

розв'язок якого записується у аналітичній формі:

$$x_0(\mu) = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 4\mu_2}}{2}$$

Отримуємо два атрактори $x_0(\mu_1)$ та $x_0(\mu_2)$. Однак, розв'язок квадратного рівня існує тільки, коли його дискримінант 0:

$$D = \mu_1^2 - 4\mu_2 > 0.$$

На площині (x, μ) розв'язок рівняння (5.1) має вигляд параболи (рис. 5.1). На осі абсцис відкладено параметр μ_2 з урахуванням залежності від параметра μ_1 . При заданому значенні параметра μ_1 будуть існувати два атрактори $x_0(\mu_2)$. Але

такі два атрактори існуватимуть лише до критичного значення параметра μ_2 , в якому $D = 0$. Критичне значення визначається:

$$\mu^* = \frac{\mu}{2}.$$

При значеннях параметра $\mu_2 > \mu^*$ розв'язків квадратного рівняння немає, і, відповідно, жодного атрактора динамічна система не матиме.

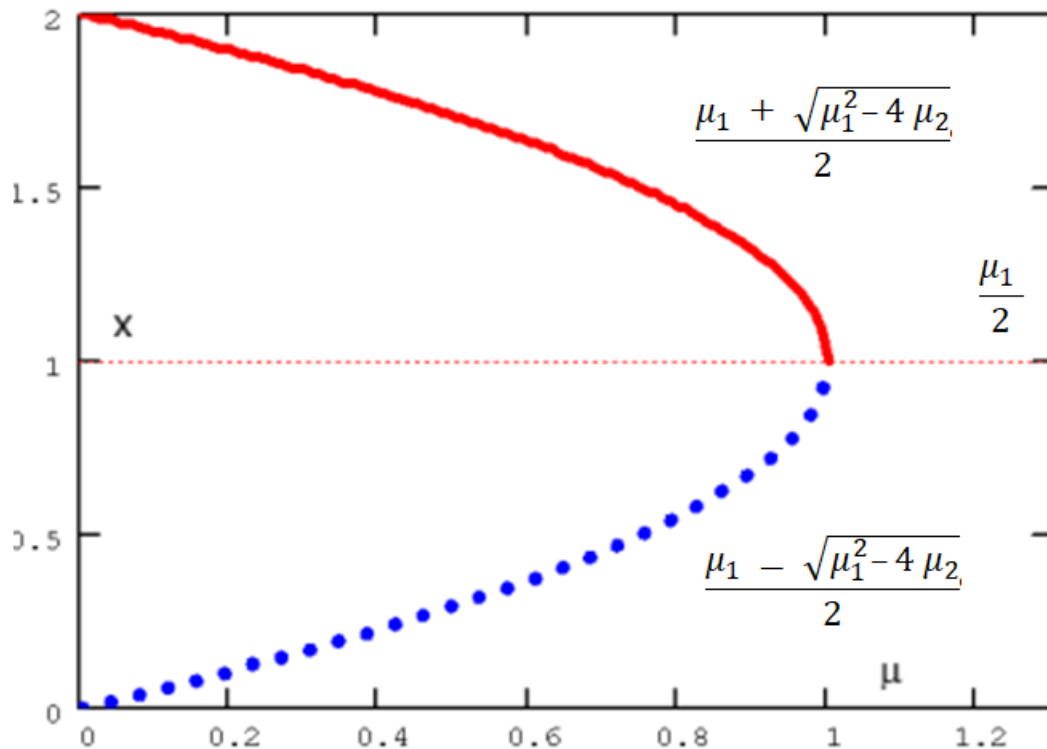


Рис. 5.1. Розв'язок логістичного двопараметричного рівняння

Один із атракторів $x_0(\mu_2)$ є стійким, інший – нестійким, який на рис. 5.1 показано пунктиром (нестійка гілка). Стійкий атрактор відповідає асимптотичному значенню чисельності популяції, дещо зниженій щодо логістичної ємності середовища. Видно, що, по мірі зростання параметра μ_2 рівноважна чисельність популяції плавно знижується.

При біфуркаційному значенні параметра $\mu_2 = \mu^*$ відбувається взаємна поява та зникнення стійкого і нестійких атракторів. Така поведінка, наявність точки появи-зникнення пари атракторів, є дуже характерною для динамічних систем. Цю біфуркацію називають *особливістю типу складка*. У динамічних системах можуть існувати інші типи біфуркацій.

При $\mu_2 > \mu^*$ корені рівняння (5.1) відсутні, і, замість прямування розв'язку диференціального рівняння (5.1) до деякого асимптотичного значення, воно в певний момент часу перетворюється у нуль, а потім приймає від'ємні значення, що не використовується при моделюванні (рис. 5.2). Іншими словами, при надто інтенсивному промислі вся популяція вимирає. На рис. 5.2 наведено розв'язок логістичного рівняння для за критичного значення μ_2 .

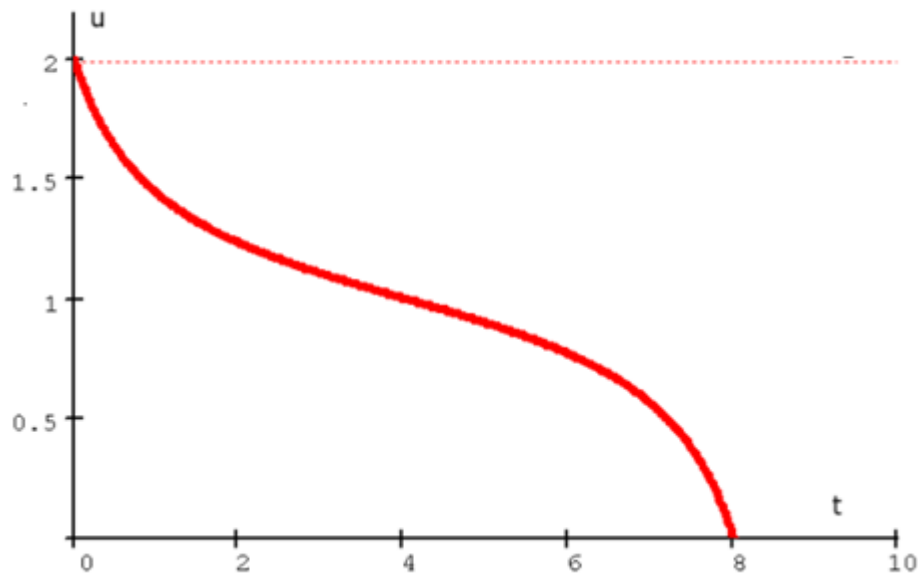


Рис. 5.2. Розв'язок логістичного рівняння для за критичного значення μ_2

Зазначимо, що динамічну систему із двома параметрами нам знову вдалося дослідити аналітично. При чисельному знаходженні такого типу біфуркацій за допомогою продовження за параметром, $\mu = \mu^*$ можна зустрітися з наступними складнощами. Спроби визначити розв'язки алгебраїчних рівнянь при $\mu > \mu^*$ нічого не дають, оскільки розв'язків просто немає. Гілка розв'язків повертається назад, проходячи через точку $\mu = \mu^*$. У таких випадках метод колокації є більш ефективним.

5.1.2. Числовий підхід

Відповідно до описаного у розділі 4 методу для задачі, що має аналітичний підхід до дослідження біфуркацій системи проведено аналіз ефективності описаної методики. Шукатимемо наближений розв'язок у вигляді:

$$x(t) \approx \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(t)$$

де $\phi_j(t)$ — базисні функції, які ми виберемо у вигляді поліномів Лагранжа.

При пошуку стаціонарного розв'язку, що є сталим

$$x(t) = x^*,$$

то пошук x^* відповідно ж методу колокацій зводиться до чисельного розв'язання нелінійного алгебраїчного рівняння виду:

$$f(x^*) = 0 \quad (5.2)$$

або

$$\mu_1 x^* - x^{*2} - \mu_2 = 0$$

Це рівняння, аналітичний розв'язок (п.5.1.1). Але у випадку, якщо для рівняння (5.2) не можна визначити розв'язки аналітичним методом, то їх можна знайти чисельно, використовуючи запропоновані у розділі 4 методики. Для даного випадку використаємо метод Ньютона, що дозволяє знайти корені з формули:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

де

$$f(x_k) = \mu_1 x_k - x_k^2 - \mu_2;$$

$$f'(x_k) = \mu_1 - 2x_k.$$

Чисельне ітераційне рівняння можна записати у вигляді:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\mu_1 x_k - x_k^2 - \mu_2}{\mu_1 - 2x_k}.$$

Для чисельного визначення точки біфуркації запишемо систему двох рівнянь для двох невідомих: точки рівноваги x^* та одного з параметрів (при цьому значення іншого параметра фіксується):

$$F_1(x^*, \mu_2) = \mu_1 x_k - x_k^2 - \mu_2 = 0;$$

$$F_2(x^*, \mu_2) = \mu_1 - 2x_k = 0.$$

Цю систему розв'яжемо числово за допомогою двовимірного методу Ньютона. Вектор розв'язку

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x^* \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

шукатимемо за допомогою ітераційного рівняння Ньютона:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - J(\mathbf{u}_k)^{-1} F(\mathbf{u}_k)$$

де

$$F(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{u}) \\ F_2(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

$J(\mathbf{u})$ – матриця Якобі системи:

$$J(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^*} & \frac{\partial F_1}{\partial m_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x^*} & \frac{\partial F_2}{\partial m_2} \end{pmatrix}$$

Обчислимо Якобіан:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x^*} = m_1 - 2x^*$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial m_2} = -1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x^*} = -2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial m_2} = 0$$

Отже, матриця Якобі має вигляд:

$$J(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} m_1 - 2x^* & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

На кожному k -му кроці, починаючи з початкового наближення $u_0 = (x_0, m_{2,0})$, ми розв'язуємо лінійну систему для поправки $\Delta \mathbf{u}_k$:

$$J(\mathbf{u}_k) \Delta \mathbf{u}_k = -F(\mathbf{u}_k)$$

і оновлюємо розв'язок:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k.$$

При використанні чисельного алгоритму, він повинен збігтися до аналітичного розв'язку. Визначимо з другого рівняння системи x^* :

$$m_1 - 2x^* = 0 \implies x^* = \frac{m_1}{2}.$$

Підставимо x^* у перше рівняння.

$$m_1 \left(\frac{m_1}{2} \right) - \left(\frac{m_1}{2} \right)^2 - m_2 = 0$$

Після спрощень отримаємо:

$$\frac{m_1^2}{2} - \frac{m_1^2}{4} - m_2 = 0 \implies m_2 = \frac{m_1^2}{4}$$

Таким чином, чисельний розв'язок збігається з аналітичним.

5.2. Реалізація методу для ДРЧП другого порядку

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних [11]:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

у області Ω , що є одиничним квадратом, з параметром продовження λ . Для даного рівняння відомі гілки біфуркації, що відповідають власним значенням. Це корисно для перевірки функціоналу виявлення точок розгалуження.

Розглянуте рівняння відповідає задачі на власні значення, яка має нетривіальні розв'язки при

$$\lambda = 2k^2\pi^2,$$

де k — натуральне число. Нетривіальні розв'язки задачі мають вигляд:

$$u(x, y) = \sin(\pi kx)\sin(\pi ky).$$

Перша точка розгалуження відповідає значенню

$$2\pi^2 = 19.73920880.$$

На рис. 5.3 показано біфуркаційну діаграму з першою біфуркуючою гілкою, знайденою при використанні сітки 4×4 та 4 колокаційних точок на елементі.

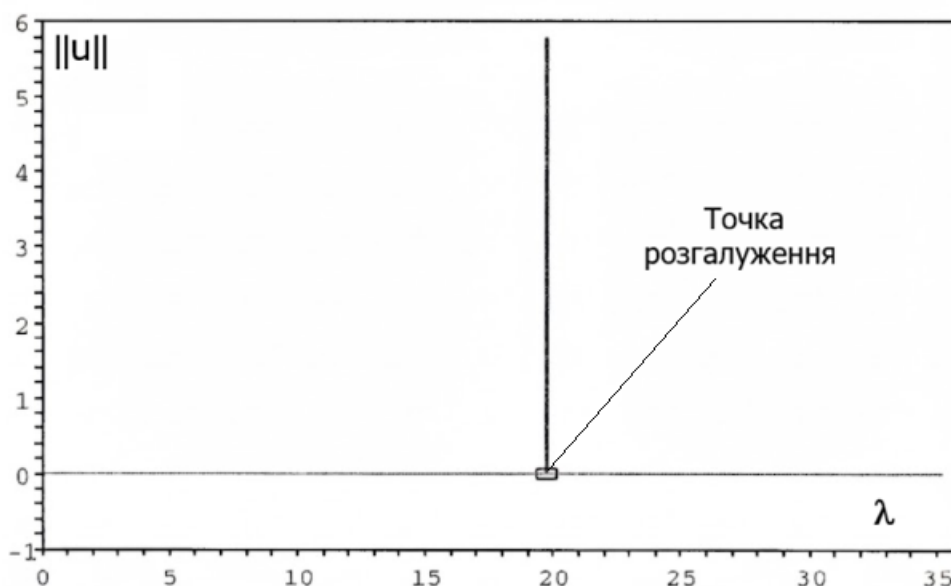


Рис. 5.3. Біфуркаційна діаграма

У таблиці 5.1 показано розташування першої точки розгалуження (власного значення) в цій задачі для різних варіантів сіток та кількості колокаційних точок.

Таблиця 5.1. Розташування першої точки розгалуження

<i>сітка</i>	<i>1 x 1</i>	<i>2 x 2</i>	<i>3 x 3</i>	<i>4 x 4</i>
<i>2 x 2</i>	21.3333	19.7837	19.7398	19.7392
<i>4 x 4</i>	20.2262	19.7425	19.7392	19.7392
<i>8 x 8</i>	19.8649	19.7394	19.7392	19.7392
<i>16 x 16</i>	19.7708	19.7392	19.7392	19.7392
<i>32 x 32</i>	19.7471	19.7392	19.7392	19.7392

У таблиці 5.2 представлено максимальну похибку при визначенні розташування першої точки розгалуження. Як і раніше, порядки збіжності між двома послідовними значеннями наведені в дужках.

Таблиця 5.2. Похибка та порядок збіжності при обчисленні першої точки розгалуження

<i>сітка</i>	<i>1 x 1</i> (<i>тах похибка</i>)	<i>2 x 2</i> (<i>тах похибка</i>)	<i>3 x 3</i> (<i>тах похибка</i>)	<i>4 x 4</i> (<i>тах похибка</i>)
<i>2 x 2</i>	1.59	$4.45 \cdot 10^{-2}$	$6.48 \cdot 10^{-4}$	$5.27 \cdot 10^{-6}$
<i>4 x 4</i>	$4.87 \cdot 10^{-1}$ (1.71)	$3.31 \cdot 10^{-3}$ (3.75)	$1.11 \cdot 10^{-5}$ (5.87)	$2.00 \cdot 10^{-8}$ (8.04)
<i>8 x 8</i>	$1.26 \cdot 10^{-1}$ (1.95)	$2.15 \cdot 10^{-4}$ (3.94)	$1.80 \cdot 10^{-7}$ (5.95)	0
<i>16 x 16</i>	$3.16 \cdot 10^{-2}$ (2.00)	$1.35 \cdot 10^{-5}$ (3.99)	0	0

сітка	1×1 (тах похибка)	2×2 (тах похибка)	3×3 (тах похибка)	4×4 (тах похибка)
32×32	$7.92 \cdot 10^{-3}$ (2.00)	$8.50 \cdot 10^{-7}$ (3.99)	0	0

На рис. 5.4 показано кілька розв'язків (власних функцій) на вертикальній біфуркаційній гілці. При цьому використана сітка 4×4 з 4 колокаційними точками для одного елемента. Тут Δs — відстань від тривіального розв'язку.

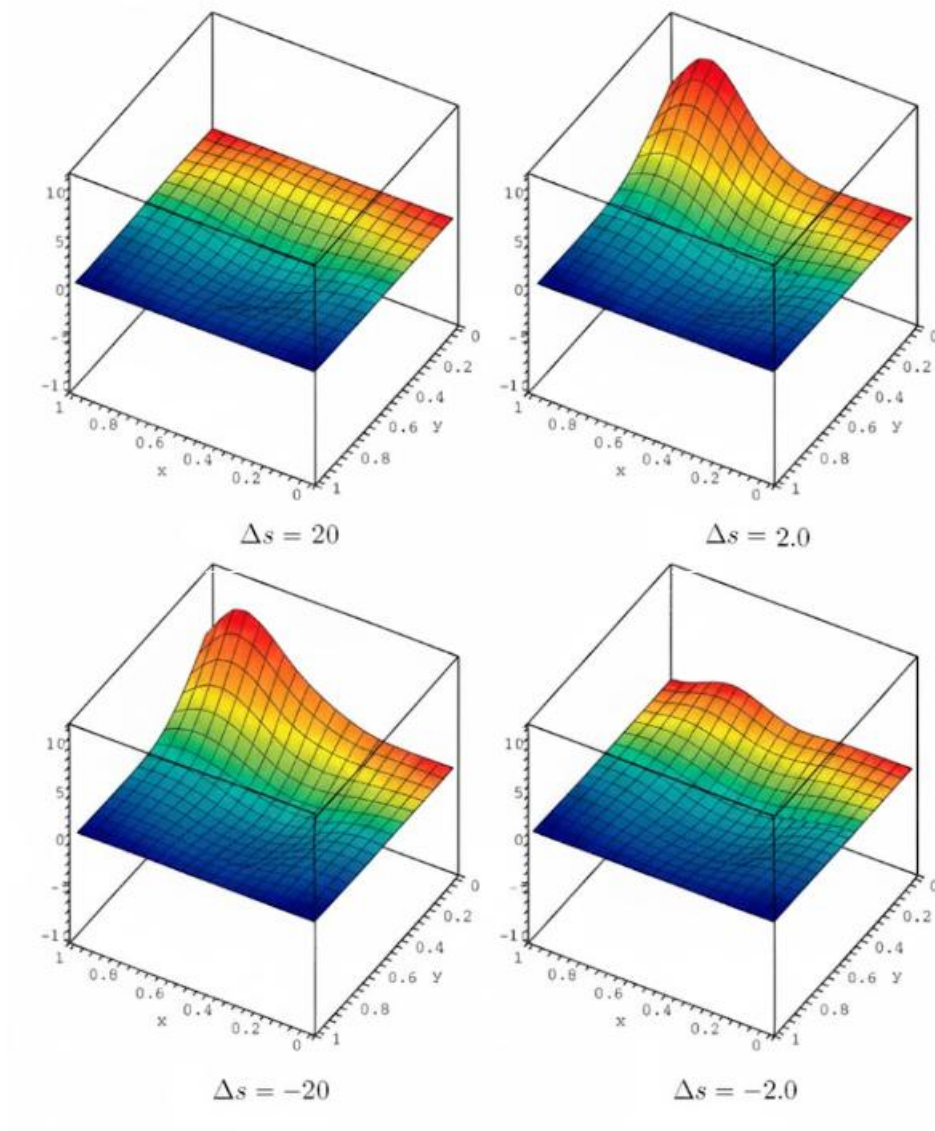


Рис. 5.4. Розв'язки вздовж вертикальної гілки при $\lambda=19.73920880$

Аналіз результатів, наведених на рисунках 5.3 та 5.4 підтверджує ефективність використання методу колокації для аналізу біфуркаційних задач.

Результати, наведені у таблицях 5.1 та 5.2 підтверджують швидку збіжність запропонованого методу.

ВИСНОВКИ

У роботі для дослідження біфуркації динамічних систем використано узагальнення методу колокації для розв'язання ДР та ДРЧП з використанням ефективних методик, що ґрунтуються на використанні методу вкладених перерізів на основі реалізації скінченно-елементного аналізу для випадку розривних кусково-поліноміальних функцій. Використовуючи модифіковану формулу методу продовження псевдовдовжини дуги, у роботі проведено дослідження продовження та здійснено числовий біфуркаційний аналіз різних класів диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Продемонстровано переваги використання методу кусково-поліноміальної для дослідження крайових задач звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь у частинних похідних. Використання підходу скінченно-елементної кусково-поліноміальної колокації для різних класів ДР та ДРЧП продемонструвало універсальність методу та відповідного йому алгоритму розв'язання для випадку обох типів рівнянь.

Для створення відповідної сітки було використано просту процедуру генерації. Ця процедура базується на рекурсивному поділі області на дві підобласті для побудови структури даних у вигляді бінарного дерева. Такий тип декомпозиції області є корисним у процесі локального подрібнення сітки, а також у надійному алгоритмі розв'язання методом вкладених перетинів.

Показано, що для лінійних ДР та ДРЧП метод колокації є еквівалентно визначений як тип узагальненого методу скінченних різниць. Запропонований у роботі підхід має високий порядок точності, що досягається шляхом збільшення кількості точок колокації та узгодження. Для ДР та ДРЧП кусково-поліноміальний розв'язок є глобально неперервним. Тримані після дискретизації системи лінійних рівнянь можна ефективно розв'язати методом вкладених перетинів. Спеціальний вибір локальних базисних функцій дозволяє знизити обчислювальні витрати для різних типів сіток.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Allgower E.L., Georg K. *Numerical Continuation Methods: An Introduction*. Springer, Berlin, 2000.
2. Barton D., Krauskopf B., Wilson R. (2007) *Homoclinic bifurcations in a neutral delay model of a transmission line oscillator*. *Nonlinearity* 20:809–829.
3. Barton, D. (2017) *Control-based continuation: Bifurcation and stability analysis for physical experiments*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 84, pp. 54–64.
4. Beyn W., Champneys A., Doedel E., Govaerts W., Kuznetsov Y., Sandstede B. (2002) *Numerical continuation, and computation of normal forms*. In: Fiedler B (ed) *Handbook of Dynamical Systems*, vol 2. Elsevier Science, Amsterdam, pp 149–219.
5. Dankowicz, H., Wang, Y., Schilder, F., Henderson, M. (2020) *Multidimensional manifold continuation for adaptive boundary-value problems*, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 15, no. 5, p. 051002.
6. Detroux, T., Renson, L., Masset, L., Kerschen, G. (2015) *The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 296, pp. 18–38.
7. Deuflhard P., Bornemann F. *Scientific Computing With Ordinary Differential Equations*. In: Marsden JE, Sirovich L, Antman S (eds) *Texts in applied mathematics*, vol 42. Springer, New York, 2002.
8. Dijkstra H., Wubs, F. *Bifurcation Analysis of Fluid Flows*. Cambridge University Press, 2023.
9. Engelborghs K., Luzyanina T., Roose D. (2002) *Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDEBIFTOOL*. *ACM Trans Math Softw* 28:1–21.

10. Ermentrout B. *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. SIAM, Philadelphia, 2002.
11. Goh, R. Rademacher, J. *Numerical continuation and bifurcation in nonlinear PDES,*” In *Nonlinear Dynamics. Numerical Methods*, World Scientific, 2025.
12. Golubitsky, M., Stewart, I., Schaeffer, D. *Singularities and Groups*. In *Bifurcation Theory Volume II*, vol. 69. Springer Science & Business Media, 2012.
13. Govaerts W., Khoshsiar Ghaziani R., Kuznetsov Y., Meijer H. (2007) *Numerical methods for two-parameter local bifurcation analysis of maps*. *SIAM J Sci Comput* 29:2644–2667.
14. Govaerts W., Kuznetsov Y., Dhooge A. (2005) *Numerical continuation of bifurcations of limit cycles in matlab*. *SIAM J Sci Comp* 27:231–252
15. Henderson M. (2007) *Higher-dimensional continuation*. In: Krauskopf B., Osinga H.M., Galan-Vioque J. (eds) *Numerical continuation methods for dynamical systems: Path following and boundary value problems*. Springer-Canopus, Dordrecht, pp 77–115.
16. Krauskopf B., Osinga H., Galan-Vioque J. *Numerical Continuation methods for dynamical systems*. Springer-Canopus, Dordrecht, 2007.
17. Raze, G., Abeloos, G., Kerschen, G. (2024) *Experimental continuation in nonlinear dynamics: recent advances and future challenges*, arXiv preprint arXiv:2408.00138.
18. Renson, L., Gonzalez-Buelga, A., Barton, D., Neild, S. (2016) *Robust identification of backbone curves using control-based continuation*, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 367, pp. 145–158.
19. Salinger A., Burroughs E., Pawlowski R., Phipps E., Romero L. (2005) *Bifurcation tracking algorithms and software for large scale applications*. *Int J Bif Chaos* 15:1015–1032.
20. Schilder, F., Bureau, E., Santos, I., Thomsen, J., Starke, J. (2015) *Experimental bifurcation analysis—continuation for noise-contaminated zero problems*, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 358, pp. 251–266.

21. Szalai R., Stépán G., Hogan S. (2006) *Continuation of bifurcations in periodic delay-differential equations using characteristic matrices*. SIAM J Sci Comput 28:1301–1317.